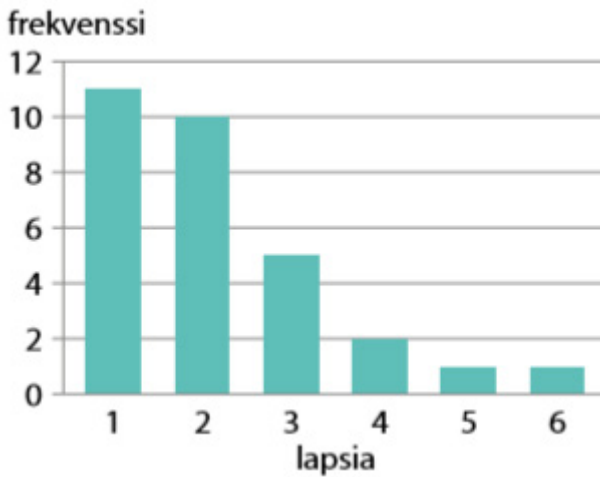


173

a)

lapsia	frekvenssi
1	11
2	10
3	5
4	2
5	1
6	1
	30

b)



174

Katsotaan frekvenssit taulukosta ja lasketaan suhteelliset frekvenssit.

Esim. kun frekvenssi $f = 4$, suhteellinen frekvenssi saadaan

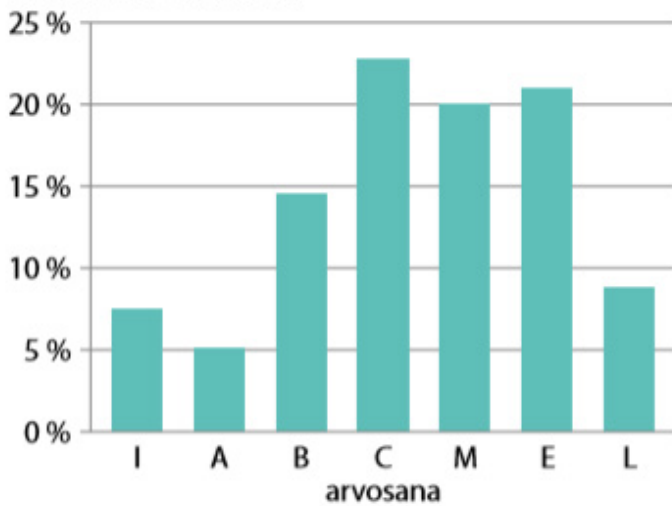
$$\frac{4}{16} = 0,250 = 25,0 \, \%.$$

muuttuja	f	$f \%$
11	4	25,0
12	2	12,5
13	5	31,3
14	3	18,8
15	2	12,5
yhteensä	16	100

175

arvosana	f	$f \%$
I	43	$\frac{43}{567} \approx 0,076 = 7,6 \%$
A	29	$\frac{29}{567} \approx 0,051 = 5,1 \%$
B	83	$\frac{83}{567} \approx 0,146 = 14,6 \%$
C	129	$\frac{129}{567} \approx 0,228 = 22,8 \%$
M	114	$\frac{114}{567} \approx 0,201 = 20,1 \%$
E	119	$\frac{119}{567} \approx 0,210 = 21,0 \%$
L	50	$\frac{50}{567} \approx 0,088 = 8,8 \%$
	567	100 %

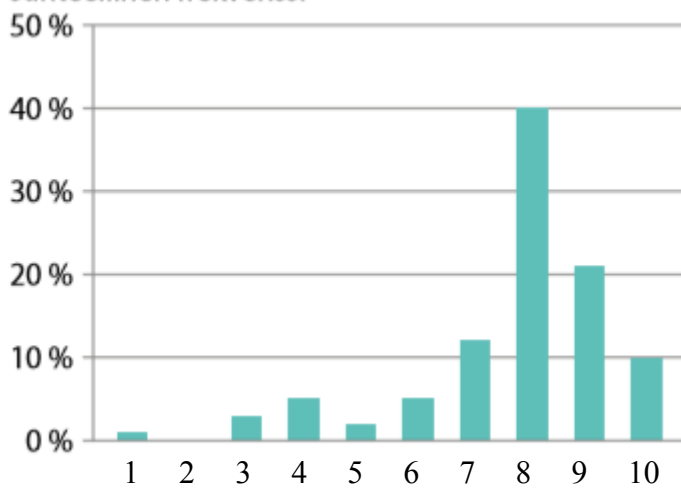
suhteellinen frekvenssi



176

pistemäärä	f	$f\%$
1	2	1,3
2	0	0,0
3	5	3,2
4	7	4,5
5	3	1,9
6	8	5,2
7	19	12,3
8	62	40,3
9	32	20,8
10	16	10,4
yhteensä	154	100

suhteellinen frekvenssi



177

Lasketaan havaintoarvojen keskiarvo.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{-3^{\circ}\text{C} + (-5^{\circ}\text{C}) + 0^{\circ}\text{C} + 1^{\circ}\text{C} + 4^{\circ}\text{C} + (-8^{\circ}\text{C}) + (-12^{\circ}\text{C})}{7} \\ &= \frac{-23^{\circ}\text{C}}{7} = -3,285\dots^{\circ}\text{C} \approx -3,3^{\circ}\text{C}\end{aligned}$$

Vastaus $-3,3^{\circ}\text{C}$

178

Lasketaan arvosanojen keskiarvo.

Tapa 1

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{10 \cdot 5 + 9 \cdot 18 + 8 \cdot 24 + 7 \cdot 23 + 6 \cdot 15 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 10}{100} \\ &= 7,2\end{aligned}$$

Tapa 2

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 10 \cdot 0,05 + 9 \cdot 0,18 + 8 \cdot 0,24 + 7 \cdot 0,23 + 6 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,10 \\ &= 7,2\end{aligned}$$

Vastaus 7,2

179

Keskiarvo on kaikkien annettujen arvosanojen summa jaettuna niiden lukumäärällä.

Salma on saanut 10 arvosanaa ja niiden summa oli $8,24 \cdot 10 = 82,4$.

Salma saa vielä 3 arvosanaa. Olkoon x niiden keskiarvo, jolloin niiden summa on $3x$.

Lasketaan, mikä x tulee olla, että kaikkien kurssien arvosanojen keskiarvo olisi 8,50.

$$\frac{82,4 + 3x}{13} = 8,50$$

$$82,4 + 3x = 110,5$$

$$3x = 28,1$$

$$x = 9,3666... \approx 9,37$$

Vastaus 9,37

180

Kuntien palveluksessa olevien lukion opettajien keskipalkka on 3 878 € kuukaudessa.

Lukion opettajista 30 % on miehiä ja heidän keskipalkkansa on 3 966 €.

Naisopettajia on 70 %. Lasketaan naisopettajien keskipalkka x .

$$\frac{30 \cdot 3966 \text{ €} + 70x}{100} = 3878 \text{ €}$$

$$70x = 100 \cdot 3878 \text{ €} - 30 \cdot 3966 \text{ €}$$

$$x = \frac{100 \cdot 3878 \text{ €} - 30 \cdot 3966 \text{ €}}{70}$$

$$x = 3840,285... \text{ €} \approx 3840 \text{ €}$$

Vastaus 3840 €

181

Valitaan sattumanvaraisesti yksi filosofian ylioppilaskokeeseen keväällä 2017 osallistunut kokelas.

