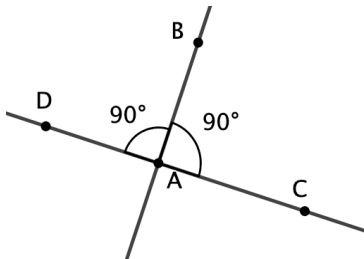
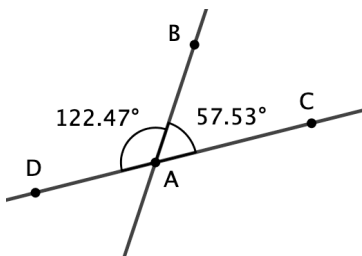


1.1

- a) Piirretään kaksi erisuuntaista suoraa AB ja AC .

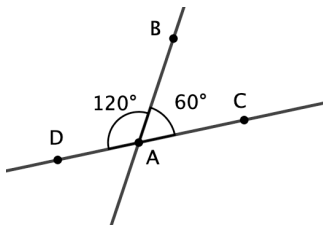
Mitataan kulman CAB suuruus.

Piirretään suoralle AC piste D ja mitataan kulman BAD suuruus.



Kun kulma ja sen vieruskulma ovat yhtä suuret, niiden suuruus on 90° .

- b) Kun kulman suuruus on puolet vieruskulman suuruudesta, sen suuruus on 60° .



Vastaus

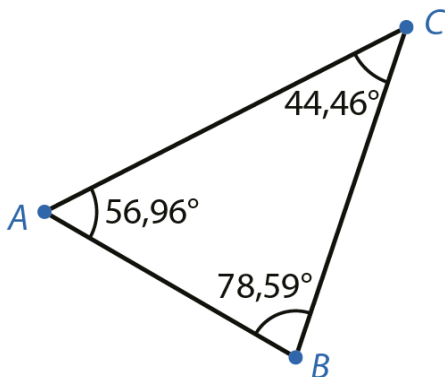
a) 90°

b) 60°

1.2

- a) Piirretään pisteet A , B ja C .

Yhdistetään pisteet toisiinsa janoilla tai piirretään monikulmio ABC .
Mitataan kulmien suuruudet.



Lasketaan kulmat yhteen.

$$56,96^\circ + 78,59^\circ + 44,46^\circ = 180^\circ$$

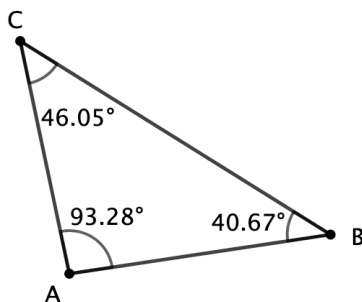
Kulmien summa näyttäisi olevan 180° .

Huomaa, että yksittäisten kulmien suuruudet riippuvat siitä millaisen kolmion olet piirtänyt.

- b) Siirretään pisteitä ja lasketaan kulmat yhteen.

$$93,28^\circ + 40,67^\circ + 46,05^\circ = 180^\circ$$

Kulmien summa vaikuttaisi olevan aina 180° .

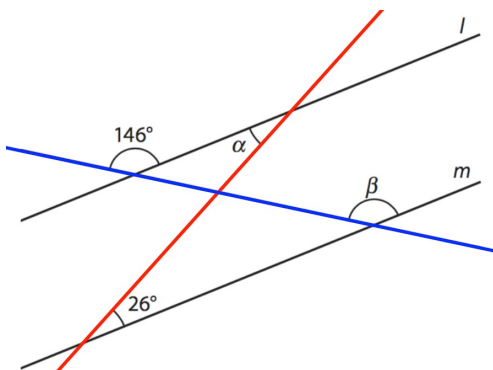


Vastaus

- a) Kulmien summa on 180° .
b) Kulmien summa vaikuttaisi olevan aina 180° .

1.3

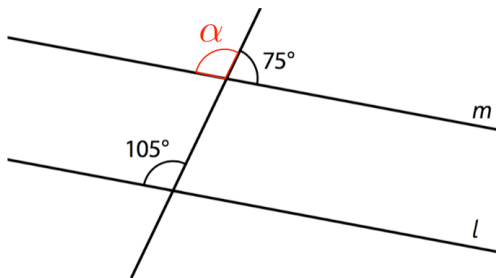
a)



Punainen leikkaava suora on kulman α ja kulman 26° vasen kylki, joten ne ovat samankohtaiset kulmat. Täten $\alpha = 26^\circ$.

