

Binomi 8 – Luku 2 – Tehtävien malliratkaisut

2.1

a)

Lasketaan funktion arvo sijoittamalla $x = 0$ funktion lausekkeeseen.

$$f(0) = 3 \cdot 0 + 12 = 12$$

b)

Ratkaistaan yhtälö merkitsemällä funktion lauseke yhtä suureksi kuin nolla.

$$f(x) = 0$$

$$3x + 12 = 0$$

$$3x = -12 \quad || : 3$$

$$x = -4$$

Vastaus a) $f(0) = 12$

 b) $x = -4$

2.2

a)

Funktion arvo kohdassa nolla saadaan, kun muuttujan x paikalle sijoitetaan arvo nolla eli lasketaan $f(0)$.

$$f(0) = -5 \cdot 0 - 15 = -15$$

$$\leftarrow f(x) = -5x - 15$$

Funktion nollakohta saadaan, kun funktion lauseke merkitään yhtä suureksi kuin nolla, eli ratkaistaan yhtälö $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0$$

$$-5x - 15 = 0$$

$$-5x = 15 \quad \| : (-5)$$

$$x = -3$$

b)

Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$f(x) = x - 2(2x - 4) = x - 4x + 8 = -3x + 8$$

Lasketaan arvo kohdassa nolla eli $f(0)$.

$$f(0) = -3 \cdot 0 + 8 = 8$$

Lasketaan nollakohta eli ratkaistaan yhtälö $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0$$

$$-3x + 8 = 0$$

$$-3x = -8 \quad \| : (-3)$$

$$x = \frac{-8}{-3}$$

$$x = \frac{8}{3}$$

Vastaus a) $f(0) = -15$ ja nollakohta on $x = -3$

b) $f(0) = 8$ ja nollakohta on $x = \frac{8}{3}$

2.3

a)

Funktion **nollakohta** on $x \approx -2$.

Funktion f arvot ovat **negatiivisia**, kun funktion kuvaaja on x -akselin alapuolella.

Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x < -2$.

b)

Epäyhtälön $g(x) \geq 0$ ratkaisuna ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion g arvot ovat positiivisia tai nolla.

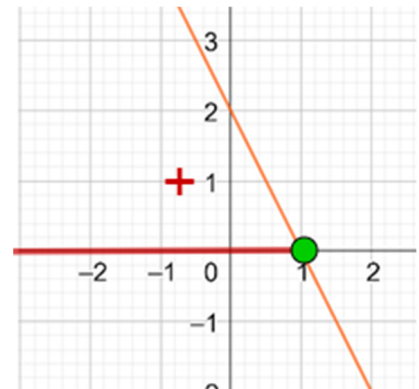
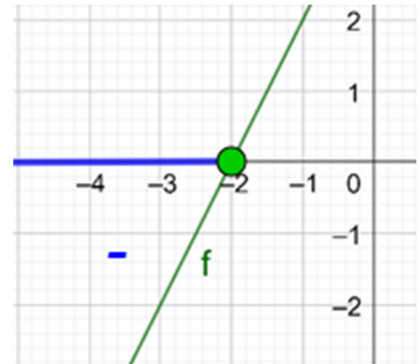
Funktion g arvot ovat **positiivisia**, kun funktion kuvaaja on x -akselin yläpuolella.

Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x < 1$ ja funktion **nollakohta** on $x \approx 1$.

Siis $g(x) \geq 0$, kun $x \leq 1$.

Vastaus a) $x < -2$

b) $x \leq 1$



2.4

a)

Tutkitaan funktion negatiivisuutta ratkaisemalla epäyhtälö $f(x) < 0$.

$$f(x) < 0$$

$$2x + 4 < 0$$

$$2x < -4 \quad || : 2$$

$$x < -2$$

Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x < -2$.

b)

Tutkitaan funktion negatiivisuutta ratkaisemalla epäyhtälö $f(x) < 0$.

$$f(x) < 0$$

$$-3x + 6 < 0$$

$$-3x < -6 \quad || : (-3)$$

$$x > 2$$

Kun jaetaan epäyhtälö negatiivisella luvulla, epäyhtälömerkin suunta kääntyy.

Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x > 2$.

