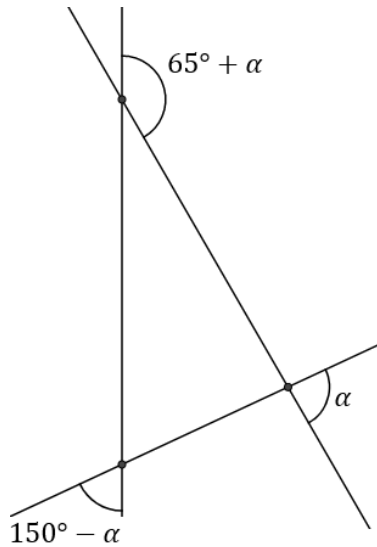


MAA3 Geometria KOE 27.5.2025 MALLIVASTAUKSIA

1. Ratkaise kulman α suuruus.



a)

Ratkaisu:

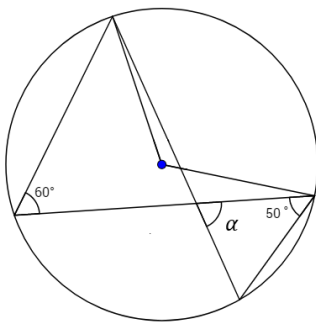
Kulman α ristikulma, kulman $150^\circ - \alpha$ ristikulma ja kulman $65^\circ + \alpha$ vieruskulma muodostavat kolmion kulmat. Eli $\alpha + (150^\circ - \alpha) + 180^\circ - (65^\circ + \alpha) = 180^\circ$

$$\alpha + 150^\circ - \alpha + 180^\circ - 65^\circ - \alpha = 180^\circ \quad || -180^\circ$$

$$-\alpha + 85^\circ = 0$$

$$\alpha = 85^\circ$$

Vastaus: $\alpha = 85^\circ$



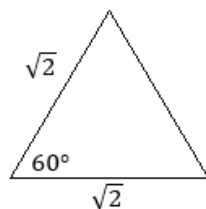
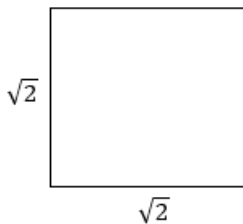
b) *Ratkaisu:* Kysytty kulma on kolmion yksi kulma. Kolmion muut kulmat ovat 50° ja 60° eli samaa kaarta vastaava kehäkulma, kuin kulma 60° . Täten $\alpha = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$

Vastaus: $\alpha = 70^\circ$

2. Neliön ja tasasivuisen kolmion sivun pituudet ovat samat. Neliön pinta-ala on 2. Ratkaise kolmion pinta-alan tarkka arvo.

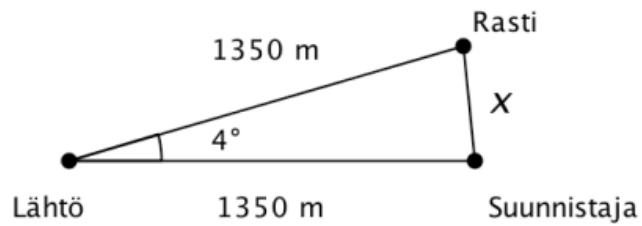
Ratkaisu: Neliön pinta-alan ollessa 2, on sen sivun pituus ja samalla kolmion sivun pituus oltava $\sqrt{2}$. Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat 60° , joten kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \sqrt{2} \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Vastaus: $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.



Lasketaan suunnistajan ja rastin välinen etäisyys x kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$x^2 = 1350^2 + 1350^2 - 2 \cdot 1350 \cdot 1350 \cdot \cos 4^\circ \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$x = -94,22\dots \text{ tai } x = 94,22\dots$$

Etäisyys on positiivinen luku, joten $x = 94,22\dots \text{ m} \approx 94 \text{ m}$.

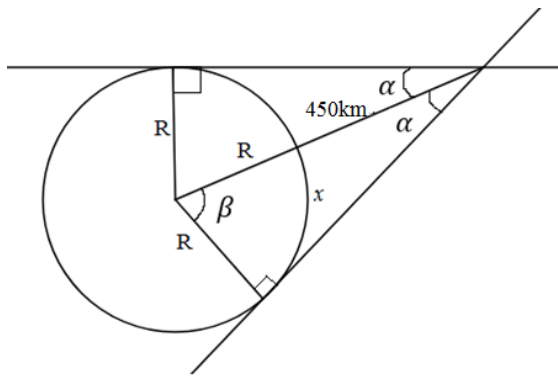
Suunnistaja on 94 metrin päässä rastista.

