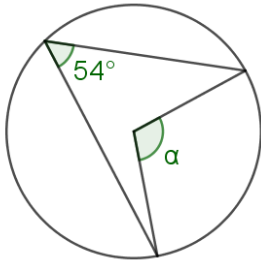


## 11.1

a)

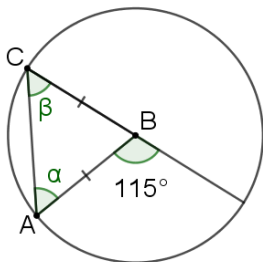


Kulma  $\alpha$  on keskuskulma ja samaa kaarta vastaavan kehäkulma on  $54^\circ$ .

$$\alpha = 2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$$

Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

b) Täydennetään kuvaa.



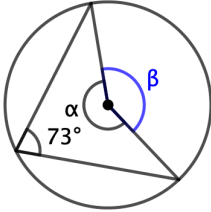
Kulma  $\beta$  on kehäkulma. Samaa kaarta vastaava keskuskulma on  $115^\circ$ .

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot 115^\circ = 57,5^\circ$$

Kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

Kolmio  $ABC$  on tasakylkinen kolmio. Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret, joten  $\alpha = \beta = 57,5^\circ$ .

c) Täydennetään kuvaa.



Kulma  $\beta$  on keskuskulma, ja samaa kaarta vastaava kehäkulma on  $73^\circ$ .

$$\beta = 2 \cdot 73^\circ = 146^\circ$$

Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

Kulmat  $\alpha$  ja  $\beta$  muodostavat täysikulman.

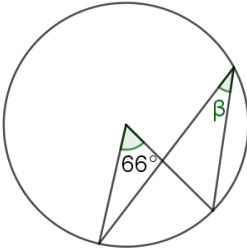
$$\alpha = 360^\circ - 146^\circ = 214^\circ.$$

**Vastaus**

- a)  $108^\circ$
- b)  $57,5^\circ$
- c)  $214^\circ$

## 11.2

a)

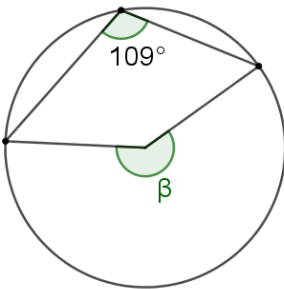


Kulma  $\beta$  on kehäkulma. Samaa kaarta vastaava keskuskulma on  $66^\circ$ .

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot 66^\circ = 33^\circ$$

Kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

b)



Kulma  $\beta$  on keskuskulma.

$$\beta = 2 \cdot 109^\circ = 218^\circ$$

Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

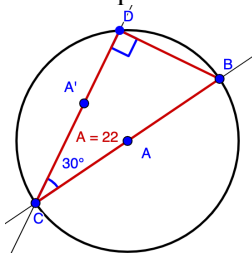
**Vastaus**

a)  $33^\circ$

b)  $218^\circ$

## 11.3

- a) Piirretään ympyrä, jonka säde on 5 (cm). Merkitään ympyrän kehälle piste  $B$ . Piirretään suora, jonka kulkee ympyrän keskipisteen ja kehäpisteen kautta. Merkitään suoran ja ympyrän toinen leikkauspiste  $C$ .  
Piirretään suoran ja ympyrän leikkauspisteeseen kulma, jonka koko on  $30^\circ$ .  
Piirretään suora leikkauspisteen ja kulman piirtämisessä syntyneen pisteen kautta. Merkitään suoran ja ympyrän leikkauspiste  $D$ .  
Piirretään kolmio pisteiden  $B$ ,  $C$  ja  $D$  kautta. Mitataan kolmion pinta-ala.  
Kolmion pinta-ala on  $22 \text{ (cm}^2\text{)}$ .