Sininen leikkaava suora on kulman β ja kulman 146° vasen kylki, joten ne ovat samankohtaiset kulmat. Täten $\beta = 146^\circ$

b) Kuvaan merkitty kulma α ja kulma 105° ovat samankohtaiset kulmat. Tutkitaan, ovatko ne myös yhtä suuret.



Kulma α on kulman 75° vieruskulma, joten $\alpha = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

Koska samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset.

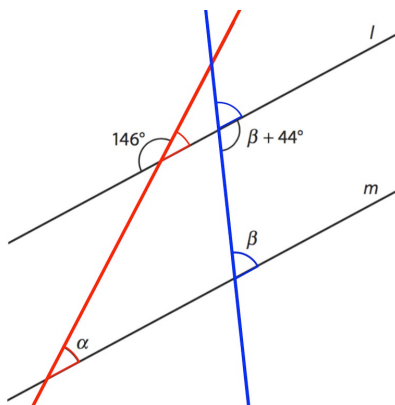
Vastaus

a) $\alpha = 26^\circ$ ja $\beta = 146^\circ$

b) ovat

1.4

a)



Punainen leikkaava suora on kulman α vasen kylki ja kulman 146° oikea kylki, joten kulman α kanssa samankohtainen kulma on kulman 146° vieruskulma.

Täten $\alpha = 180^\circ - 146^\circ = 34^\circ$.

Sininen leikkaava suora on kulman β vasen kylki ja kulman $\beta + 44^\circ$ oikea kylki, joten kulman β kanssa samankohtainen kulma on kulman $\beta + 44^\circ$ vieruskulma.

Lasketaan kulman β suuruus.

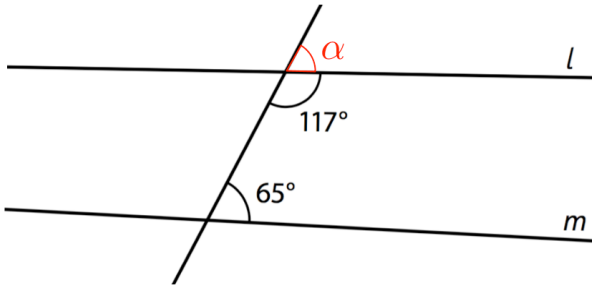
$$\beta = 180^\circ - (\beta + 44^\circ)$$

$$\beta = 180 - \beta - 44^\circ \quad | + \beta$$

$$2\beta = 136^\circ \quad | : 2$$

$$\beta = 68^\circ$$

- b) Kuvaan merkitty kulma α ja kulma 65° ovat samankohtaisia kulmia. Tutkitaan, ovatko ne myös yhtä suuret.



Kulma α on kulman 117° vieruskulma, joten $\alpha = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$.

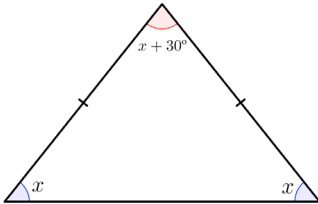
Koska samankohtaiset kulmat 65° ja 63° eivät ole yhtä suuret, suorat l ja m eivät ole yhdensuuntaiset.

Vastaus

- a) $\alpha = 34^\circ$ ja $\beta = 68^\circ$
b) eivät ole

1.5

- a) Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Merkitään kantakulman suuruutta kirjaimella x . Tällöin huippukulman suuruus on $x + 30^\circ$.



Kolmion kulmien summa on 180° . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kantakulmien suuruus x .

$$x + x + (x + 30^\circ) = 180^\circ$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

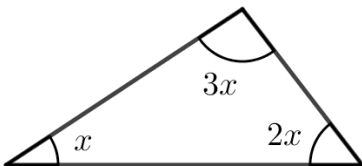
$$x = 50^\circ$$

Lasketaan huippukulman suuruus.

$$x + 30^\circ = 50^\circ + 30^\circ$$

$$= 80^\circ$$

- b) Merkitään kulmat suuruusjärjestyksessä x , $2x$ ja $3x$.



Kolmion kulmien summa on 180° .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulman suuruus x .

$$x + 2x + 3x = 180^\circ$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 30^\circ$$

Lasketaan kolmion muut kulmat.

