Ratkaisut

A1. a) Sievennä $(2x-3)^2-(2x-3)(2x+3)$.

b) Laske $(1\frac{2}{3})^{-2}+\sin(\frac{7\pi}{2})$.

c) Ratkaise yhtälö $2-(3x^2-5x-1)=5$.

Ratkaisu: a) $(2x-3)^2-(2x-3)(2x+3)=4x^2-12x+9-(4x^2-9)$ 1p

$=-12x+18$ +1p

b) $(1\frac{2}{3})^{-2}+\sin(\frac{7\pi}{2})=(\frac{3}{5})^2+\sin(\frac{3\pi}{2}+2\pi)$ 1p

$=\frac{9}{25}+\sin(\frac{3\pi}{2})=\frac{9}{25}-1=-\frac{16}{25}.$ +1p

c) $2-(3x^2-5x-1)=5 \Leftrightarrow 2-3x^2+5x+1=5 \Leftrightarrow -3x^2+5x-2=0$ 1p

$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot(-3)\cdot(-2)}}{2\cdot(-3)} \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ tai $x=1.$ +1p

A2. a) Millä vakion a arvoilla funktio $f(x)=x^2+2x+a$ saa vain positiivisia arvoja?

b) Laske $\int_{-1}^{0} 2x(x+1)\,dx.$

c) Ratkaise yhtälö $\lg(x^2)+2=0.$

Ratkaisu: a) Tapa I: Yhtälön diskriminantin $D=2^2-4\cdot1\cdot a=4-4a$ on oltava negatiivinen, sillä kyseisen funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. 1p

Siis $4-4a<0 \Leftrightarrow a>1.$ +1p

Tapa II: Havaitaan, että $x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1,$ josta huipun koordinaatit $(-1,a-1).$ 1p

Huipun y-koordinaatti oltava positiivinen, joten $a-1>0 \Leftrightarrow a>1.$ +1p

Tapa III: Selvitään huipun koordinaatit derivaatan avulla. +1p

Huipun y-koordinaatti oltava positiivinen, joten $a-1>0 \Leftrightarrow a>1.$ +1p

b) $\int_{-1}^{0} 2x(x+1)\,dx = \Big/_{-1}^{0}(\frac{2}{3}x^3+x^2)$ 1p

$=(\frac{2}{3}\cdot0^3+0^2)-(\frac{2}{3}\cdot(-1)^3+(-1)^2)=-\frac{1}{3}.$ +1p

c) $\lg(x^2)+2=0.$ Oltava $x^2>0 \Leftrightarrow x<0$ tai $x>0.$ (ei vaadita)

$\log_{10}(x^2)=-2 \Rightarrow x^2=10^{-2}=\frac{1}{100}.$ 1p

Saatu molemmat vastaukset $x=\frac{1}{10}$ tai $x=-\frac{1}{10}.$ +1p

Yhtälön muokkaaminen muotoon $2\lg(x)+2=0$ max 1p

A3. a) Pisteestä $A=(-6,-2,-4)$ kuljetaan 6 yksikköä vektorin $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$ suuntaan,

jolloin päädytään pisteeseen L. Kuinka kaukana piste L on pisteestä $C=(1,-2,3)$?

b) Olkoon vektori $\bar{a}=4\bar{i}-t\bar{j}+(t+6)\bar{k}$ ja $\bar{b}=2\bar{i}-3\bar{j}+t\bar{k}$.

Määritä luku t siten, että vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat yhdensuuntaiset.

Ratkaisu: a) Vektorin $\bar{b}=2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k}$ pituus $|\bar{b}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}=3.$

Paikkavektori $\overline{OL}=\overline{OA}+2\bar{b}$ (tai $\bar{b}^0=\frac{1}{3}\bar{b}$, josta $\overline{OL}=\overline{OA}+6\bar{b}^0$). 1p

$\overline{OL}=-6\bar{i}-2\bar{j}-4\bar{k}+2(2\bar{i}-\bar{j}+2\bar{k})=-2\bar{i}-4\bar{j}\Rightarrow L=(-2,-4,0).$ +1p

Pituus $|\overline{LC}|=\sqrt{(1+2)^2+(-2+4)^2+(3-0)^2}=\sqrt{22}.$ +1p

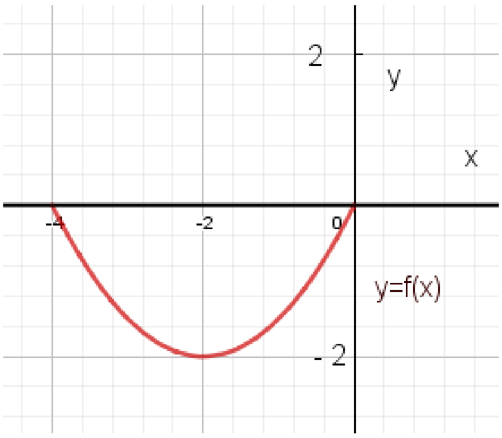
b) Oltava $\bar{a}=s\bar{b}, s\neq 0.$

$4\bar{i}-t\bar{j}+(t+6)\bar{k}=s(2\bar{i}-3\bar{j}+t\bar{k})\Leftrightarrow 4\bar{i}-t\bar{j}+(t+6)\bar{k}=2s\bar{i}-3s\bar{j}+ts\bar{k}.$ 1p

Vertailemalla kertoimia saadaan yhtälöryhmä $\begin{cases}4=2s\\-t=-3s\\t+6=ts\end{cases}.$ +1p

