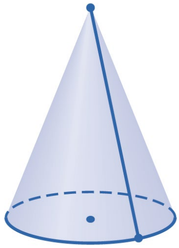
15.1

a ja b) Piirretään geometriaohjelman 2D-piirtoalueessa kartion pohjaksi ympyrä, jonka säde on $5{,}0$. Laajennetaan 3D-piirtoalueessa ympyrä suoraksi ympyräkartioksi, jonka korkeus on $12{,}0$.
Valitaan pohjaympyrän kehältä jokin piste ja yhdistetään se janalla kartion huippuun.



Kartion sivujana, korkeusjana ja pohjan säde muodostavat suorakulmaisen kolmion.
Lasketaan sivujanan pituus s Pythagoraan lauseella.

$s^2 = 5{,}0^2 + 12{,}0^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$s = 13{,}0$ tai $s = -13{,}0$

Pituus on positiivinen luku, joten $s = 13{,}0$.

c) Lasketaan kartion tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}A_p h && \text{Pohja on ympyrä, joten } A_p = \pi r^2. \\ &= \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h && \text{Sijoitetaan } r = 5{,}0 \text{ ja } h = 12{,}0. \\ &= \frac{1}{3}\pi \cdot 5{,}0^2 \cdot 12{,}0 \\ &= 314{,}15... \approx 314 \end{aligned}$$

Kartion tilavuus on 314.
Lasketaan kartion vaipan pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_p &= \pi r s && \text{Sijoitetaan } r = 5{,}0 \text{ ja } s = 13{,}0. \\ &= \pi \cdot 5{,}0 \cdot 13{,}0 \\ &= 204{,}20... \approx 204 \end{aligned}$$

Vaipan pinta-ala on 204.

Vastaus

a) 13,0 **b)** tilavuus 314, pinta-ala 204

15.2

a) Lasketaan kartion tilavuus.

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}A_p h \\
&= \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \\
&= \frac{1}{3}\pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 4{,}0 \\
&= 9{,}42... \\
&\approx 9{,}4\ (\text{cm}^3)
\end{aligned}
$$

b) Lasketaan pyramidin tilavuus.

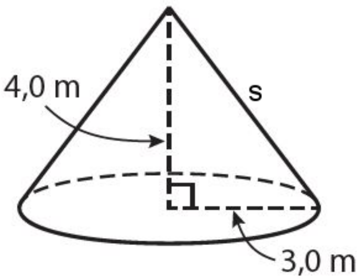
$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}A_p h \\
&= \frac{1}{3} \cdot 5{,}0^2 \cdot 8{,}0 \\
&= 66{,}66... \\
&\approx 67\ (\text{m}^3)
\end{aligned}
$$

Vastaus

a) $9{,}4\ \text{cm}^3$

b) $67\,\text{m}^3$

15.3



Ratkaistaan sivujanan pituus s Pythagoraan lauseella.

$s^2 = 3{,}0^2 + 4{,}0^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$s = 5{,}0$ tai $s = -5{,}0$

Pituus on positiivinen luku, joten $s = 5{,}0$ m.

Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= \pi r s \\ &= \pi \cdot 3{,}0 \cdot 5{,}0 \\ &= 47{,}12\ldots \\ &\approx 47 \ (\mathrm{m}^2) \end{aligned}$$

Katon päällystämiseen tarvitaan $47\,\mathrm{m}^2$ kuparilevyä.

Vastaus

$47\,\mathrm{m}^2$

15.4

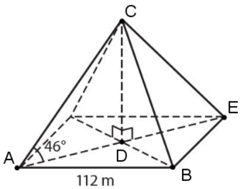
a) Kartiolla on huippu, vaippa ja pohja. Kartioita ovat kappaleet 1 ja 4.

b) Pyramidi on kartio, jonka pohja on monikulmio. Kappale 1 on pyramidi.

Vastaus
a) 1 ja 4
b) 1

15.5

a)



Kolmio ADB on suorakulmainen ja tasakylkinen ($AD = BD$).
Ratkaistaan kateetin AD pituus.

$AD^2 + BD^2 = 112^2$ Sijoitetaan $AD = DB$.

$AD^2 + AD^2 = 112^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$AD = 79{,}19...$ tai $AD = -79{,}19...$

Pituus on positiivinen luku, joten $AD = 79{,}19...\text{ m}$.
Kolmio ACD on suorakulmainen.
Ratkaistaan sivusärmän AC pituus.

$\cos 46° = \dfrac{79{,}19...}{AC}$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$AC = 114{,}00... \approx 114$ (m)

b) **Tapa 1.** Sivutahko ACB on tasakylkinen kolmio. Merkitään huippukulman ACB suuruutta kirjaimella α ja ratkaistaan se kosinilauseella.

$112^2 = 114{,}00...^2 + 114{,}00...^2 - 2 \cdot 114{,}00... \cdot 114{,}00... \cdot \cos\alpha$

$\alpha = 58{,}83...° \approx 59°$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

Tapa 2. Sivutahkolle ACB piirretty korkeusjana muodostaa suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusan pituus on $114{,}00...$ m ja kanta 56 m. Merkitään suorakulmaisen kolmion huippukulman suuruutta kirjaimella α.