$$2x = 2 \cdot 30^\circ$$

$$= 60^\circ$$

$$3x = 3 \cdot 30^\circ$$

$$= 90^\circ$$

Vastaus

- a) 50° , 50° ja 80°

- b) 30° , 60° ja 90°

1.6

Kulma α on terävä, jos $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

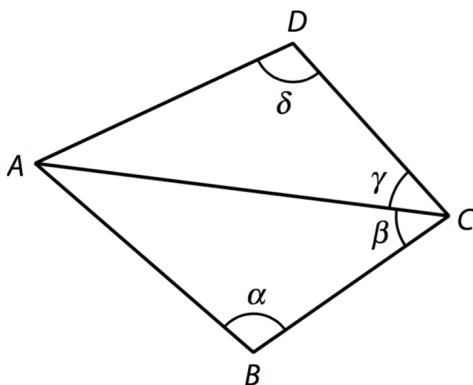
Kulma α on tylppä, jos $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Kulma α on kovera, jos $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Kulma α on kupera, jos $180^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Terävä kulma	Tylppä kulma	Kovera kulma	Kupera kulma
25°	95°	25°	183°
65°	155°	65°	210°
85°	177°	85°	350°
		90°	
		95°	
		155°	
		177°	

1.7



- a) Kärjessä B on kulma α , joten $\sphericalangle CBA = \alpha$.
- b) Kärjessä D on kulma δ , joten $\sphericalangle ADC = \delta$.
- c) Kärjessä C on kaksi kulmaa. Näistä kulmista β on se kulma, jonka kyljillä on pisteet A ja B . Siis $\sphericalangle ACB = \beta$.
- d) Kärjessä C olevista kulmista γ on se kulma, jonka kyljillä on pisteet A ja D . Siis $\sphericalangle DCA = \gamma$.

Vastaus

- a) $\sphericalangle CBA = \alpha$
b) $\sphericalangle ADC = \delta$
c) $\sphericalangle ACB = \beta$
d) $\sphericalangle DCA = \gamma$

1.8

- a) Arkistokatu ja Maaherrankatu ovat yhdensuuntaiset.

Väite siis pitää paikkansa.

- b) Pirttiniemenkatu ja Tenholankatu eivät ole yhdensuuntaisia.

Väite ei siis pidä paikkaansa.

- c) Olkkolankatu ja Tenholankatu eivät ole yhdensuuntaisia.

Väite siis pitää paikkansa.

- d) Olkkolankatu ja Arkistokatu ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Väite siis pitää paikkansa.

- e) Olkkolankatu ja Kansankatu ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Väite siis pitää paikkansa.

- f) Tehnolankatu ja Maaherrankatu eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

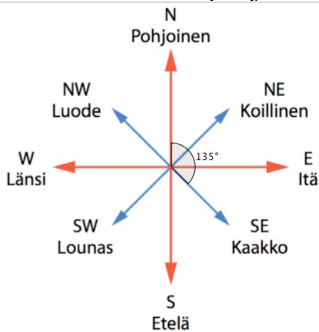
Väite ei siis pidä paikkaansa.

Vastaus

- a) tosi
- b) epätosi
- c) tosi
- d) tosi
- e) tosi
- f) epätosi

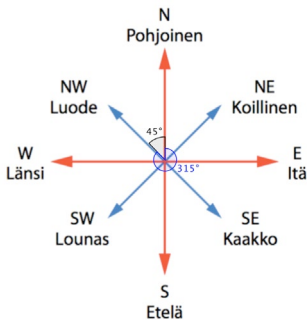
1.9

- a) Kierretään 135° pohjoisesta myötäpäivään.

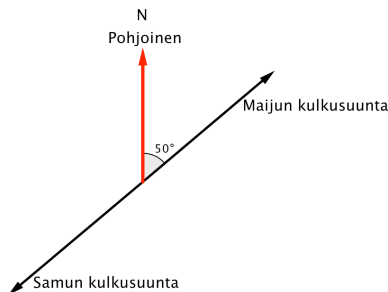


Eemeli kulkee kaakkoon.

- b) Luoteen ja pohjoisen välinen kulma on 45° . Kompassisuunta luoteeseen on siis $360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$.



- c) Maijun kulkee kompassisuuntaan 50° .
Samu kävelee vastakkaiseen suuntaan.



Samun kävelee siis kompassisuuntaan $50^\circ + 180^\circ = 230^\circ$.

Vastaus

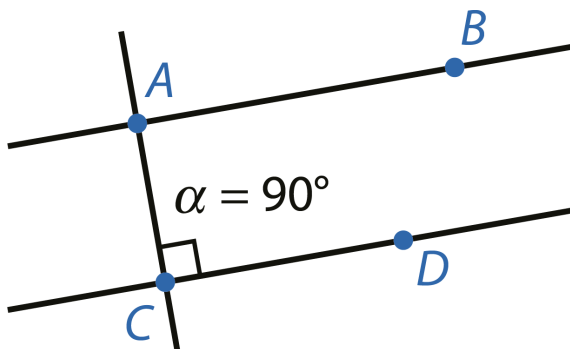
- a) kaakkoon b) 315° c) 230°

1.10

Piirretään suora AB ja sille normaali pisteen A kautta.