Vastaus a) $x < -2$

 b) $x > 2$

2.5

a)

Funktion nollakohta saadaan, kun funktion lauseke merkitään yhtä suureksi kuin nolla, eli ratkaistaan yhtälö $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0$$

$$3x + 18 = 0$$

$$3x = -18 \quad || : 3$$

$$x = -6$$

b)

Ratkaistaan funktion g nollakohta eli yhtälö $g(x) = 0$.

$$g(x) = 0$$

$$-9x + 12 = 0$$

$$-9x = -12 \quad || : (-9)$$

$$x = \frac{-12}{-9}$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Vastaus a) $x = -6$

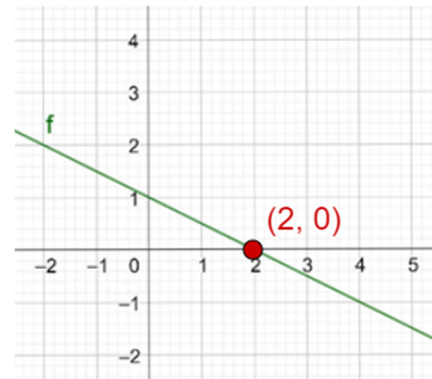
 b) $x = \frac{4}{3}$

2.6

a)

Funktion arvo nollassa on nolla eli funktion kuvaaja leikkaa x -akselin.

Funktion nollassa on $x \approx 2$.



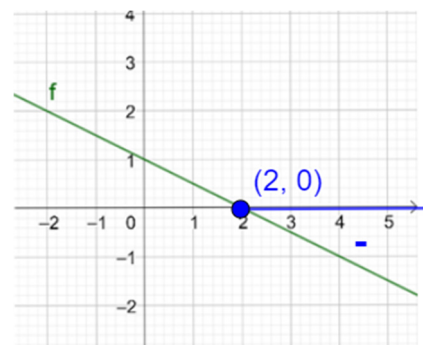
b)

Jos $f(x) \leq 0$, niin funktion arvot ovat negatiivisia tai nolla.

Funktion f arvot ovat **negatiivisia**, kun funktion kuvaaja on x -akselin alapuolella.

Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x > 2$. Funktio saa arvon nolla, kun $x = 2$.

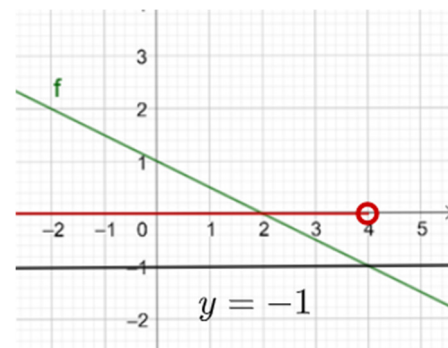
Siis $f(x) \leq 0$, kun $x \geq 2$.



c)

Jos $f(x) > -1$, niin funktion arvot ovat suurempia kuin -1 . Tällöin funktion kuvaaja kulkee suoran $y = -1$ yläpuolella.

Kuvan perusteella $f(x) > -1$, kun $x < 4$.



Vastaus a) $x \approx 2$

b) $x \geq 2$

c) $x < 4$

2.7

Ratkaistaan ensin funktion f nollakohta.

$$f(x) = 0$$

$$-6x - 4 = 0$$

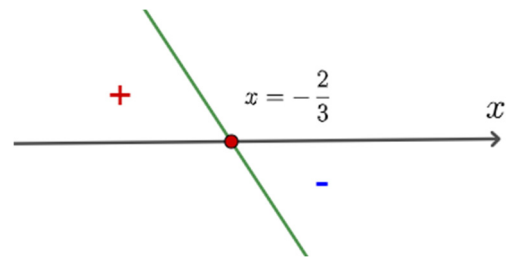
$$-6x = 4 \quad || : (-6)$$

$$x = \frac{4}{-6}$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja.

Funktion $f(x) = -6x - 4$ kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin -6 . Kuvaaja on siis laskeva suora, koska kulmakerroin on negatiivinen.



Funktion arvot ovat positiivisia eli $f(x) > 0$,
kun $x < -\frac{2}{3}$.

Funktion arvot ovat negatiivisia eli $f(x) < 0$, kun $x > -\frac{2}{3}$.

