PRELIMINÄÄRIKOE

Pitkä Matematiikka 4.2.2015

Vastaa enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä merkittyjen (*) tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. a) Ratkaise epäyhtälö $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}>x-1$.

b) Määritä kaikki luvut, jotka toteuttavat vaatimuksen: Luvun neliön ja vastaluvun summa on 2.

c) Sievennä lauseke $\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a}}$. Anna tulos muodossa $\sqrt[p]{a^q}$.

2. a) Hinta nousee ensin 12 % ja laskee sitten 14 %.
Kuinka monta prosenttia ja mihin suuntaan hinta kokonaisuudessaan on muuttunut?
Anna tulos prosentin kymmenyksen tarkkuudella.

b) Geometrisen lukujonon kolmas termi on 4,5 ja neljäs termi on 6,75.
Määritä jonon ensimmäinen termi.

c) Määritä funktion $f(x)=\sin x$ välillä $2\pi<x<4\pi$ olevat nollakohdat. Esitä perustelut.

3. a) Muodosta funktion $f(x)=\frac{800}{x}+0,004+0,02x$, missä $x\geq 1$, kulkukaavio.
Määritä funktion $f(x)$ pienin arvo.

b) Määritä ympyrän $36x^2-36x+36y^2+24y-131=0$ keskipiste ja säde.

4. Viisarikellon minuutti- ja tuntiosoittimien kärkien väli on 0,5 cm klo 12.00
ja 2,5 cm klo 15.00.
a) Määritä osoittimien pituudet.
b) Kuinka suuri on osoittimien kärkien väli klo 16.00? Anna tulos millimetrin tarkkuudella.

5. Tero voittaa Kirstin yksittäisessä sakkipelissä todennäköisyydellä 50 % ja
Kirsti voittaa Teron yksittäisessä sakkipelissä todennäköisyydellä 20 %, loput pelit
päättyvät tasan. Oletetaan, että pelin tulos on riippumaton edellisen pelin tuloksesta.
He pelaavat ystävyysturnauksen, jossa turnaus loppuu, kunnes jompikumpi voittaa kaksi peliä.
a) Laske todennäköisyys, että pelejä tarvitaan täsmälleen kolme.
b) Mikä on todennäköisyys sille, että turnaus ratkeaa viidennessä pelissä Kirstin hyväksi?
Anna tulokset prosentin kymmenyksen tarkkuudella.

6. Suunnikkaan *ABCD* kaksi kärkipistettä ovat $B=(2,3,4)$ ja $D=(6,2,10)$.
Lävistäjänä on vektori $\overrightarrow{AC}=10\overline{i}+3\overline{j}+6\overline{k}$.

a) Muodosta vektori $\overrightarrow{BD}$ ja laske suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste *E*.

b) Määritä pisteen *A* koordinaatit.

c) Laske suunnikkaan terävän kulman suuruus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

KÄÄNNÄ!

7. Määritä käyrältä $y = x^2 + 1$ ne pisteet, joiden etäisyys suorasta $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ on 2.

8. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 20 cm. Määritä kolmion suurin mahdollinen pinta-ala. Perustele vastauksesi myös muulla tavalla kuin laskimella, esim. derivaatan avulla.

9. Superpallo pudotetaan 2,8 metrin korkeudelta lattialle, jolloin pallo alkaa pomppia. Pompun jälkeen pallon maksimikorkeus on pudonnut 22 % edellisestä maksimikorkeudesta.
a) Kuinka korkealle pallo pomppaa yhdeksännellä pomppauskerralla? (1p)
b) Kuinka monennella kerralla pompun korkeus jää ensimmäisen kerran alle 2 cm:n? (2p)
c) Muodosta funktio $S(x)$, joka ilmoittaa pallon kulkevan kokonaismatkan, kun (3p)
pomppuja on x kappaletta. Ratkaise yhtälö $S(x) = 23$.

10. Polynomifunktion $P(x)$ toinen derivaatta $P''(x) = D(P'(x)) = 6x - 4$ ja käyrän $y = P(x)$ kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin yhtälö on $2x - y + 1 = 0$.

Laske määrätyn integraalin $\int_0^1 P(x)\,dx$ tarkka arvo.

11. a) Määritä lukujen 86 ja 20 suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.
b) Ilmaise suurin yhteinen tekijä lukujen 86 ja 20 lineaarikombinaationa.
c) Määritä Diofantoksen yhtälön $86x + 20y = 100$ ne ratkaisut, jotka toteuttavat epäyhtälön $0 \le x + y \le 50$.

12. Määrätyn integraalin $\int_1^3 2x^{-1}\,dx$ arvo arvioidaan Simpsonin säännöllä.

a) Laske integraalin arvon likiarvo käyttäen neljää osaväliä ja laske suhteellinen virhe

prosentin kymmenyksen tarkkuudella.

b) Kuinka monta jakoväliä n tarvitaan, jotta absoluuttinen virhe olisi korkeintaan 10^{-3}?

Käytä arviossa taulukkokirjan virhekaavaa $|E_n| = \frac{(b-a)^5}{180n^4}\,|f^{(4)}(t)|$, missä $a < t < b$.