Merkitään normaalille piste C ja piirretään pisteen C kautta suoran AB kanssa yhdensuuntainen suora.

Mitataan pisteen C kautta kulkevien suorien välisen kulman suuruus. Koska suorien välinen kulma on 90° , suorat ovat toistensa normaaleja.



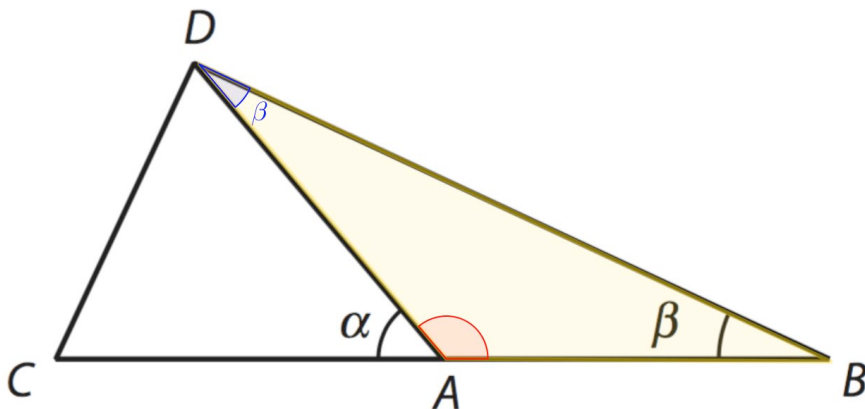
Suorat ovat toistensa normaaleja, vaikka pisteitä siirtäisikin.

Vastaus

Suorat ovat toistensa normaaleja.

1.11

- a) Koska $AD = AB$, niin kolmio ABD on tasakylkinen. Siten kantakulmat ADB ja DBA ovat yhtä suuret: $\sphericalangle ADB = \beta$.



Lasketaan huippukulman BAD suuruus kolmion kulmien summan perusteella.

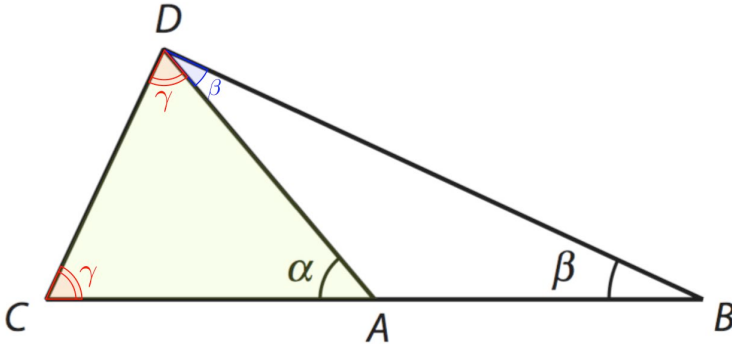
$$\sphericalangle BAD = 180^\circ - \beta - \beta = 180^\circ - 2\beta.$$

Kulma α on kulman BAD vieruskulma, joten sen suuruus on

$$\begin{aligned}\alpha &= 180^\circ - (180^\circ - 2\beta) \\ &= 180^\circ - 180^\circ + 2\beta \\ &= 2\beta\end{aligned}$$

On siis osoitettu, että $\alpha = 2\beta$. $\square$

- b) Koska $AC = AD$, niin kolmio CAD on tasakylkinen. Siten kantakulmat ACD ja CDA ovat yhtä suuret. Merkitään kulmia kirjaimella γ .



Lasketaan kulman γ suuruus kolmion kulmien summan perusteella.

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{180^\circ - \alpha}{2} & | \alpha &= 2\beta \\ &= \frac{180^\circ - 2\beta}{2} \\ &= 90^\circ - \beta\end{aligned}$$

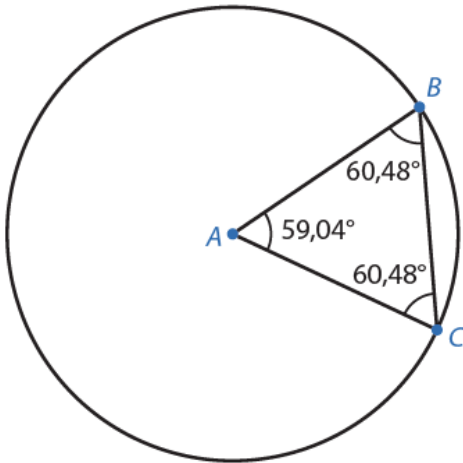
Lasketaan kulman CDB suuruus.

$$\begin{aligned}\sphericalangle CDB &= \beta + \gamma & | \gamma &= 90^\circ - \beta \\ &= \beta + 90^\circ - \beta \\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

On siis osoitettu, että kulma CDB on suora. $\square$

1.12

a) Piirretään kuva.