- a) Tapahtuman ”kokelas pääsi läpi kokeesta” vastatapahtuma on ”kokelas ei päässyt läpi kokeesta.

Kokeeseen osallistui 567 kokelasta, joista 43 sai arvosanan I.

$$\begin{aligned} &P(\text{kokelas pääsi läpi kokeesta}) \\ &= 1 - P(\text{kokelas ei päässyt läpi kokeesta}) \\ &= 1 - \frac{43}{567} = 0,9241\dots \approx 0,924 \end{aligned}$$

- b) Kokelaista 50 sai arvosanan L.

$$\begin{aligned} &P(\text{kokelas sai arvosanan L}) \\ &= \frac{50}{567} = 0,08818\dots \approx 0,088 \end{aligned}$$

- c) Arvosanan M sai 114, E sai 119 ja L sai 50 kokelasta.

$$\begin{aligned} &P(\text{kokelas sai vähintään arvosanan M}) \\ &= \frac{114 + 119 + 50}{567} = 0,49911\dots \approx 0,499 \end{aligned}$$

Vastaus a) 0,924 b) 0,088 c) 0,499

182

- a) Heittoja on aineistossa yhteensä 154.

Sora on saanut 9 pistettä 32 kertaa ja 10 pistettä 16 kertaa.

$P(\text{Sora saa seuraavalla heitolla ainakin 9 pistettä})$

$$= \frac{32+16}{154} = 0,3116... \approx 0,31$$

- b) Sora voi saada kahdella peräkkäisellä heitolla ainakin 19 pistettä, jos hän heittää 9 pistettä ja 10 pistettä tai kaksi kertaa kymmenen pistettä.

9 ja 10 pistettä voidaan heittää kahdella tavalla:
ensimmäisellä heitolla 9 ja toisella 10
tai ensimmäisellä heitolla 10 ja toisella 9.

$P(\text{Sora saa kahdella heitolla ainakin 19 pistettä})$

$$= P(10 \text{ ja } 10 \text{ pistettä}) + 2 \cdot P(9 \text{ ja } 10 \text{ pistettä})$$

$$= \frac{16}{154} \cdot \frac{16}{154} + 2 \cdot \frac{32}{154} \cdot \frac{16}{154}$$

$$= 0,05397... \approx 0,054$$

Vastaus a) 0,31 b) 0,54

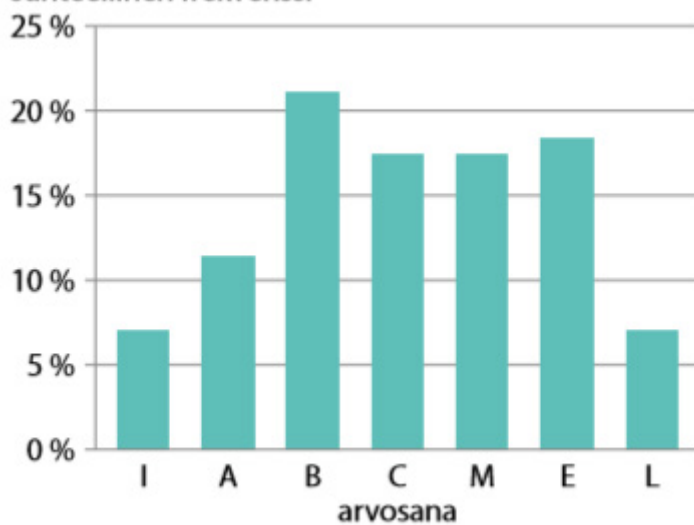
183

muuttuja	f	f %
1	10	14,9
2	15	22,4
3	14	20,9
4	16	23,9
5	12	17,9
	67	100

184

arvosana	f	f %
I	8	$\frac{8}{114} \approx 0,070 = 7,0 \%$
A	13	$\frac{13}{114} \approx 0,114 = 11,4 \%$
B	24	$\frac{24}{114} \approx 0,211 = 21,1 \%$
C	20	$\frac{20}{114} \approx 0,175 = 17,5 \%$
M	20	$\frac{20}{114} \approx 0,175 = 17,5 \%$
E	21	$\frac{21}{114} \approx 0,184 = 18,4 \%$
L	8	$\frac{8}{114} \approx 0,070 = 7,0 \%$
	114	100 %

suhteellinen frekvenssi

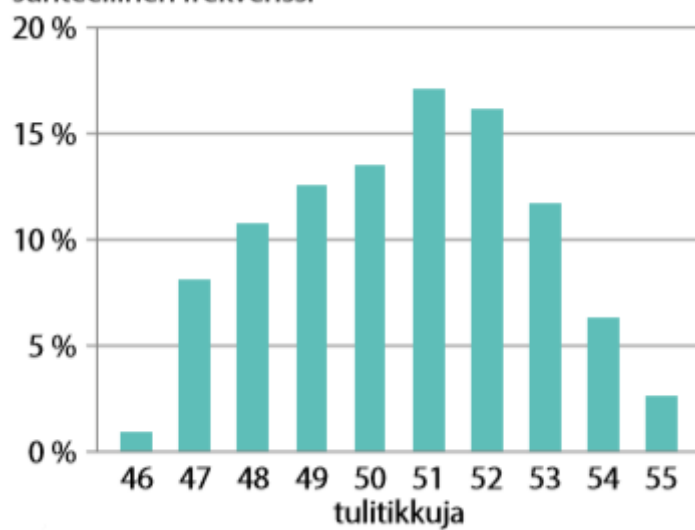


185

Rasioita on yhteensä 111.

tikkuja	f %
46	$\frac{1}{111} \approx 0,009 = 0,9 \%$
47	$\frac{9}{111} \approx 0,081 = 8,1 \%$
48	$\frac{12}{111} \approx 0,108 = 10,8 \%$
49	$\frac{14}{111} \approx 0,126 = 12,6 \%$
50	$\frac{15}{111} \approx 0,135 = 13,5 \%$
51	$\frac{19}{111} \approx 0,171 = 17,1 \%$
52	$\frac{18}{111} \approx 0,162 = 16,2 \%$
53	$\frac{13}{111} \approx 0,117 = 11,7 \%$
54	$\frac{7}{111} \approx 0,063 = 6,3 \%$
55	$\frac{3}{111} \approx 0,027 = 2,7 \%$
	100 %

suhteellinen frekvenssi



186

Merkitään puuttuvaa frekvenssiä x .

Muiden frekvenssien summa on 42.

$$\frac{0 \cdot 8 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot x + 4 \cdot 14 + 5 \cdot 2}{42 + x} = 2,2$$

$$\frac{3x + 90}{42 + x} = 2,2$$

$$3x + 90 = 2,2 \cdot (42 + x)$$

$$3x = 92,4 + 2,2x - 90$$

$$3x - 2,2x = 2,4$$

$$0,8x = 2,4$$

$$x = 3$$

Vastaus 3

187

Valtion palveluksessa olevien miespuolisten sotilaiden palkka on keskimäärin 4191 € ja naispuolisten 3439 € kuukaudessa. Sotilaista 96,7 % on miehiä ja naisia 3,3 %.