$\sin\alpha = \dfrac{56}{114{,}00...}$

$\alpha = \sin^{-1}\left(\dfrac{56}{114{,}00...}\right) = 29{,}42...°$

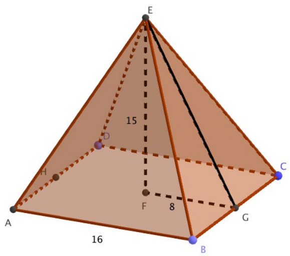
Sivutahkon ACB huippukulman suuruus on
$2\alpha = 2 \cdot 29{,}42...° = 58{,}83...° \approx 59°$.

Vastaus

a) 114 m **b)** 59°

15.6

a)



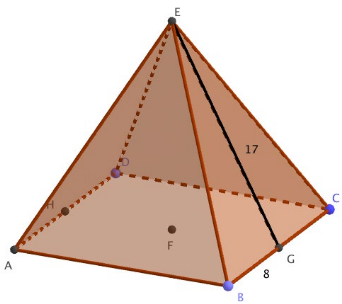
Sivutahkon korkeusjana on EG.
Mittaamalla sen pituudeksi saadaan 17.
Kolmio FGE on suorakulmainen.
Ratkaistaan hypotenuusan EG pituus.

$EG^2 = 8^2 + 15^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$EG = 17$ tai $EG = -17$

Pituus on positiivinen luku, joten $EG = 17$.

b)



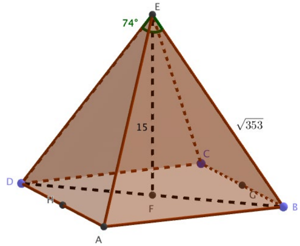
Jana EB on pyramidin sivusärmä. Mittaamalla sen pituudeksi saadaan 18,8.
Kolmio GBE on suorakulmainen. Ratkaistaan hypotenuusan EB pituus.

$EB^2 = 8^2 + 17^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$EB = \sqrt{353}$ tai $EB = -\sqrt{353}$

Pituus on positiivinen luku, joten $EB = \sqrt{353} \approx 18,8$.

c)



Janat EB ja ED ovat kaksi vastakkaista sivusärmää. Mittaamalla kulman BED suuruudeksi saadaan $74°$.
Merkitään kulman FEB suuruutta kirjaimella α ja ratkaistaan se suorakulmaisesta kolmiosta FEB.

$$\cos\alpha = \frac{EF}{EB} \qquad \left| \begin{array}{l} EF = 15 \\ EB = \sqrt{353} \end{array} \right.$$

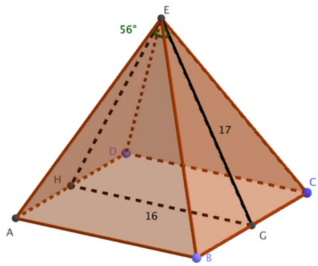
$$\cos\alpha = \frac{15}{\sqrt{353}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{15}{\sqrt{353}}\right) = 37{,}02...°$$

Lasketaan kulman BED suuruus.

$$2\alpha = 2 \cdot 37{,}02...° = 74{,}05...° \approx 74°$$

d)



Janat EG ja EH ovat vastakkaisten sivutahkojen korkeusjanat. Kahden vastakkaisen tahkon välinen kulma tarkoittaa niiden välistä kulmaa GEH. Mittaamalla sen suuruudeksi saadaan $56°$.
Merkitään kulman GEH suuruutta kirjaimella β ja ratkaistaan se kosinilauseella.

$$16^2 = 17^2 + 17^2 - 2 \cdot 17 \cdot 17 \cdot \cos\beta$$

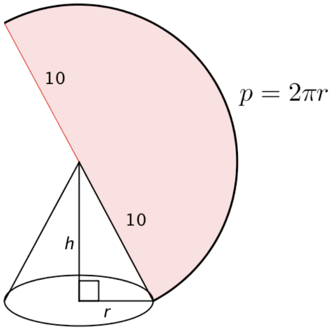
$\beta = 56{,}14...° \approx 56°$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

Vastaus

a) 17 **b)** $\sqrt{353} \approx 18{,}8$ **c)** $74°$ **d)** $56°$

15.7

a) Piirretään kuva.



Suoran ympyräkartion tilavuuden laskemiseksi on selvitettävä sen korkeus ja pohjaympyrän säde.
Vaippana olevan puoliympyrän kaari on yhtä pitkä kuin kartion pohjaympyrän kehä. Ratkaistaan säde r.

$2\pi r = \frac{180°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 10$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$r = 5$

b) Lasketaan kartion korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$10^2 = r^2 + h^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$h = 5\sqrt{3}$ tai $h = -5\sqrt{3}$

Pituus on positiivinen luku, joten $h = 5\sqrt{3}$.

c) Lasketaan kartion tilavuus.