Vastaus positiivisia, kun $x < -\frac{2}{3}$, ja negatiivisia, kun $x > -\frac{2}{3}$

2.8

a)

$$4x - 5 < 3 \quad || + 5$$

$$4x < 8 \quad || : 4$$

$$x < 2$$

b)

$$2x - 3 \geq 4 - 3x \quad || + 3 + 3x$$

$$5x \geq 7 \quad || : 5$$

$$x \geq \frac{7}{5}$$

Vastaus **a)** $x < 2$

b) $x \geq \frac{7}{5}$

2.9

a) Sievennetään ensin funktion f lauseke.

$$f(x) = 3x - 2(4x - 5) = 3x - 8x + 10 = -5x + 10$$

Ratkaistaan sitten funktion nollakohta.

$$f(x) = 0$$

$$-5x + 10 = 0$$

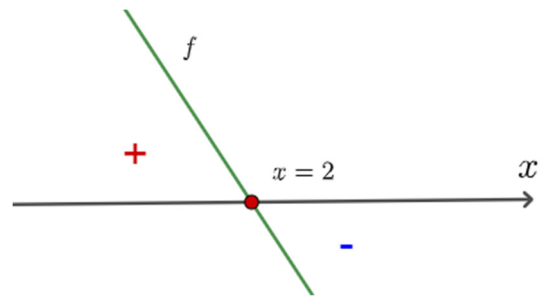
$$-5x = -10 \quad \| : (-5)$$

$$x = \frac{-10}{-5}$$

$$x = 2$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja.

Funktion $f(x) = -5x + 10$ kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin -5 . Kuvaaja on siis laskeva suora, koska kulmakerroin on negatiivinen.



Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x < 2$.

Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x > 2$.

b) Ratkaistaan epäyhtälö.

$$g(x) \leq 0$$

$$-2(3x - 1) - 3 \leq 0$$

$$-6x + 2 - 3 \leq 0$$

$$-6x - 1 \leq 0$$

$$-6x \leq 1 \quad \| : (-6)$$

$$x \geq -\frac{1}{6}$$

Kun jaetaan epäyhtälö negatiivisella luvulla, epäyhtälömerkin suunta kääntyy.

Vastaus a) positiivisia, kun $x < 2$, ja negatiivisia, kun $x > 2$

b) $x \geq -\frac{1}{6}$

2.10

a)

$$2x - 3(2x - 4) > 0$$

$$2x - 6x + 12 > 0$$

$$-4x + 12 > 0 \quad \parallel -12$$

$$-4x > -12 \quad \parallel : (-4)$$

$$x < \frac{-12}{-4}$$

$$x < 3$$

Kun jaetaan epäyhtälö negatiivisella luvulla, epäyhtälömerkin suunta kääntyy.

b)

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x - 2 \leq x$$

$$\frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} - 2 \leq x$$

$$3x + 2x - 12 \leq 6x$$

$$5x - 12 \leq 6x \quad \parallel +12 - 6x$$

$$-x \leq 12 \quad \parallel : (-1)$$

$$x \geq -12$$

Lavennetaan ensin murtoluvut samannimisiksi.

Kun jaetaan epäyhtälö negatiivisella luvulla, epäyhtälömerkin suunta kääntyy.

Vastaus a) $x < 3$

b) $x \geq -12$

2.11

a)

Tämänhetkisestä hinnasta 220 € vähennetään joka kuukausi 2,5 € eli x kuukauden kuluttua hinta on laskenut $2,5x$.

Hintaa kuvaa siis funktio $h(x) = 220 - 2,5x$ (€).

b)

Kahden vuoden kuluttua on kulunut $2 \cdot 12 = 24$ kuukautta. Lasketaan tuotteen hinta sijoittamalla funktioon $x = 24$.

$$h(24) = 220 - 2,5 \cdot 24 = 160 \text{ (€)}$$

Kahden vuoden kuluttua hinta on 160 €.

c)

Ratkaistaan yhtälö $h(x) = 100$.

$$\begin{aligned} 220 - 2,5x &= 100 \\ -2,5x &= -120 \quad \parallel : (-2,5) \\ x &= 48 \end{aligned}$$

Hinta olisi 100 € 48 kuukauden eli $\frac{48}{12} = 4$ vuoden kuluttua.

d)

Ratkaistaan epäyhtälö $h(x) < 67$.

$$\begin{aligned} 220 - 2,5x &< 67 \\ -2,5x &< -153 \quad \parallel : (-2,5) \\ x &> 61,2 \end{aligned}$$

Jos $x = 61$, hinta on $h(61) = 220 - 2,5 \cdot 61 = 67,50$ (€).