Lasketaan sotilaiden keskimääräinen kuukausipalkka.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{96,7 \cdot 4191 \text{ €} + 3,3 \cdot 3439 \text{ €}}{100} \\ &= 4166,18... \text{ €} \approx 4166 \text{ €}\end{aligned}$$

Vastaus 4166 €

188

Valtion palveluksessa olevien miespuolisten tuomioistuinlakimiesten keskimääräinen kuukausipalkka on 5899 €, naispuolisten 5158 € ja kaikkien 5379 €.

Merkitään naisten osuutta x .

$$(1-x) \cdot 5899 \text{ €} + x \cdot 5158 \text{ €} = 5379 \text{ €}$$

$$5899 \text{ €} - x \cdot 5899 \text{ €} + x \cdot 5158 \text{ €} = 5379 \text{ €}$$

$$x \cdot (-741 \text{ €}) = -520 \text{ €}$$

$$x = 0,7017... \approx 0,702 = 70,2 \%$$

Vastaus 70,2 %

189

Valitaan sattumanvaraisesti yksi kevään 2017 elämänkatsomustiedon kokeeseen osallistunut kokelas. Kokelaita oli yhteensä 114.

a) Arvosanan E sai 21 kokelasta.

$$P(\text{kokelas sai arvosanan E}) = \frac{21}{114} = 0,1842... \approx 0,18$$

b) Arvosanan L sai 8 kokelasta.

$$\begin{aligned} P(\text{kokelas sai vähintään arvosanan E}) \\ = \frac{21+8}{114} = 0,2543... \approx 0,25 \end{aligned}$$

c) Tapahtuman ”kokelas sai enintään arvosanan E” vastatapahtuma on ”kokelas sai arvosanan L”.

$$\begin{aligned} P(\text{kokelas sai enintään arvosanan E}) \\ = 1 - P(\text{kokelas sai arvosanan L}) \\ = 1 - \frac{8}{114} = 0,9298... \approx 0,93 \end{aligned}$$

Vastaus a) 0,18 b) 0,25 c) 0,93

190

Rasioita on yhteensä 111.

- a) Rasioita, joissa on 50 tulitikkua, on 15.
 Todennäköisyys, että yksittäisessä rasiassa on 50 tikkua,
 on $\frac{15}{111}$.

$P(\text{kahdessa peräkkäisessä rasiassa 50 tikkua})$

$$= \frac{15}{111} \cdot \frac{15}{111} = 0,01826... \approx 0,02$$

- b) Rasioita, joissa on ainakin 50 tulitikkua, on 75.
 Todennäköisyys, että yksittäisessä rasiassa on ainakin 50
 tikkua, on $\frac{75}{111}$.

$P(\text{kahdessa peräkkäisessä rasiassa on ainakin 50 tikkua})$

$$= \frac{75}{111} \cdot \frac{75}{111} = 0,4565... \approx 0,46$$

Vastaus a) 0,02 b) 0,46

191

- a) 1000 miehestä 951 elää vähintään 40-vuotiaaksi.

$$\begin{aligned} P(\text{mies elää vähintään 40 vuotiaaksi}) \\ = \frac{951}{1000} = 0,951 \end{aligned}$$

- b) 1000 miehestä 294 on elossa 80-vuotiaana.
 $1000 - 294 = 706$ ei saavuta 80-vuoden ikää.

$$\begin{aligned} P(\text{mies ei saavuta 80-vuoden ikää}) \\ = \frac{706}{1000} = 0,706 \end{aligned}$$

Vastaus a) 0,951 b) 0,706

192

- a) 992:stä 20-vuotiaasta naisesta 551 saavuttaa 80-vuoden iän.

$$P(\text{20-vuotias nainen saavuttaa 80-vuoden iän}) \\ = \frac{551}{992} \approx 0,555$$

- b) 992:stä 20-vuotiaasta naisesta 922 saavuttaa 60-vuoden iän.
 $992 - 922 = 70$ ei saavuta 60-vuoden ikää.

$$P(\text{20-vuotias nainen ei saavuta 60-vuoden ikää}) \\ = \frac{70}{992} \approx 0,071$$

Vastaus a) 0,551 b) 0,071

193

Yleisin havaintoarvo on 8. Arvosanojen moodi $Mo = 8$.

Asetetaan arvosanat järjestykseen ja katsotaan, mikä on keskimäinen arvosana.

7 8 8 8 8 8 9 9 9 9 10 10

Lasketaan kahden keskimäisen arvosanan keskiarvo.

$$\frac{8+9}{2} = 8,5$$

Arvosanojen mediaani $Md = 8,5$

Lasketaan arvosanojen keskiarvo.

$$\bar{x} = \frac{7 + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 2 \cdot 10}{12} = 8,5833... \approx 8,58$$

Vastaus $Mo = 8$, $Md = 8,5$ ja $\bar{x} \approx 8,58$

194

Yleisin havaintoarvo sekä miesten että naisten alkoholin käytössä on ”kerran pari kuukaudessa”.

Moodi on ”kerran pari kuukaudessa”.

Naisten jakaumassa 50 %:n kohdalla on havaintoarvo ”kerran pari kuukaudessa”.

Mediaani on ”kerran pari kuukaudessa”.

Miesten jakaumassa 50 %:n kohdalla on havaintoarvot ”kerran viikossa” ja ”kerran pari kuukaudessa”.

Mediaani on ”kerran viikossa” ja ”kerran pari kuukaudessa”.

Vastaus Naisten alkoholinkäytön moodi ja mediaani ovat ”kerran pari kuukaudessa”.

Miesten alkoholinkäytön moodi on ”kerran pari kuukaudessa”
ja mediaani on ”kerran viikossa” ja ”kerran pari kuukaudessa”.

195

- a) Yleisimmät havaintoarvot eli moodit ovat ”naimaton” ja ”naimisissa”.
- b) Yleisin havaintoarvo eli moodi on ”nainen”

Vastaus a) Moodeja ovat ”naimaton” ja ”naimisissa”.
 b) Moodi on ”nainen”.

196

- a) Jakauman suurin arvosana on 10 ja pienin 7.

Vaihteluvälin pituus on $10 - 7 = 3$.

- b) Lasketaan arvosanojen keskiarvo.

$$\bar{x} = \frac{7 + 5 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 2 \cdot 10}{12} = \frac{103}{12}$$

Lasketaan arvosanojen keskihajonta.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(7 - \frac{103}{12})^2 + 5 \cdot (8 - \frac{103}{12})^2 + 4 \cdot (9 - \frac{103}{12})^2 + 2 \cdot (10 - \frac{103}{12})^2}{12}}$$

$$= 0,8620... \approx 0,86$$

Vastaus a) 3 b) 0,86

197

- a) Lasketaan havaintoarvojen keskiarvo.

$$\bar{x} = \frac{72,0 + 73,2 + 72,9 + 74,1 + 74,5}{5} = 73,34 \approx 73,3$$

Pituuksien keskiarvo on 73,3 metriä.

- b) Lasketaan havaintoarvojen keskihajonta.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(72,0 - 73,34)^2 + (73,2 - 73,34)^2 + (72,9 - 73,34)^2 + (74,1 - 73,34)^2 + (74,5 - 73,34)^2}{5}}$$
$$= 0,8867... \approx 0,89$$

Pituuksien keskihajonta on 0,89 metriä.

