Binomi 8 – Luku 1 – Tehtävien malliratkaisut

1.1

a)

Polynomin asteluku on muuttujan korkein eksponentti. Polynomin
$f(x) = -x^{\mathbf{3}} + 2x^2 + 3x + 4$ asteluku on **3**.

Toisen asteen termi on $\mathbf{2}x^2$, joten toisen asteen termin kerroin on **2**.

Vakiotermi on polynomin lausekkeessa pelkkä luku, joten vakiotermi on 4.

Polynomin arvo muuttujan arvolla 2 saadaan sijoittamalla muuttujan x paikalle luku **2**.

$f(\mathbf{2}) = -\mathbf{2}^3 + 2 \cdot \mathbf{2}^2 + 3 \cdot \mathbf{2} + 4 = -8 + 8 + 6 + 4 = 10$

b)

Polynomin $g(t) = \mathbf{1} + 4t - \mathbf{2}t^{\mathbf{2}}$ korkein eksponentti on **2** eli polynomin asteluku on **2**.

Toisen asteen termi on $-\mathbf{2}t^{\mathbf{2}}$, joten toisen asteen termin kerroin on $\mathbf{-2}$.

Vakiotermi on polynomin lausekkeessa pelkkä luku, joten vakiotermi on **1**.

$g(\mathbf{2}) = 1 + 4 \cdot \mathbf{2} - 2 \cdot \mathbf{2}^2 = 1 + 8 - 8 = 1$

c)

Polynomissa $h(x) = x^{\mathbf{2}} + ax + \mathbf{3a}$ asteluku on **2**, toisen asteen termin kerroin on 1
ja vakiotermi on $\mathbf{3a}$.

$h(\mathbf{2}) = \mathbf{2}^2 + a \cdot \mathbf{2} + 3a = 4 + 2a + 3a = 5a + 4$

Vastaus **a)** asteluku 3, toisen asteen termin kerroin 2, vakiotermi 4, $f(2) = 10$
b) asteluku 2, toisen asteen termin kerroin -2, vakiotermi 1, $g(2) = 1$
c) asteluku 2, toisen asteen termin kerroin 1, vakiotermi $3a$, $h(2) = 5a + 4$

1.2

a)

$$\begin{aligned} &(4x-1)+(2x-5)\\ &=4x-1+2x-5\\ &=4x+2x-1-5\\ &=6x-6 \end{aligned}$$

Plusmerkki lausekkeen edessä ei muuta lauseketta mitenkään.

b)

$$\begin{aligned} &(2x^2-x)-(5x-4x^2)\\ &=2x^2-x-5x+4x^2\\ &=2x^2+4x^2-x-5x\\ &=6x^2-6x \end{aligned}$$

Miinusmerkki lausekkeen edessä vaihtaa kaikkien termien merkit.

c)

$$\begin{aligned} &4x(2x^2-3x)\\ &=4x\cdot 2x^2+4x\cdot(-3x)\\ &=8x^3-12x^2 \end{aligned}$$

Osittelulaki
$a(b+c)\ =ab+ac$

d)

Osittelulaki
$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

$$\begin{aligned} &(3x-1)(4x-3)\\ &=3x\cdot 4x+3x\cdot(-3)-1\cdot 4x-1\cdot(-3)\\ &=12x^2-9x-4x+3\\ &=12x^2-13x+3 \end{aligned}$$

Vastaus

a) $6x-6$

b) $6x^2-6x$

c) $8x^3-12x^2$

d) $12x^2-13x+3$

1.3

a)

Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (2x+1)(2x-1) \\
&= 2x \cdot 2x + 2x \cdot (-1) + 1 \cdot 2x + 1 \cdot (-1) \\
&= 4x^2 - 2x + 2x - 1 \\
&= 4x^2 - 1
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan muuttujan paikalle $x = -2$.

$$f(-2) = 4 \cdot (-2)^2 - 1 = 16 - 1 = 15$$

b)

Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 4x - 2x(x-2) \\
&= 4x - 2x \cdot x - 2x \cdot (-2) \\
&= 4x - 2x^2 + 4x \\
&= -2x^2 + 8x
\end{aligned}
$$

Sijoitetaan muuttujan paikalle $x = -2$.

$$f(-2) = -2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) = -2 \cdot 4 - 16 = -8 - 16 = -24$$