Ylimmästä yhtälöstä saadaan $s=2$ ja keskimmäisestä yhtälöstä $t=6$.
Katsotaan toteutuuko alimmainen yhtälö (tämä suoritus on oltava).
$6+6=2\cdot 6$ tosi. Siis $t=6.$ +1p

A4. Funktio $f(x)$ on kaikkialla määritelty, jatkuva ja funktion perusjakso on 4.
Oheisessa kuviossa on funktion $f(x)$ kuvaaja välillä $-4\le x\le 0.$
Hahmottele seuraavat kuvaajat. Perusteluja ei tarvita.
a) $2f(x)$, kun $-4\le x\le 0$ b) $|f(x)|+f(x)$, kun $4\le x\le 8$ c) $f(2x)$, kun $0\le x\le 6.$



Ratkaisu: a) Y-koordinaatin arvot kaksinkertaistuvat, nollakohdat säilyvät ja minimipisteen koordinaatit ovat $(-2,-4)$. Jos piirretty väärälle välille, niin max 1p.

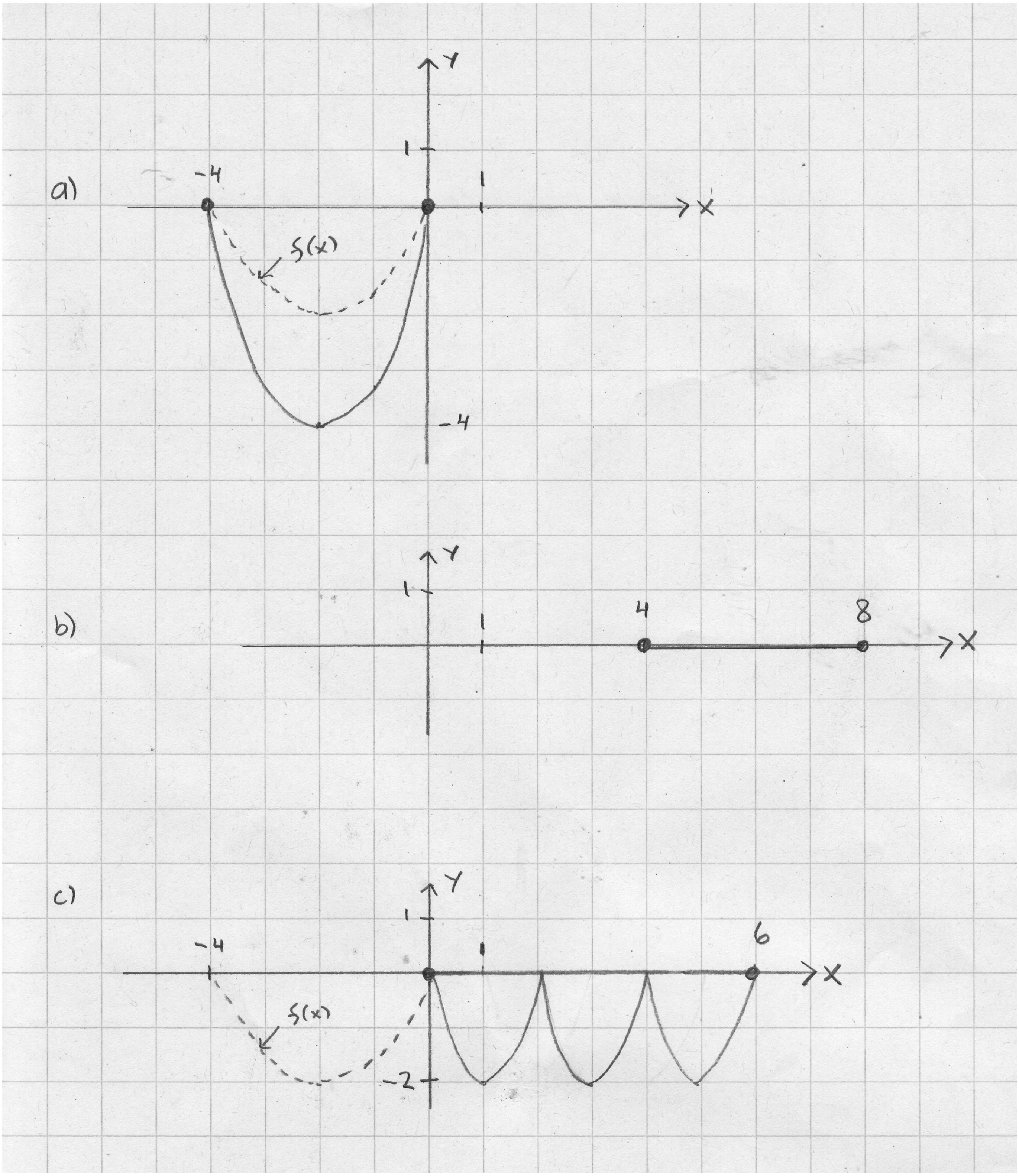
b) Jaksollisuuden nojalla funktion $f(x)$ kuvaaja on välillä $4\le x\le 8$ samanlainen kuin tehtävässä piirretty kuvaaja. Välillä $4\le x\le 8$ pätee $f(x)\le 0$, jolloin $|f(x)|=-f(x)$.

Täten tällä välillä $|f(x)|+f(x)=-f(x)+f(x)=0$ eli jana x-akselilla.

c) Sisäfunktio johtaa jakson puolittumiseen. Jakso on siten $\frac{4}{2}=2.$

Minimipisteen y-koordinaatti on edelleen -2.
Jos piirretty väärälle välille tai ei ole kolmea kupua, niin 0p

Yleisohje koko tehtävälle.
Huolimaton piirto max 5.
Ei ole korostettu, että myös välin päätepisteet ovat mukana max 4.