Vastaus a) 73,3 m b) 0,89 m

198

Syötetään data laskimeen ja analysoidaan aineistoa laskimen tilastotoiminnoilla.

	A karam...	B pusseja	C	D
=				
1	36	1		
2	37	0		41.6329113924
3	38	5		2.14757570232
4	39	8		
5	40	10		
6	41	14		
7	42	13		
8	43	11		
9	44	9		
10	45	6		
11	46	2		

a) Keskiarvo $\bar{x} \approx 42$.

b) Keskihajonta $\sigma \approx 2,1$

Vastaus a) 42 b) 2,1

199

Syötetään data laskimeen ja analysoidaan aineistoa laskimen tilastotoiminnoilla.

arvosana	f %
0	4.1
2	9.4
3	20.6
4	24.7
5	22.0
6	15.2
7	4.1

$\bar{x}$	4,1
s_n	1,6
n	7
min	0
median	4
max	7

Kaikki laskinohjelmistot eivät laske mediaania ja keskihajontaa, jos sarakkeissa on desimaalilukuja. Tästä ongelmasta selviää esimerkiksi kertomalla kaikki suhteelliset frekvenssit kymmenellä.

Vastaus a) 4,1 b) 4 c) 1,6

200

Lasketaan lasten pituuksia vastaavat normitetut arvot.

Syksy:

$$\bar{x} = 142$$

$$\sigma = 6$$

$$x = 150$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \\ &= \frac{150 - 142}{6} = 1,333... \approx 1,3 \end{aligned}$$

Suvi:

$$\bar{x} = 124$$

$$\sigma = 5$$

$$x = 130$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \\ &= \frac{130 - 124}{5} = 1,2 \end{aligned}$$

Syksy on suhteellisesti pidempi, koska hänen pituuttaan vastaava normitettu arvo on suurempi.

Vastaus Syksy 1,3 ja Suvi 1,2. Syksy on suhteellisesti pidempi.

201

Lasketaan, miten pitkiä lapset ovat kolmen vuoden kuluttua, jos heidän pituutensa pysyy suhteellisesti samana verrattuna ikäluokkaan.

Syksy:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

$$1,333 = \frac{x - 160}{8}$$

$$10,664 = x - 160$$

$$x = 170,664 \approx 171$$

Syksy on noin 171 cm.

Suvi:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

$$1,2 = \frac{x - 141}{6}$$

$$7,2 = x - 141$$

$$x = 148,2 \approx 148$$

Suvi on noin 148 cm.

Vastaus Syksy 171 cm ja Suvi 148 cm

202

Lasketaan Nikon pistemäärää vastaava normitettu arvo.

$$\bar{x} = 29$$

$$\sigma = 14$$

$$x = 25$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \\ &= \frac{25 - 29}{14} = -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

Lasketaan Aminan pistemäärä y , kun hän menestyi suhteellisesti yhtä hyvin.

$$\bar{x} = 36$$

$$\sigma = 17$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{y - \bar{x}}{\sigma} \\ -\frac{2}{7} &= \frac{y - 36}{17} \\ -7(y - 36) &= 2 \cdot 17 \\ -7y + 252 &= 34 \\ -7y &= -218 \\ y &= 31,14... \approx 31 \end{aligned}$$

Vastaus 31 pistettä

203

Yleisin havaintoarvo on 120 asiakasta. $M_o = 120$.

Asetetaan asiakasmäärät järjestykseen ja katsotaan, mikä on keskimääräinen.

75 94 100 **102** 120 120 128

$M_d = 102$.

Lasketaan asiakasmäärien keskiarvo.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{94 + 102 + 120 + 100 + 120 + 128 + 75}{7} \\ &= 105,57... \approx 106\end{aligned}$$

Vastaus $M_o = 120$, $M_d = 102$ ja $\bar{x} = 106$

204

- a) Yleisin havainto arvo on 1. Perheen lapsiluvun moodi $M_o = 1$.

Frekvenssien summa on 60, joka on parillinen määrä.

Järjestyksessä 30. perheellä on 1 lapsi

ja 31. perheellä 2 lasta.

$$M_d = \frac{1+2}{2} = 1,5$$

Lasketaan lapsiluvun keskiarvo.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 27 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 3 + 5}{60} \\ &= 1,7333... \approx 1,7\end{aligned}$$

- b) Yleisin havaintoarvo on Suomi. Kotikielen moodi on Suomi

Vastaus a) $M_o = 1$, $M_d 1,5$ ja $\bar{x} = 1,7$
b) moodi on Suomi

205

- a) Selvitetään, missä kohdassa suhteellinen frekvenssi ylittää 50 %.

$$13 \% + 34 \% = 47 \%$$

$$13 \% + 34 \% + 27 \% = 74 \%$$

Mediaani on ”pari kertaa kuukaudessa”.

- b) Useimmin käyvä neljäsosa kuuluu joko ryhmään ”vähintään kahdesti viikossa” tai ”kerran viikossa”. Useimmiten käyvä neljäsosa käy siis elokuvissa kerran tai useammin viikon aikana eli vähintään kerran viikossa.

Vastaus a) pari kertaa kuukaudessa b) vähintään kerran viikossa

206

Lasketaan tehtävien keskiarvo ja keskihajonta.

A1:

$$\bar{x}_1 = \frac{3 \cdot 14}{14} = 3$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{14 \cdot (3-3)^2}{14}} = 0$$

A2:

$$\bar{x}_2 = \frac{6 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2}{14} = 3$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{2((6-3)^2 + (5-3)^2 + (4-3)^2 + (3-3)^2 + (2-3)^2 + (1-3)^2 + (0-3)^2)}{14}} = 2$$

A3:

$$\bar{x}_3 = \frac{6 \cdot 7 + 0 \cdot 7}{14} = 3$$

$$\sigma_3 = \sqrt{\frac{7(6-3)^2 + 7(0-3)^2}{14}} = 3$$

Vastaus A1: $\bar{x} = 3$ ja $\sigma = 0$

A2: $\bar{x} = 3$ ja $\sigma = 2$

A3: $\bar{x} = 3$ ja $\sigma = 3$

207

- a) Lasketaan polkupyörien määrän keskiarvo.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1 \cdot 15 + 2 \cdot 26 + 3 \cdot 47 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2}{90} \\ &= \frac{109}{45} = 2,4222... \approx 2,4\end{aligned}$$

- b) Lasketaan polkupyörien määrän keskihajonta.

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{15 \cdot (1 - \frac{109}{45})^2 + 26 \cdot (2 - \frac{109}{45})^2 + 47 \cdot (3 - \frac{109}{45})^2 + 2 \cdot (5 - \frac{109}{45})^2}{90}} \\ &= 0,8429... \approx 0,84\end{aligned}$$

- c) Frekvenssien summa on 90, joka on parillinen luku.
45. perheellä on 3 pyörää ja 46. perheellä on myös 3 pyörää.

Polkupyörien määrän mediaani $Md = 3$.