Vastaus **a)** $f(x) = 4x^2 - 1,\ f(-2) = 15$

b) $f(x) = -2x^2 + 8x,\ f(-2) = -24$

1.4

a)

$$\begin{aligned}
&f(x) - g(x) \\
&= (3x) - (4 - 2x) \\
&= 3x - 4 + 2x \\
&= 5x - 4
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&f(x) \cdot g(x) \\
&= (3x)(4 - 2x) \\
&= 3x \cdot 4 + 3x \cdot (-2x) \\
&= 12x - 6x^2 \\
&= -6x^2 + 12x
\end{aligned}$$

Vastaus **a)** $5x - 4$

b) $-6x^2 + 12x$

1.5

a)

$$2x^2(3-4x)$$
$$= 2x^2 \cdot 3 + 2x^2 \cdot (-4x)$$
$$= 6x^2 - 8x^3$$
$$= -8x^3 + 6x^2$$

Polynomin korkein eksponentti on **3** eli polynomin asteluku on **3**.

b)

$$(2x-1)(3x^2-2)$$
$$= 2x \cdot 3x^2 + 2x \cdot (-2) - 1 \cdot 3x^2 - 1 \cdot (-2)$$
$$= 6x^3 - 4x - 3x^2 + 2$$
$$= 6x^3 - 3x^2 - 4x + 2$$

Polynomin korkein eksponentti on **3** eli polynomin asteluku on **3**.

Vastaus **a)** $-8x^3 + 6x^2$**,** asteluku 3

b) $6x^3 - 3x^2 - 4x + 2$**,** asteluku 3

1.6

a)

$$
\begin{aligned}
& (3x^2 - 2x + 1) - (4 - 2x + 2x^2) \\
&= 3x^2 - 2x + 1 - 4 + 2x - 2x^2 \\
&= 3x^2 - 2x^2 - 2x + 2x + 1 - 4 \\
&= x^2 - 3
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
& 3x^2(2x^2 - 3x + 4) \\
&= 3x^2 \cdot 2x^2 + 3x^2 \cdot (-3x) + 3x^2 \cdot 4 \\
&= 6x^4 - 9x^3 + 12x^2
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
& x(3x - 1)(x - 2) \\
&= (3x^2 - x)(x - 2) \\
&= 3x^2 \cdot x + 3x^2 \cdot (-2) - x \cdot x - x \cdot (-2) \\
&= 3x^3 - 6x^2 - x^2 + 2x \\
&= 3x^3 - 7x^2 + 2x
\end{aligned}
$$

Vastaus **a)** $x^2 - 3$

b) $6x^4 - 9x^3 + 12x^2$

c) $3x^3 - 7x^2 + 2x$

1.7

Sievennetään ensin polynomi.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x(2-4x) - 2x(1-6x) \\ &= 3x \cdot 2 + 3x \cdot (-4x) - 2x \cdot 1 - 2x \cdot (-6x) \\ &= 6x - 12x^2 - 2x + 12x^2 \\ &= 4x \end{aligned}$$

Lasketaan polynomin arvo, kun $x = -100$.

$$f(-100) = 4 \cdot (-100) = -400$$

Vastaus $f(x) = 4x,\ f(-100) = -400$

1.8

a)

$$x - x(x+2)(2x+3)$$

Aloitetaan esimerkiksi ensimmäisestä kertolaskusta.

$$= x - (x^2 + 2x)(2x+3)$$

$$= x - (x^2 \cdot 2x + x^2 \cdot 3 + 2x \cdot 2x + 2x \cdot 3)$$

Osittelulaki
$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

$$= x - (2x^3 + 3x^2 + 4x^2 + 6x)$$

$$= x - (2x^3 + 7x^2 + 6x)$$

Miinus-merkki sulkeiden edessä muuttaa jokaisen termin merkin.

$$= x - 2x^3 - 7x^2 - 6x$$

$$= -2x^3 - 7x^2 - 5x$$

b)

Kirjoitetaan neliö kertolaskuna ja sievennetään tulo osittelulain avulla.

