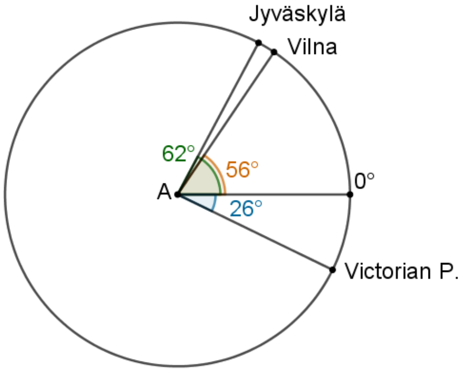
16.1

a) Jyväskylä ja Vilna sijaitsevat samalla pituuspiirillä. Niiden välinen lyhin etäisyys maan pintaa pitkin mitattuna on isoympyrälle kuuluvan kaaren pituus b.



Kaaren keskuskulman α suuruus lasketaan leveyspiirien astelukujen erotuksena.

$\alpha = 62° - 56° = 6°$

Lasketaan kaaren pituus b.

$$b = \frac{6°}{360°} \cdot 40\,000$$
$$= 666{,}66...$$
$$\approx 670 \text{ (km)}$$

b) Lasketaan Vilnan ja Victorian putousten välisen kaaren keskuskulma.

$\beta = 56° + 26° = 82°$

Lasketaan kaaren pituus.

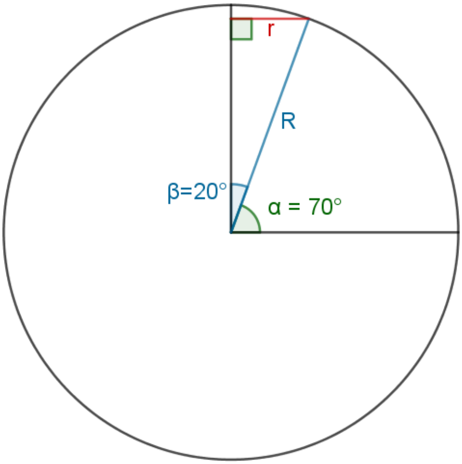
$$b = \frac{82°}{360°} \cdot 40\,000$$
$$= 9111{,}11...$$
$$\approx 9100 \text{ (km)}$$

Vastaus

a) 670 km

b) 9100 km

16.2



Ratkaistaan leveyspiirin säde suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin 20^\circ = \frac{r}{6370} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r = 2178{,}66\ldots \text{ (km)}$$

Tromssan ja Jan Mayen sijaitsevat nollapituuspiirin eri puolilla. Lasketaan Tromssaa ja Jan Mayenia yhdistävän leveyspiirin kaaren keskuskulman α suuruus.

$\alpha = 19^\circ + 8^\circ = 27^\circ$

Lasketaan kaaren pituus b.

$$b = \frac{27^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 2178{,}66\ldots \qquad b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r,\ \text{missä}\ r = 21788{,}66\ldots.$$

$$= 1026{,}67\ldots$$

$$\approx 1030 \text{ (km)}$$

Vastaus
1030 km

16.3

Ratkaistaan leveyspiirin säde.

$$\sin 52^\circ = \frac{r}{6370}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r = 5019{,}62\ldots \ \text{(km)}$$

Lasketaan leveyspiirin pituus.

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r \\ &= 2\pi \cdot 5019{,}62\ldots \\ &= 31539{,}25\ldots \\ &= 31500 \ \text{(km)} \end{aligned}$$

Vastaus
31 500 km

16.4

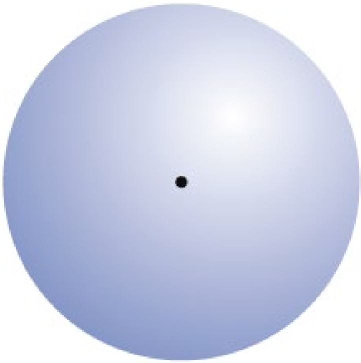
a) Ratkaistaan pallon säde r.

$$A = 4\pi r^2 \qquad \text{Sijoitetaan } A = 6{,}00.$$

$$6{,}00 = 4\pi r^2 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r = 0{,}69099... \text{ tai } r = -0{,}69099...$$

Pituus on positiivinen luku, joten $r \approx 0{,}69099$.
Piirretään pallo, jonka säde on 0,69099.



b) Mittaamalla pallon tilavuudeksi saadaan 1,38.