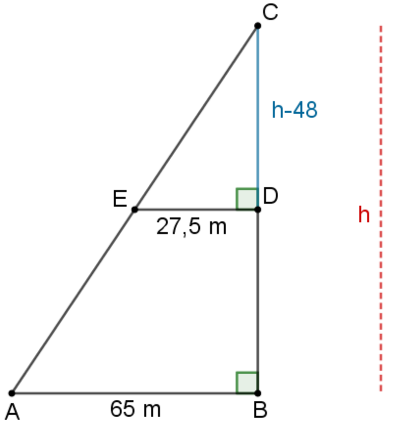
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 5\sqrt{3} \\ &= \frac{125\sqrt{3}}{3}\pi \end{aligned}$$

Vastaus

a) 5 **b)** $5\sqrt{3}$ **c)** $\frac{125\sqrt{3}}{3}\pi$

15.8

a) Täydennetään kappale kartioksi. Kun kartio halkaistaan pystysuunnassa, leikkauspinnalle muodostuu kaksi sisäkkäistä kolmiota.



Kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella:

- Kummassakin on suora kulma.
- Kolmioilla on yhteinen kulma ACB.

Muodostetaan vastinpituuksista verrantoyhtälö ja ratkaistaan kartion korkeus h.

$$\frac{65}{27{,}5} = \frac{h}{h-48}$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$h = 83{,}2 \approx 83 \quad \text{(m)}$$

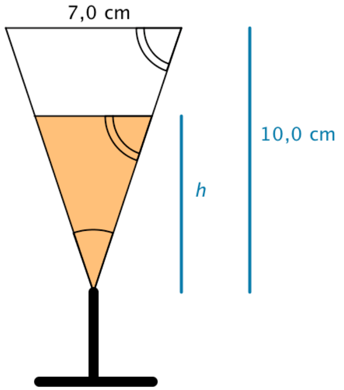
b) Raunion tilavuus V_r saadaan, kun suuremman kartion tilavuudesta V_s vähennetään pienemmän kartion tilavuus V_p.

$$\begin{aligned} V_r &= V_s - V_p \\ &= A_{ps}h_s - A_{pp}h_p \\ &= \frac{1}{3}\cdot 130^2 \cdot 83{,}2 - \frac{1}{3}\cdot 55^2 \cdot (83{,}2 - 48) \\ &= 433\,200 \\ &\approx 430\,000 \quad (\text{m}^3) \end{aligned}$$

Vastaus

a) 83 m **b)** $430\,000 \text{ m}^3$

15.9



Lasin yläosan säde on $r = \frac{7{,}0 \text{ cm}}{2} = 3{,}5 \text{ cm}$.

Lasketaan lasin tilavuus.

$$V_{lasi} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 10{,}0 \text{ cm}^3 = 128{,}281... \text{ cm}^3$$

Ilmaistaan mehun tilavuus samassa yksikössä.

$$V_{mehu} = 8{,}5 \text{ cl} = 85 \text{ ml} = 85 \text{ cm}^3$$

Lasin poikkileikkauskuviossa on kaksi yhdenmuotoista tasakylkistä kolmiota (kk-lause: huippukulma yhteinen, samankohtaiset kulmat yhtä suuret).

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan h.

$$\frac{V_{mehu}}{V_{lasi}} = \left(\frac{h}{10{,}0}\right)^3$$

$$\frac{85}{128{,}281...} = \left(\frac{h}{10{,}0}\right)^3 \qquad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

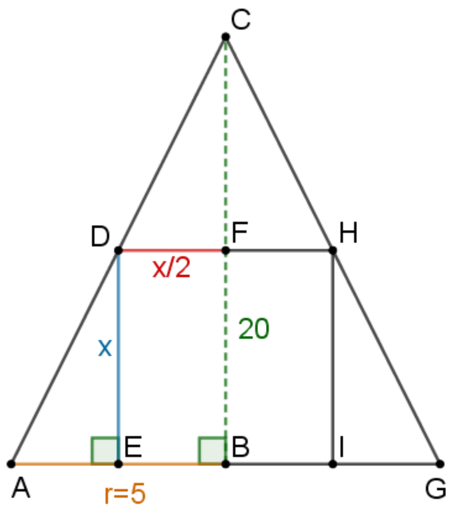
$$h = 8{,}718... \approx 8{,}7 \ \text{(cm)}$$

Mehun pinta nousee laseissa 8,7 cm:n korkeuteen.

Vastaus

8,7 cm

15.10



Kolmiot ABC ja AED ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella:

- Yhteinen kulma EAC.
- Kummassakin kolmiossa on suorakulma.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan sivun pituus x.

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{ED}$$

$$\frac{5}{5 - \frac{x}{2}} = \frac{20}{x}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

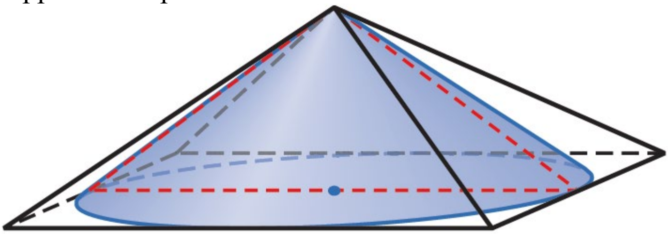
$$x = 6\frac{2}{3}$$

Vastaus

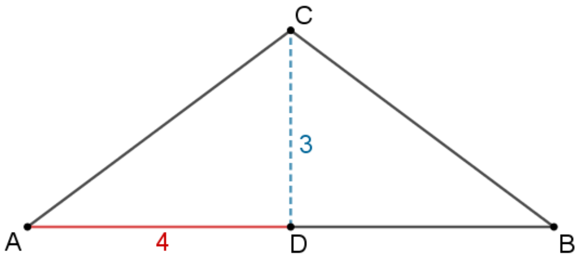
Lieriön korkeus ja pohjan halkaisija on $6\frac{2}{3}$.