Vastaus a) $\bar{x} \approx 2,4$ b) $\sigma \approx 0,84$ c) $Md = 3$

208

Syötetään data laskimeen ja analysoidaan aineistoa laskimen tilastotoiminnoilla.

arvosana	f %
0	16,0
2	8,0
3	16,0
4	4,0
5	4,0
6	20,0
7	32,0

$\bar{x}$	4,4
s_n	2,6
n	7
min	0
median	6,0
max	7

Vastaus a) 4,4 b) 6,0 c) 2,6

209

Syötetään data laskimeen ja analysoidaan aineistoa laskimen tilastotoiminnoilla

x	x
12,1	14,1
12,9	12,8
12,3	12,7
11,9	13,1
13,2	13,6
13,4	14,2
12,5	13,7
13,0	12,1
13,5	12,8
13,3	14,0

$\bar{x}$	13,11
s_n	0,62
n	20
sum	262,2
min	11,9
median	13,1
max	14,2

Vastaus a) 13,11 b) 0,62 c) 262,2 d) 11,9 e) 14,2 f) 13,1

210

Lasketaan Kasperin pistemäärää vastaava normitettu arvo.

$$\bar{x} = 67$$

$$\sigma = 20$$

$$x = 75$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \\ &= \frac{75 - 67}{20} = 0,4 \end{aligned}$$

Lasketaan Jesperin pistemäärää vastaava normitettu arvo.

$$\bar{x} = 61$$

$$\sigma = 16$$

$$x = 69$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \\ &= \frac{69 - 61}{16} = 0,5 \end{aligned}$$

Jesper menestyi suhteellisesti paremmin kokeessa, koska hänen pistemääräänsä vastaava normitettu arvo on suurempi.

Vastaus Kasperin tuloksen normitettu arvo on 0,4 ja Jesperin 0,5. Jesper menestyi suhteellisesti paremmin.

211

Lasketaan, millä pistemäärällä x normitettu arvo on suurempi kuin Kasperin eli 0,4, mutta pienempi kuin Jesperin eli 0,5.

$$\bar{x} = 64$$

$$\sigma = 18$$

$$\frac{x - 64}{18} > 0,4$$

$$x - 64 > 7,2$$
$$x > 71,2$$

$$\frac{x - 64}{18} < 0,5$$

$$x - 64 < 9$$
$$x < 73$$

Saadaan $71,2 < x < 73$.

Joonatanin olisi pitänyt saada 72 pistettä.

Vastaus 72

212

- a) Palkansaajia on yhteensä 36.
Lasketaan keskipalkka ennen uudistusta.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1400 \cdot 10 + 1700 \cdot 12 + 2000 \cdot 5 + 3000 \cdot 4 + 4000 \cdot 3 + 5000 \cdot 2}{36} \\ &= 2177,777... \approx 2177,78\end{aligned}$$

Lasketaan keskipalkka korotuksen jälkeen.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1480 \cdot 10 + 1800 \cdot 12 + 2200 \cdot 5 + 3300 \cdot 4 + 4500 \cdot 3 + 6000 \cdot 2}{36} \\ &= 2391,666... \approx 2391,67\end{aligned}$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia keskipalkka nousi.

$$\frac{2391,67 \text{ €}}{2177,78 \text{ €}} = 1,09821... \approx 1,098$$

Keskipalkka nousi noin 9,8 %.

- b) Palkansaajia on 36, joka on parillinen luku.
18. ja 19. palkansaaja sai 1700 € ennen korotusta.
Mediaanipalkka oli 1700 €.

Korotuksen jälkeen 18. ja 19. palkansaaja saivat 1800 €.
Mediaanipalkka oli 1800 €.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia mediaanipalkka nousi.

$$\frac{1800 \text{ €}}{1700 \text{ €}} = 1,05882... \approx 1,059$$

Mediaanipalkka nousi noin 5,9 %

c) Jaetaan taulukko puoliksi.

ennen	jälkeen	f
1400	1480	10
1700	1800	8
1700	1800	4
2000	2200	5
3000	3300	4
4000	4500	3
5000	6000	2

Lasketaan vähemmän ansaitsevan puoliskon keskipalkat.

$$\bar{x} = \frac{1400 \cdot 10 + 1700 \cdot 8}{18} \approx 1533,33$$

$$\bar{x} = \frac{1480 \cdot 10 + 1800 \cdot 8}{18} \approx 1622,22$$

Lasketaan vähemmän ansaitsevan puoliskon palkan kasvu.

$$\frac{1622,22 \text{ €}}{1533,33 \text{ €}} = 1,05797... \approx 1,058$$

Palkka nousi noin 5,8 %.

Lasketaan enemmän ansaitsevan puoliskon keskipalkat.

$$\bar{x} = \frac{1700 \cdot 4 + 2000 \cdot 5 + 3000 \cdot 4 + 4000 \cdot 3 + 5000 \cdot 2}{18} \approx 2822,22$$

$$\bar{x} = \frac{1800 \cdot 4 + 2200 \cdot 5 + 3300 \cdot 4 + 4500 \cdot 3 + 6000 \cdot 2}{18} \approx 3161,11$$

Lasketaan enemmän ansaitsevan puoliskon palkan kasvu.

$$\frac{3161,11 \text{ €}}{2822,22 \text{ €}} = 1,12007... \approx 1,120$$

Palkka nousi noin 12,0 %.

- Vastaus**
- a) ennen 2177,78; jälkeen 2391,67; nousi 9,8 %
 - b) ennen 1700; jälkeen 1800; nousi 5,9 %
 - c) vähemmän: nousi 5,8 %; enemmän: nousi 12,0 %

213

a) Koko histogrammin pinta-ala on 20 ruutua.

1. pylväs on 8 ruutua.

$$\frac{8}{20} = 0,4 = 40 \%$$

2. pylväs on 6 ruutua.

$$\frac{6}{20} = 0,3 = 30 \%$$

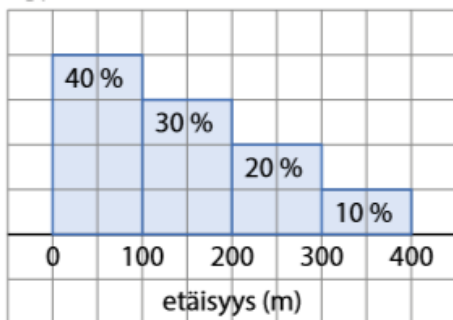
3. pylväs on 4 ruutua.

$$\frac{4}{20} = 0,2 = 20 \%$$

4. pylväs on 2 ruutua.

$$\frac{2}{20} = 0,1 = 10 \%$$

b)



- Vastaus**
- a) 1. pylväs: 8 ruutua, 40 %
 - b) 2. pylväs: 6 ruutua, 30 %
 - c) 3. pylväs: 4 ruutua, 20 %
 - d) 4. pylväs: 2 ruutua, 10 %

214

- a) Pituudet on mitattu yhden senttimetrin tarkkuudella. Esimerkiksi luokan 41–43 todellinen alaraja on 40,5 ja todellinen yläraja on 43,5. Luokkakeskus on luokan todellisten rajojen keskiarvo.