JATKUU →

13. a) Millä vakion *a* arvolla funktio $f(x)=\begin{cases} 4-x, \text{ kun } x \geq a \\ a(1+x), \text{ kun } x < a \end{cases}$ on kaikkialla jatkuva ja aidosti vähenevä?

b) Millä muuttujan *x* arvoilla sarja $1+\frac{x}{x-3}+(\frac{x}{x-3})^2+(\frac{x}{x-3})^3+....$ suppenee ja mikä on sarjan summa?

14*. a) Olkoon x_0 polynomifunktion $P(x)$ derivaatan nollakohta ja toinen derivaatta $P''(x_0)<0.$ Päättele perustellen onko x_0 ääriarvokohta vai ei. Jos on, niin onko mahdollinen ääriarvo maksimi vai minimi.

(2p)

b) Jos funktion $y=P(x)$ toinen derivaatta $P''(x_0)<0,$ niin käyrän sanotaan olevan tässä kohdassa *kupera ylöspäin*. Vastaavasti, jos $P''(x_0)>0,$ niin käyrän sanotaan olevan *kupera alaspäin.*
Piste, jossa käyrän kuperuussuunta muuttuu, on nimeltään *käännepiste*.
Määritä käyrän $y=3x^5+5x^4-10x^3-30x^2+15x-20$ käännepisteet. (3p)

c) Osoita, että jos kolmannen asteen polynomifunktiolla $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ on derivaatan nollakohdat $x=x_1$ ja $x=x_2,$ missä $x_1 \neq x_2,$ niin funktiolla on käännepiste kohdassa $x=\frac{x_1+x_2}{2}.$

(4p)

15*. a) Osoita, että funktio $f(x)=\frac{x^2-3x+4}{x-2}$ ei saa arvoa 1. (2p)

b) Funktio *f* on aidosti kasvava, jos kaikilla määrittelyjoukon arvoilla *a*, *b* pätee: (3p)
Jos $a<b,$ niin $f(a)<f(b).$ Osoita, että funktio $f(n)=n+n^3,\ n=1,2,3,...$ on aidosti kasvava käyttäen tätä määritelmää.

c) Funktio $f(t)$ on kaikkialla jatkuva ja derivoituva sekä funktion arvojoukko on välillä $0 \leq t \leq 1$ väli $[-2,-1].$

Määritä funktion $g(x)=\int_1^0 [x-f(t)]^2\,dt$ ääriarvokohta. (4p)

PRELIMINÄÄRIKOE

Pitkä Matematiikka 4.2.2015

1. a) Ratkaise epäyhtälö $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}>x-1$.

b) Määritä kaikki luvut, jotka toteuttavat vaatimuksen: Luvun neliön ja vastaluvun summa on 2.

c) Sievennä lauseke $\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a}}$. Anna tulos muodossa $\sqrt[p]{a^q}$.

Ratkaisu

a) Kertomalla 12:lla saadaan $4x-3x>12x-12$ 1p

$$-11x>-12$$

$$x<\frac{12}{11}=1\frac{1}{11}..$$ +1p

b) Saadaan $x^2+(-x)=2$ 1p

Ratkaisukaavalla $x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}\Rightarrow x=2$ tai $x=-1$.

+1p

Huom. Vain laskinratkaisu ilman yhtälön kirjoitusta max 1 p

c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a}}=(a^1\cdot a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$ 1p

$$(a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}.$$ +1p

Huom. Laskinratkaisut hyväksytään kohdissa a) ja c), jos maininta laskimen käytöstä.

Vastaus a) $x<\frac{12}{11}$ b) $x=2$ tai $x=-1$ c) $\sqrt[3]{a^2}$

2. a) Hinta nousee ensin 12 % ja laskee sitten 14 %.
Kuinka monta prosenttia ja mihin suuntaan hinta kokonaisuudessaan on muuttunut?
Anna tulos prosentin kymmenyksen tarkkuudella.

b) Geometrisen lukujonon kolmas termi on 4,5 ja neljäs termi on 6,75.
Määritä jonon ensimmäinen termi.

c) Määritä funktion $f(x)=\sin x$ välillä $2\pi<x<4\pi$ olevat nollakohdat. Esitä perustelut.

Ratkaisu a) Hinta aluksi a. Hinta muutoksien jälkeen $(1+\frac{12}{100})\cdot(1-\frac{14}{100})a=0,9632a$ 1p

eli 96,32 % alkuperäisestä hinnasta. Täten hinta alentunut

$$100\,\%-96,32\,\%=3,68\,\%\approx3,7\,\%.$$ +1p

Huom. Jos puuttuu a, niin max 1p

b) Jonon suhdeluku $q=\frac{a_4}{a_3}=\frac{6,75}{4,5}=1,5.$ 1p

Ensimmäinen termi $a_1 = \dfrac{a_3}{q^2} = \dfrac{4,5}{1,5^2} = 2.$ +1p

Huom. Voidaan edetä myös termi termiltä.

c) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n \cdot \pi, n$ on kokonaisluku. 1p

x	$n \cdot \pi$
$n = -1$	$-\pi$, ei käy
$n = 0$	0, ei käy
$n = 1$	π, ei käy
$n = 2$	2π, ei käy
$n = 3$	3π, käy
$n = 4$	4π, ei käy

Siis ainoa välillä $2\pi < x < 4\pi$ oleva nollakohta on $x = 3\pi.$ +1p

Huom. Pelkkä oikea vastaus max 1p

Vastaus a) $3,7\ \%$ b) $a_1 = 2$ c) $x = 3\pi$

3. a) Muodosta funktion $f(x) = \dfrac{800}{x} + 0,004 + 0,02x,$ missä $x \geq 1,$ kulkukaavio.