15.11

a) Piirretään ensin kappaleiden pohjat 2D-piirtoalueessa ja täydennetään kappaleet 3D-piirtoalueessa kartioiksi.



b) Piirretään leikkauskuvio.



Sivut AC ja BC ovat yhtä pitkät. Ratkaistaan sivun AC pituus.

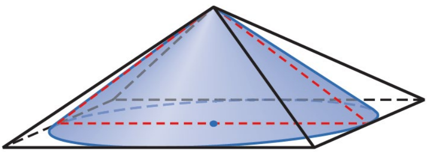
$4^2 + 3^2 = AC^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

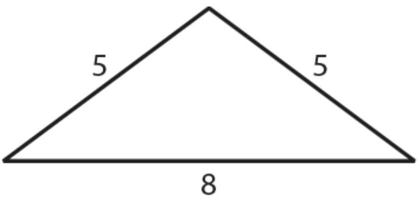
$AC = 5$ tai $AC = -5$

Pituus on positiivinen luku, joten $AC = 5$.

Vastaus

a)

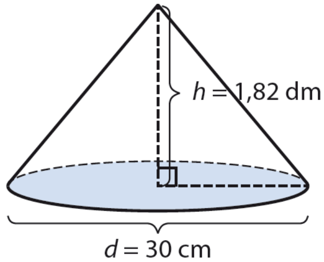




b)

15.12

a) Piirretään kuva.



Kartion korkeus $h = 1{,}82$ dm ja pohjan säde $r = 15$ cm $= 1{,}5$ dm.
Lasketaan tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}A_p h \\ &= \frac{1}{3}\cdot \pi r^2 \cdot h \\ &= \frac{1}{3}\cdot \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 1{,}82 \\ &= 4{,}28... \\ &\approx 4{,}3\ (\text{dm}^3) \end{aligned}$$

Tilavuus on $4{,}3\ \text{dm}^3 = 4{,}3$ L.

b) Kartion korkeus $h = 1{,}82$ dm $= 0{,}182$ m
ja pohjan säde $r = 15$ cm $= 0{,}15$ m.
Ratkaistaan sivujanan pituus s.

$$s^2 = 0{,}15^2 + 0{,}182^2$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$s = 0{,}235... \text{ tai } s = -0{,}235...$$

Pituus on positiivinen luku, joten $s = 0{,}235...$ m.
Lasketaan vaipan pinta-ala.

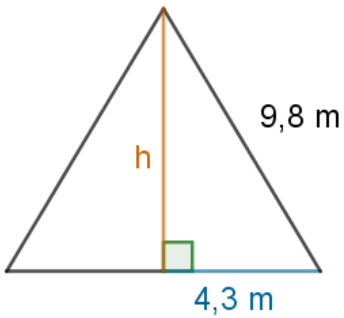
$$\begin{aligned} A_v &= \pi r s \\ &= \pi \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}235... \\ &= 0{,}111... \\ &\approx 0{,}11\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

Vastaus

a) 4,3 L **b)** 0,11 m²

15.13

Piirretään pyramidin pohjaa vastaan kohtisuora huipun kautta kulkeva poikkileikkaus.



Ratkaistaan pyramidin korkeus h.

$h^2 + 4{,}3^2 = 9{,}8^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$h = 8{,}80...$ tai $h = -8{,}80...$

Pituus on positiivinen luku, joten $h = 8{,}80...\text{ m}$.

Lasketaan pyramidin tilavuus.

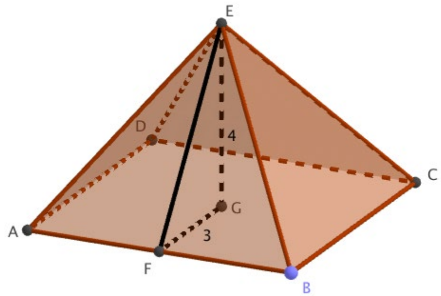
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}A_p h \\ &= \frac{1}{3}\cdot 8{,}6^2 \cdot 8{,}80... \\ &= 217{,}10... \approx 220\ (\text{m}^3) \end{aligned}$$

Vastaus

220 m^3

15.14

a)



Jana EF on sivutahkon korkeusjana. Mittaamalla sen pituudeksi saadaan 5.

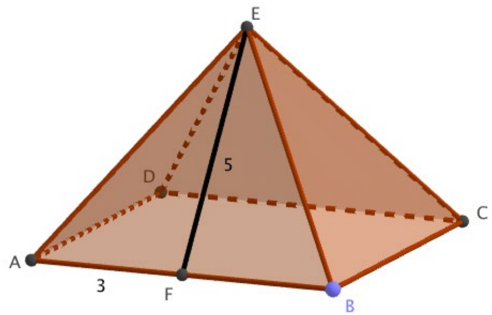
Kolmio GFE on suorakulmainen. Ratkaistaan sivutahkon korkeus Pythagoraan lauseella.