$$\frac{40,5 \text{ cm} + 43,5 \text{ cm}}{2} = 42 \text{ cm}$$

$$\frac{43,5 \text{ cm} + 46,5 \text{ cm}}{2} = 45 \text{ cm}$$

$$\frac{46,5 \text{ cm} + 49,5 \text{ cm}}{2} = 48 \text{ cm}$$

$$\frac{49,5 \text{ cm} + 52,5 \text{ cm}}{2} = 51 \text{ cm}$$

$$\frac{52,5 \text{ cm} + 55,5 \text{ cm}}{2} = 54 \text{ cm}$$

$$\frac{55,5 \text{ cm} + 58,5 \text{ cm}}{2} = 57 \text{ cm}$$

- b) Lasketaan pituuksien keskiarvo.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{2 \cdot 42 + 14 \cdot 45 + 33 \cdot 48 + 34 \cdot 51 + 14 \cdot 54 + 3 \cdot 57}{100} \\ &= 49,49 \approx 49,6\end{aligned}$$

Pituuksien keskiarvo on 49,6 cm.

c) Lasketaan pituuksien keskihajonta.

$$\sigma = \sqrt{\frac{2(42 - 49,49)^2 + 14(45 - 49,49)^2 \dots + 3(57 - 49,49)^2}{100}}$$
$$\approx 3,16$$

Pituuksien keskihajonta on 3,16 cm.

Vastaus a) 42 cm, 45 cm, 48 cm, 51 cm, 54 cm ja 57 cm
 b) 49,6 cm c) 3,16 cm

215

- a) Aineiston pienin arvo on 0,3 ja suurin 4,8. Luokitellaan aineisto tasalevyisiin luokkiin.

koulumatka (km)	f	f %
0 – 0,9	4	$\frac{4}{30} \approx 0,13 = 13 \%$
1,0 – 1,9	6	$\frac{6}{30} = 0,2 = 20 \%$
2,0 – 2,9	7	$\frac{7}{30} \approx 0,23 = 23 \%$
3,0 – 3,9	5	$\frac{5}{30} \approx 0,17 = 17 \%$
4,0 – 4,9	8	$\frac{8}{30} \approx 0,27 = 27 \%$
	30	100 %

- b) Lasketaan luokkien luokkakeskukset ja syötetään aineisto laskinohjelmistoon ja tutkitaan dataa taulukkolaskentatoiminnoilla.

Aineisto on luokiteltu 0,1 km tarkkuudella. Esimerkiksi luokan 0–0,9 todellinen alaraja on 0 ja todellinen yläraja 1,95. Luokkakeskus on todellisten rajojen keskiarvo.

Taulukkolaskentatoiminnoilla saadaan:

$$\bar{x} \approx 2,7$$

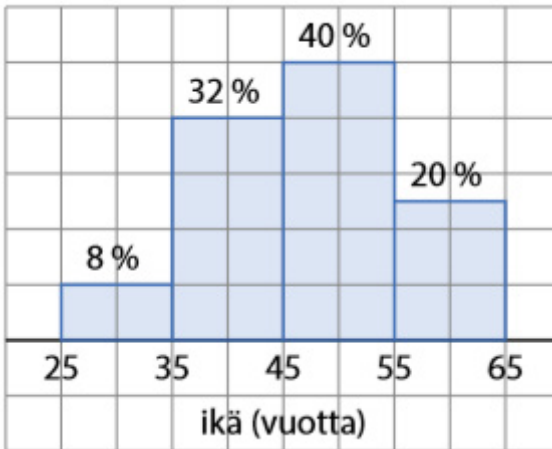
$$\sigma_x \approx 1,4$$

Vastaus b) keskiarvo on 2,7 km ja keskihajonta 1,4 km

216

- a) Histogrammi muodostuu toisissaan kiinni olevista pylväistä. Koska luokat ovat tasalevyiset, niin pylväiden korkeudet ja samalla myös pinta-alat ovat suoraan verrannolliset luokan suhteelliseen frekvenssiin.

Piirretään histogrammi.



- b) Lasketaan luokkakeskukset. Esimerkiksi luokan 25–34 todellinen alaraja on 25 ja todellinen yläraja on 35.

$$\frac{25 + 35}{2} = 30$$

$$\frac{35 + 45}{2} = 40$$

$$\frac{45 + 55}{2} = 50$$

$$\frac{55 + 65}{2} = 60$$

Lasketaan keskiarvo.

$$\bar{x} = \frac{8 \cdot 30 + 32 \cdot 40 + 40 \cdot 50 + 20 \cdot 60}{100} = 47,2 \approx 47$$

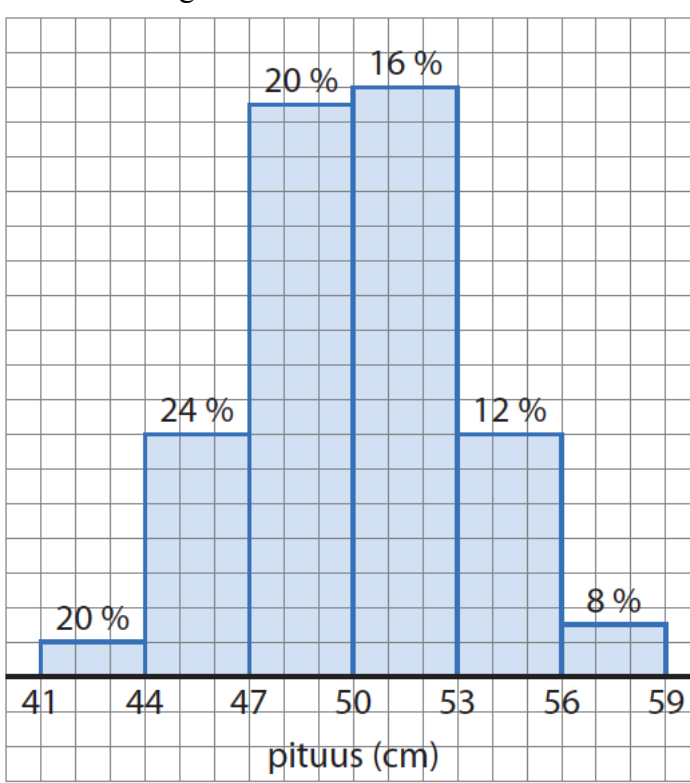
Eniten opettajia on luokassa 45–54. Moodiluokka on 45–54.

Vastaus b) keskiarvo 47 vuotta, moodiluokka 45–54 vuotta.

217

Histogrammi muodostuu toisissaan kiinni olevista pylväistä. Koska luokat ovat tasalevyiset, niin pylväiden korkeudet (ja samalla myös pinta-alat) ovat suoraan verrannolliset luokan suhteelliseen frekvenssiin.

Piirretään histogrammi.



218

- a) Massat on taulukoitu gramman tarkkuudella.
 Esimerkiksi luokan 140–144 todellinen alaraja on 139,5 ja todellinen yläraja on 144,5.
 Luokkakeskus on todellisten rajojen keskiarvo.

$$\frac{139,5 \text{ g} + 144,5 \text{ g}}{2} = 142 \text{ g}$$

$$\frac{144,5 \text{ g} + 149,5 \text{ g}}{2} = 147 \text{ g}$$

$$\frac{149,5 \text{ g} + 154,2 \text{ g}}{2} = 152 \text{ g}$$

$$\frac{154,5 \text{ g} + 159,5 \text{ g}}{2} = 157 \text{ g}$$

- b) Lasketaan pakkausten massan keskiarvo.

$$\bar{x} = \frac{20 \cdot 142 + 35 \cdot 147 + 30 \cdot 152 + 15 \cdot 157}{100} = 149$$

Massan keskiarvo on 149 g.