Lasketaan pallon tilavuus.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{Sijoitetaan } r = 0{,}69099...$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 0{,}69099...^3$$

$$\approx 1{,}38$$

Vastaus
a) Pallon säde on 0,69099.
b) 1,38

16.5

Kuoren tilavuus on koko appelsiinin tilavuuden ja sisäosan tilavuuden erotus.

Koko appelsiinin halkaisija on 12 cm ja säde 6 cm.
Sisäosan halkasija on 12 cm – 2 · 0,6 cm = 10,8 cm ja säde 5,4 cm.

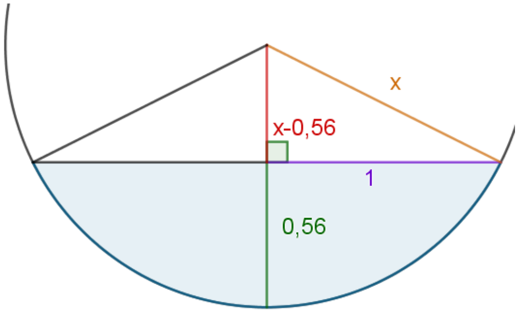
Verrataan kuoren tilavuutta koko appelsiinin tilavuuteen.

$$\begin{aligned}\frac{V_{kuori}}{V_{koko}} &= \frac{V_{koko} - V_{sisäosa}}{V_{koko}} \\ &= \frac{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 6^3 - \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 5{,}4^3}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 6^3} \\ &= 0{,}271... \\ &\approx 27\ \%\end{aligned}$$

Vastaus
27 %

16.6

a) Piirretään kuva.



Ratkaistaan pallon säde x Pythagoraan lauseen avulla.

$(x-0,56)^2+1,00^2=x^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x=1{,}17285...$ (m)

Lasketaan altaan tilavuus.

$V=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)$ Sijoitetaan $h=0,56$ ja $r=1{,}17285...$.

$=\pi\cdot 0,56^2\cdot\left(1{,}17285...-\frac{0,56}{3}\right)$

$=0,9715...$ (m^3)

Ilmaistaan tilavuus litroina.

$0,9715...\ \mathrm{m}^3=971{,}5...\ \mathrm{dm}^3=971{,}5...\ \mathrm{L}\approx 970\ \mathrm{L}$

b) Altaan pohja on pallon kalotti. Lasketaan sen pinta-ala.

$A=2\pi rh$ Sijoitetaan $r=1{,}17285...$ ja $h=0{,}56.$

$=2\cdot\pi\cdot 1{,}17285...\cdot 0{,}56$

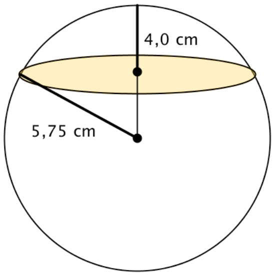
$=4{,}1267...$

$\approx 4{,}1$ (m^2)

Vastaus

a) 970 L **b)** 4,1 m^2

16.7



Greipin säde on $\frac{11{,}5\text{ cm}}{2} = 5{,}75\text{ cm}$.

Lasketaan segmentin tilavuus.

$$\begin{aligned} V_s &= \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right) && \left| \begin{array}{l} h = 4{,}0\text{ cm} \\ r = 5{,}75\text{ cm} \end{array} \right. \\ &= \pi \cdot 4{,}0^2\left(5{,}75 - \frac{4{,}0}{3}\right) \\ &= 222{,}005... \\ &\approx 220\ (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

Lasketaa greipin tilavuus.

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{4}{3}\pi r^3 && \left| \, r = 5{,}75\text{ cm} \right. \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot 5{,}75^3 \\ &= 796{,}328...\ (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

Arvio segmentin massalle saadaan tilavuuksien suhteen avulla.