Määritä funktion $f(x)$ pienin arvo.

b) Määritä ympyrän $36x^2 - 36x + 36y^2 + 24y - 131 = 0$ keskipiste ja säde.

Ratkaisu a) Derivaatta $f'(x) = -\dfrac{800}{x^2} + 0,02,$ missä $x > 1$ 1p

Derivaatan nollakohdat

$\dfrac{800}{x^2} = 0,02 \Rightarrow x^2 = 40\,000 \Rightarrow (x = -200)$ tai $x = 200,$ joka on välillä $x > 1.$

Kulkukaavio:

	1		200	
$f'(x)$		$- - - -$		$+ + + +$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

Absol. minimi +1p

$f'(100) = -0,06 < 0$ ja $f'(300) = \dfrac{1}{90} > 0.$

Pienin arvo $f(200) = 8,004.$ +1p

Huom. Derivaatan nollakohta ja pienin arvo voi selvittää myös laskimen avulla.

b) $36x^2 - 36x + 36y^2 + 24y - 131 = 0 \,|\, :36$

$$x^2 - x + y^2 + \frac{2}{3}y = \frac{131}{36}$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (y + \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9} = \frac{131}{36}$$ +1p

$(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{3})^2 = 4$, josta ympyrän keskipiste $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ +1p ja säde $\sqrt{4}=2.$ +1p

Huom. Neliöksi täydentäminen voidaan myös tehdä laskimen avulla.

Vastaus a) $f(200)=8{,}004$ b) Keskipiste $(\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$ ja säde 2

4. Viisarikellon minuutti- ja tuntiosoittimien kärkien väli on 0,5 cm klo 12.00
ja 2,5 cm klo 15.00.
a) Määritä osoittimien pituudet.
b) Kuinka suuri on osoittimien kärkien väli klo 16.00? Anna tulos millimetrin tarkkuudella.

Ratkaisu a) Olkoon minuuttiosoittimen pituus y ja tuntiosoittimen pituus x.

Klo 12 tilanteesta saadaan yhtälö $y-x=0{,}5$ ja klo 15 tilanteesta Pythagoraan lauseen nojalla yhtälö $x^2+y^2=2{,}5^2.$ 1p

Saadaan $x^2+(x+0{,}5)^2=2{,}5^2 \Leftrightarrow 2x^2+x-6=0.$ +1p

Ratkaisukaavalla saadaan $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 2\cdot(-6)}}{2\cdot 2} \Rightarrow x=1{,}5$ tai ($x=-2$).

Tuntiosoittimen pituus siis 1,5 cm ja minuuttiosoittimen 2,0 cm. +1p

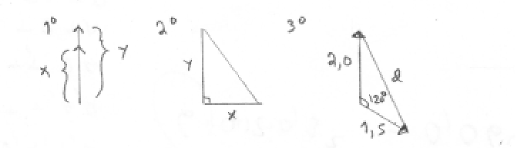
Huom. yhtälöpari/yhtälö voidaan ratkaista myös symbolisella laskimella.
jos viisarien pituudet toisinpäin, niin -1p

b) Klo 16.00 osoittimien välinen kulma on 120 astetta. +1p

Kosinilauseella saadaan $d^2=1{,}5^2+2{,}0^2-2\cdot 1{,}5\cdot 2{,}0\cos 120^\circ.$ +1p

$d^2=9{,}25 \Rightarrow d=\sqrt{9{,}25}=3{,}04138...\approx 3{,}0$ cm. +1p

Huom.b)-kohta voidaan tehdä myös muistikolmioiden avulla.



Vastaus a) Tuntosoitin 1,5 cm ja minuuttiosoitin 2,0 cm b) $3{,}0$ cm

5. Tero voittaa Kirstin yksittäisessä sakkipelissä todennäköisyydellä 50 % ja
Kirsti voittaa Teron yksittäisessä sakkipelissä todennäköisyydellä 20 %, loput pelit
päättyvät tasan. Oletetaan, että pelin tulos on riippumaton edellisen pelin tuloksesta.
He pelaavat ystävyysturnauksen, jossa turnaus loppuu, kunnes jompikumpi voittaa kaksi peliä.
a) Laske todennäköisyys, että pelejä tarvitaan täsmälleen kolme.
b) Mikä on todennäköisyys sille, että turnaus ratkeaa viidennessä pelissä Kirstin hyväksi?
Anna tulokset prosentin kymmenyksen tarkkuudella.

Ratkaisu: a) Tasapelin tn $=30$ %.

Mahdollisuudet ovat kolme peliä siten, että Kirsti tai Tero voittaa kaksi peliä ja yksi peli on tasapeli tai Kirsti tai Tero voittaa lukemin 2-1. 1p

Koodaus: $x=$ Kirsti, $y=$ Tero ja $t=$ tasapeli.