- b) Ympyrän halkaisija on kolmion sivu  $CB$ . Sivun  $CB$  pituus on  $2 \cdot 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$ .  
Ratkaistaan kolmion sivun  $CD$  pituus.

$$\cos 30^\circ = \frac{CD}{10} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$CD = 5\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ$$

$$A = \frac{1}{2} ac \sin \beta, \text{ missä } a = 10, \\ b = 5\sqrt{3} \text{ ja } \beta = 30^\circ.$$

$$= 21,650\dots$$

$$= 22 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Kolmion pinta-ala on  $22 \text{ cm}^2$ .

**Vastaus**

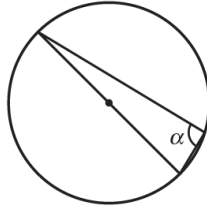
- a)  $22 \text{ cm}^2$       b)  $22 \text{ cm}^2$

## 11.4

a)

Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.

$$\alpha = 90^\circ$$

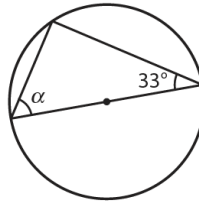


b)

Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.

Kolmion kulmien summa on  $180^\circ$ .

$$\alpha = 180^\circ - 33^\circ - 90^\circ = 57^\circ$$



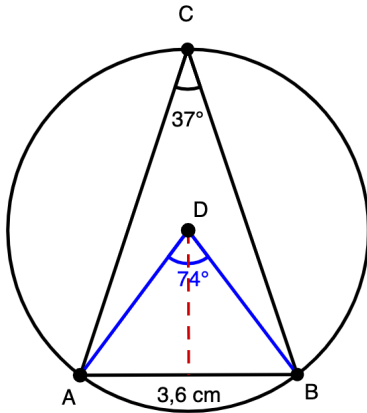
**Vastaus**

a)  $90^\circ$

b)  $57^\circ$

## 11.5

Täydennetään kuvaa.



Kulma  $ADB$  on keskuskulma, ja samaa kaarta vastaava kehäkulma on  $37^\circ$ .

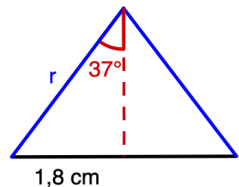
$$\sphericalangle ADB = 2 \cdot 37^\circ = 74^\circ$$

Tasakylkisen kolmion huippukulmasta kannalle piirretty korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.

Ratkaistaan ympyrän säde  $r$ .

$$\sin 37^\circ = \frac{1,8}{r} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimell}$$

$$r = 2,9909\dots \approx 3,0 \text{ (cm)}$$

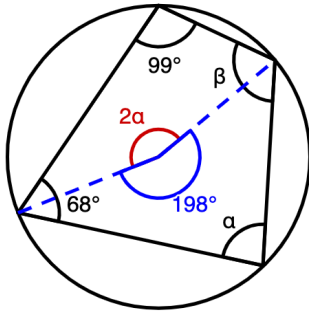


**Vastaus**

3,0 cm

## 11.6

Täydennetään kuvaa.



Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

Kehäkulmaa  $\alpha$  vastaava keskuskulma on  $2\alpha$ .

Kehäkulmaa  $99^\circ$  vastaava keskuskulma on  $2 \cdot 99^\circ = 198^\circ$ .

Kulmat  $2\alpha$  ja  $198^\circ$  muodostavat täysikulman.

$$2\alpha + 198^\circ = 360^\circ$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\alpha = 81^\circ$$

Nelikulmion kulmien summa on  $360^\circ$ .

$$\beta + 99^\circ + 68^\circ + 81^\circ = 360^\circ$$

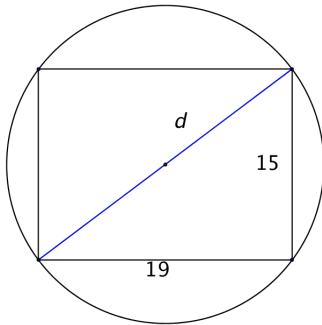
Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\beta = 112^\circ$$

**Vastaus**

$$\alpha = 81^\circ, \beta = 112^\circ$$

## 11.7



Puukiekon halkaisija on suorakulmion lävistäjä. Ratkaistaan halkaisijan pituus Pythagoraan lauseella.

$$19^2 + 15^2 = d^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$d = -24,207\dots \text{ tai } d = 24,207\dots$$

Halkaisijan pituus on positiivinen luku, joten  $d = 24,207 \text{ cm}$ .