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{V_s}{V_p} \cdot 165\text{ g} \\ &= \frac{222{,}005...}{796{,}328...} \cdot 165\text{ g} \\ &= 45{,}99...\text{ g} \\ &\approx 46\text{ g} \end{aligned}$$

Segmentin tilavuus on 220 cm^3 ja massa 46 g.

Vastaus

220 cm^3, 46 g

16.8

Lasketaan messinkisen kuulan tilavuus.

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \text{tiheys} = \frac{\text{massa}}{\text{tilavuus}}$$

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$V = \frac{4{,}000\ \text{kg}}{8400\ \text{kg/m}^3}$$

$$V = 0{,}00047619\ \text{m}^3$$

Ratkaistaan kuulan säde r.

$$0{,}00047619 = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r = 0{,}04844...\ \ (\text{m})$$

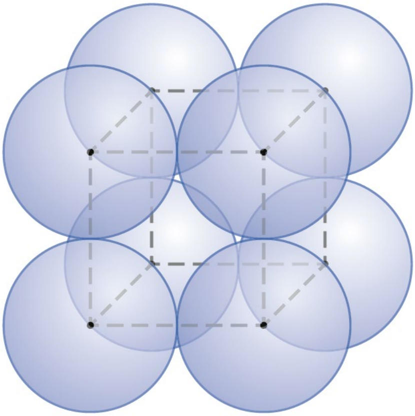
Lasketaan kuulan halkaisija.

$$\begin{aligned} d &= 2r \\ &= 2 \cdot 0{,}04844...\ \text{m} \\ &= 0{,}09688...\ \text{m} \\ &= 9{,}688...\ \text{cm} \\ &\approx 9{,}7\ \text{cm} \end{aligned}$$

Vastaus
9,7 cm

16.9

Piirretään 2D-piirtoalueessa neliö, jonka sivun pituus on 2, täydennetään se 3D-piirtoalueessa kuutioksi ja piirretään jokaiseen kärkeen pallo, jonka säde on 1.



Palloja on kahdeksan. Jokaisesta pallosta on kuution sisällä kahdeksasosa. Siten sisään jäävien osien tilavuus on yhtä suuri kuin yhden pallon tilavuus.

Pallojen väliin jäävä tilavuus V_v on yhtä suuri kuin kuution tilavuuden V_k ja yhden pallon V_p tilavuuden erotus.

$$
\begin{aligned}
V_v &= V_k - V_p \\
&= 2^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \\
&= 8 - \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}
$$

Vastaus

$8 - \frac{4}{3}\pi$

16.10

a) Kuution avaruuslävistäjä on yhtä pitkä kuin pallon halkaisija.

Ratkaistaan kuution särmän pituus x Pythagoraan lauseella.

$$x^2 + x^2 + x^2 = 2 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ tai } x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

b) Verrataan kuution tilavuutta V_k pallon tilavuuteen V_p.

$$\begin{aligned}\frac{V_k}{V_p} &= \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3} \\ &= 0{,}367... \\ &\approx 37\ \%\end{aligned}$$

Vastaus

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

b) 37 %

16.11

a) Lasketaan Oslon ja Pisan välisen kaaren keskuskulma.

$$\alpha = 60° - 44° = 16°$$

Lasketaan kaaren pituus b.

$$\begin{aligned} b &= \frac{16°}{360°} \cdot 40\,000 \\ &= 1777,77... \\ &\approx 1800 \text{ (km)} \end{aligned}$$

b) Lasketaan Pisan ja Pointe-Noiren välisen kaaren keskuskulma.

$$\alpha = 44° + 4° = 48°$$

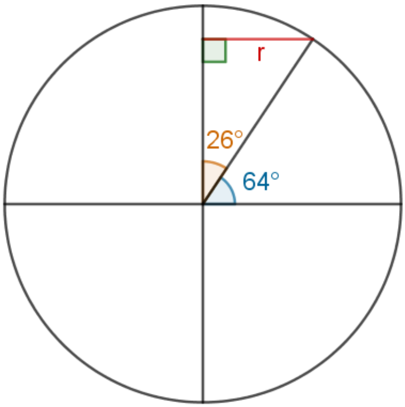
Lasketaan kaaren pituus b.

$$\begin{aligned} b &= \frac{48°}{360°} \cdot 40\,000 \\ &= 5333,33... \\ &\approx 5300 \text{ (km)} \end{aligned}$$

Vastaus
a) 1800 km
b) 5300 km

16.12

a) Piirretään Maan poikkileikkaus.