$$(4x-1)^2$$

$$= (4x-1)(4x-1)$$

$$= 4x \cdot 4x + 4x \cdot (-1) - 1 \cdot 4x - 1 \cdot (-1)$$

$$= 16x^2 - 4x - 4x + 1$$

$$= 16x^2 - 8x + 1$$

Vastaus **a)** $-2x^3 - 7x^2 - 5x$

b) $16x^2 - 8x + 1$

1.9

a)

$$
\begin{aligned}
& 2x^2-(2x^2-3)(2x^2+3) \\
&= 2x^2-(2x^2\cdot 2x^2+2x^2\cdot 3-3\cdot 2x^2-3\cdot 3) \\
&= 2x^2-(4x^4+6x^2-6x^2-9) \\
&= 2x^2-(4x^4-9) \\
&= 2x^2-4x^4+9 \\
&= -4x^4+2x^2+9
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
& (x+1)^2-(x+2)(x-2) \\
&= (x+1)(x+1)-\big(x\cdot x+x\cdot(-2)+2\cdot x+2\cdot(-2)\big) \\
&= (x\cdot x+x\cdot 1+1\cdot x+1\cdot 1)-(x^2-2x+2x-4) \\
&= (x^2+x+x+1)-(x^2-4) \\
&= x^2+2x+1-x^2+4 \\
&= 2x+5
\end{aligned}
$$

Vastaus **a)** $-4x^4+2x^2+9$

b) $2x+5$

1.10

a)

Veeti saa aina peruspalkan 1500 €.

Kun Veeti myy vakuutuksia x kappaletta, hän saa rahaa $150x$ (€).

Veetin kuukausipalkka on peruspalkan ja vakuutuksista saatavan palkan summa.

$P(x) = 150x + 1500$ (€)

b)

Lasketaan lausekkeen $P(x)$arvo, kun $x = 15$.

$P(15) = 150 \cdot 15 + 1500 = 3750$ (€)

Veetin kuukausipalkka on 3750 €.

Vastaus **a)** $P(x) = 150x + 1500$ (€)

b) 3750 €

1.11

a)

Suorakulman kanta on 3,5 metriä pidempi kuin korkeus *x,* joten kantaa kuvaa lauseke

$k(x) = x + 3{,}5$ (m).

b)

Suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo.

$A(x) = x \cdot (x + 3{,}5) = x^2 + 3{,}5x$ (m^2)

c)

Lasketaan lausekkeen $A(x)$arvo, kun $x = 9{,}5$ (m).

$A(9{,}5) = 9{,}5^2 + 3{,}5 \cdot 9{,}5 = 123{,}5 \approx 124\ (\mathrm{m}^2)$

Suorakulmion pinta-ala on 124 m^2.

Vastaus **a)** $k(x) = x + 3{,}5$

b) $A(x) = x \cdot (x + 3{,}5) = x^2 + 3{,}5$

c) 124 m^2

1.12

Koska lausekkeessa C muuttuja on nimittäjässä, se ei voi olla polynomi.
Kaikki muut ovat polynomeja.

Polynomin A: $3x^3 - 2x^4 - 6$ asteluku on **4**.

Korkeimman asteen termi on $-2x^4$, joten korkeimman asteen termin kerroin on **−2**.

Vakiotermi on polynomin lausekkeessa pelkkä luku, joten vakiotermi on -6.

Sievennetään **polynomi B**.

$$
\begin{aligned}
& 2(x^2 - 3) - (4x^2 + x + 1) \\
&= 2x^2 - 6 - 4x^2 - x - 1 \\
&= -2x^2 - x - 7
\end{aligned}
$$

Polynomin B asteluku on **2**.

Korkeimman asteen termi on $-2x^2$, joten korkeimman asteen termin kerroin on **−2**.

Vakiotermi on polynomin lausekkeessa pelkkä luku, joten vakiotermi on -7.

Sievennetään **polynomi D**.

$$
\begin{aligned}
& (3x^2 - 2)(1 - 2x^2) \\
&= 3x^2 \cdot 1 + 3x^2 \cdot (-2x^2) - 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2x^2) \\
&= 3x^2 - 6x^4 - 2 + 4x^2 \\
&= -6x^4 + 7x^2 - 2
\end{aligned}
$$

Polynomin C asteluku on **4**.

Korkeimman asteen termi on $-6x^4$, joten korkeimman asteen termin kerroin on **−6**.

Vakiotermi on polynomin lausekkeessa pelkkä luku, joten vakiotermi on -2.