Kulmat B ja C ovat yhtä suuret.

b) Siirretään pisteitä. Havainto pätee edelleen.

c) Kolmio ABC on tasakylkinen (sivut AB ja AC ovat ympyrän säteen mittaisia), joten kantakulmat B ja C ovat yhtä suuret.

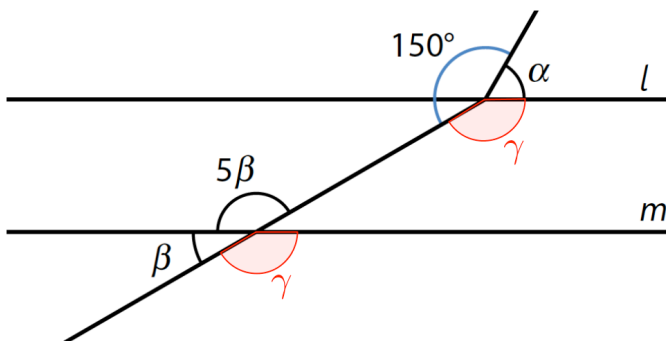
Vastaus

a) Kulmat B ja C ovat yhtä suuret.

b) Havainto pätee edelleen.

1.13

- a) Koska suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset, kuvaan merkityt samankohtaiset kulmat γ ovat yhtä suuret.



Kulmat β ja 5β ovat vieruskulmat. Ratkaistaan kulma β .

$$\beta + 5\beta = 180^\circ$$

$$6\beta = 180^\circ \quad |:6$$

$$\beta = 30^\circ$$

Kulmat γ ja 5β ovat ristikulmina yhtä suuret.

$$\gamma = 5\beta = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$$

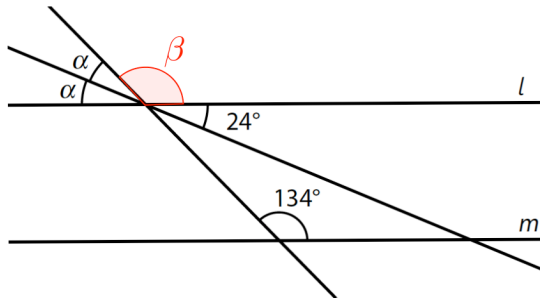
Kulmat α , γ ja 150° muodostavat täyden kulman. Lasketaan kulman α suuruus.

$$\alpha = 360^\circ - 150^\circ - \gamma$$

$$= 360^\circ - 150^\circ - 150^\circ$$

$$= 60^\circ$$

b) Tutkitaan, ovatko samankohtaiset kulmat β ja 134° yhtä suuret.



Kulmat α ja 24° ovat ristikulmina yhtä suuret eli $\alpha = 24^\circ$.

Muodostetaan oikokulman avulla yhtälö ja ratkaistaan kulma β .

$$\begin{aligned}\alpha + \alpha + \beta &= 180^\circ \\ 24^\circ + 24^\circ + \beta &= 180^\circ \\ 48^\circ + \beta &= 180^\circ \quad | -48^\circ \\ \beta &= 132^\circ\end{aligned}$$

Koska $\beta = 132^\circ \neq 134^\circ$, niin suorat l ja m eivät olet yhdensuuntaiset.

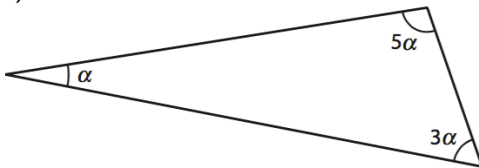
Vastaus

a) $\alpha = 60^\circ$ ja $\beta = 30^\circ$

b) eivät ole

1.14

a)



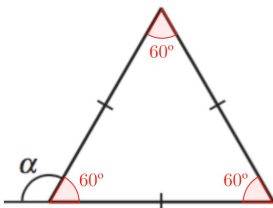
Kolmion kulmien summa on 180° . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulman α suuruus.

$$\alpha + 5\alpha + 3\alpha = 180^\circ$$

Ratkaistaan CAS-laskimella

$$\alpha = 20^\circ$$

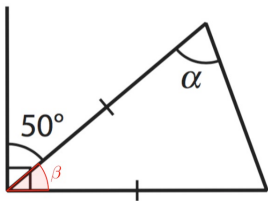
b) Kolmio on tasasivuinen, joten sen jokainen kulma on 60° . Kulma α on kolmion kulman vieruskulma.