Lasketaan leveyspiirin säde.

$$\sin 26° = \frac{r}{6370} \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$r = 2792{,}4242... \ \text{(km)}$$

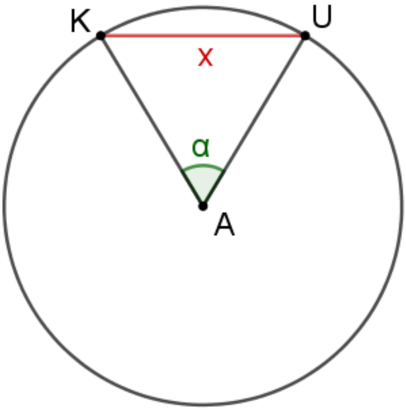
Lasketaan Kokkolan ja Uumajan välisen leveyspiirillä sijaitsevan kaaren keskuskulma.

$$\alpha = 23° - 20° = 3°$$

Lasketaan kaaren pituus.

$$\begin{aligned} b &= \frac{3°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 2792{,}4242... \\ &= 146{,}2109... \\ &\approx 146 \ \text{(km)} \end{aligned}$$

Piirretään kuva leveyspiiristä ylhäältä päin katsottuna. Ratkaistaan tunnelin pituus x kosinilauseella.



$$x^2 = 2792{,}4242...^2 + 2792{,}4242...^2 - 2 \cdot 2792{,}4242... \cdot 2792{,}4242... \cdot \cos 3°$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = -146{,}1942...$ tai $x = 146{,}1942...$

Pituus on positiivinen luku, joten $x = 146{,}1942...\text{ km}$.

Lasketaan reittien pituuksien ero.

$$146{,}2109...\text{ km} - 146{,}1942...\text{ km} = 0{,}0167...\text{ km} = 16{,}7...\text{ m} \approx 17\text{ m}$$

Vastaus
a) 146 km
b) 17 m

16.13

a) Ratkaistaan pallon säde.

$$A = 4\pi r^2 \qquad \big| A = 1660$$

$$1660 = 4\pi r^2$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r = -11{,}49... \text{ tai } r = 11{,}49...$$

Pituus on positiivinen luku, joten $r = 11{,}49...$ m.

Lasketaan halkaisija.

$$\begin{aligned} d &= 2r \\ &= 2 \cdot 11{,}49.... \\ &= 22{,}98... \\ &\approx 23 \text{ (m)} \end{aligned}$$

b) Lasketaan pallon tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 11{,}49...^3 \\ &= 6359{,}68... \\ &\approx 6360 \text{ (m}^3\text{)} \end{aligned}$$

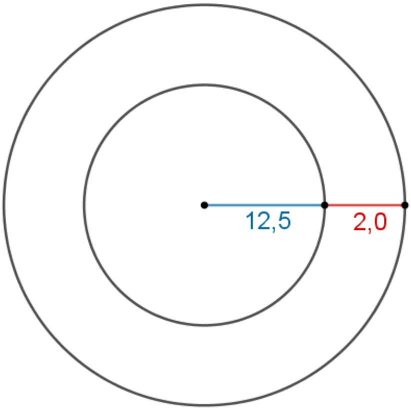
Vastaus

a) 23 m

b) 6360 m^3

16.14

a) Betonipallon ulkohalkaisija on 29 cm ja säde 14,5 cm.
Pallon sisäsäde on 14,5 cm – 2,0 cm = 12,5 cm.



Kuoren tilavuus on pallon ulko- ja sisätilavuuden erotus.

$$
\begin{aligned}
V_k &= V_u - V_s \\
&= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 14{,}5^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 12{,}5^3 \\
&= 4588{,}81... \\
&\approx 4600\ (\text{cm}^3)
\end{aligned}
$$

b) Ilmaistaan kuoren tilavuus kuutiometreinä.

$$4588{,}81...\ \text{cm}^3 = 0{,}00458881...\ \text{m}^3$$

Lasketaan kuoren massa tiheyden avulla.