$EF^2 = 4^2 + 3^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$EF = 5$ tai $EF = -5$

Pituus on positiivinen luku, joten $EF = 5$.

b)



Jana AE on pyramidin sivusärmä.

Mittaamalla sen pituudeksi saadaan 5,83.

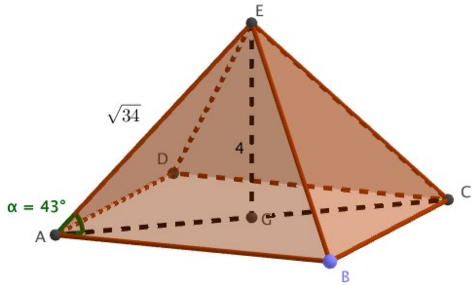
Kolmio AEF on suorakulmainen. Lasketaan sivusärmän pituus Pythagoraan lauseella.

$AE^2 = 5^2 + 3^2$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$AE = \sqrt{34}$ tai $AE = -\sqrt{34}$

Pituus on positiivinen luku, joten $AE = \sqrt{34} \approx 5{,}8$.

c)

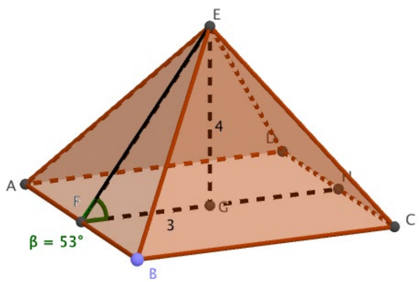


Kulma CAE on sivusärmän ja pohjan välinen kulma. Mittaamalla sen suuruudeksi saadaan 43º.
Kolmio AEG on suorakulmainen. Ratkaistaan kulman α suuruus.

$$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{34}}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \sin^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{34}}\right)\\ &= 43{,}31...^\circ \approx 43^\circ\end{aligned}$$

d)



Kulma GFE on sivutahkon ja pohjatahkon välinen kulma. Mittaamalla sen suuruudeksi saadaan 53°.
Kolmio GFE on suorakulmainen. Ratkaistaan kulman β suuruus.

$$\tan\beta = \frac{4}{3}$$

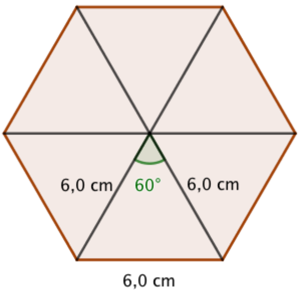
$$\begin{aligned}\beta &= \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\\ &= 53{,}13...^\circ \approx 53^\circ\end{aligned}$$

Vastaus

a) 5 **b)** $\sqrt{34} \approx 5{,}8$ **c)** 43º **d)** 53º

15.15

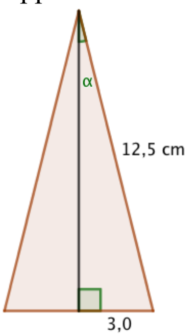
Pyramidin pohja muodostuu kuudesta yhtenevästä tasasivuisesta kolmiosta.



Lasketaan pohjan pinta-ala.

$$A_p = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6{,}0 \cdot 6{,}0 \cdot \sin 60° = 93{,}53\ldots \ (\text{cm}^2)$$

Vaippa muodostuu kuudesta yhdenmuotoisesta tasakylkisestä kolmiosta.



Ratkaistaan kulman α suuruus.

$$\sin\alpha = \frac{3{,}0}{12{,}5}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3{,}0}{12{,}5}\right) = 13{,}88\ldots°$$

Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$A_v = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12{,}5 \cdot 12{,}5 \cdot \sin\left(2 \cdot 13{,}88\ldots°\right) = 218{,}42\ldots \ (\text{cm}^2)$$

Lasketaan pyramidin kokonaispinta-ala.

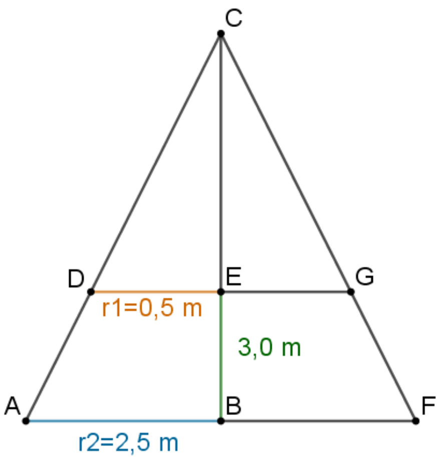
$$A_p + A_v = 93{,}53\ldots + 218{,}42\ldots = 311{,}95\ldots \approx 310 \ (\text{cm}^2)$$

Vastaus

310 cm^2

15.16

Piirretään valmiin kartion poikkileikkauspinta ja siihen muodostuvat kaksi kolmiota.