- c) Lasketaan pakkausten massan keskihajonta.

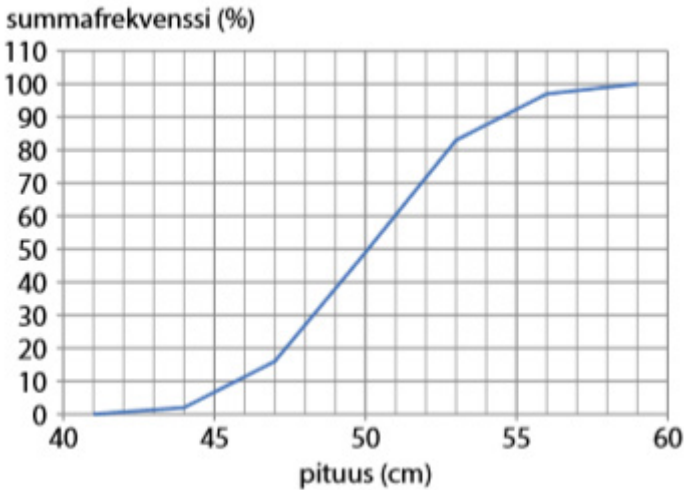
$$\sigma = \sqrt{\frac{20(142 - 149)^2 + \dots + 15(157 - 149)^2}{100}} \approx 4,8$$

Massan keskihajonta on 4,8 g.

Vastaus a) 142 g, 147 g, 152 g ja 157 g
b) 149 g
c) 4,8 g

219

Piirretään kertymäkuvaaja koordinaatistoon, jonka vaaka-akselilla on pituus ja pystyakselilla suhteellinen summafrekvenssi.

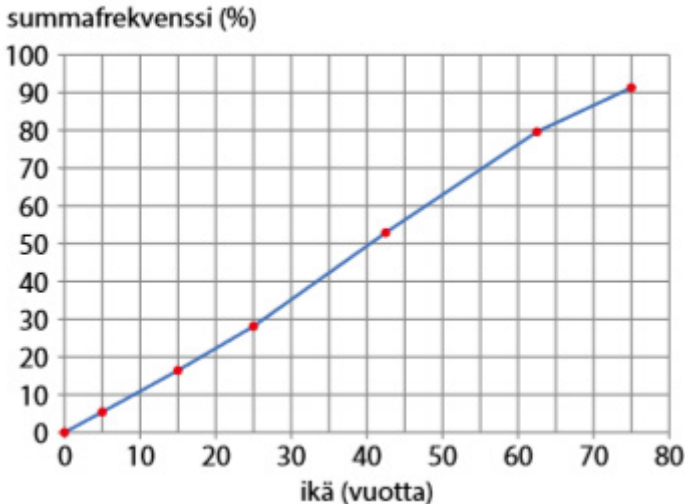


- Kuvaaja ylittää 50 %:n rajan pituuden 50 cm kohdalla. Mediaanipituus on 50 cm.
- Kuvaaja ylittää 80%:n rajan noin pituuden 53 cm kohdalla. Pituus, jota pidempiä oli 20 % tyttövauvoista, on 53 cm.
- Kuvaaja ylittää 25%:n rajan pituuden 48 cm kohdalla. Pituus, jota lyhyempiä oli 25 % tyttövauvoista, on 48 cm.

Vastaus a) 50 cm b) 53 cm c) 48 cm

220

Piirretään kertymäkuvaaja suomalaisten ikäjakaumasta vuonna 2005.



- a) Kuvaaja ylittää 50 %:n rajan noin iän 43 kohdalla.
Mediaani-ikä on 43 vuotta.
- b) Kuvaaja ylittää 25 %:n rajan noin iän 22 kohdalla.
Nuorempi neljännes suomalaisista oli alle 22 vuotiaita.
- c) Kuvaaja ylittää 75 %:n rajan noin iän 62 kohdalla.
Vanhempi neljännes suomalaisista oli yli 62 vuotiaita.

Vastaus a) 43 b) alle 22 c) yli 62

221

Koko histogrammin pinta-ala on 36 ruutua.

1. pylväs on 6 ruutua.

Lasketaan suhteellinen frekvenssi.

$$\frac{6}{36} = 0,1666 \approx 17 \%$$

2. pylväs on 8 ruutua.

$$\frac{8}{36} = 0,222... \approx 22 \%$$

3. pylväs on 10 ruutua.

$$\frac{10}{36} = 0,277... \approx 28 \%$$

4. pylväs on 12 ruutua.

$$\frac{12}{36} = 0,333... \approx 33 \%$$

Lisätään suhteelliset frekvenssit taulukkoon.

ikä (vuotta)	f %
7–8	17
9–10	22
10–12	28
13–15	33

222

- a) Aineiston pienin arvo on 38 ja suurin arvo on 105.
Luokitellaan pinta-alat viiteen tasalevyiseen luokkaan ja määritetään suhteelliset frekvenssit.

pinta-ala (m^2)	f	$f\%$
35–49	4	13,8
50–64	6	20,7
65–79	8	27,6
80–94	7	24,1
95–109	4	13,8
	29	100

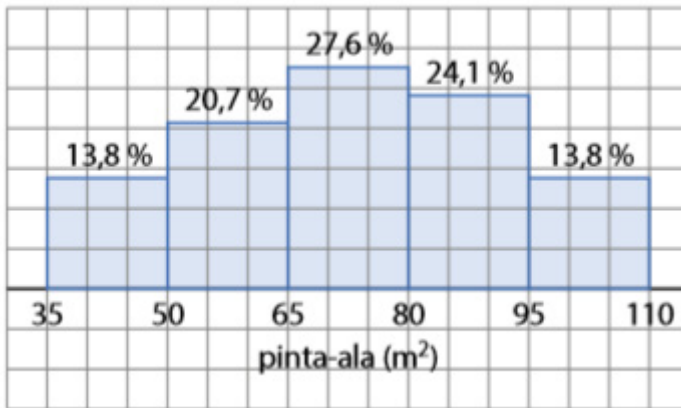
- b) Pinta-alojen keskiarvo on 73 m^2 ja keskihajonta 19 m^2 .

Vastaus b) keskiarvo 73 m^2 , keskihajonta 19 m^2

223

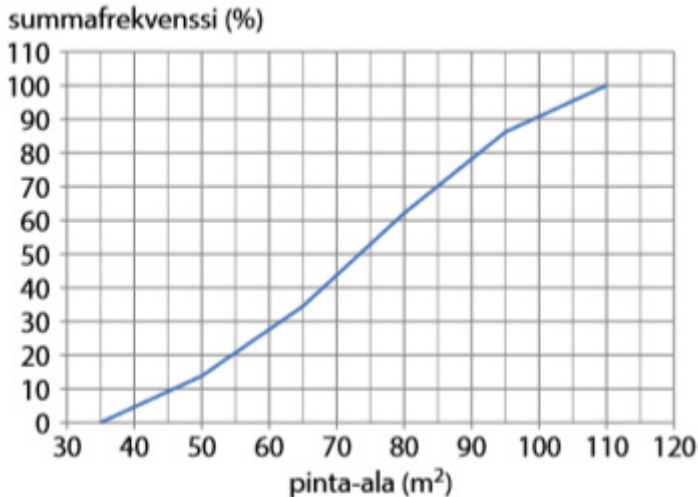
Histogrammi muodostuu toisissaan kiinni olevista pylväistä. Koska luokat ovat tasalevyiset, niin pylväiden korkeudet (ja samalla myös pinta-alat) ovat suoraan verrannolliset luokan suhteelliseen frekvenssiin.