B1-osio. Laske tehtävistä **B5-B9** enintään ***kolme***.

B5. Suorakulmaisen kolmion *A* kateetit ovat 18 ja 80. Hypotenuusan keskinormaali jakaa kolmion *A* kahteen osaan, kolmioon *B* ja nelikulmioon.

a) Laske keskinormaalista kolmion sisään jäävän janan pituus.

b) Kuinka monta prosenttia kolmion *A* pinta-ala on suurempi kuin kolmion *B* pinta-ala?

Ratkaisu: a) Kuvion merkinnöillä saadaan hypotenuusan *FE* pituus $|FE| = \sqrt{18^2 + 80^2} = 82$,

jolloin janan *DE* pituus $|DE| = 41.$ Oltava hyvä kuvio. 1p

Kolmiot *CDF* ja *EDG* ovat yhdenmuotoisia (kk), sillä $\angle C = \angle E$ suorana kulmana ja $\angle D$ on molemmille kolmioille yhteinen.

Yhdenmuotoisuus pitää perustella. Olkoon *x* kysytyn janan pituus. +1p

Saadaan verranto $\frac{x}{18} = \frac{41}{80} \Rightarrow x = \frac{369}{40} = 9\frac{9}{40} = 9,225.$ +1p

b) Kolmion *A* pinta-ala on $A = \frac{18 \cdot 80}{2} = 720$ ja pinta-ala on $B = \frac{41 \cdot 9,225}{2} = 189,1125.$

Alojen suhde $\frac{720}{189,1125} = \frac{6400}{1681} = 3,807257\ldots$ +1p

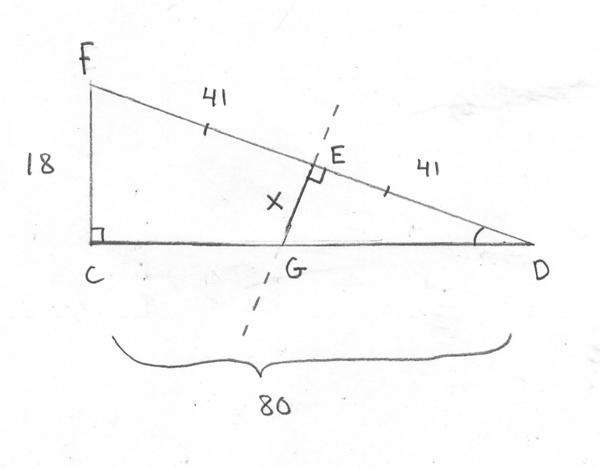
(Alojen suhde voidaan laskea myös mittakaavan neliönä $\left(\frac{80}{41}\right)^2$).

Täten kolmion *A* pinta-ala on 280,725...% ≈ 280 % suurempi kuin kolmion *B* pinta-ala +2p

Jos merkitseviä numeroita on 4 tai enemmän, niin max 5

Mikäli laskettu vain likiarvoilla, niin max 4

Vastaus 380 % -1p



B6. a) Osoita, että kaikki paraabelit $y-a=x^2-(a-1)x$ kulkevat saman pisteen kautta riippumatta vakion a arvosta. 2p

b) Mikä on tämä piste? 1p

c) Määritä tästä paraabeliparvesta se paraabeli, jonka kuvaaja sivuaa suoraa $y=1$. 3p

Ratkaisu: a) Valitaan paraabeliparvesta esim. a:n arvoja $a=0$ ja $a=1$ vastaavat paraabelit.

Saadaan $y=x^2+x$ ja $y=x^2+1$

Yhtälöparista $\begin{cases} y=x^2+x \\ y=x^2+1 \end{cases}$ seuraa $x^2+x=x^2+1 \Rightarrow x=1$ ja $y=2$.

(Tai joku muu järkevä aloitus) +1p

Osoitetaan, että kaikki parven paraabelit kulkevat tämän pisteen kautta sijoittamalla $x=1$ ja $y=2$ paraabeliparveen $2-a=1^2-(a-1)\cdot 1 \Leftrightarrow 2-a=2-a,$ mikä on tosi lause. +1p

b) Piste $P=(1,2)$. +1p

c) Tapa I: Yhtälöparilla $y=x^2+(1-a)x+a$ ja $y=1$ pitää olla vain yksi ratkaisu (kaksoisjuuri), jolloin yhtälön

$1=x^2+(1-a)x+a$ eli $x^2+(1-a)x+a-1=0$ diskriminantin oltava nolla. +1p

$D=(1-a)^2-4\cdot 1\cdot(a-1)=0 \Leftrightarrow a^2-6a+5=0.$ +1p

$a^2-6a+5=0 \Leftrightarrow (a-1)(a-5)=0.$ Tulon nollasäännön avulla saadaan

$a=1$ tai $a=5,$ josta paraabelit $y=x^2+1$ tai $y=x^2-4x+5.$ +1p

Tapa II: Paraabelin huipun y-koordinaatin pitää olla 1.