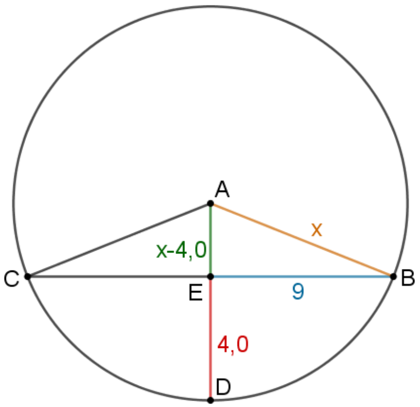
$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \text{tiheys} = \frac{\text{massa}}{\text{tilavuus}}$$

$$
\begin{aligned}
m &= \rho V \\
&= 2100\ \text{kg/m}^3 \cdot 0{,}00458881...\ \text{m}^3 \\
&= 9{,}63...\ \text{kg} \\
&= 9{,}6\ \text{kg}
\end{aligned}
$$

Vastaus

a) 4600 cm^3 **b)** 9,6 kg

16.15



Ratkaistaan pallon säde x Pythagoraan lauseella.

$$r^2 = (r-4)^2 + 9^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

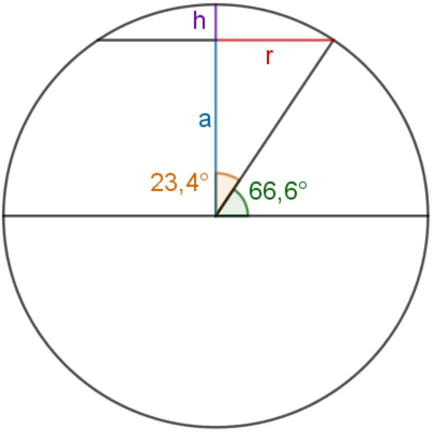
$$r = 12{,}125$$

Lasketaan pallosegmentin muotoisen kuopan tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right) \\ &= \pi \cdot 4{,}0^2 \cdot \left(12{,}125 - \frac{4{,}0}{3}\right) \\ &= 542{,}44\ldots \\ &\approx 540\ (\mathrm{cm}^3) \end{aligned}$$

Vastaus
$540\ \mathrm{cm}^3$

16.16



Ratkaistaan napapiirin keskipisteen etäisyys a Maan keskipisteestä.

$$\cos 23,4° = \frac{a}{6370}$$
$$a = 5846,09...\ (\text{km})$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Lasketaan arktisen alueen segmentin korkeus.

$$h = 6370 - 5846,09... = 523,90...\ \ (\text{km})$$

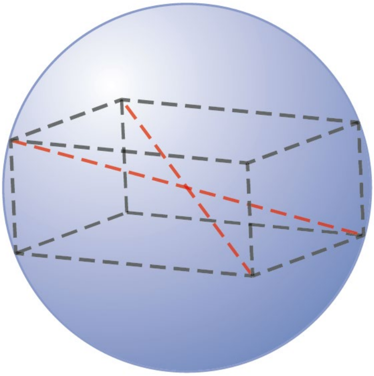
Verrataan arktisen alueen pinta-alaa koko maapallon pinta-alaan.

$$\begin{aligned}\frac{A_a}{A_m} &= \frac{2\pi \cdot 6370 \cdot 523,90...}{4\pi \cdot 6370^2} \\ &= 0,041... \\ &\approx 4,1\ \%\end{aligned}$$

Vastaus
4,1 %

16.17

a) Suorakulmaisen särmiön painopiste on avaruuslävistäjien leikkauspisteessä. Piirretään pallo, jonka keskipiste on painopisteessä ja joka kulkee särmiön kärkipisteen kautta.



b) Särmiön avaruuslävistäjä on pitkä kuin ympyrän halkaisija. Ratkaistaan avaruuslävistäjän pituus.