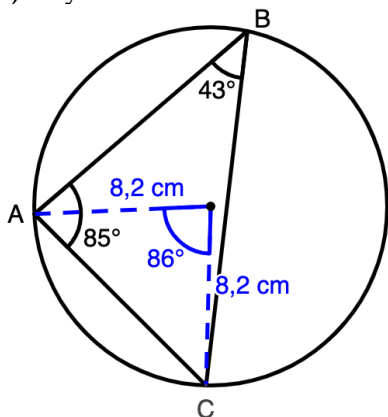
Puukiekon säde oli  $\frac{24,207\dots \text{ cm}}{2} = 12,103\dots \text{ cm} \approx 12,1 \text{ cm}$ .

**Vastaus**

12,1 cm

## 11.8

a) Täydennetään kuvaa.



Ratkaistaan sivun  $AC$  pituus kosinilauseella.

$$AC^2 = 8,2^2 + 8,2^2 - 2 \cdot 8,2 \cdot 8,2 \cdot \cos 86^\circ \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$AC = -11,184\dots \text{ tai } AC = 11,184\dots$$

Pituus on positiivinen, joten  $AC = 11,184\dots \text{ cm} \approx 11,2 \text{ cm}$ .

Sivun  $AB$  vastainen kulma on  $180^\circ - 85^\circ - 43^\circ = 52^\circ$ . Ratkaistaan sivun  $AB$  pituus sinilauseella.

$$\frac{AB}{\sin 52^\circ} = \frac{11,184\dots}{\sin 43^\circ} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$AB = 12,923\dots \approx 12,9 \text{ (cm)}$$

Ratkaistaan sivun  $BC$  pituus sinilauseella.

$$\frac{BC}{\sin(85^\circ)} = \frac{11,183\dots}{\sin(43^\circ)} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$BC = 16,337\dots \approx 16,3 \text{ (cm)}$$

b) Ratkaistaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 12,923\dots \cdot 16,337\dots \cdot \sin 43^\circ$$

$$A = 71,94\dots \approx 72 \text{ (cm}^2\text{)}$$

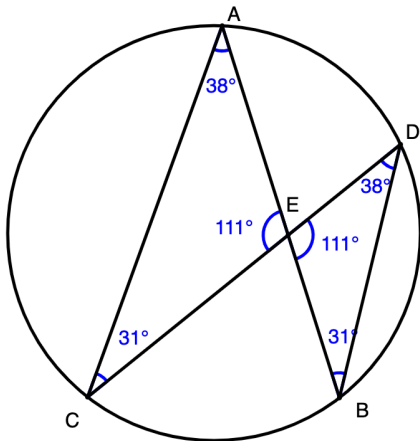
**Vastaus**

a)  $AC = 11,2 \text{ cm}$ ,  $AB = 16,3 \text{ cm}$  ja  $BC = 12,9 \text{ cm}$

b)  $72 \text{ cm}^2$

## 11.9

a) Piirretään kuva.



Mitataan syntyvien kolmioiden  $ACE$  ja  $DEB$  kulmat. Kolmioiden kulmat ovat yhtä suuret, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

b) Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret. Kärjissä  $A$  ja  $D$  olevat kehäkulmat sekä kärjissä  $B$  ja  $C$  olevat kehäkulmat vastaavat samaa kaarta.

Kolmiot ovat siis yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

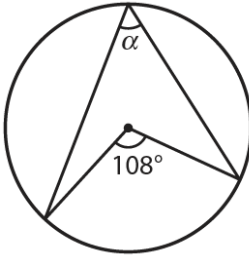
### Vastaus

a) Ovat.

b) Kolmioissa on pareittain kaksi samaa kaarta vastaavaa kehäkulmaa, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

## 11.10

a)

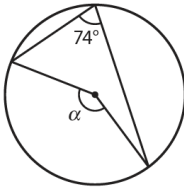


Kulma  $\alpha$  on kehäkulma, ja samaa kaarta vastaava keskuskulma on  $108^\circ$ .