Mahdollisuudet ovat *txx* tai *xtx* tai *tyy* tai *yty* tai *xyx* tai *yxx* tai *yxy* tai *xyy*. +1p

$=2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2^2+2\cdot 0{,}5^2\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}5^2$

$=0{,}314=31{,}4$ %. +1p

b) Kirstin pitää voittaa viides peli. Mahdollisuudet ovat viisi peliä siten, että Kirsti voittaa kaksi ja tulee kolme tasapeliä
tai Kirsti voittaa kaksi peliä, tulee kaksi tasapeliä ja Tero voittaa yhden pelin. +1p

$2x+3t \Rightarrow$ *tttxx* tai *ttxtx* tai *txtttx* tai *xtttx*. $\Rightarrow 4\cdot 0,3^3\cdot 0,2^2=0,00432.$ +1p

$2x+2t+y \Rightarrow \dfrac{4!}{2!}\cdot xxtty \Rightarrow 12\cdot 0,2^2\cdot 0,3^2\cdot 0,5=0,0216.$

Siis kysytty todennäköisyys on $0,00432+0,0216=0,02592\approx 2,6\,\%$. +1p

Vastaus: a) 31,4 % b) 2,6 %

6. Suunnikkaan *ABCD* kaksi kärkipistettä ovat $B=(2,3,4)$ ja $D=(6,2,10)$.
Lävistäjänä on vektori $\overrightarrow{AC}=10\overline{i}+3\overline{j}+6\overline{k}$.

a) Muodosta vektori $\overrightarrow{BD}$ ja laske suunnikkaan lävistäjien leikkauspiste *E*.
b) Määritä pisteen *A* koordinaatit.
c) Laske suunnikkaan terävän kulman suuruus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

Ratkaisu a) $\overrightarrow{BD}=(6-2)\overline{i}+(2-3)\overline{j}+(10-4)\overline{k}=4\overline{i}-\overline{j}+6\overline{k}$. 1p

Lävistäjien leikkauspiste *E* on janan *BD* keskipiste, joten

$E=(\frac{2+6}{2},\frac{3+2}{2},\frac{4+10}{2})=(4,\frac{5}{2},7).$ +1p

b) Paikkavektori $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EA}$

$=\overrightarrow{OE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=4\overline{i}+\frac{5}{2}\overline{j}+7\overline{k}-\frac{1}{2}(10\overline{i}+3\overline{j}+6\overline{k})=-\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k}.$ +1p

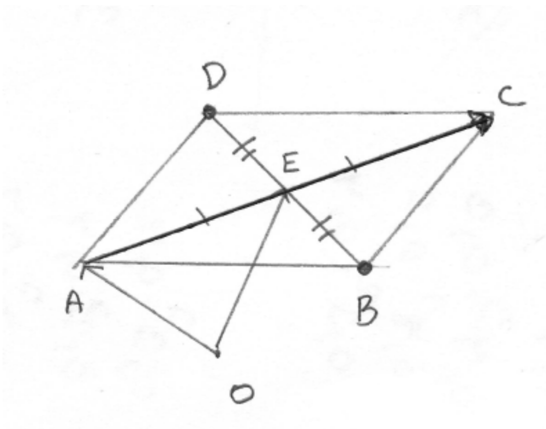
Täten piste $A=(-1,1,4)$. +1p

c) Vektori $\overrightarrow{AD}=7\overline{i}+\overline{j}+6\overline{k}$ ja $\overrightarrow{AB}=3\overline{i}+2\overline{j}$.

$\cos(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})=\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}$ +1p

$=\dfrac{7\cdot 3+1\cdot 2+6\cdot 0}{\sqrt{7^2+1^2+6^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{23}{\sqrt{1118}},$

kulma $(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})=\cos^{-1}(\frac{23}{\sqrt{1118}})=46,538^\circ...\approx 46,5^\circ$. +1p



Huom. c)- kohta voidaan ratkaista myös symbolisella laskimella.

Vastaus a) $\overrightarrow{BD}=4\overline{i}-\overline{j}+6\overline{k}$, $E=(4,\frac{5}{2},7)$ b) $A=(-1,1,4)$ c) $46,5^\circ$

7. Määritä käyrältä $y = x^2 + 1$ ne pisteet, joiden etäisyys suorasta $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ on 2.

Ratkaisu Käytetään pisteen etäisyys suorasta kaavaa $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. 1p

Suoran yhtälö saadaan muotoon $3x + 4y + 5 = 0$, joten

$a = 3, b = 4, c = 5, x_0 = x$ ja $y_0 = x^2 + 1$. +1p

Saadaan $\frac{|3x + 4(x^2 + 1) + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2 \Leftrightarrow |4x^2 + 3x + 9| = 10$ +1p

Täten $4x^2 + 3x + 9 = 10$ tai $4x^2 + 3x + 9 = -10$ +1p

Edellisestä saadaan ratkaisukaavalla $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ tai $x = -1$.

ja jälkimmäisestä ratkaisukaavalla $x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 4 \cdot 19}}{2 \cdot 4} \Rightarrow$ ei ratkaisuja. +1p

Vastaavat *y*-arvot ovat $y = (\frac{1}{4})^2 + 1 = 1\frac{1}{16}$ ja $y = (-1)^2 + 1 = 2$. +1p

Huom. Symbolista laskinta saa käyttää yhtälöstä $\frac{|3x + 4(x^2 + 1) + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$ *lähtien.*

Vastaus a) $(\frac{1}{4}, 1\frac{1}{16})$ ja $(-1, 2)$

8. Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 20 cm. Määritä kolmion suurin mahdollinen pinta-ala. Perustele vastauksesi myös muulla tavalla kuin laskimella, esim. derivaatan avulla.