Lasketaan kulman α suuruus.

$$\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

c) Merkitään tasakylkisen kolmion huippukulmaa kirjaimella β .



Lasketaan kulman β suuruus.

$$\beta = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

Kolmion kulmien summa on 180° . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulman α suuruus.

$$\alpha + \alpha + 40^\circ = 180^\circ$$

Ratkaistaan CAS-laskimella

$$\alpha = 70^\circ$$

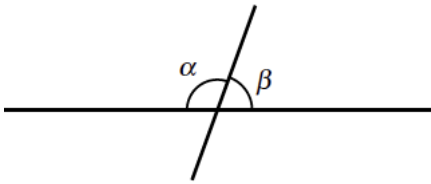
Vastaus

a) 20°

b) 120°

c) 70°

1.15



Koska kulmien suhde on $\alpha : \beta = 11 : 7$, voidaan merkitä $\alpha = 11x$ ja $\beta = 7x$.

Vieruskulmien summa on 180° . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulmien suuruudet.

$$11x + 7x = 180^\circ$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella](#)

$$x = 10^\circ$$

Lasketaan kulmien suuruudet.

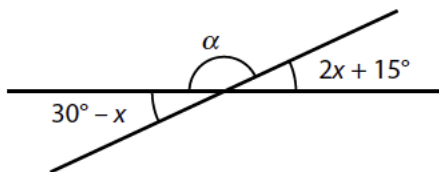
$$\alpha = 11 \cdot 10^\circ = 110^\circ$$

$$\beta = 7 \cdot 10^\circ = 70^\circ$$

Vastaus

$$\alpha = 110^\circ \text{ ja } \beta = 70^\circ$$

1.16



Ristikulmat ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\begin{array}{rcl} 30^\circ - x = 2x + 15^\circ & | -2x \\ 30^\circ - 3x = 15^\circ & | -30^\circ \\ -3x = -30^\circ & | : (-3) \\ x = 5^\circ \end{array}$$

Kulma α on kulman $30^\circ - x$ vieruskulma. Lasketaan kulman α suuruus.

$$\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ - (30^\circ - x) \\ &= 180^\circ - (30^\circ - 5^\circ) \\ &= 155^\circ \end{aligned}$$

Vastaus

155°

1.17

- a) Täysi kierros on 360° , joten tuntiviisari kiertää yhdessä tunnissa

$$\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ. \text{ Viisareiden välinen kulma on siis } 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ.$$



- b) Puolessa tunnissa tuntiviisarin kiertymä on 15° .

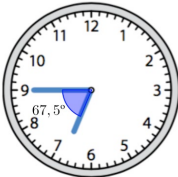
Viisareiden välinen kulma on siis $30^\circ + 30^\circ + 15^\circ = 75^\circ$.



- c) 15 minuuttia eli neljäsosatuntia vastaava tuntiviisarin kiertymä on

$$\frac{30^\circ}{4} = 7,5^\circ.$$

Viisareiden välinen kulma on siis $30^\circ + 30^\circ + 7,5^\circ = 67,5^\circ$.



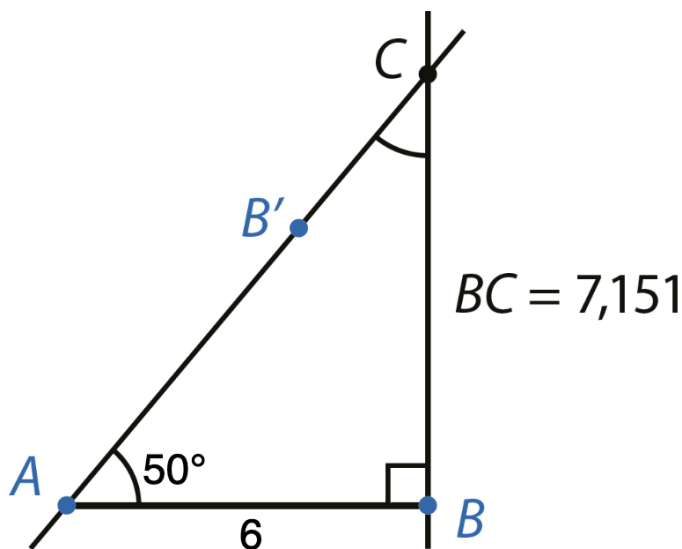
- d) 5 minuuttia vastaava tuntiviisarin kiertymä on $\frac{30^\circ}{12} = 2,5^\circ$. Viisareiden välinen kulma on siis $30^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 2,5^\circ = 92,5^\circ$.