Neliöksi täydentämällä saadaan $x^2-(a-1)x+a=(x-\frac{a-1}{2})^2-\frac{a^2}{4}+\frac{3a}{2}-\frac{1}{4},$

josta huipun y-koordinaatti $-\frac{a^2}{4}+\frac{3a}{2}-\frac{1}{4}.$ +1p

Saadaan yhtälö $-\frac{a^2}{4}+\frac{3a}{2}-\frac{1}{4}=1$ +1p

Jatko kuten tavassa II +1p

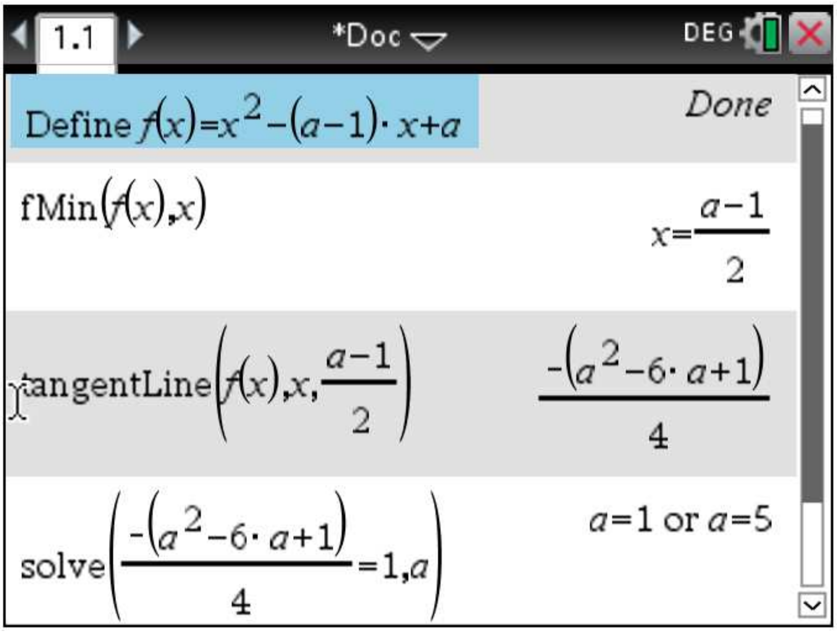
Tapa III: Havaitaan, että ratkaisukaavasta $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

seuraa symmetrian nojalla, että huipun x-koordinaatti $x=\frac{-b}{2a}.$

Nyt siis paraabelin $y=x^2-(a-1)x+a$ huipun x-koordinaatti on

$x=\frac{-(1-a)}{2\cdot 1}=\frac{a-1}{2}.$ Y-koordinaatti saadaan sijoittamalla. Jne.

Tapa IV: Olkoon $f(x)=x^2-(a-1)x+a.$ Huipun x-luku symbolisella laskimella TI-nspire ja tangentin yhtälö, josta jatko. +1p+1p+1p



B7. Etanoista ennustavan eukon mukaan poudan todennäköisyys on joka päivä 67,89 %. Laske todennäköisyys, että viiden päivän jaksossa

a) kaikki päivät ovat sadepäiviä. 1p

b) poutapäiviä tulee neljä. 2p

c) tulee tasan kolme peräkkäistä poutapäivää. 3p

Ratkaisu: a) poutapäivä $= p$ ja sadepäivä $= s$. $P("s") = 1 - 0,6789 = 0,3211.$

Suotuisa tapahtuma s ja s ja s ja s ja s. Kertolaskukaavan nojalla saadaan

$P(\text{"kysytty"}) = 0,3211^5 = 0,0034135... \approx 0,003414.$ +1p

b) Binomikaavan nojalla saadaan +1p

$P(\text{"kysytty"}) = \binom{5}{4} \cdot 0,6789^4 \cdot 0,3211^1 = 0,3410621... \approx 0,3411.$ +1p

Vaihtoehtoinen tapa: jono pppps, pppsp, ppspp, psppp,spppp +1p

vastaus +1p

Puuttuu järjestys max 1p

c) Jono pppss, sppps, ssppp, josta todennäköisyys

$P_1 = 3 \cdot 0,6789^3 \cdot 0,3211^2 = 0,096787504369032...$ +1p

Havaittu myös suotuisa jono psppp tai pppsp, +1p

josta todennäköisyys $P_2 = 2 \cdot 0,6789^4 \cdot 0,3211 = 0,13642486601502...$

Kysytty todennäköisyys on $P_1 + P_2 = 0,23321237038405... \approx 0,2332.$ +1p

Yleisohje koko tehtävälle: ei vaadita vastaukseen neljää merkitsevää numeroa,

mutta jos on väärin pyöristetty niin max 5.

Desimaalien määrää riippuu laskimesta ja asetuksista.

B8. a) Eliön kuollessa hiili-isotoopin C-14 pitoisuus alkaa vähentyä eksponentiaalisesti. Kuinka vanha on puuesine, jonka C-14 pitoisuus on vähentynyt 28 %? Kyseisen isotoopin puoliintumisaika on 5730 vuotta.

b) $\sin x = -\frac{1}{3}$ ja $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$. Määritä kulman x kosinin tarkka arvo sekä kulman x likiarvo.

Ratkaisu: a) Tapa I: Hiilen C-14 alkumäärä olkoon a. (Jos sitä ei ole, niin max 2.)