$2^2 + 2^2 + 1^2 = d^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$d = 3 \quad \text{tai} \quad d = -3$

Pituus on positiivinen luku, joten $d = 3$. Pallon säde $r = \frac{d}{2} = \frac{3}{2}$.

Verrataan särmiön tilavuutta pallon tilavuuteen.

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{8}{9\pi} = 0,282... \approx 0,28$$

Vastaus

b) $\frac{8}{9\pi} \approx 0,28$

16.18

a) Muunnetaan kulman yksikkö asteiksi.

$$60^\circ\ 54'\ 18'' = \left(60+\frac{54}{60}+\frac{18}{60\cdot 60}\right)^\circ = 60{,}905^\circ$$

b) Munnetaan kulman yksikkö asteiksi.

Leveyspiiri:

$$60^\circ\ 10'\ 21'' = \left(60+\frac{10}{60}+\frac{21}{60\cdot 60}\right)^\circ = 60{,}1725^\circ$$

Pituuspiiri:

$$24^\circ\ 55'\ 59'' = \left(24+\frac{55}{60}+\frac{59}{60\cdot 60}\right)^\circ = 24{,}933...^\circ$$

Lasketaan leveyspiirin $60{,}1725^\circ$ N etäisyys päiväntasaajasta.

$$\begin{aligned} b &= \frac{60{,}1725^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi\cdot 6370 \\ &= 6689{,}82... \\ &\approx 6690\ \text{(km)} \end{aligned}$$

Ratkaistaan leveyspiirin $60{,}1725^\circ$ N säde.

$$\cos 60{,}1725^\circ = \frac{r}{6370}$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r = 3168{,}37...\ \text{(km)}$$

Nollapituuspiirin ja pituuspiirin $24{,}933...^\circ$ E välisen kaaren keskuskulma on $\alpha = 24{,}933...^\circ$.

Lasketaan kaaren pituus b.

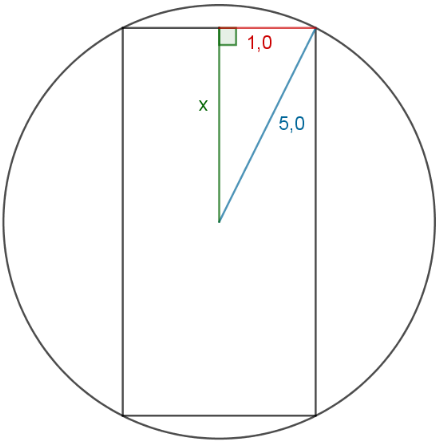
$$\begin{aligned} b &= \frac{24{,}933...^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi\cdot 3168{,}37... \\ &= 1378{,}76... \\ &\approx 1380\ \text{(km)} \end{aligned}$$

Vastaus

a) $60{,}905^\circ$ **b)** 6690 km pohjoiseen, 1380 km itään.

16.19

Omenan tilavuudesta häviää porattu reikä ja sen molemmissa päissä olevat pallosegmetit.



Ratkaistaan reiän korkeuden puolikas x Pythagoraan lauseella.

$x^2 + 1{,}0^2 = 5{,}0^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$x = 4{,}8989...$ tai $x = -4{,}8989...$

Pituus on postiivinen luku, joten $x = 4{,}8989...$ cm .

Lasketaan pallosegmentin tilavuus.

$$V_p = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) \qquad \left| \begin{array}{l} h = 5{,}0 - 4{,}8989... \\ r = 5{,}0 \end{array} \right.$$

$$= \pi \cdot (5{,}0 - 4{,}8989...)^2 \cdot \left(5{,}0 - \frac{4{,}8989...}{3} \right)$$

$$= 0{,}1079... \ (\text{cm}^3)$$

Lasketaan reiän tilavuus.

$$V_r = \pi r^2 h \qquad \left| \begin{array}{l} r = 1{,}0 \\ h = 2x = 2 \cdot 4{,}8989... \end{array} \right.$$

$$= \pi \cdot 1{,}0^2 \cdot (2 \cdot 4{,}8989...)$$

$$= 30{,}7811... \ (\text{cm}^3)$$

Lasketaan koko omenan tilavuus.