Vastaus polynomi A: asteluku 4, korkeimman asteen termin kerroin −2, vakiotermi −6
polynomi B: asteluku 2, korkeimman asteen termin kerroin −2, vakiotermi −7
polynomi D: asteluku 4, korkeimman asteen termin kerroin −6, vakiotermi −2

1.13

a)

$$x(2x-1)-(1-2x-3x^2)$$
$$=\big(x\cdot 2x+x\cdot(-1)\big)-(1-2x-3x^2)$$
$$=2x^2-x-1+2x+3x^2$$
$$=5x^2+x-1$$

Miinus-merkki sulkeiden edessä muuttaa jokaisen termin merkin.

b)

$$(2x-1)(x^2-3x-1)$$
$$=2x\cdot x^2+2x\cdot(-3x)+2x\cdot(-1)-1\cdot x^2-1\cdot(-3x)-1\cdot(-1)$$
$$=2x^3-6x^2-2x-x^2+3x+1$$
$$=2x^3-7x^2+x+1$$

Vastaus **a)** $5x^2+x-1$

b) $2x^3-7x^2+x+1$

1.14

a) Sievennetään ensin lauseke.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x(3-2x) \\ &= 2x \cdot 3 + 2x \cdot (-2x) \\ &= 6x - 4x^2 \\ &= -4x^2 + 6x \end{aligned}$$

Lasketaan lausekkeen arvo, kun $x = -\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{3}\right) &= -4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= -4 \cdot \frac{1}{9} - \frac{6}{3} \\ &= \frac{-4}{9} - \frac{18}{9} \\ &= -\frac{22}{9} \end{aligned}$$

b) Sievennetään ensin lauseke.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(2x-1) - 2x^2 \\ &= x \cdot 2x + x \cdot (-1) - 1 \cdot 2x - 1 \cdot (-1) - 2x^2 \\ &= 2x^2 - x - 2x + 1 - 2x^2 \\ &= -3x + 1 \end{aligned}$$

Lasketaan lausekkeen arvo, kun $x = -\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{3}\right) &= -3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \\ &= \frac{3}{3} + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Vastaus **a)** $f(x) = -4x^2 + 6x,\ \ f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{22}{9}$

b) $f(x) = -3x + 1,\ \ f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2$

1.15

a)

Aloitetaan esimerkiksi jälkimmäisestä kertolaskusta.

$$2x^2 - x^2(2x - 3)(1 - 3x)$$
$$= 2x^2 - x^2\big(2x \cdot 1 + 2x \cdot (-3x) - 3 \cdot 1 - 3 \cdot (-3x)\big)$$

Osittelulaki
$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

$$= 2x^2 - x^2(2x - 6x^2 - 3 + 9x)$$
$$= 2x^2 - x^2(-6x^2 + 11x - 3)$$
$$= 2x^2 - x^2 \cdot (-6x^2) - x^2 \cdot 11x - x^2 \cdot (-3)$$
$$= 2x^2 + 6x^4 - 11x^3 + 3x^2$$
$$= 6x^4 - 11x^3 + 5x^2$$

b)

Kirjoitetaan ensin neliö kertolaskuna.

$$(4x + 3)^2$$
$$= (4x + 3)(4x + 3)$$
$$= 4x \cdot 4x + 4x \cdot 3 + 3 \cdot 4x + 3 \cdot 3$$
$$= 16x^2 + 12x + 12x + 9$$
$$= 16x^2 + 24x + 9$$

c)

$$(2x^2 - 1)^2$$
$$= (2x^2 - 1)(2x^2 - 1)$$
$$= 2x^2 \cdot 2x^2 + 2x^2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2x^2 - 1 \cdot (-1)$$
$$= 4x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 1$$
$$= 4x^4 - 4x^2 + 1$$

Vastaus **a)** $6x^4 - 11x^3 + 5x^2$

b) $16x^2 + 24x + 9$

c) $4x^4 - 4x^2 + 1$

1.16

a)

$$\begin{aligned}
&(3x - 1)(x - 2) - x(2x - 1)\\
&= 3x \cdot x + 3x \cdot (-2) - 1 \cdot x - 1 \cdot (-2) - x \cdot 2x - x \cdot (-1)\\
&= 3x^2 - 6x - x + 2 - 2x^2 + x\\
&= x^2 - 6x + 2
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&x(2 - 3x)(x + 2)\\
&= (2x - 3x^2)(x + 2)\\
&= 2x \cdot x + 2x \cdot 2 - 3x^2 \cdot x - 3x^2 \cdot 2\\
&= 2x^2 + 4x - 3x^3 - 6x^2\\
&= -3x^3 - 4x^2 + 4x
\end{aligned}$$