Ratkaisu Olkoon suorakulmion kanta *x*, jolloin Pythagoraan lauseen mukaan kolmion korkeus on $\sqrt{20^2 - x^2} = \sqrt{400 - x^2}$, missä $0 < x < 20$.

Huom. Hyväksytään myös väli $0 \le x \le 20$. 1p

Kolmion pinta $A(x) = \frac{x \cdot \sqrt{400 - x^2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{400x^2 - x^4}$, sillä $0 < x < 20$. +1p

Derivaatta $A'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{800x - 4x^3}{2\sqrt{400x^2 - x^4}} = \frac{200x - x^3}{\sqrt{400x^2 - x^4}}, 0 < x < 20$. +1p

Derivaatan nollakohta $200x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(200 - x^2) = 0 \Leftrightarrow (x = -\sqrt{200})$ tai $(x = 0)$

tai $x = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1$. +1p

Saadaan kulkukaavio

	0	$10\sqrt{2}$	20
$A'(x)$	+	–	
$A(x)$	↗	↘	

Absol. maksimi +1p

$A'(1) = \frac{199}{\sqrt{399}} \approx 9,96 > 0$ ja $A'(16) = -\frac{14}{3} < 0$.

Suurin arvo saadaan kohdassa $x = 10\sqrt{2}$, jolloin pinta-ala $A(10\sqrt{2}) = 100$. +1p

Huom. Symbolista laskinta saa käyttää derivaatan ja sen nollakohtien määrittämisessä.
Voidaan soveltaa myös Fermatin lausetta, jolloin kulkukaaviota ei tarvita.
Voidaan tutkia myös sisäfunktiota $s(x) = 400x^2 - x^4$, *sillä ulkofunktio* $\sqrt{x}$ *on aidosti kasvava.*

Vastaus $100\ \text{cm}^2$

9. Superpallo pudotetaan 2,8 metrin korkeudelta lattialle, jolloin pallo alkaa pomppia. Pompun jälkeen pallon maksimikorkeus on pudonnut 22 % edellisestä maksimikorkeudesta.
a) Kuinka korkealle pallo pomppaa yhdeksännellä pomppauskerralla? (1p)
b) Kuinka monennella kerralla pompun korkeus jää ensimmäisen kerran alle 2 cm:n? (2p)
c) Muodosta funktio $S(x)$, joka ilmoittaa pallon kulkevan kokonaismatkan, kun (3p)
pomppuja on x kappaletta. Ratkaise yhtälö $S(x) = 23$.

Ratkaisu a) Ensimmäinen pomppaus $a_1 = (1 - 0,22) \cdot 2,8\,\text{m} = 2,184\,\text{m}$.

Toinen pomppaus $a_2 = a_1 \cdot 0,78$, joten pomppujen korkeus muodostaa geometrisen jonon, jonka suhdeluku $q = 0,78$.

Joten $a_n = 2,184 \cdot 0,78^{n-1} = 2,8 \cdot 0,78^n \Rightarrow a_9 = 0,78^9 \cdot 2,8\ \text{m} = 0,29923...\text{m} \approx 30\ \text{cm}$. 1p

Huom. a) kohdan ongelman voi ratkaista myös systemaattisesti taulukoimalla

b) Saadaan yhtälö $2,8 \cdot 0,78^n < 0,02 \Leftrightarrow 0,78^n < \frac{1}{140}$ +1p

$n > \frac{\ln(\frac{1}{140})}{\ln(0,78)} = 19,888...$, joten $n = 20$. +1p

Huom. b) kohdan epäyhtälön voi ratkaista myös systemaattisella taulukoinnilla

c) Kokonaismatka on 1. pudotus + 1. pomppu ylös ja alas eli $2a_1$ ja jne.

Siis $S(x) = 2,8 + 2a_1 + 2a_2 + ... + 2a_x$ +1p

$= 2,8 + (2 \cdot 0,78 \cdot 2,8 + 2 \cdot 0,78^2 \cdot 2,8 + ... + 2 \cdot 0,78^x \cdot 2,8)$

$= 2,8 + 5,6(0,78 + 0,78^2 + ... + 0,78^x)$, missä yhteenlaskettavia x kappaletta.

Sulkeissa oleva lauseke on geometrinen summa, jonka suhdeluku $q = 0,78$.

$$= 2,8 + 5,6\left(\frac{0,78 \cdot (1 - 0,78^x)}{1 - 0,78}\right)$$ +1p

Siten saadaan yhtälö $\frac{1246}{55} - \frac{1092}{55} \cdot 0,78^x = 23 \Rightarrow 0,78^x = \frac{-19}{1092}$.