4. Maapallon ympärysmitta on 40 000km. Satelliitti on 450 km korkeudella maanpinnasta.

a) Missä kulmassa maapallo näkyy satelliitista?

b) Voidaanko satelliitista teoriassa nähdä yhtä aikaa Helsinki ja Lissabon, kun kaupunkien etäisyys toisistaan linnuntietä on 3365km?

Ratkaisu: a) Näkökulma on satelliitilta maapallolle piirrettyjen tangenttien välinen kulma.



Lasketaan ensin maapallon säde ja sitten kysytty kulma.

$$\begin{aligned} 2\pi R &= 40000 \\ R &= \frac{40000}{2\pi} \\ \sin \alpha &= \frac{R}{R + 450} = \frac{\frac{40000}{2\pi}}{\frac{40000}{2\pi} + 450} \\ \sin \alpha &= \frac{40000}{40000 + 900\pi} \\ \alpha &= 69,0641 \dots^\circ \\ 2\alpha &= 138,128 \dots^\circ \\ 2\alpha &\approx 138^\circ \end{aligned}$$

b) Lasketaan kaarta x vastaavan keskuskulman suuruus β

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{\frac{40000}{2\pi}}{\frac{40000}{2\pi} + 450} \\ \beta &= 20,9358 \dots^\circ \\ \beta &\approx 20,936^\circ \end{aligned}$$

Lasketaan kaaren pituus x ja sitten koko satelliitin näkyvyysalueen kaaren pituus 2x

$$\begin{aligned} x &= \frac{20,936^\circ}{360^\circ} \cdot 40\,000 \text{ km} \\ x &= 2326,222 \dots \text{ km} \end{aligned}$$

$2x = 4652,444 \dots \text{ km} > 3365 \text{ km}$ eli voidaan nähdä

Vastaus: a) 138° b) Voidaan nähdä

5. a) Ympyrän ja neliön pinta-alat ovat yhtä suuret. Mikä on ympyrän säteen suhde neliön sivun pituuteen.
b) Ympyrän säde ja neliön sivun pituus ovat yhtä suuret. Mikä on niiden pinta-alojen suhde?

Ratkaisu:

- a) Olkoon ympyrän säde r ja neliön sivu x . Tällöin $\pi r^2 = x^2$

$$\begin{aligned}\frac{r^2}{x^2} &= \frac{1}{\pi} \\ \frac{r}{x} &= \pm \sqrt{\frac{1}{\pi}} \\ \frac{r}{x} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ (ei voi olla negatiivinen)}\end{aligned}$$

- b) Olkoon ympyrän säde r ja neliön sivu myös r .

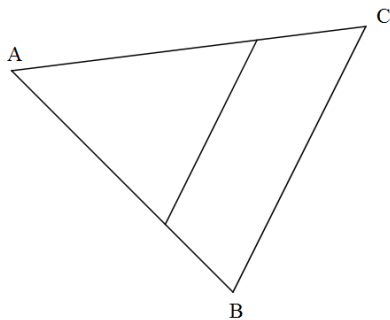
Pinta-alojen suhde on nyt $\frac{\pi r^2}{r^2} = \frac{\pi}{1} = \pi$

Vastaus: a) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ b) π

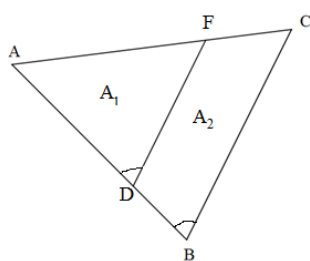
6. Kolmion ABC muotoinen pelto jaetaan kahteen yhtä suureen osaan sivun BC suuntaisella raja-aidalla. Sivun AB pituus on 68m.

a) Kuinka kauas kärjestä A aidan toinen pää sivulla AB sijoittuu?

b) Jos sivun AC pituus on 75m, niin kuinka kauas kärjestä C aidan toinen pää sijoittuu?