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 108^\circ = 54^\circ$$

Kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

b)



Kulma  $\alpha$  on keskuskulma, ja samaa kaarta vastaava kehäkulma on  $74^\circ$ .

$$\alpha = 2 \cdot 74^\circ = 148^\circ$$

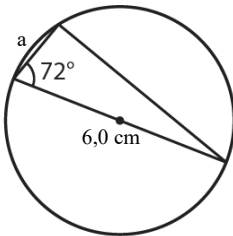
Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

**Vastaus**

a)  $\alpha = 54^\circ$

b)  $\alpha = 148^\circ$

## 11.11



Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora.

Ympyrän halkaisija on  $2 \cdot 3,0 \text{ cm} = 6,0 \text{ cm}$ .

Ratkaistaan sivun  $a$  pituus.

$$\cos 72^\circ = \frac{a}{6,0} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$a = 1,85... \text{ (cm)}$$

Ratkaistaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 1,85... \cdot 6,0 \cdot \sin 72^\circ \quad A = \frac{1}{2} ac \sin \beta, \text{ missä } a = 1,85..., \\ b = 6,0 \text{ ja } \beta = 72^\circ.$$

$$= 5,27...$$

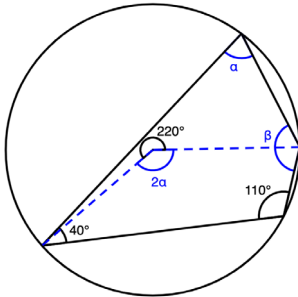
$$\approx 5,3 \text{ (cm}^2\text{)}$$

**Vastaus**

$5,3 \text{ cm}^2$

## 11.12

Piirretään kuva.



Kulma  $110^\circ$  on kehäkulma, ja samaa kaarta vastaava keskuskulma on  $2 \cdot 110^\circ = 220^\circ$ .

Kulma  $\alpha$  on kehäkulma, ja samaa kaarta vastaava keskuskulma on  $2\alpha$ .

Keskuskulmien  $220^\circ$  ja  $2\alpha$  summa on  $360^\circ$ .

Ratkaistaan kulma  $\alpha$ .

$$220^\circ + 2\alpha = 360^\circ$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$\alpha = 70^\circ$$

Nelikulmion kulmien summa on  $360^\circ$ . Ratkaistaan neljäs kulma  $\beta$ .

$$\beta + 110^\circ + 40^\circ + 70^\circ = 360^\circ$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

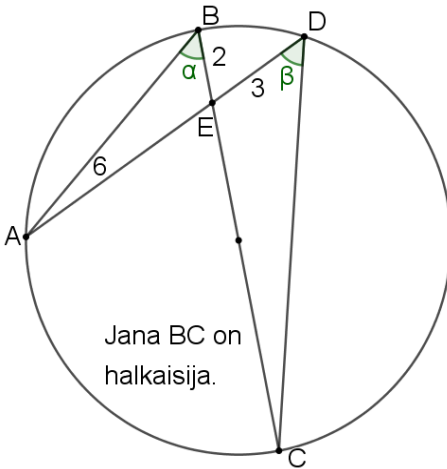
$$\beta = 140^\circ$$

**Vastaus**

$70^\circ$  ja  $140^\circ$

## 11.13

Piirretään kuva.



Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat yhtä suuret.

Myös ristikulmat  $BEA$  ja  $CED$  ovat yhtä suuret.

Kolmiot  $BEA$  ja  $CED$  ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

Muodostetaan verrantoyhtälö.