Tällä yhtälöllä ei ole ratkaisua, sillä yhtälön vasen puoli saa vain positiivisia arvoja. +1p

Huom. b) kohdan yhtälön voi ratkaista symbolisella laskimella
Jos c)-kohdan vastauksessa likiarvoja, niin max 2p
b)- kohdan voi myös ratkaista systemaattisella taulukoinnilla

Vastaus a) 30 cm b) 20. kerralla c) $S(x) = \frac{1246}{55} - \frac{1092}{55} \cdot 0,78^x$, ei ratkaisua

10. Polynomifunktion $P(x)$ toinen derivaatta $P''(x) = D(P'(x)) = 6x - 4$ ja käyrän $y = P(x)$ kuvaajalle kohtaan $x = 1$ piirretyn tangentin yhtälö on $2x - y + 1 = 0$.

Laske määrätyn integraalin $\int_0^1 P(x)\,dx$ tarkka arvo.

Ratkaisu $P'(x) = \int P''(x)\,dx$

$= \int (6x-4)\,dx = 3x^2 - 4x + C.$

$P(x) = \int P'(x)\,dx = \int (3x^2 - 4x + C)\,dx = x^3 - 2x^2 + Cx + D.$ 1p

Annetun suoran kulmakerroin on 2, joten $P'(1) = 2.$ +1p

Toisaalta $P(1) = 3,$ sillä annettu tangentti kulkee pisteen $(1,3)$ kautta. +1p

Saadaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 3\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + C = 2 \\ 1^3 - 2\cdot 1^2 + C\cdot 1 + D = 3 \end{cases} \Rightarrow C = 3 \text{ ja } D = 1$$ +1p

Polynomifunktio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow \int_0^1 P(x)\,dx = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + 3x + 1)\,dx$

$$= \Big/_0^1 \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x\right) = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}.$$ +1p+1p

Vastaus $2\frac{1}{12}$

11. a) Määritä lukujen 86 ja 20 suurin yhteinen tekijä Eukleideen algoritmilla.
b) Ilmaise suurin yhteinen tekijä lukujen 86 ja 20 lineaarikombinaationa.
c) Määritä Diofantoksen yhtälön $86x + 20y = 100$ ne ratkaisut, jotka toteuttavat epäyhtälön $0 \le x + y \le 50.$

Ratkaisu: a)

$86 = 4\cdot 20 + 6$

$20 = 3\cdot 6 + 2$ 1p

$6 \;= 3\cdot 2.$

Syt on viimeinen nollasta eroava jakojäännös, ts. syt(86,20) $= 2.$ +1p

b) Toisaalta jakoyhtälöitä kääntäen soveltaen saadaan

$$\begin{aligned} 2 &= 20 - 3\cdot 6 \\ &= 20 - 3\cdot(86 - 4\cdot 20) \\ &= 13\cdot 20 - 3\cdot 86 \\ &= 86\cdot(-3) + 20\cdot 13. \end{aligned}$$ +1p

Huom. b)-kohdan lineaariyhdistely ei ole yksikäsitteinen
esim. $2 = 86\cdot(-13) + 20\cdot 56.$

c) b)-kohdan vastauksesta nähdään, että $2 = 86\cdot(-3) + 20\cdot 13$, josta kertomalla 50:llä saadaan $100 = 86\cdot(-150) + 20\cdot 650$, joten Diofantoksen yhtälön $86x + 20y = 100$ eräs ratkaisu on $x_0 = -150, y_0 = 650.$ (myös joku muu yksittäisratkaisu käy) +1p

Kaikki ratkaisut ovat muotoa $\begin{cases} x = -150 + n \cdot \dfrac{20}{2} = -150 + 10n \\ y = 650 - n \cdot \dfrac{86}{2} = 650 - 43n \end{cases}$, n on kokonaisluku.

+1p

Vaatimus $0 < x + y < 50 \Rightarrow 0 < 500 - 33n < 50$

$\Leftrightarrow \dfrac{150}{11} < n < \dfrac{500}{33} \Rightarrow 13,6363... < n < 15,1515... \Rightarrow n = 14$ tai $n = 15$

Täten $x_1 = -10$ ja $y_1 = 48$ tai $x_2 = 0$ ja $y_2 = 5$. +1p

Vastaus: a) syt(86,20) $= 2$ b) $2 = 86 \cdot (-3) + 20 \cdot 13$

c) $x_1 = -10$ ja $y_1 = 48$ tai $x_2 = 0$ ja $y_2 = 5$

12. Määrätyn integraalin $\int_1^3 2x^{-1}\,dx$ arvo arvioidaan Simpsonin säännöllä.

a) Laske integraalin arvon likiarvo käyttäen neljää osaväliä ja laske suhteellinen virhe

prosentin kymmenyksen tarkkuudella.

b) Kuinka monta jakoväliä n tarvitaan, jotta absoluuttinen virhe olisi korkeintaan 10^{-3}?

Käytä arviossa taulukkokirjan virhekaavaa $|E_n| = \dfrac{(b-a)^5}{180n^4}\,|f^{(4)}(t)|$, missä $a < t < b$.

Ratkaisu a) Integroimisvälin pituus on $3 - 1 = 2$, joten yhden osavälin pituus $h = \dfrac{2}{4} = 0,5$.