Piirretään histogrammi.



224

Piirretään kertymäkuvaaja jakaumasta.



- a) Kuvaaja ylittää 50 %:n kohdassa 74.
Pinta-alan mediaani on 74 m^2 .
- b) Kuvaaja ylittää 20 %:n rajan kohdassa 55.
Pinta-ala, jota pienempiä oli 20 % kodeista, on 55 m^2 .
- c) Kuvaajan ylittää 90 %:n rajan kohdassa 99.
Pinta-ala, jota suurempia oli 10 % kodeista, on 99 m^2 .

Vastaus a) 74 m^2 b) 55 m^2 c) 99 m^2

225

- a) Ajat ovat taulukoitu tunnin tarkkuudella. Luokan 3–5 todellinen alaraja on 2,5 h ja todellinen yläraja 5,5 h.

Luokkakeskus on todellisten rajojen keskiarvo.

$$\frac{2,5 + 5,5}{2} = 4$$

Luokkakeskus on 4 h.

- b) Oletetaan, että viimeisen luokan yläraja on 59. Syötetään arvot taulukko-ohjelmistoon ja analysoidaan dataa taulukkolaskentaohjelmalla.

$$\bar{x} \approx 16,3$$

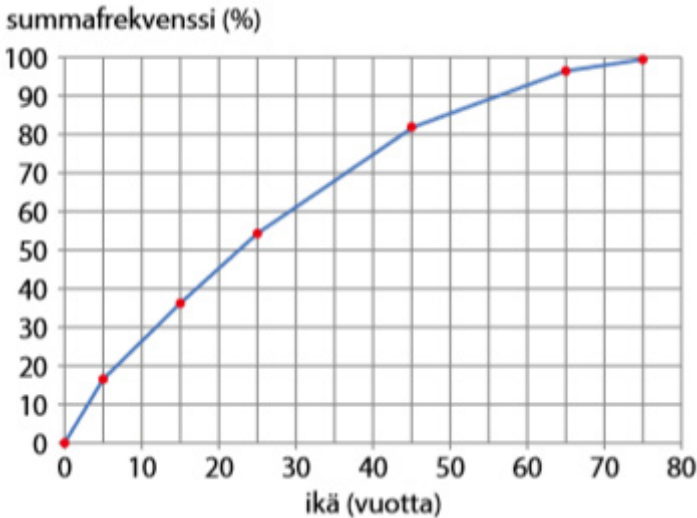
$$\sigma_x \approx 14,2$$

Keskiarvo on 16,3 h ja keskihajonta 14,2

- Vastaus** a) todelliset rajat 2,5 h ja 5,5 h; luokkakeskus 4 h
b) keskiarvo on 16,3 h ja keskihajonta 14,2 h

226

Piirretään kertymäkuvaaja suomalaisten ikäjakaumasta vuonna 1800.



- Kuvaaja ylittää 50 %:n kohdassa 23.
Suomalaisten mediaani-ikä oli 23 vuotta.
- Kuvaaja ylittää 25 %:n kohdassa 10.
Nuorin neljännes oli alle 10 vuotta.
- Kuvaaja ylittää 75%:n kohdassa 40.
Vanhin neljännes oli yli 40 vuotta.

Vastaus a) 23 vuotta b) alle 10 vuotta c) yli 40 vuotta

227

- a) Koko histogrammin pinta-ala on yhteensä 100 ruutua. Laskemalla kuviosta luokan ruutujen määrä saadaan myös suoraan luokan suhteellinen frekvenssi.

pituus (cm)	f %
167–170	8
171–176	24
177–179	18
180–182	21
183–188	21
189–193	8
	100

- b) Pojista $8\% + 24\% = 32\%$ on alle 177 cm.

$$P(\text{satunnaisesti valittu poika on alle 177 cm}) = 0,32$$

- c) Pojista $18\% + 21\% = 39\%$ on välillä 177 cm–183 cm.

$$P(\text{satunnaisesti valittu poika on 177–183 cm}) = 0,39$$

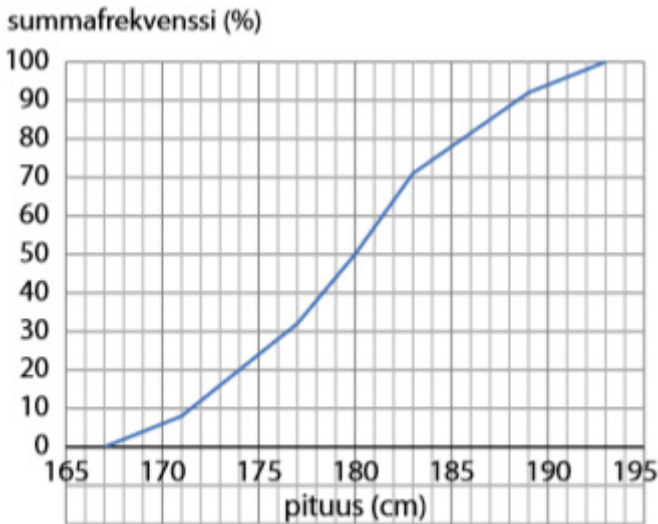
- d) Pojista $21\% + 8\% = 29\%$ on yli 183 cm.

$$P(\text{satunnaisesti valittu poika on yli 183 cm}) = 0,29$$

Vastaus a) 8 %, 24 %, 18 %, 21 %, 21 %, 8 %
 b) 0,32 c) 0,39 d) 0,29

228

Piirretään kertymäkuvaaja aineistosta.



- a) Kuvaaja ylittää 50 %:n kohdassa 180.
Pituuden mediaani on 180 cm.
- b) Alakvartiili on arvo, jonka alapuolelle jää noin 25 % aineistosta. Kuvaaja ylittää 25 %:n kohdassa 175 cm.

Yläkvartiili on arvo, jonka yläpuolelle jää noin 25 % aineistosta. Kuvaaja ylittää 75 %:n kohdassa 184 cm.

- c) Desiilit ilmoittavat muuttujan arvot, joiden alapuolelle jakaumassa jää 10 %, 20 %, ..., 90 % tapauksista.

10 %: 171 cm

20 %: 174 cm

30 %: 176 cm

40 %: 178 cm

50%: 180 cm

60 %: 181 cm

70 %: 183 cm

80 %: 186 cm

90 %: 188 cm

- Vastaus**
- a) 180 cm
 - b) alakvartiili 175 cm, yläkvartiili 184 cm
 - c) 171 cm, 174 cm, 176 cm, 178 cm, 180 cm, 181 cm, 183 cm, 186 cm, 188 cm