Määrää t vuoden kuluttua kuvaa malli $N(t) = a \cdot (\frac{1}{2})^{t/5730}$. +1p

Saadaan yhtälö $a \cdot (\frac{1}{2})^{t/5730} = (1-0,28)a$ eli

$$(\frac{1}{2})^{t/5730} = 0,72 \Rightarrow \frac{t}{5730} = \frac{\ln(0,72)}{\ln(\frac{1}{2})} \Leftrightarrow t = 2715,6257091447... \approx 2700 \text{ vuotta.}$$

Hyväksytään myös 2716 tai 2720 vuotta, mutta jos desimaaleja mukana niin −1p

Tapa II: Määrää t vuoden kuluttua kuvaa malli $N(t) = a \cdot k^t$. +1p

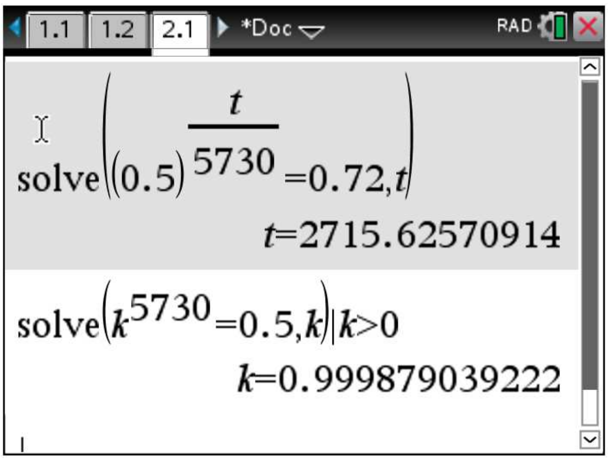
Puoliintumisajasta saadaan yhtälö

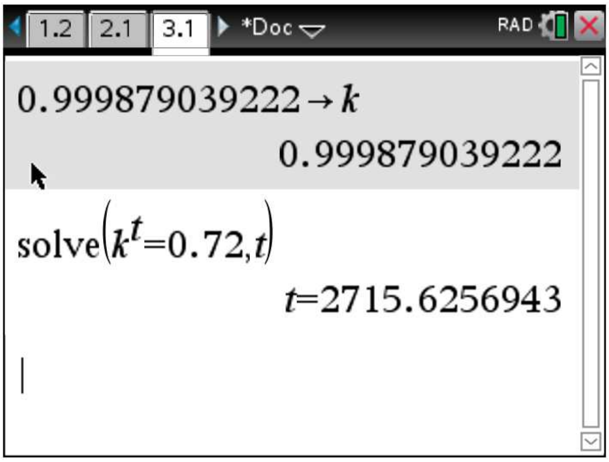
$$a \cdot k^{5730} = \frac{1}{2}a \Rightarrow k = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{5730}} = 0,99987903922201...$$ +1p

Täten kysytty saadaan ratkaistua yhtälöstä

$$a \cdot 0,99987903922201^t = 0,72a \Rightarrow t = \frac{\ln(0,72)}{\ln(0,99987903922201)}$$

$$= 2715,6257091447... \approx 2700 \text{ vuotta.}$$





b) Kyseessä kolmas neljännes, joten kulman x kosinin arvo on negatiivinen.

$$\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x}$$

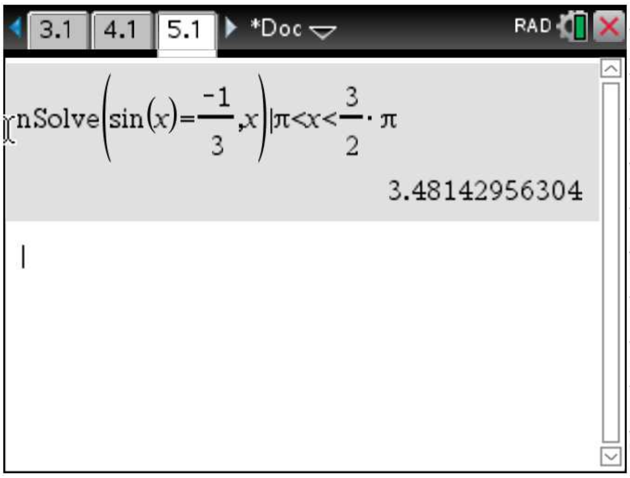
$$= -\sqrt{1-(-\frac{1}{3})^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$ +1p

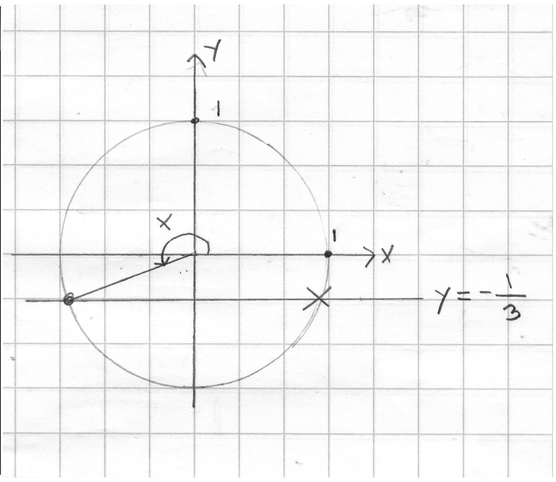
$\cos(x) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, josta eräs kulma $x = \cos^{-1}(-\frac{2\sqrt{2}}{3}) = 2{,}8017557441357...$ (rad).

Kaikki yhtälön $\cos(x) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ratkaisut ovat $x = \pm 2{,}8017557441357 + n \cdot 2\pi$,
missä n on kokonaisluku. +1p

Ainoa ratkaisu, joka toteuttaa ehdon $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ on
$-2{,}8017557441357 + 1 \cdot 2\pi = 3{,}48142956304... \approx 3{,}48$. ($\approx 199{,}47^\circ$) +1p

Tapa II:





B9. a) Missä lukujärjestelmässä kymmenjärjestelmän luku 51 kirjoitetaan muodossa 123?

b) Osoita, että jos k^{2017} on pariton, niin myös k on pariton.

Ratkaisu: a) Olkoon lukujärjestelmän kantaluku k.

Tällöin $123_k = 1 \cdot k^2 + 2k^1 + 3 \cdot k^0 = k^2 + 2k + 3$. +2p

Saadaan yhtälö $k^2 + 2k + 3 = 51 \Leftrightarrow (k-6)(k+8) = 0$.