Jos $x = 62$, hinta on $h(62) = 220 - 2,5 \cdot 62 = 65,00$ (€)

Hinta on alle 67 € 62 kk eli 5 vuoden ja 2 kk kuluttua.

Vastaus a) $h(x) = 220 - 2,5x$ (€)

b) 160 €

c) 4 vuoden kuluttua

d) 5 vuoden ja 2 kuukauden kuluttua

2.12

a)

Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$\begin{aligned}f(x) &= 2(3 + x - x^2) - x(4 - 2x) \\&= 6 + 2x - 2x^2 - 4x + 2x^2 \\&= -2x + 6\end{aligned}$$

Ratkaistaan nollakohdat yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\-2x + 6 &= 0 \\-2x &= -6 \quad || : (-2) \\x &= 3\end{aligned}$$

b)

Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$\begin{aligned}f(x) &= (x - 2)(x + 2) - (x + 1)^2 \\&= x^2 + 2x - 2x - 4 - (x + 1)(x + 1) \\&= x^2 - 4 - (x^2 + x + x + 1) \\&= x^2 - 4 - (x^2 + 2x + 1) \\&= x^2 - 4 - x^2 - 2x - 1 \\&= -2x - 5\end{aligned}$$

Ratkaistaan nollakohdat yhtälöstä $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}-2x - 5 &= 0 \\-2x &= 5 \quad || : (-2) \\x &= -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

Vastaus a) $x = 3$
 b) $x = -\frac{5}{2}$

2.13

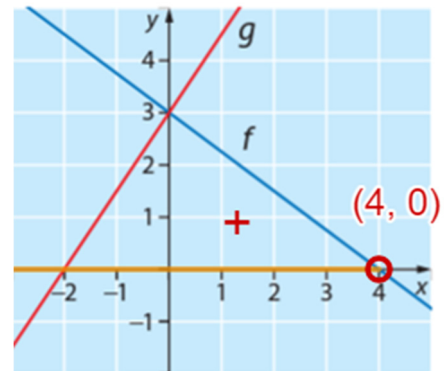
a)

Epäyhtälön $f(x) > 0$ ratkaisuna ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion f arvot ovat positiivisia.

Funktion nollakohta on $x \approx 4$.

Funktion f arvot ovat positiivisia, kun funktion kuvaaja on x -akselin yläpuolella, eli kun $x < 4$.

Epäyhtälön $f(x) > 0$ ratkaisu on siis $x < 4$.



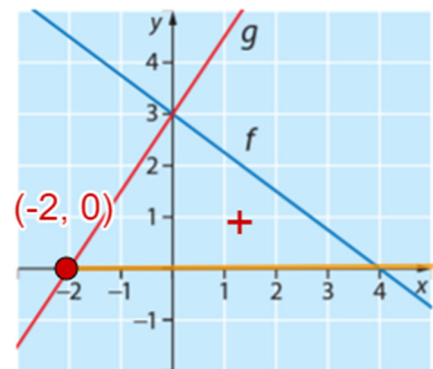
b)

Epäyhtälön $g(x) \geq 0$ ratkaisuna ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion g arvot ovat positiivisia tai nolla.

Funktion g arvot ovat positiivisia, kun funktion kuvaaja on x -akselin yläpuolella.

Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x > -2$, ja funktion nollakohta on $x \approx -2$.

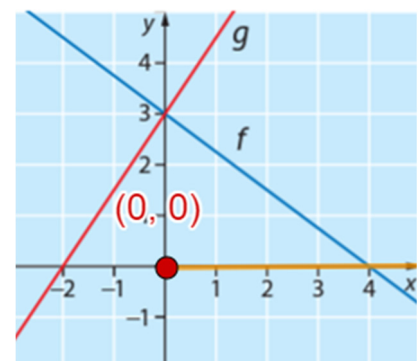
Siis $g(x) \geq 0$, kun $x \geq -2$.



c)

Epäyhtälö $g(x) > f(x)$ toteutuu, kun funktion g kuvaaja kulkee funktion f kuvaajan yläpuolella.

Kuvan perusteella tämä tapahtuu, kun $x > 0$.



Vastaus a) $x < 4$

b) $x \geq -2$

c) $x > 0$

2.14

Sievennetään ensin funktion f lauseke.