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{EC} \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$EC = 9$$

Ratkaistaan halkaisijan pituus.

$$EC + BE = 9 + 2 = 11$$

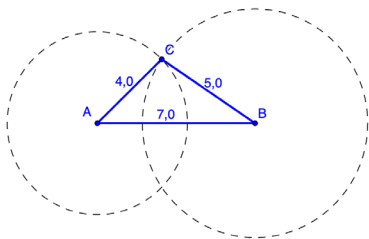
**Vastaus**

11

## 11.14

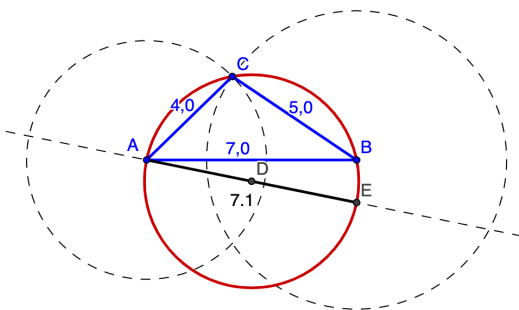
- a) Piirretään jana  $AB$ , jonka pituus on  $7,0$  (cm). Piirretään janan päätepisteisiin ympyrät, joiden säteet ovat  $4,0$  (cm) ja  $5,0$  (cm). Merkitään ympyröiden leikkauspiste  $C$ .

Piirretään kolmio  $ABC$ .



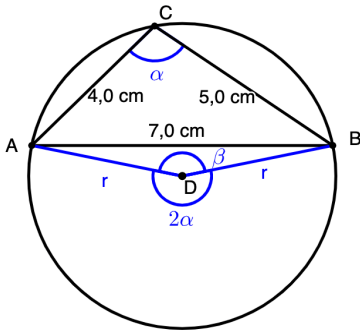
Piirretään ympyrä, joka kulkee kolmion  $ABC$  kärkien kautta. Merkitään ympyrän keskipiste  $D$ .

Piirretään suora, joka kulkee ympyrän kehällä olevan pisteen  $A$  ja ympyrän keskipisteen  $D$  kautta. Merkitään ympyrän ja suoran leikkauspiste  $E$ . Piirretään jana  $AE$ , joka on ympyrän halkaisija.



Mitataan ympyrän halkaisijan pituus. Halkaisijan pituus on  $7,1$  (cm).

b) Piirretään mallikuva



Ratkaistaan kulma  $\alpha$  kosinilauseella.

$$7,0^2 = 4,0^2 + 5,0^2 - 2 \cdot 4,0 \cdot 5 \cdot \cos \alpha$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Rajataan kulma välille  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

$$\alpha = 101,53\dots^\circ$$

Kulma  $\alpha$  on kehäkulma ja samaa kaarta vastaava keskuskulma on

$$2\alpha = 2 \cdot 101,53\dots^\circ = 203,07\dots^\circ$$

Kulma  $\beta$  saadaan täyden kulman avulla.

$$\beta = 360^\circ - 203,07\dots^\circ = 156,92\dots^\circ$$

Ratkaistaan säde  $r$  kosinilauseella.

$$7,0^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos(156,92\dots^\circ)$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$r = -3,57\dots \text{ tai } r = 3,57\dots$$

Pituus on positiivinen luku, joten  $r = 3,57\dots$  cm.

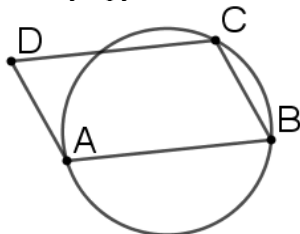
Ympyrän halkaisija on  $2r = 2 \cdot 3,57\dots \text{ cm} = 7,14\dots \text{ cm} \approx 7,1 \text{ cm}$ .

**Vastaus**

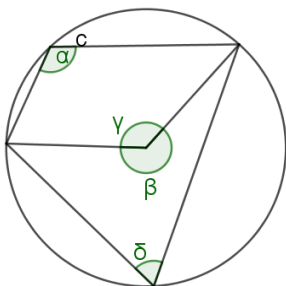
a) 7,1 cm      b) 7,1 cm

## 11.15

- a) Tutkimuksen perusteella näyttää, että jokaisen suorakulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä.  
 b) Ei voida. Esimerkiksi kuvan suunnikkaan  $ABCD$  ympärille ei voida piirtää ympyrää.