Tulon nollasäännön nojalla saadaan $k = 6$ tai ($k = -8$, ei mielekäs). +1p

b) Käytetään epäsuoraa todistustapaa. Tehdään antiteesi: k on parillinen.
joten k on muotoa $k = 2n$, missä n on kokonaisluku. +1p

Tällöin $k^{2017} = (2n)^{2017} = 2^{2017} \cdot n^{2017}$.

Luku $2^{2017} \cdot n^{2017} = 2 \cdot 2^{2016} \cdot n^{217} = 2 \cdot (2^{2016} \cdot n^{217}) = 2m$,
missä m on kokonaisluku. +1p

Luku $2m$ on siten parillinen, koska tekijänä on luku 2. Siten ristiriita oletuksen k^{2017} on pariton kanssa eli antiteesi on väärä eli itse teesi oikea. +1p

B2-osio. Laske tehtävistä **B10-B13** enintään ***kolme***.

B10. Muumimukin sisäosa on katkaistun kartion muotoinen, jossa pohjan halkaisija on 6,4 cm ja suuosan halkaisija 7,6 cm. Mukiin kaadetaan1,5 dl kahvia. Kuinka korkealle nousee nesteen yläpinta mukin pohjasta laskettuna, kun mukin sisäkorkeus on 72 mm?

Ratkaisu: Tapa I: Sijoitetaan mukin pohjan keskipiste origoon, jolloin pohjan halkaisijan reuna on pisteessä $A=(3\frac{1}{5},0)$. Katso kuvio.

Suuosan halkaisijan reuna on pisteessä $B=(3\frac{4}{5},7\frac{1}{5})$. 1p

(tai joku muu järkevä aloitus) 1p)

(tai hyvä kuvio) 1p)

Suoran *AB* yhtälö $y-0=\dfrac{7,2-0}{3,8-3,2}(x-3,2)\Rightarrow y=12x-\dfrac{192}{5}$. +1p

Mukin sisäosa syntyy, kun jana *AB* pyörähtää *y*-akselin ympäri.

$y=12x-\dfrac{192}{5}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{12}y+\dfrac{16}{5}$. Olkoon *h* kysytty korkeus. +1p

$$V_{\text{muki}}=\int_0^h dV=\int_0^h \pi\cdot r_y^2\,dy=\int_0^h \pi\cdot(\frac{1}{12}y+\frac{16}{5})^2\,dy \quad +1p$$

$$=\pi \mathop{/}_0^h \frac{(5y+192)^3}{54\,000}dy=\frac{\pi h(25h^2+2880h+110592)}{10800} \quad +1p$$

Yhtälö $V_{\text{muki}}=150$ ratkaistu symbolisella laskimella ja saatu

$$=4{,}18912501041\approx 4{,}2 \text{ cm.} \quad +1p$$

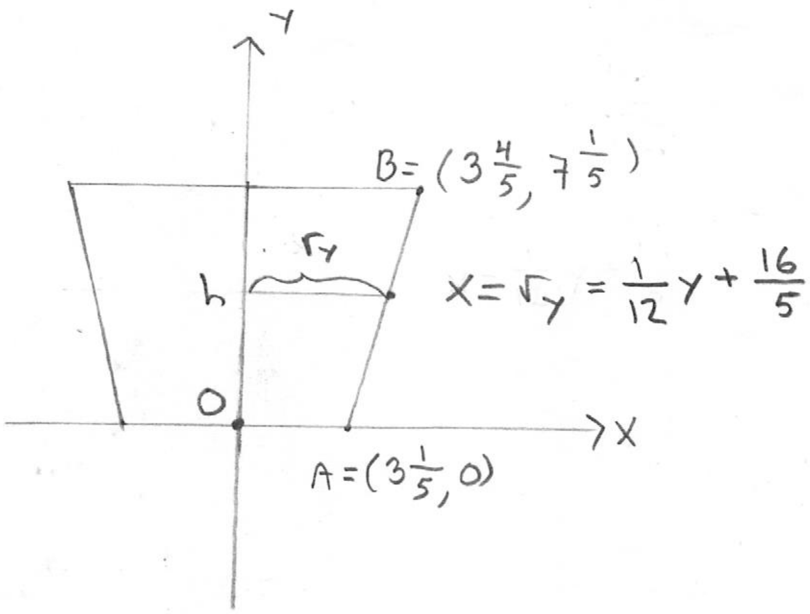
Tapa II: Saatu janan *AB* yhtälö $y-0=\dfrac{7,2-0}{3,8-3,2}(x-3,2)\Rightarrow y=12x-\dfrac{192}{5}$. +2p

Suuosan säde korkeudella *h* on $\dfrac{1}{12}h+\dfrac{16}{5}$. +1p

Käytetty katkaistun kartion taulukkokirjan kaavaa ja saatu yhtälö

$$\frac{\pi h}{3}(3,2^2+3,2\cdot(\frac{1}{12}h+\frac{16}{5})+(\frac{1}{12}h+\frac{16}{5})^2)=150. \quad +2p$$

Ratkaistu yhtälö symbolisella laskimella ja saatu $h=4{,}18912501041\approx 4{,}2$ cm. +1p



B11. a) Kirjoita erotusosamäärän lauseke kohdasta a kohtaan $a+h$?
Mitä asiaa erotusosamäärän avulla selvitetään? 2p
b) Jyrkkää rinnettä kuvaa likimäärin funktio $f(x)=-x^{3x}$ tietyllä välillä.
Arvioi rinteen kaltevuuskulmaa kohdassa $x=1,5$ käyttäen keskeisdifferenssiä ja arvoa $h=0,01.$ Anna tulos asteen kymmenesosan tarkkuudella. 4p

Ratkaisu:

a) Lauseke on $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. +1p

Erotusosamäärän avulla voidaan selvittää pisteiden $(a,\, f(a))$ ja $(a+h,\, f(a+h))$ kautta kulkevan sekanttisuoran kulmakerroin. +1p

Huom. Jo sanat sekantti ja kulmakerroin antavat pisteen

b) Tapa I: Määritellään laskimeen funktio $f(x)=-x^{3x}$.