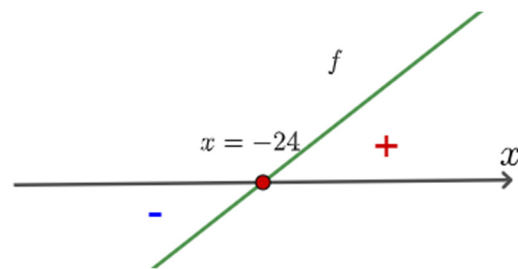
$$f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}x + 2 = \frac{9x}{12} - \frac{8x}{12} + 2 = \frac{1}{12}x + 2$$

Ratkaistaan sitten funktion nollakohta.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{x}{12} + 2 &= 0 \quad \| \cdot 12 \\ x + 24 &= 0 \\ x &= -24 \end{aligned}$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja.

Funktion $f(x) = \frac{1}{12}x + 10$ kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin $\frac{1}{12}$. Kuvaaja on siis nouseva suora, koska kulmakerroin on positiivinen.



Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x > -24$.

Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x < -24$.

Vastaus arvot positiivisia, kun $x > -24$, ja negatiivisia, kun $x < -24$

2.15

a) Sievennetään ensin funktion f lauseke.

$$\begin{aligned}f(x) &= x(2x - 3) + 2(3 + x - x^2) \\ &= 2x^2 - 3x + 6 + 2x - 2x^2 \\ &= -x + 6\end{aligned}$$

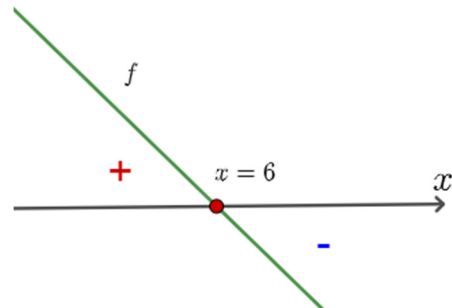
Ratkaistaan sitten funktion nollakohta.

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\ -x + 6 &= 0 \\ -x &= -6 \quad \parallel : (-1) \\ x &= 6\end{aligned}$$

Hahmotellaan funktion kuvaaja.

Funktion $f(x) = -x + 10$ kuvaaja on suora, jonka kulmakerroin -1 . Kuvaaja on siis laskeva suora, koska kulmakerroin on negatiivinen.

Funktion arvot ovat positiivisia, kun $x < 6$.
Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $x > 6$.



b) Ratkaistaan epäyhtälö.

$$\begin{aligned}g(x) &\leq 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{1 - 4x}{3} + x - 1 &\leq 0 \\ \frac{3x}{6} + \frac{2(1 - 4x)}{6} + x - 1 &\leq 0 \quad \parallel \cdot 6 \\ 3x + 2(1 - 4x) + 6x - 6 &\leq 0 \\ 3x + 2 - 8x + 6x - 6 &\leq 0 \\ x - 4 &\leq 0 \\ x &\leq 4\end{aligned}$$

Vastaus a) positiivisia, kun $x < 6$, ja negatiivisia, kun $x > 6$

b) $x \leq 4$

2.16

a)

Pisteistä tiedetään, että $f(2) = -4$ ja $f(-1) = 5$.

Muodostetaan tietojen avulla yhtälöpari ja ratkaistaan se.

$$\begin{cases} -4 = a \cdot 2 + b \\ 5 = a \cdot (-1) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = -4 \\ -a + b = 5 \quad \parallel \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = -4 \\ -2a + 2b = 10 \end{cases} \quad \text{lasketaan yhtälöt yhteen}$$

$$3b = 6 \quad \parallel : 3$$

$$b = 2$$

Ratkaistaan a sijoittamalla saatu b toiseen yhtälöistä.

$$-4 = a \cdot 2 + 2$$

$$-6 = 2a \quad \parallel : 2$$

$$a = -3$$

Kertoimet ovat siis $a = -3$ ja $b = 2$.

b)

Funktio on siis $f(x) = -3x + 2$. Selvitetään, milloin funktion arvot ovat positiivisia eli ratkaistaan epäyhtälö $f(x) > 0$.

$$f(x) > 0$$

$$-3x + 2 > 0$$

$$-3x > -2 \quad \parallel : (-3)$$

$$x < \frac{2}{3}$$

Vastaus a) $a = -3$ ja $b = 2$

b) $x < \frac{2}{3}$

$f(x) = ax + b$

Arvot voi ratkaista myös muodostamalla pisteiden kautta kulkevan suoran yhtälön.