- c) Piirretään kuva.



Kulmat  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat samaa kaarta vastaavat kehäkulma ja keskuskulma. Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

$$\beta = 2\alpha$$

Kulmat  $\beta$  ja  $\gamma$  muodostavat täysikulman.

$$\gamma = 360^\circ - \beta = 360^\circ - 2\alpha$$

Kulmat  $\delta$  ja  $\gamma$  ovat samaa kaarta vastaavat kehäkulma ja keskuskulma. Kehäkulma on puolet keskuskulmasta.

$$\delta = \frac{\gamma}{2} = \frac{360^\circ - \beta}{2} = \frac{360^\circ - 2\alpha}{2} = 180^\circ - \alpha$$

Ratkaistaan vastakkaisten kulmien  $\alpha$  ja  $\delta$  summa.

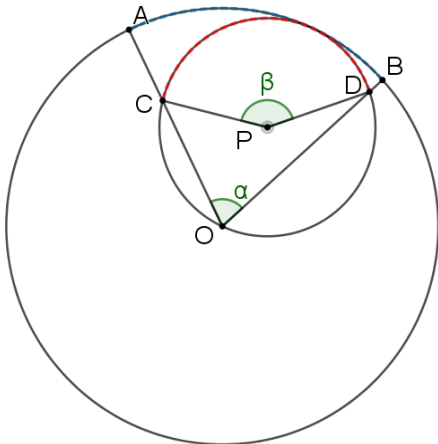
$$\alpha + \delta = \alpha + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$$

### Vastaus

- a) voidaan    b) ei voida  
 c) Kulmat ovat supplementtikulmat eli niiden summa on  $180^\circ$ .

## 11.16

Täydennetään kuvaa.



Olkoon  $P$ -keskisen ympyrän säde  $r$ . Tällöin  $O$ -keskisen ympyrän säde on  $2r$ .

Kulma  $\beta$  on  $P$ -keskisen ympyrän keskuskulma, ja samaa kaarta vastaava kehäkulma on  $\alpha$ . Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin kehäkulma.

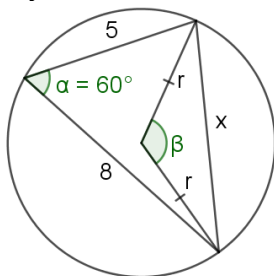
Tällöin kaaren  $CD$  pituus on  $\frac{\beta}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{2\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{4\alpha\pi r}{360^\circ}$ .

Kaaren  $AB$  pituus on  $\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 2r = \frac{4\alpha\pi r}{360^\circ}$ .

Siis kaaret  $AB$  ja  $CD$  ovat yhtä pitkät.  $\square$

## 11.17

Täydennetään kuvaa.



Ratkaistaan sivun  $x$  pituus kosinilauseella.

$$x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = -7 \text{ tai } x = 7$$

Pituus on positiivinen luku, joten  $x = 7$ .

Kulma  $\beta$  on keskuskulma. Samaa kaarta vastaavan kehäkulman suuruus on  $60^\circ$ . Keskuskulma on kaksi kertaa niin suuri kuin samaa kaarta vastaava kehäkulma.

$$\beta = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$$

Ratkaistaan ympyrä säde  $r$  kosinilauseella.

$$7^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 120^\circ \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$r = -\frac{7\sqrt{3}}{3} \text{ tai } r = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

Pituus on positiivinen luku, joten  $r = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ .

**Vastaus**

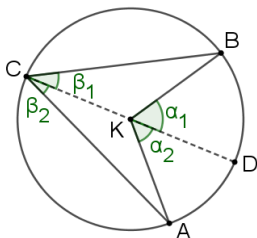
$$\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

## 11.18

Tutkitaan tapaukset yksi kerrallaan.