Keskeisdifferenssi $\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$. +1p

$=\dfrac{f(1,5+0,01)-f(1,5-0,01)}{2\cdot 0,01}$.

$=-26{,}153\,017\,356\,335...$ +1p

(Desimaalien määrä riippuu käytettävästä laskimesta ja asetuksesta)

Keskeisdifferenssi antaa sekantin kulmakertoimen, joten

$\tan\alpha=-26{,}153\,017\,356\,335...$ +1p

$\alpha=\tan^{-1}(-26{,}153\,017\,356\,335...)=-87{,}81027632574^{\circ}\approx-87{,}8^{\circ}.$ +1p

Huom! Miinus merkkiä ei vaadita vastaukseen

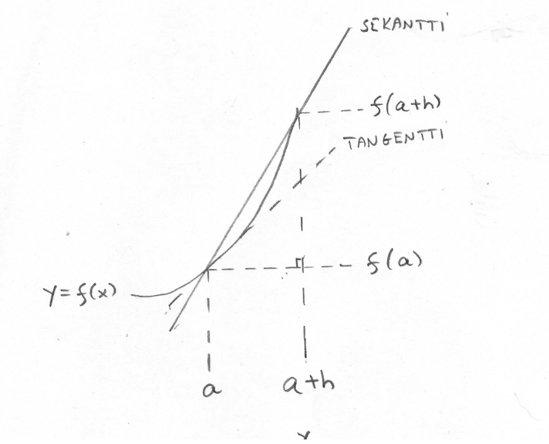
Tapa II: b) Keskeisdifferenssi on oikeanpuoleisen ja vasemmanpuoleisen erotusosamäärän keskiarvo.

Oik.p. $\dfrac{f(1,5+0,01)-f(1,5)}{0,01}=-26,76629635186...$ +1p

Vas.p $-\dfrac{f(1,5-0,01)-f(1,5)}{-0,01}=-25,53973836081...$ +1p

Keskiarvo $-26,153017...$ +1p

Vastaus +1p



B12. Paraabelille $y=x-x^2$ piirretään I-neljänneksen pisteeseen tangentti, jonka kuvaaja on laskeva suora. Tangentti rajoittaa positiivisten koordinaattiakselien ja käyrän $y=x-x^2$ kuvaajan kanssa kaksiosaisen alueen *A*.
Laske alueen *A* pinta-alan pienin mahdollinen arvo.

Ratkaisu: Olkoon tangentin sivuamispisteen koordinaatit $(a, a-a^2)$, missä $\frac{1}{2}<a\le 1$.

(Jos määrittelyehtoa ei missään mainita, niin max 5p)

Tangentin yhtälö $y-(a-a^2)=(1-2a)(x-a)$. $(y'=1-2x)$ +1p

$$y=(1-2a)x+a^2.$$

Tangentti leikkaa *y*-akselin kohdassa $B=(0,a^2)$ ja *x*-akselin kohdassa $C=(\frac{a^2}{2a-1},0)$.

Kolmion *OBC* pinta-ala $A=\dfrac{\frac{a^2}{2a-1}\cdot a^2}{2}=\dfrac{a^4}{4a-2}, \frac{1}{2}<a\le 1.$ Piste *O* on origo. +1p

Paraabeli $y=x-x^2$ rajoittaa välillä $0\le x\le 1$ alueen *D*, jonka ala saadaan integraalista $\int_0^1 (x-x^2)\,dx=\frac{1}{6}$. +1p

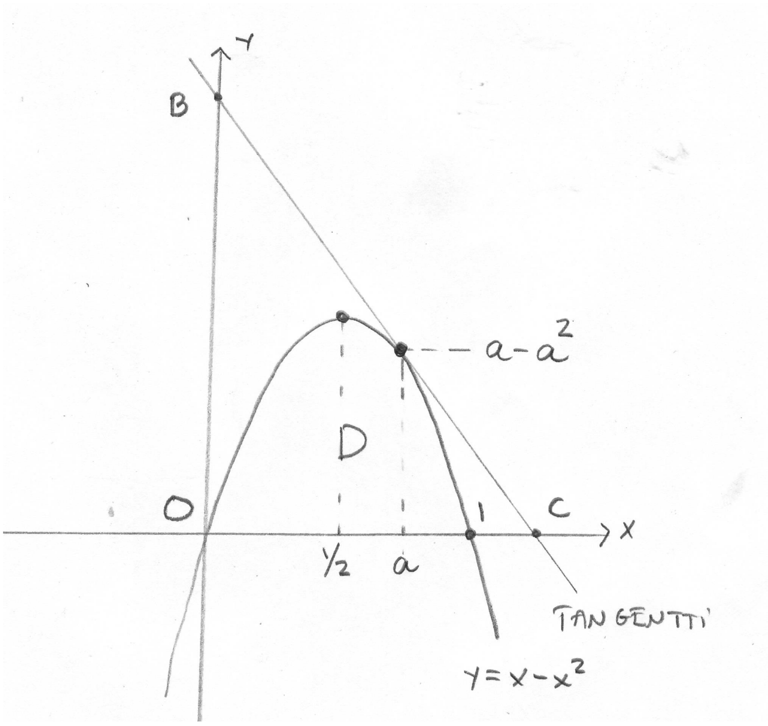
Kysytyn kaksiosaisen alueen pinta-ala on $E(a)=A-D=\dfrac{a^4}{4a-2}-\dfrac{1}{6}, \frac{1}{2}<a\le 1.$