Kolmiot ABC ja DEC ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella:

- Kulma DCE on yhteinen.
- Kummassakin on suora kulma.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan janan BC pituus.

$$\frac{BC}{EC} = \frac{AB}{DE}$$

$$\frac{BC}{BC - 3{,}0} = \frac{2{,}5}{0{,}5}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

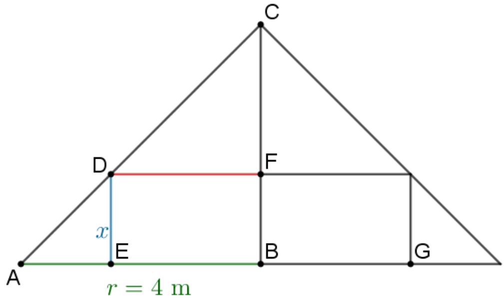
$$BC = 3{,}75 \approx 3{,}8 \ \ \text{(m)}$$

Vastaus

3,8 m

15.17

Kuution pohja on kartion pohjalla ja kuution ylemmän pohjatahkon kärjet koskettavat kartion vaippaa. Piirretään poikkileikkauskuvio, joka kulkee kuution pohjan lävistäjän ja kartion huipun kautta.



Kuviossa x on kuution särmän pituus ja jana EG on kuution pohjan lävistäjä.

$$EG = x\sqrt{2}$$

$$EB = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

Kolmiot ABC ja DFC ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella:

- Kulma DCF on yhteinen.
- Kummassakin on suora kulma.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan kuution korkeus x.

$$\frac{AB}{DF} = \frac{BC}{FC}$$

$$\frac{4}{\frac{x\sqrt{2}}{2}} = \frac{12}{12-x}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 3{,}844\ldots \text{ (m)}$$

Lasketaan kuution tilavuus.

$$x^3 = 3{,}84\ldots^3 = 56{,}82\ldots \approx 57 \text{ (m}^3\text{)}$$

Vastaus

57 m^3

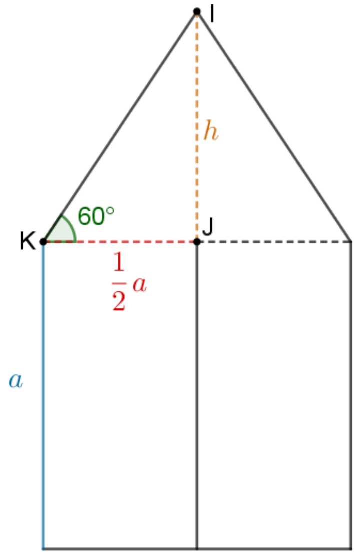
15.18

a) Piirretään poikkileikkauspinta, jossa piste K on pyramidin pohjatahkon sivusärmän keskipiste. Ratkaistaan pyramidin korkeus h.

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$$

$$h = \frac{1}{2}a \cdot \tan 60^\circ$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



Lasketaan huoneen korkeus.

$$a + \frac{\sqrt{3}}{2}a = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$$

b) Huoneen tilavuus on kuution ja pyramidin tilavuuksien summa.

$$V_h = a^3 + \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)a^3$$

c) Ratkaistaan pyramidin sivutahkon korkeus kolmiosta KJI (katso edellinen kuvio).

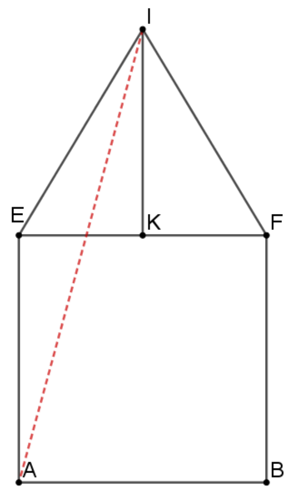
$$KI^2 = KJ^2 + JI^2$$

$$KI^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$$

$$KI^2 = a^2$$

$$KI = a \quad \text{tai} \quad KI = -a$$

Pituus on positiivinen luku, joten $KI = a$. Oheisessa kuviossa yksi kattotahko on käännetty seinätahkon kanssa samaan tasoon. Lyhin sähköjohto kulkee pitkin reittiä AI.



Ratkaistaan lyhimmän reitin AI pituus.

$$AI^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + (2a)^2$$

$$AI^2 = \frac{17}{4}a^2$$

$$AI = \frac{\sqrt{17}}{2}a \quad \text{tai} \quad AI = -\frac{\sqrt{17}}{2}a$$

Pituus on positiivinen luku, joten $AI = \dfrac{\sqrt{17}}{2}a$.