$$V_k = \frac{4}{3}\pi \cdot 5{,}0^3$$

$$= 523{,}5987... \ (\text{cm}^3)$$

Verrataan poisleikattavan osan tilavuutta koko omenan tilavuuteen.

$$\frac{2V_p + V_r}{V_k} = \frac{2 \cdot 0{,}1079... + 30{,}7811...}{523{,}5987...}$$

$$= 0{,}0592...$$

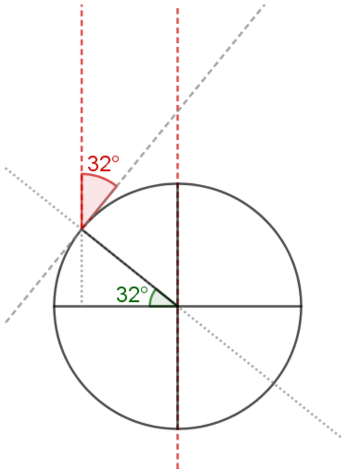
$$\approx 5{,}9\ \%$$

Vastaus
5,9 %

6.20

Pohjantähti on niin kaukana pohjoisnavan yläpuolella, että sieltä saapuva valo kohtaa merenpinnan maapallon akselin suuntaisesti.

Pohjantähti näkyy $32°$ horisontin yläpuolella, kun katsoja on leveyspiirillä $32°$ N.



Greenwichissä aurinko näkyy suoraan etelässä klo 12.00. Laivassa aurinko näkyi suoraan etelässä $2\text{h } 3 \text{ min} = 123 \text{ min}$ myöhemmin.

Maa pyörii 24 tunnissa $360°$. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan, millä pituuspiirillä laiva oli.

$$\frac{123 \text{ min}}{24 \cdot 60 \text{ min}} = \frac{x}{360°}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\begin{aligned} x &= 30,75° \\ &= 30° + 0,75 \cdot 60' \\ &= 30°\ 45' \end{aligned}$$

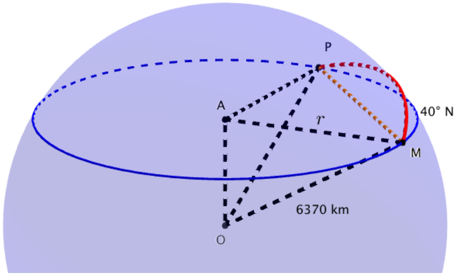
Koska Maa pyörii lännestä itään, laiva oli klo 14.03 Greenwichin länsipuolella. Siten pituuspiiri oli $30°\ 45'$ W.

Vastaus

$32°$ N, $30°\ 45'$ W

6.21

Piirretään mallikuva.



Piste P on Peking, piste M on Madrid, piste O on Maan keskipiste, piste A on leveyspiirin $40°$ N keskipiste ja r on leveyspiirin säde. Pekingin ja Madridin lyhin etäisyys on isoympyrän kaari MP (kuvassa punainen). Kolmiot OMA ja OPA ovat suorakulmaisia. Kulman POA suuruus on $50°$. Ratkaistaan leveyspiirin säde r.

$$\sin 50° = \frac{r}{6370}$$

$$r = 4879{,}70\ldots \text{ (km)}$$

Lasketaan kulman MAP suuruus α.

$$\alpha = 116° + 4° = 120°$$

Ratkaistaan jänteen MP pituus kolmiosta MAP.

$MP^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos\alpha$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$MP = 8451{,}89\ldots$ tai $MP = -8451{,}89\ldots$

Pituus on positiivinen luku, joten $MP = 8451{,}89\ldots$ km.