2.17

a)

Juna kulkee 140 km/h eli kun aikaa on kulunut x tuntia, juna on edennyt $140x$ (km).

Jäljellä olevaa matkaa kuvaa näin ollen funktio $s(x) = 180 - 140x$ (km).

b)

Ratkaistaan yhtälö $s(x) < 100$.

$$\begin{aligned} s(x) &< 100 \\ 180 - 140x &< 100 \\ x &> 0,5714 \dots \end{aligned}$$

Junan pitää siis kulkea vähintään 0,5714 ... h \approx 34,28 ... min.

Kun juna on kulkenut 34 min, niin matkaa on jäljellä

$$s(34) = 180 - 140 \cdot \frac{34}{60} = 100,66 \dots \text{ km.}$$

Kun juna on kulkenut 35 min, niin matkaa on jäljellä

$$s(35) = 180 - 140 \cdot \frac{35}{60} = 98,333 \dots \text{ km.}$$

Junan tulee siis kulkea vähintään 35 minuuttia.

Vastaus **a)** $s(x) = 180 - 140x$ (km)

b) vähintään 35 minuuttia

2.18

a)

Jos kappalehinta on x euroa, niin hinta on muuttunut $(x - 15)$ (€).

Jokainen euron kasvu vähentää myyntimäärää 5 kappaleella. Jos myyntihinta on siis x , niin myyntimäärä vähenee $5 \cdot (x - 15) = 5x - 75$.

Viikkomyynnin funktio on siis

$$m(x) = 550 - (5x - 60) = 550 - 5x + 75 = -5x + 625.$$

b)

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan, milloin viikkomyynti on yli 300.

$$\begin{aligned} m(x) &> 300 \\ -5x + 625 &> 300 \\ x &< 65 \end{aligned}$$

Myyntihinnan tulee olla pienempi kuin 65 €.

Vastaus a) $m(x) = -5x + 625$

 b) alle kuin 65 €

2.19

a)

Piirretään mallikuva.

Rantaa kohtisuorassa vastaan oleva sivu on 15 m pidempi kuin rantaviiva.

Rantatontin piiri koostuu neljästä sivusta, joista kaksi on yhtä pitkiä.

Piiri on siis

$$p(x) = 2x + 2(15 + x) = 2x + 30 + 2x = 4x + 30 \text{ (m)}.$$

b)

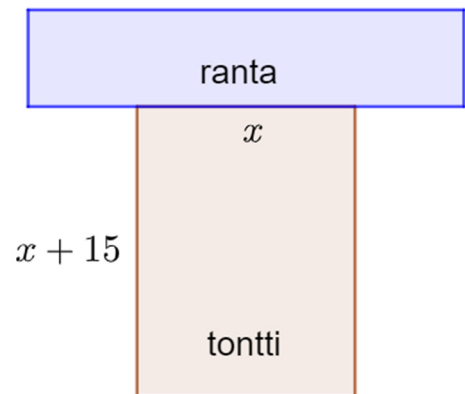
Selvitetään rantaviivan pituus ratkaisemalla epäyhtälö $p(x) > 100$.

$$\begin{aligned} p(x) &> 100 \\ 4x + 30 &> 100 \\ x &> 17,5 \end{aligned}$$

Kun tontin piiri on yli 100 m, niin rantaviivan pituus on yli 17,5 m.

Vastaus a) $p(x) = 4x + 30$ (m)

b) yli 17,5 m



2.20

a) Junamatkan pituus on x (km), joten automatkan pituudeksi jää jäljelle $1280 - x$ (km).

b) Kustannukset muodostuvat junalla kuljetusta matkasta ja automatkasta.

- Junamatkan kustannukset ovat $0,1x$ (€)
- Automatkan kustannukset ovat $0,25(1280 - x)$ (€)

Kokonaiskustannukset ovat tällöin

$$K(x) = 0,1x + 0,25(1280 - x) = -0,15x + 320 \text{ (€)}.$$

c) Selvitetään junamatkan pituus ratkaisemalla yhtälö $K(x) = 192,50$.

$$\begin{aligned} K(x) &= 192,50 \\ -0,15x + 320 &= 192,50 \\ x &= 850 \end{aligned}$$

Junamatkan pituus on 850 km.

d) Ratkaistaan epäyhtälö $K(x) < 150$.

$$\begin{aligned} K(x) &< 150 \\ -0,15x + 320 &< 150 \\ x &> 1133,333 \dots \end{aligned}$$

Junamatkan pituus tulee olla suurempi kuin 1133,33... km.