Vastaus

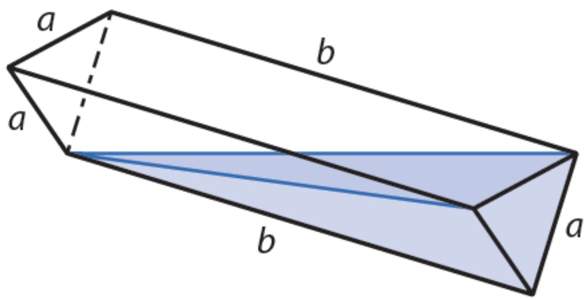
a) $\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a$

b) $\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)a^3$

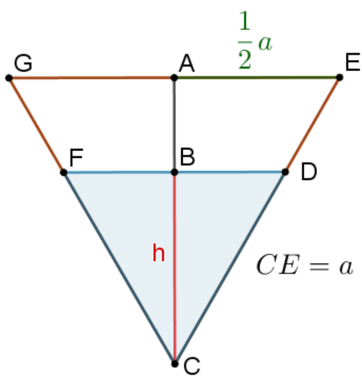
c) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}a$

15.19

a) Kaukalo on säännöllinen kolmisivuinen särmiö. Kaukalossa oleva vesi on samapohjainen ja yhtä korkea pyramidi, joten sen tilavuus on yksi kolmasosa kaukalon tilavuudesta. Vedestä valuu pois $\frac{2}{3} \approx 67\ \%$.



b) Kun kaukalo on vaakatasossa, vesi ja kaukalo ovat suoria lieriöitä, joilla on sama korkeus b. Koska veden tilavuus on kolmasosa kaukalon tilavuudesta, niin kolmion CDF pinta-alaa on kolmasosa kolmion CEG pinta-alasta.



Ratkaistaan janan AC pituus.

$$\tan 60^\circ = \frac{AC}{\frac{1}{2}a} \qquad \Big| \cdot \frac{1}{2}a$$

$$AC = \frac{1}{2}a \cdot \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Kolmiot CDF ja CEG ovat yhdenmuotoiset, joten niiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{A_{CDF}}{A_{CEG}} = k^2$$

$$\frac{1}{3} = k^2$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ tai } k = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Mittakaava on positiivinen luku, joten $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan veden korkeus h.

$$\frac{h}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Big| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{2}$$

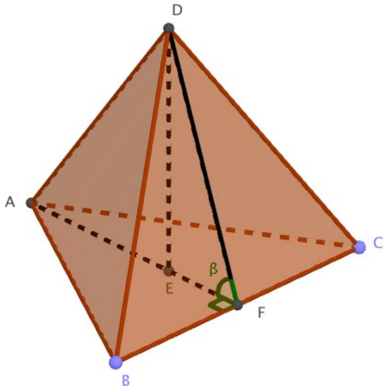
Vastaus

a) 67 %

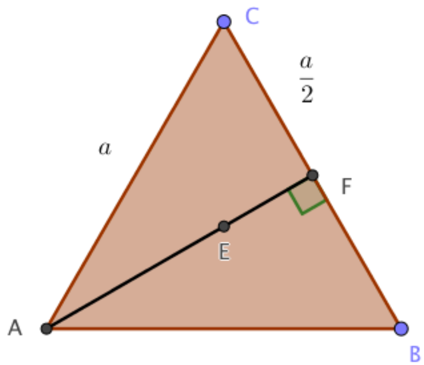
b) $\frac{a}{2}$

15.20

a) Kuviossa janat FA ja FD ovat kahden vierekkäisen tahkon keskijanat ja kulma β on kahden vierekkäisen tahkon välinen kulma.



Säännöllisen tetraedrin tahkot ovat tasasivuisia kolmioita.



Ilmaistaan keskijanan AF pituus sivun pituuden a avulla.

$$FA^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$FA^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$FA = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \text{tai} \quad FA = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pituus on positiivinen luku, joten $FA = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Piste E on pohjatahkon keskijanojen leikkauspiste. Keskijanat jakavat toisensa suhteessa 2 : 1 kolmion kärjestä lukien. Lasketaan janan FE pituus.

$$FE = \frac{1}{3}FA = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

Ratkaistaan kulma β suorakulmaisesta kolmiosta FDE.

$$\cos\beta = \frac{FE}{FD} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{3}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70{,}5°$$

b) Lasketaan tetraedrin pinta-ala.

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{3}\,a^2$$

Ratkaistaan tetraedrin korkeus ED suorakulmaisesta kolmiosta EFD.

$$FE^2 + ED^2 = FD^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 + ED^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$ED = \sqrt{\frac{2}{3}}\,a \quad \text{tai} \quad ED = -\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$$

Pituus on positiivinen luku, joten $ED = \sqrt{\frac{2}{3}}\,a$.

Lasketaan tetraedrin tilavuus.

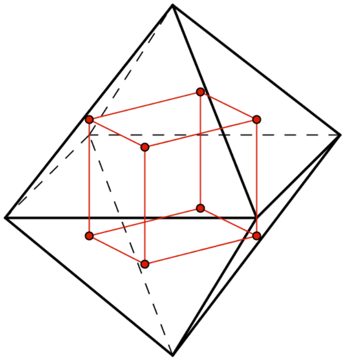
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}A_p h \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}a \\ &= \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

Vastaus

a) 70,5° **b)** pinta-ala $a^2\sqrt{3}$, tilavuus $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

15.21

Säännöllisessä oktaedrissa on kahdeksan tahkoa, joten syntyvässä kappaleessa on kahdeksan kärkeä. Kuutio on Platonin kappaleista ainoa, jossa on kahdeksan kärkeä. Syntyvän kappaleen on siis oltava kuutio.