Olkoon $f(x) = 2x^{-1} = \dfrac{2}{x}$.

$$\int_1^3 2x^{-1}\,dx \approx \frac{0,5}{3}[f(1) + 4f(1,5) + 2f(2) + 4f(2,5) + f(3)]$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{1} + 4 \cdot \frac{2}{1,5} + 2 \cdot \frac{2}{2} + 4 \cdot \frac{2}{2,5} + \frac{2}{3}\right) = 2,2.$$ +1p

Tarkka-arvo $\int_1^3 2x^{-1}\,dx = 2\int_1^3 \dfrac{1}{x}\,dx = 2 \mathop{/}_1^3 \ln x = 2\ln 3 (\approx 2,197...)$ +1p

Suhteellinen virhe $\left|\dfrac{2,2 - 2\ln 3}{2\ln 3}\right| \cdot 100\,\% = 0,1263...\% \approx 0,1\%$. +1p

Huom. Integraalin tarkan arvon saa ottaa laskimesta.

b) $f(t) = 2t^{-1} \Rightarrow f'(t) = -2t^{-2} \Rightarrow f''(t) = 4t^{-3} \Rightarrow f'''(t) = -12t^{-4}$ ja

neljäs derivaatta $f^{(4)}(t) = 48t^{-5}$ on aidosti vähenevä välillä $1 < t < 3$, +1p

sillä viides derivaatta $f^{(5)}(t) = -\dfrac{240}{t^6} < 0$ välillä $1 < t < 3$.

Täten $|f^{(4)}(t)| = \frac{48}{t^5} < \frac{48}{1^5} = 48,$ kun $1 < t < 3.$

Saadaan arvio $|E_n| < \frac{(3-1)^5}{180n^4} \cdot 48 = \frac{128}{15n^4}.$ +1p

Siten $\frac{128}{15n^4} \le 10^{-3} \Rightarrow n \ge \sqrt[4]{\frac{25600}{3}} \approx 9,61125,$ joten tarvitaan 10 osaväliä. +1p

Huom. Neljännen derivaatan saa ottaa symbolisesta laskimesta. Epäyhtälön saa ratkaista laskimella. Todellisuudessa pienempi osavälien lukumäärä riittää, sillä arvio oli karkea.

Vastaus a) $2,2$ ja suhteellinen virhe $0,1\%$ b) 10 osaväliä

13. a) Millä vakion a arvolla funktio $f(x) = \begin{cases} 4-x, & \text{kun } x \ge a \\ a(1+x), & \text{kun } x < a \end{cases}$ on kaikkialla jatkuva ja aidosti vähenevä?

b) Millä muuttujan x arvoilla sarja $1 + \frac{x}{x-3} + (\frac{x}{x-3})^2 + (\frac{x}{x-3})^3 + ...$ suppenee ja mikä on sarjan summa?

Ratkaisu a) Ylemmän palan kuvaaja on osa laskevaa suoraa, joten se on aidosti vähenevä. Alemman palan kuvaaja on osa suoraa, joka kulmakerroin on a. Täten välttämätön vaatimus, että funktio $f(x)$ on aidosti vähenevä on $a < 0.$ 1p

Funktio on triviaalisti jatkuva väleillä $x > a$ tai $x < a$, joten funktio *f* on jatkuva kaikkialla jos se on jatkuva kohdassa $x = a.$ Täten

$\lim_{x \to a^+}(4-x) = \lim_{x \to a^-}(a(1+x)) = f(a).$ +1p

Saadaan $4 - a = a + a^2 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$

$a = -1 - \sqrt{5}$ tai $a = -1 + \sqrt{5}.$

Vain edeltävä arvo toteuttaa vaatimuksen $a < 0.$ +1p

Huom. nollakohdat saa katsoa laskimesta.

b) Jonon yleinen termi $a_n = (\frac{x}{x-3})^{n-1}, n = 1, 2, 3, ...$ eli jono on geometrinen ja $x \ne 3.$

Jonon suhdeluku $q = \frac{x}{x-3}$. Oltava $|q| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{x-3}\right| < 1, x \ne 3 \Rightarrow |x| < |x-3|$ 1p

Korottamalla neliöön saadaan $x^2 < x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}.$ +1p

Sarjan summa $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{x}{x-3}} = \frac{1}{\frac{x-3}{x-3} - \frac{x}{x-3}} = \frac{1}{\frac{-3}{x-3}} = 1 - \frac{1}{3}x.$ +1p

Huom. itseisarvoepäyhtälön saa ratkaista symbolisella laskimella

Vastaus a) $a = -1 - \sqrt{5}$ b) $x < \frac{3}{2}$ ja summa on $1 - \frac{1}{3}x, x < \frac{3}{2}$

14*. a) Olkoon x_0 polynomifunktion $P(x)$ derivaatan nollakohta ja toinen derivaatta $P''(x_0) < 0.$ Päättele perustellen onko x_0 ääriarvokohta vai ei. Jos on, niin onko mahdollinen ääriarvo maksimi vai minimi.