### Tapaus 1

Täydennetään kuvaa.



Kehäkulman  $\beta_1$  toinen kylki on ympyrän halkaisija  $CD$ . Kehäkulma, jonka toinen kylki on ympyrän halkaisija, on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\alpha_1$$

Kehäkulman  $\beta_2$  toinen kylki on myös ympyrän halkaisija  $CD$ .

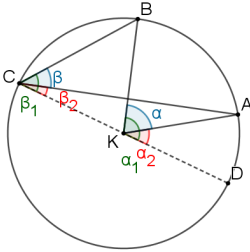
$$\beta_2 = \frac{1}{2}\alpha_2$$

$$\text{Kulma } \beta = \beta_1 + \beta_2 = \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1}{2}\alpha.$$

Siis kehäkulma  $\beta$  on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta  $\alpha$

## Tapaus 2

Täydennetään kuvaa.



Kehäkulman  $\beta_2$  toinen kylki on ympyrän halkaisija  $CD$  ja sitä vastaava keskuskulma on  $\alpha_2$ . Kehäkulma, jonka toinen kylki on ympyrän halkaisija, on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta.

$$\beta_2 = \frac{1}{2}\alpha_2$$

Kehäkulman  $\beta_2 + \beta$  toinen kylki on myös ympyrän halkaisija  $CD$ , ja sitä vastaava keskuskulma on  $\alpha_2 + \alpha$ .

$$\beta_2 + \beta = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha)$$

Ratkaistaan kulma  $\beta$ .

$$\beta_2 + \beta = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha)$$

$$\text{Sijoitetaan } \beta_2 = \frac{1}{2}\alpha_2.$$

$$\frac{1}{2}\alpha_2 + \beta = \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha \quad \left| -\frac{1}{2}\alpha_2 \right.$$

$$\beta = \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha_2$$

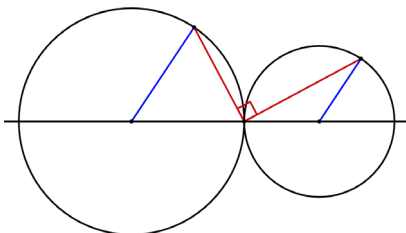
$$\beta = \frac{1}{2}\alpha$$

Siis kehäkulma  $\beta$  on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta  $\alpha$ .  
Tapausten 1 ja 2 perusteella kehäkulma  $\beta$  on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta  $\alpha$  myös tapauksissa, joissa kehäkulman kylki ei ole ympyrän halkaisija.  $\square$



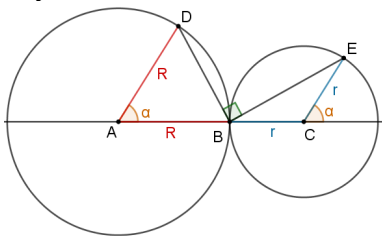
## 11.19

a) Piirretään kuva ohjeiden mukaisesti.



Mitataan janojen välinen kulma. Kulma on  $90^\circ$ .

b) Täydennetään kuvaa.



Yhdensuuntaisten säteiden  $R$  ja  $r$  sekä suoran väliset terävät kulmat ovat samankohlaisina kulmina yhtä suuret. Merkitään kulmia kirjaimella  $\alpha$ .

Pienempään ympyrään syntyvä kulma  $CBE$  on keskuskulmaa  $\alpha$  vastaava kehäkulma.

$$\sphericalangle CBE = \frac{\alpha}{2}$$

Suurempaan ympyrään syntyvä kulma  $DBA$  on tasakylkisen kolmion kantakulma.

$$\sphericalangle DBA = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

Ratkaistaan janojen välinen kulma. Vähennetään oikokulmasta  $180^\circ$  kulmat  $CBE$  ja  $DBA$ .

$$180^\circ - \sphericalangle CBE - \sphericalangle DBA = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 90^\circ$$

Janojen välinen kulma on  $90^\circ$ . On osoitettu, että janat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.  $\square$