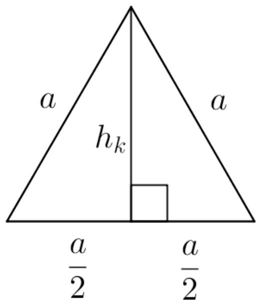


Oktaedrin tahkot ovat tasasivuisia kolmioita, joiden sivun pituus on a. Lasketaan sivutahkon korkeus.

$$h_k^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$h_k = \pm\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

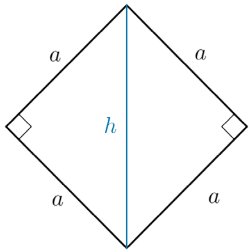
Pituus on positiivinen luku, joten $h_k = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.



Lasketaan oktaedrin korkeus kärjestä vastakkaiseen kärkeen. Oktaedrin kärkien kautta piirretty poikkileikkaus on neliö.

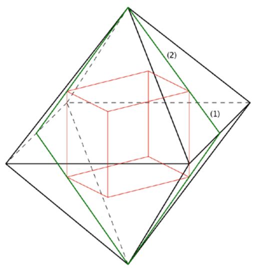
$$h^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

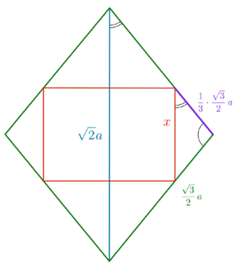
$$h = \pm\sqrt{2a^2} = \pm\sqrt{2}\,a$$



Pituus on positiivinen luku,
joten $h = \sqrt{2}\,a$.

Piirretään kappaleesta poikkileikkaus pitkin tasoa, joka kulkee kuution ylä- ja alatahkojen lävistäjien kautta. Kuution kärjet ovat tahkojen painopisteissä eli mediaanien leikkauspisteissä. Mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanit suhteessa $2:1$ kärjestä lukien. Tasasivuisen kolmion mediaani on samalla kolmion korkeusjana, joten mediaanin pituus on $\frac{\sqrt{3}}{2}a$
.





Poikkileikkauskuvioon muodostuu yhdenmuotoiset tasakylkiset kolmiot (kk-lause: huippukulma yhteinen, samankohtaiset kulmat yhtä suuret). Vastinjanojen suhde on vakio. Ratkaistaan kuution särmän pituus x.

$$\frac{x}{\sqrt{2}a} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}a}}{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}a}}$$

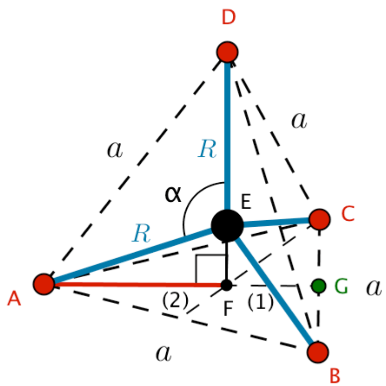
$$\frac{x}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{3}a$$

Vastaus

Kuutio, jonka särmän pituus on $\frac{\sqrt{2}}{3}a$.

15.22



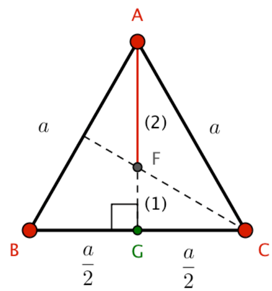
Lasketaan tetraedrin pohjana olevan tasasivuisen kolmion korkeus eli mediaanin AG pituus.

$$AB^2 = BG^2 + AG^2$$

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AG^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$AG = _{(}\pm_{)}\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

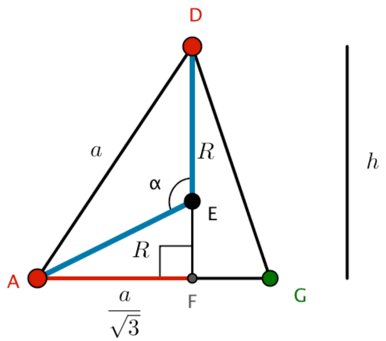


Tetraedrin korkeusjanan DF päätepiste F on pohjakolmion painopiste eli mediaanien leikkauspiste. Painopiste jakaa mediaanit suhteessa $2:1$ kärjestä lukien.

Lasketaan suorakulmaisen kolmion AFD kateetin AF pituus.

$$AF = \frac{2}{3}AG = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Piirretään molekyylistä poikkileikkauskuva tasossa, joka kulkee tetraedrin huipun D ja pohjan mediaanin AG kautta.



Lasketaan tetraedrin korkeus AF.

$AD^2 = AF^2 + FD^2$

$$a^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + h^2$$ Ratkaistaan CAS-laskimella. Ratkaistaan

$$h = {}_{(}\pm_{)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a$$

etäisyys R suorakulmaista kolmiosta AFE.

$AE^2 = AF^2 + EF^2$

$$R^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + (h - R)^2$$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$h = \frac{\sqrt{6}a}{4}$$

Ratkaistaan kulman α suuruus kosinilauseen avulla.

$a^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos\alpha$ Ratkaistaan CAS-laskimella.

$\alpha = 109,47...^\circ \approx 109,5^\circ$

Sidoskulma on 109,5°.

Vastaus

109,5°