Ratkaisu:



Merkitään aidan päitä pistein D ja F. Kolmioilla ABC ja ADF on yksi yhteinen kulma A ja kulmat FDA ja CBA ovat samankohtaiset kulmat joten ne ovat yhtä suuret. Näin ollen kolmiot ABC ja ADF ovat yhdenmuotoiset (kk).

a) Kysytty pituus on janan AD pituus. Kolmioiden pinta-alojen suhde on yhtä suuri kuin vastinsivujen janojen pituuksien suhteen neliö, joten

$$\frac{A_1}{A_1 + A_2} = \left(\frac{|AD|}{|AB|} \right)^2 \quad (|AB| = 68, A_1 = A_2)$$

$$\frac{A_1}{2A_1} = \left(\frac{|AD|}{68} \right)^2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|AD|^2}{68^2}$$

$$|AD|^2 = \frac{1}{2} \cdot 68^2$$

$$|AD| = \pm \sqrt{\frac{68^2}{2}}$$

$$|AD| = 48,0832 \dots (|AD| > 0)$$

$$|AD| \approx 48$$

b) Vastinsivujen suhde on pinta-alojen suhteen neliöjuuri eli $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{Nyt } \frac{|AF|}{|AC|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{eli } \frac{|AC| - |FC|}{|AC|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{75 - |FC|}{75} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} \cdot 75 - \sqrt{2}|FC| = 75$$

$$-\sqrt{2}|FC| = 75 - \sqrt{2} \cdot 75$$

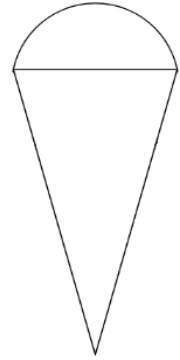
$$|FC| = \frac{75 - \sqrt{2} \cdot 75}{-\sqrt{2}}$$

$$|FC| = 21,9669 \dots$$

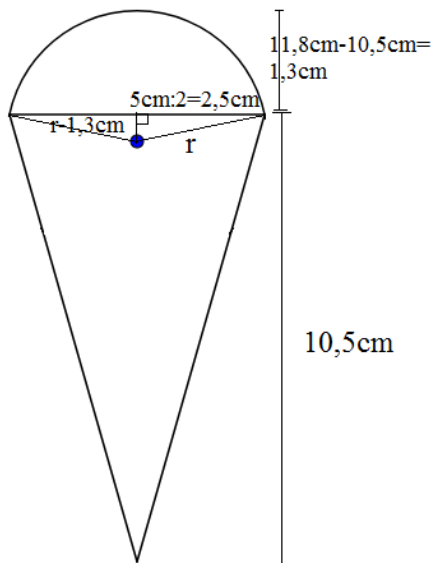
$$|FC| \approx 22$$

Vastaus: a) 48m b) 22m

7. Jäätelötuutti on suoran ympyräkartion ja sen päällä olevan pallosegmentin muotoinen kappale täynnä jäätelöä. Tuutin kokonaiskorkeus on 11,8cm, kartion korkeus 10,5cm ja kartion pohjaympyrän halkaisija 5,0cm. Kuinka monta desilitraa tuutissa on jäätelöä?



Ratkaisu:



Ratkaistaan pallosegmentin säde r Pythagoraan lauseella

$$r^2 = 2,5^2 + (r - 1,3)^2$$

$$r^2 = 2,5^2 + r^2 - 2,6r + 1,69$$

$$2,6r = 2,5^2 + 1,69$$

$$r = \frac{7,94}{2,6}$$

Lasketaan sitten pallosegmentin ja ympyräkartion tilavuudet ja lasketaan yhteen:

$$V_{\text{pallosegmentti}} = \pi \cdot 1,3^2 \left(\frac{7,94}{2,6} - \frac{1,3}{3} \right) = 13,9130 \dots$$

$$\approx 13,913$$

$$V_{\text{ympyräkartio}} = \frac{1}{3} \pi \cdot 2,5^2 \cdot 10,5 = 68,7223 \dots \approx 68,72$$

Eli kokonaistilavuus on $13,913\text{cm}^3 + 68,72\text{cm}^3 = 82,633\text{cm}^3 \approx 83\text{cm}^3 = 0,083\text{dm}^3$
 $= 0,083\text{l} = 0,83\text{dl}$

Vastaus: 0,83dl