Vastaus

a) 60° b) 75° c) $67,5^\circ$ d) $92,5^\circ$

1.18



Piirretään jana, jonka pituus on 6. Piirretään janan toiseen päätepisteeseen normaali ja toiseen päätepisteeseen kulma, jonka suuruus on 50° . Merkitään kulman kyljen ja normaalin leikkauspiste.

Viljasiilon korkeus saadaan janan BC pituus.

Viljasiilon korkeus yhden desimaalin tarkkuudella on 7,2 m.

Vastaus

7,2 m

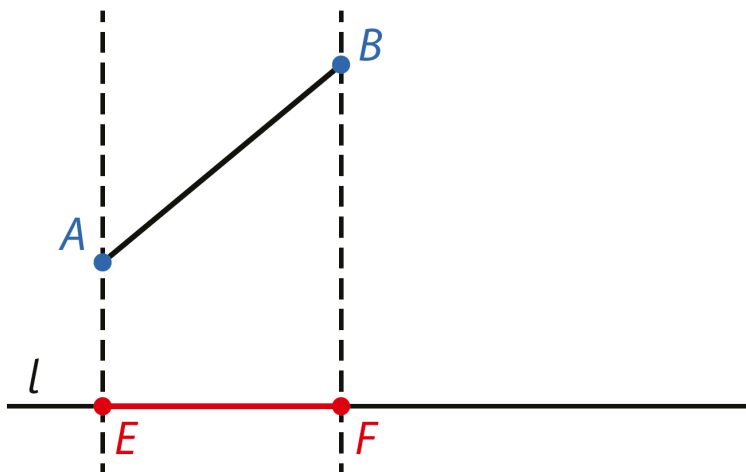
1.19

- a) Piirretään jana AB . Piirretään suora l .

Piirretään suoralle l kaksi normaalia, toinen pisteen A kautta ja toinen pisteen B kautta. Merkitään normaalien ja suoran l leikkauspisteet.

Leikkauspiste E on pisteen A kohtisuora projektio ja leikkauspiste F pisteen B .

- b) Janan AB kohtisuora projektio on jana EF . Piirretään jana EF .



1.20

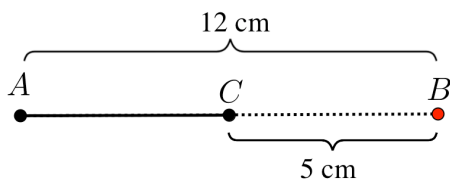
a) Piirretään mallikuva.



Lasketaan janan AC pituus.

$$\begin{aligned} AC &= AB + BC \\ &= 12 + 5 \\ &= 17 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

b) Piirretään mallikuva.



Lasketaan janan AC pituus.

$$\begin{aligned} AC &= AB - CB \\ &= 12 - 5 \\ &= 7 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

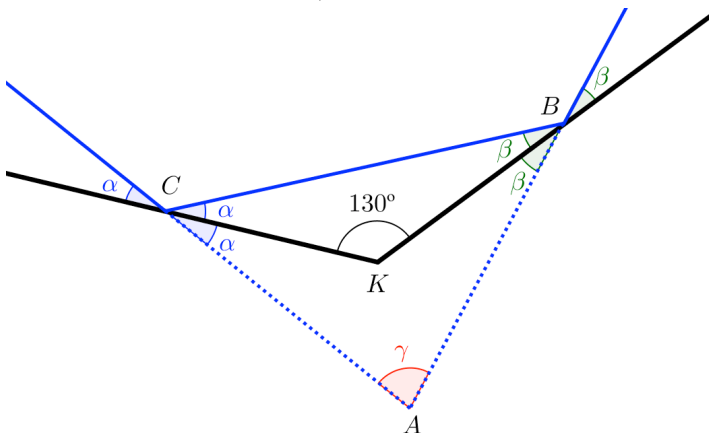
Vastaus

a) $AC = 17 \text{ cm}$

b) $AC = 7 \text{ cm}$

1.21

Valonsäde heijastuu peilistä samassa kulmassa kuin missä se tulee peiliin. Piirretään mallikuva ja käytetään kuvan merkintöjä. Tulevan ja lähtevän säteen välinen kulma on γ .