Merkitään kulman MOP suuruutta kirjaimella β ja ratkaistaan se kolmiosta MOP.

$$MP^2 = 6370^2 + 6370^2 - 2 \cdot 6370 \cdot 6370 \cdot \cos\beta$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\beta = 83{,}12\ldots°$$

Lasketaan kaaren MP pituus b.

$$b = \frac{83{,}12\ldots°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6370$$

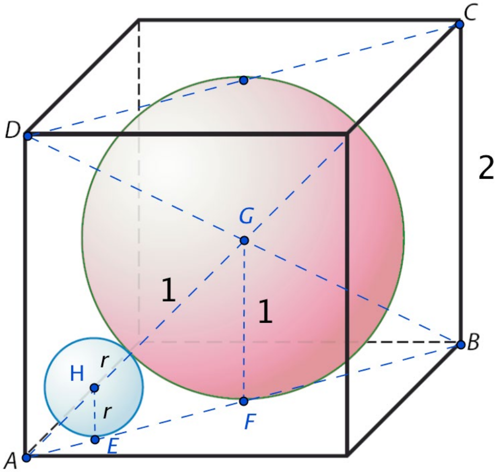
$$= 9241{,}24\ldots$$

$$\approx 9200 \text{ (km)}$$

Vastaus

9200 km

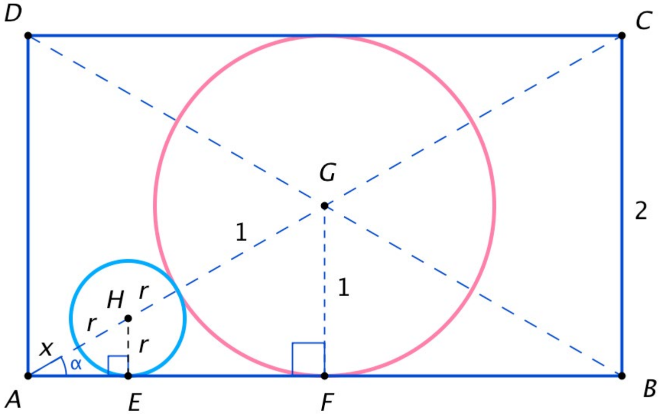
16.22



Punaisen pallon säde on 1 (puolet kuution särmän pituudesta 2).
Punaisen pallon keskipiste on kuution avaruuslävistäjien keskipisteessä ja pallo sivuaa ala- ja ylätahkoa niiden keskipisteessä.

Sinisen pallon keskipiste on kuution avaruuslävistäjällä ja pallo sivuaa alatahkoa sen lävistäjällä. Sininen pallo sivuaa punaista palloa kuution avaruuslävistäjän pisteessä. Merkitään sinisen pallon sädettä kirjaimella r.

Piirretään tilanteesta poikkileikkauskuva tasossa, joka kulkee kärkien A, B, C ja D kautta.



Kolmiot AFG ja AEH ovat yhdenmuotoiset (kk-lause: kulma α on yhteinen ja molemmissa on suora kulma).

Lasketaan kuution sivutahkon lävistäjän pituus.

$$AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

Lasketaan kuution avaruuslävistäjän pituus.

$$AC = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Kolmioiden AFG ja AEH sivuista tiedetään seuraavaa:

- $EH = r$ | Sinisen pallon säde
- $FG = 1$ | Punaisen pallon säde
- $AG = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ | Puolet kuution avaruuslävistäjästä.
- $AH = x + r = AG - (r + 1) = \sqrt{3} - r - 1$

Ratkaistaan sinisen pallon säde r yhdenmuotoisuuden avulla.

Tapa 1. CAS-laskimella

$$
\begin{aligned}
\frac{EH}{FG} &= \frac{AH}{AG} \\
\frac{r}{1} &= \frac{\sqrt{3}-r-1}{\sqrt{3}} && \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.} \\
r &= 2-\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Tapa 2. Ilman laskinta

$$
\begin{aligned}
\frac{EH}{FG} &= \frac{AH}{AG} \\
\frac{r}{1} &= \frac{\sqrt{3}-r-1}{\sqrt{3}} && |\text{Kerrotaan ristiin} \\
\sqrt{3}r &= \sqrt{3}-r-1 && |+r \\
\sqrt{3}r+r &= \sqrt{3}-1 \\
(\sqrt{3}+1)r &= \sqrt{3}-1 && |:(\sqrt{3}+1) \\
r &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}
\end{aligned}
$$

Lausekketta voidaan vielä sieventää.

$$
r = {}^{\sqrt{3}-1)}\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}^2-1^2} = \frac{3-2\cdot\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}
$$

Vastaus

$2-\sqrt{3}$