Derivaatta $E'(a)=\dfrac{a^3(3a-2)}{(2a-1)^2}, \frac{1}{2}<a<1.$ (symbolinen laskin)

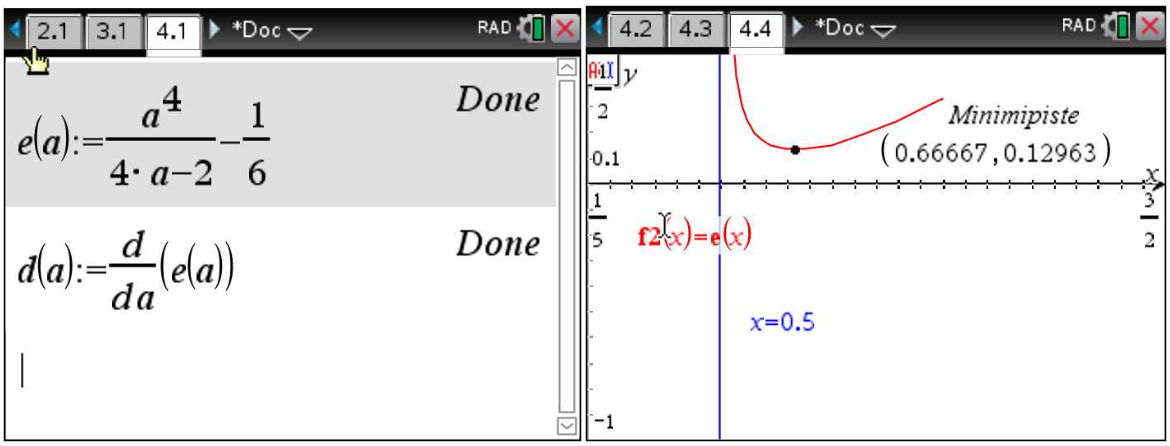
Derivaatan nollakohta $a=\frac{2}{3}$ tai $(a=0)$. (symbolinen laskin) +1p

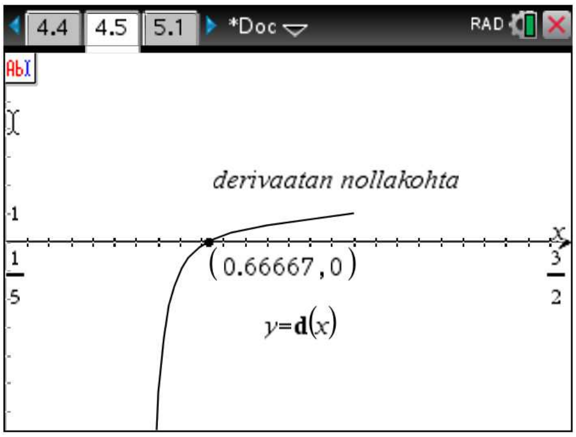
Perustelu absoluuttiselle minimille esim.
kulkukaavion/ funktion kuvaajan/derivaatan kuvaajan avulla
$E'(0,6)=-1,08<0$ ja $E'(0,7)=0,214375>0$. Täten derivaatan merkki vaihtuu kohtaa $a=\frac{2}{3}$ ohitettaessa negatiivisesta positiiviseksi, joten kyseessä on absoluuttinen minimikohta. +1p

Saatu vastaus $E(\frac{2}{3})=\frac{7}{54}$. +1p



Eräitä laskuja tukevia symbolisen laskimen suorituksia.





B13. a) Osoita, että funktio $f(x)=\begin{cases}\dfrac{8}{(2x+4)^2}, & x\geq 0\\ 0, & \text{muulloin}\end{cases}$ on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio.

b) Muodosta satunnaismuuttujan X kertymäfunktion $F(x)$ lauseke.

c) Laske todennäköisyys $P(X>6)$.

Ratkaisu: a) Oltava $f(x)\geq 0$ ja $\int_{-\infty}^{-\infty} f(x)\,dx=1.$

Ensimmäinen ehto selviö, (sillä parillinen eksponentti ja kielto $x\neq -2$ ei kuulu alueeseen). 1p

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx+\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{8}{(2x+4)^2}\,dx=0+\lim_{M\to\infty}\Big/_0^M -\frac{4}{2x+4}$$

$$-\frac{4}{2M+4}+1\xrightarrow{M\to\infty}0+1=1.$$ Oltava näkyvissä raja-arvoprosessi ja int.funktio. +1p

b) Kun $x<0$, niin $F(x)=0$, koska vaaka-akselin kanssa ei muodostu pinta-alaa. +1p

Kun $x\geq 0$, niin $F(x)=\int_0^x \frac{8}{(2t+4)^2}\,dt=\Big/_0^x -\frac{4}{2t+4}=1-\frac{4}{2x+4}=\frac{2x}{2x+4}.$ +1p

c) $P(X>6)=1-P(X\leq 6)=1-\frac{2\cdot 6}{2\cdot 6+4}=\frac{1}{4}.$ +1p +1p

Voi myös laskea suoraan laskimella $\int_6^{\infty}\frac{4}{(2x+4)^2}\,dx.$ +2p