Vastaus **a)** $x^2 - 6x + 2$

b) $-3x^3 - 4x^2 + 4x$

1.17

a)

$$\begin{aligned}
&\quad f(x)^2 - g(x)^2 \\
&= (3x-1)^2 - (4x)^2 \\
&= (3x-1)(3x-1) - (4x)\cdot(4x) \\
&= 3x\cdot 3x + 3x\cdot(-1) - 1\cdot 3x - 1\cdot(-1) - 16x^2 \\
&= 9x^2 - 3x - 3x + 1 - 16x^2 \\
&= -7x^2 - 6x + 1
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\quad \big(f(x) - g(x)\big)^2 \\
&= \big((3x-1) - (4x)\big)^2 \\
&= (3x - 1 - 4x)^2 \\
&= (-x-1)^2 \\
&= (-x-1)(-x-1) \\
&= -x\cdot(-x) - x\cdot(-1) - 1\cdot(-x) - 1\cdot(-1) \\
&= x^2 + x + x + 1 \\
&= x^2 + 2x + 1
\end{aligned}$$

Vastaus **a)** $-7x^2 - 6x + 1$

b) $x^2 + 2x + 1$

1.18

a)

Vettä on aluksi 500 litraa.

Kun aikaa on kulunut x tuntia, vettä on valunut pois $35x$ (l).

Veden märän lauseke litroina on siis $V(x) = 500 - 35x$.

b)

Lasketaan lausekkeen $V(x)$ arvot, kun $x = 12$ ja $x = 20$.

$V(12) = 500 - 35 \cdot 12 = 80$ (l)

Säiliössä on siis jäljellä 80 litraa vettä.

$V(20) = 500 - 35 \cdot 20 = -200$ (l)

Määrä ei voi olla negatiivinen, joten vesi on loppunut säiliöstä jo aiemmin.

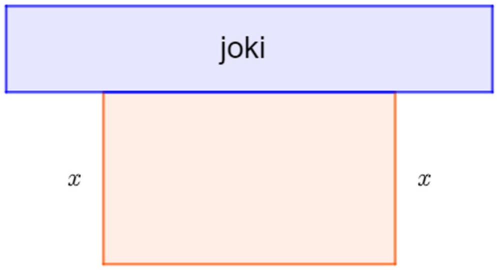
Vastaus **a)** $V(x) = 500 - 35x$ (l)

b) $V(12) = 80$ (l) Säiliössä on siis jäljellä 80 litraa vettä.
$V(20) = -200$ (l) Vesi on loppunut säiliöstä jo aiemmin.

1.19

a)

Kohtisuoraan olevia sivuja on kaksi kappaletta ja niiden yhteispituus on $2x$ (m).



Joen suuntaisen sivun pituus on siis
$s(x) = 62 - 2x$ (m).

b)

Suorakulmion pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo.

$A(x) = (62 - 2x)x = 62x - 2x^2 = -2x^2 + 62x$ (m^2)

c)

Lasketaan pinta-ala, kun $x = 15$ (m).

$A(15) = -2 \cdot 15^2 + 62 \cdot 15 = 480$

Pinta-ala on 480 m^2.

Vastaus **a)** $s(x) = 62 - 2x$ (m)

b) $A(x) = -2x^2 + 62x$ (m^2)

c) 480 m^2

1.20

a)

Kun kauppias korottaa hintaa x (€), lumilapioiden hinta on $h(x) = 25 + x$ (€).

b)

Hinnankorotuksen myötä viikoittainen myynti pienenee $2x$ kpl, joten lapioita myydään viikossa $m(x) = 300 - 2x$.

c)

Myyntitulo saadaan lapion hinnan ja myyntimäärän tulona.

$T(x) = (25 + x)(300 - 2x) = -2x^2 + 250x + 7500$ (€)

Lausekkeen voi sieventää CAS-laskimella.

d)

Kun kauppias asettaa myyntihinnaksi 31 €, hän on korottanut hintaa 31 € − 25 € = 6 €.

Lasketaan myyntitulo, kun $x = 6$.

$T(6) = -2 \cdot 6^2 + 250 \cdot 6 + 7500 = 8928$ (€)

Viikon myyntitulo on 8928 €.