Kolmion KBC kulmien summasta saadaan yhteys kulmien α ja β välille.

$$\alpha + \beta + 130^\circ = 180^\circ \quad | -130^\circ$$

$$\alpha + \beta = 50^\circ \quad | -\beta$$

$$\beta = 50^\circ - \alpha$$

Muodostetaan yhtälö kolmion ABC kulmien summan perusteella ja ratkaistaan säteiden välinen kulma γ

$$2\beta + 2\alpha + \gamma = 180^\circ \quad | -2\beta - 2\alpha$$

$$\gamma = 180^\circ - 2\beta - 2\alpha \quad | \beta = 50^\circ - \alpha$$

$$= 180^\circ - 2(50^\circ - \alpha) - 2\alpha$$

$$= 180^\circ - 100^\circ + 2\alpha - 2\alpha$$

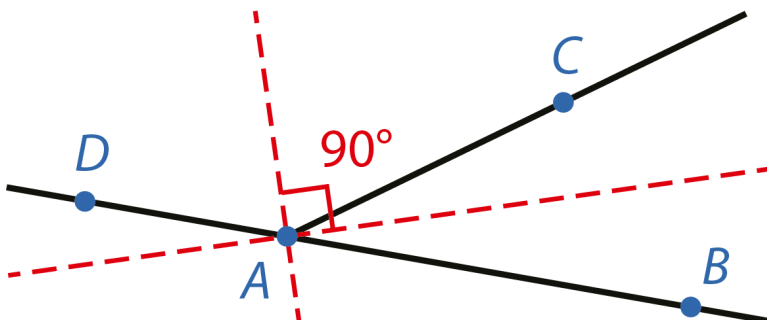
$$= 80^\circ$$

Vastaus

80°

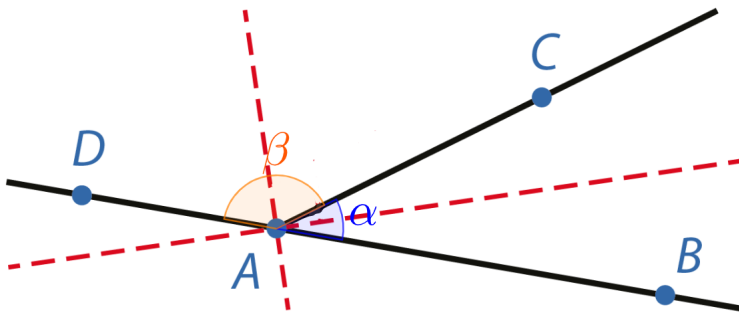
1.22

- a) Piirretään kuva tehtävänannon ohjeiden mukaan ja mitataan kulmanpuolittajien välinen kulma.



Kulmanpuolittajien välinen kulma näyttäisi olevan aina suora eli 90° .

- b) Merkitään puolisuoran ja suoran AB muodostamia vieruskulmia kirjaimilla α ja β .



Vieruskulmien summa on 180° : $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Lasketaan kulmanpuolittajien välinen kulma $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$.

$$\alpha + \beta = 180^\circ \quad | : 2$$

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ$$

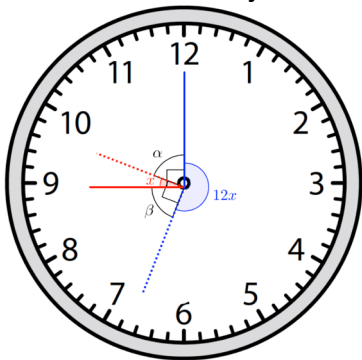
On siis osoitettu, että kulmanpuolittajien välinen kulma on 90° . $\square$

Vastaus

- a) Kulmanpuolittajien välinen kulma näyttäisi olevan suora eli 90° .

1.23

- a) Appletin mukaan osoittimet ovat seuraavan kerran kohtisuorassa klo 9.33.
- b) Osoittimet ovat kohtisuorassa seuraavan kerran ennen kello 10.00. Merkitään tuntiviisarin kiertymää kirjaimella x . Samassa ajassa minuuttiviisarin kiertymä on $12x$.



Kulma $\alpha = 90^\circ - x$ ja kulma $\beta = 90^\circ - x$.

Kulmat α , β , x ja $12x$ muodostavat täyden kulman 360° .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulma x .

$$\alpha + \beta + x + 12x = 360^\circ \quad \left| \begin{array}{l} \alpha = 90^\circ - x \\ \beta = 90^\circ - x \end{array} \right.$$

$$90^\circ - x + 90^\circ - x + x + 12x = 360^\circ$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = \frac{180^\circ}{11}$$

Tuntiviisari kiertyy yhdessä tunnissa kulman $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.

Lasketaan kiertymää $x = \frac{180^\circ}{11}$ vastaava aika (yksi tunti on 3600 s).

$$\frac{\frac{180^\circ}{11}}{30^\circ} \cdot 3600 \text{ s} = 1963,6363... \text{ s} \approx 1964 \text{ s} = 32 \text{ min } 44 \text{ s}$$

Osoittimet ovat seuraavan kerran kohtisuorassa kello 09.32.44.

Vastaus

a) 09.33

b) 09.32.44