Automatkan tulee olla tällöin pienempi kuin $1280 - 1133,33 \dots = 146,66 \dots$ (km) eli korkeintaan 146 km.

Vastaus a) $1280 - x$ (km)

b) $K(x) = -0,15x + 320$ (€)

c) 850 km

d) korkeintaan 146 km

2.21

a)

Vaihtovirta Oy:n hinta nousee joka kuukausi 1,2 snt/kWh.

Kun on kulunut x kuukautta, hintaa kuvaa funktio $v(x) = 1,2x + 8,5$ (snt/kWh).

Pörssisähkön hinta nousee joka kuukausi 2,1 % eli hinta 1,021-kertaistuu.

$$100\% + 2,1\% = 102,1\% = 1,021$$

Kun on kulunut x kuukautta, hintaa on kerrottu x kertaa prosenttikertoimella 1,021 eli pörssisähkön hintaa kuvaa funktio $p(x) = 8,5 \cdot 1,021^x$ (snt/kWh).

Funktion $v(x)$ asteluku on 1, joten se on ensimmäisen asteen polynomifunktio. Funktiossa $p(x)$ muuttuja on eksponentissa, joten se ei ole 1. asteen funktio vaan eksponenttifunktio.

b)

Lasketaan sähköhinnat 12 kuukauden kuluttua eli kun $x = 12$.

Vaihtovirta Oy: $v(12) = 1,2 \cdot 12 + 8,5 = 22,90$ (snt/kWh)

Pörssisähkö: $p(12) = 8,5 \cdot 1,021^{12} = 10,907 \dots \approx 10,91$ (snt/kWh)

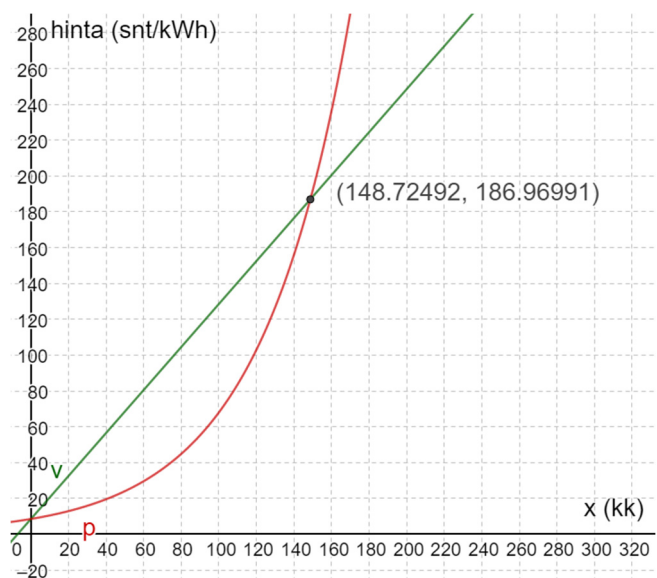
Pörssisähkö on siis $\frac{22,90 - 10,91}{22,90} = 0,523 \dots \approx 52\%$ halvempi.

c)

Piirretään funktioiden kuvaajat samaan koordinaatistoon ja tutkitaan, milloin funktion $p(x)$ kuvaaja kulkee funktion $v(x)$ kuvaajan alapuolella.

Leikkauspisteessä $x \approx 148,72$. Kuvaajasta nähdään, että tätä kohtaa ennen funktion p kuvaaja (punainen) kulkee funktion v kuvaajan (vihreä) alapuolella.

Pörssisähkö on siis halvempaa aikavälillä 0 kk – 148 kk.



- Vastaus**
- a) $v(x) = 1,2x + 8,5$ (sn5/kWh), $p(x) = 8,5 \cdot 1,021^x$ (snt/kWh)
 v on 1. asteen polynomifunktio, p ei ole
 - b) Pörssisähkö on 52 % halvempi.
 - c) ajalla 0 kk – 148 kk