(2p)

b) Jos funktion $y = P(x)$ toinen derivaatta $P''(x_0) < 0,$ niin käyrän sanotaan olevan tässä kohdassa *kupera ylöspäin*. Vastaavasti, jos $P''(x_0) > 0,$ niin käyrän sanotaan olevan *kupera alaspäin.*
Piste, jossa käyrän kuperuussuunta muuttuu, on nimeltään *käännepiste*.
Määritä käyrän $y = 3x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 30x^2 + 15x - 20$ käännepisteet. (3p)

c) Osoita, että jos kolmannen asteen polynomifunktiolla $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ on derivaatan nollakohdat $x = x_1$ ja $x = x_2$, missä $x_1 \neq x_2$, niin funktiolla on käännepiste kohdassa $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.
(4p)

Ratkaisu a) Koska toinen derivaatta saa negatiivisen arvon kohdassa x_0, niin ensimmäinen derivaatta $P'(x)$ on vähenevä kohdassa x_0, joten derivaatan merkki muuttuu positiivisesta nollan kautta negatiiviseksi. Kyseessä on siis maksimikohta. 1p+1p

b) Koska käännepisteessä käyrä ei ole kupera ylöspäin eikä myöskään kupera alaspäin, on käännepiste välttämättä toisen derivaatan nollakohta. 1p
Käännepisteessä toisen derivaatan merkki muuttuu kohtaa ohitettaessa.

$y = 3x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 30x^2 + 15x - 20 \Rightarrow$

$y'' = 60x^3 + 60x^2 - 60x - 60$

$= 60(x^3 + x^2 - x - 1) = 60(x^2(x+1) - (x+1)) = 60(x-1)(x+1)^2$ +1p

Toisen derivaatan nollakohta $x = 1$ tai $x = -1$.
Testipisteiden $f''(-2) = -180 < 0, f''(0) = -60 < 0$ ja $f''(2) = 540 > 0$ avulla päätellään, että käyrän ainoa käännepiste on kohdassa $x = 1 \Rightarrow y(1) = -37$. +1p

c) Derivaatalla on tekijä
$(x - x_1)(x - x_2) \Rightarrow P'(x) = 3(x - x_1)(x - x_2) = 3x^2 - 3x_1x - 3x_2x + 3x_1x_2$. +1p+1p
Joten toinen derivaatta $P''(x) = 6x - 3x_1 - 3x_2$.

Nollakohdat: $6x - 3x_1 - 3x_2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. +1p

Kyseessä on todella käännekohta, sillä toisen derivaatan kuvaaja on nouseva suora, joten derivaatan merkki vaihtuu negatiivisesta nollan kautta positiiviseksi. +1p

Vastaus a) Maksimi b) $(1, -37)$

15*. a) Osoita, että funktio $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x - 2}$ ei saa arvoa 1. (2p)

b) Funktio *f* on aidosti kasvava, jos kaikilla määrittelyjoukon arvoilla *a*, *b* pätee: (3p)
Jos $a < b$, niin $f(a) < f(b)$. Osoita, että funktio $f(n) = n + n^3$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ on aidosti kasvava käyttäen tätä määritelmää.

c) Funktio $f(t)$ on kaikkialla jatkuva ja derivoituva sekä funktion arvojoukko on välillä $0 \leq t \leq 1$ väli $[-2, -1]$.

Määritä funktion $g(x) = \int_1^0 [x - f(t)]^2 \, dt$ ääriarvokohta. (4p)

Ratkaisu a) Tehdään antiteesi: funktio saa arvon 1, joten

$$x^2-3x+4=x-2 \Leftrightarrow x^2-4x+6=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+2=0.$$

Tämä on mahdotonta, sillä yhtälön vasen puoli saa vain positiivisia arvoja. +1p+1p

Huom. Tehtävän voi tehdä myös funktion kulkua tarkastelemalla.

b) Väite: Jos $a<b$, niin $f(a)-f(b)<0$.

$$f(a)-f(b)=a^3+a-b^3-b=(a-b)+(a^3-b^3)$$ +1p

$$=(a-b)+(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)(1+a^2+ab+b^2)$$

$$=(a-b)\cdot(1+(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}).$$ +1p

Tulon $(a-b)\cdot(1+(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4})$ tekijä $a-b$ on oletuksen mukaan negatiivinen, mutta koska toinen tekijä on positiivinen, niin tulo saa vain negatiivisia arvoja. +1p

c) $$g(x)=\int_1^0 [x-f(t)]^2\,dt=-\int_0^1 (x^2-2x\cdot f(t)+[f(t)]^2)\ \ dt$$

$$=-x^2\int_0^1 dt+2x\int_0^1 f(t)\,dt-\int_0^1 [f(t)]^2\,dt$$ 1p

$$=-x^2\ \Big/_0^1(t+2xA-B)$$, missä $A<0$ ja $B>0$, sillä $f(t)<0$. +1p

(A ja B äärellisiä lukuja)

$$=-x^2+2xA-B$$ (kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli)

$g'(x)=-2x+2A \Rightarrow$ nollakohta $x=A$, joka on maksimikohta. (laskeva suora) +1p

Selkeä vastaus +1p

Huom. Jatkuvuus ja muut alkuehdot takaavat integraalin $\int_0^1 f(t)\,dt$ *suppenemisen*

ts. se on äärellinen luku.

Vastaus c) $x=\int_0^1 f(t)\,dt$ maksimikohta