Vastaus

a) $h(x) = 25 + x$ (€)

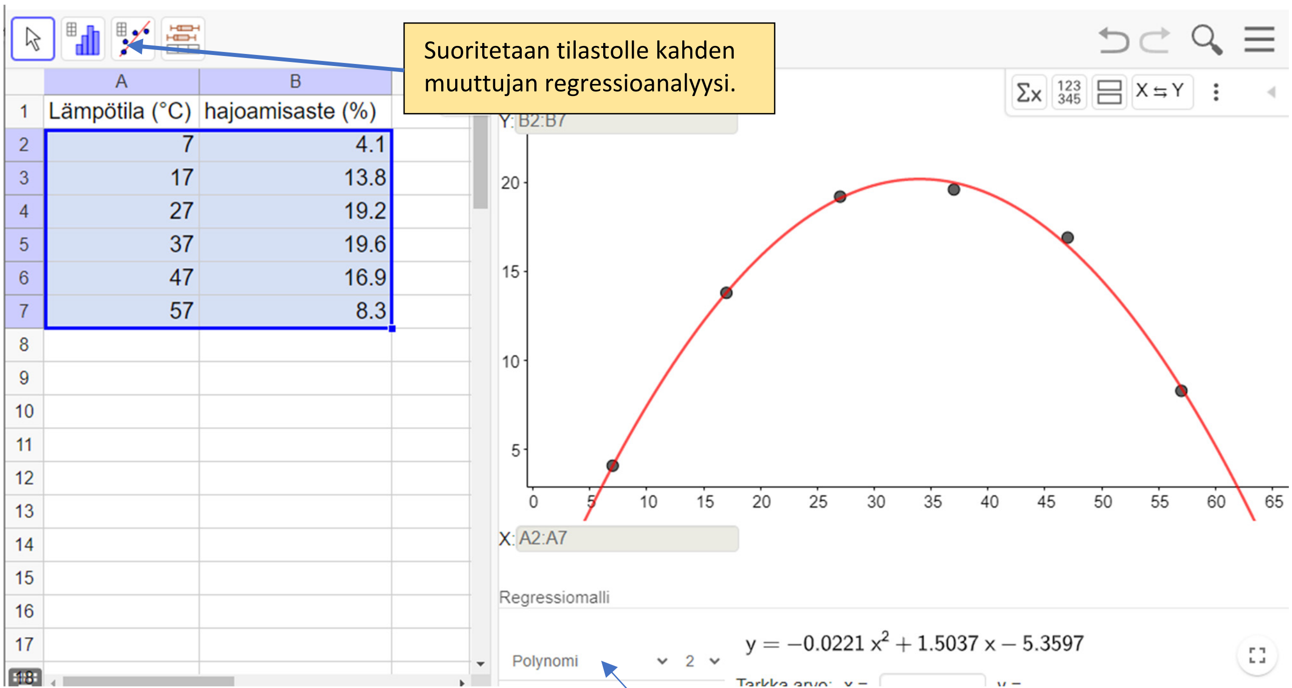
b) $m(x) = 300 - 2x$ (kpl)

c) $T(x) = -2x^2 + 250x + 7500$ (€)

d) 8 928 €

1.21

a) Kirjoitetaan tulokset laskinohjelmiston taulukkolaskentatoiminnossa ja sovitetaan pisteisiin toisen asteen polynomi.



Hajoamisastetta kuvaa funktio

$f(x) = -0{,}022x^2 + 1{,}504x - 5{,}360$ (%)

missä x on lämpötila (°C).

Valitaan regressiomalliksi toisen asteen polynomi.

Tarkista, että pyöristämisasetuksissa on tarpeeksi desimaaleja.

b) Lasketaan funktion arvo, kun $x = 40$.

$f(40) = -0{,}022 \cdot 40^2 + 1{,}504 \cdot 40 - 5{,}360 = 19{,}6$ (%)

Tarkemmilla kertoimilla arvoksi tulee $\approx 19{,}4$ %.

c)

$f(70) = -0{,}022 \cdot 70^2 + 1{,}504 \cdot 70 - 5{,}360 = -7{,}88$ (%)

Hajoamisaste ei voi olla negatiivinen, joten malli ei toimi näin korkeilla lämpötiloilla.

Vastaus

a) $f(x) = -0{,}022x^2 + 1{,}504x - 5{,}360$ (%)
b) $f(40) = 19{,}6$ (%)
c) $f(70) = -7{,}88$ (%) Malli ei toimi näin korkeilla lämpötiloilla.