

Binomi 8 – Luku 12 – Tehtävien malliratkaisut

12.1

a) Määritetään funktion derivaatta CAS-laskimella.

Funktio kannattaa ensin tallentaa laskimen muistiin ":"-komennolla.

Geogebraalla:

TI-nspirella:

1 $f(x) := 2x^3 + 21x^2 - 108x$
→ $f(x) := 2x^3 + 21x^2 - 108x$

2 Derivaatta($f(x)$)
→ $6x^2 + 42x - 108$

$f(x) := 2 \cdot x^3 + 21 \cdot x^2 - 108 \cdot x$ Valmis

$\frac{d}{dx}(f(x))$ $6 \cdot x^2 + 42 \cdot x - 108$

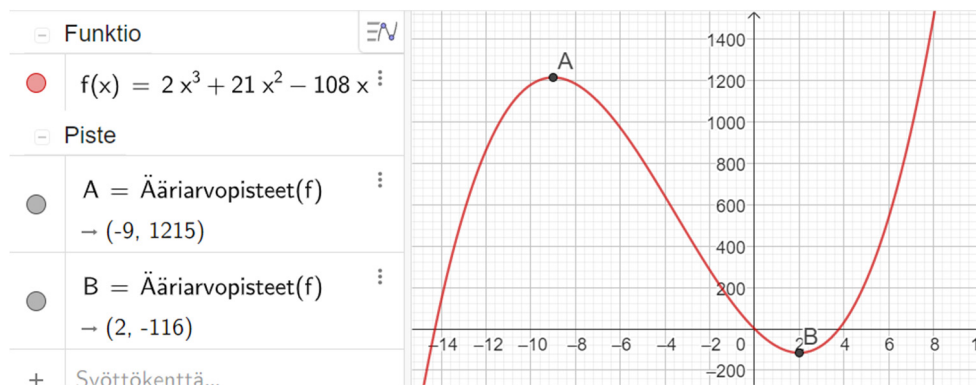
Derivaatta on siis $f'(x) = 6x^2 + 42x - 108$.

b) Muodostetaan yhtälö $f'(x) = 0$ ja ratkaistaan se CAS-laskimella.

$$f'(x) = 0$$
$$6x^2 + 42x - 108 = 0$$
$$x = -9 \text{ tai } x = 2$$

Derivaattafunktion voi myös tallentaa laskimeen ja muodostaa yhtälön sen avulla.

c) Piirretään funktion kuvaaja.



Kuvan perusteella $x = -9$ on maksimikohta ja $x = 2$ on minimikohta.

Vastaus a) $f'(x) = 6x^2 + 42x - 108$

b) $x = -9$ tai $x = 2$

c) maksimikohta $x = -9$, minimikohta $x = 2$

12.2

Derivoidaan ensin funktio.

$$g'(x) = -6x^2 - 18x + 240$$




B-osan tehtävissä derivoinnin voi suorittaa laskimella.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned}g'(x) &= 0 \\ -6x^2 - 18x + 240 &= 0 \\ x &= -8 \text{ tai } x = 5\end{aligned}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.
Valitaan testikohdat derivaatan nollakohtien eri puolilta.

$$\begin{aligned}g'(-9) &= -408 (< 0) \\ g'(0) &= 240 (> 0) \\ g'(6) &= -84 (< 0)\end{aligned}$$

	-8	5	
g'	-	+	-
g			
	min	max	

Kulkukaavion perusteella
maksimikohta on $x = 5$. Lasketaan maksimiarvo.

$$g(5) = -2 \cdot 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 240 \cdot 5 + 1 = 726$$

Minimikohta on $x = -8$. Lasketaan minimiarvo.

$$g(-8) = -2 \cdot (-8)^3 - 9 \cdot (-8)^2 + 240 \cdot (-8) + 1 = -1471$$

Vastaus maksimiarvo 726, minimiarvo -1471

12.3

a)

Funktion V arvo kuvaa veden tilavuutta säiliössä. Tilavuus ei voi olla negatiivinen.

Funktio on siis määritelty, kun veden tilavuus ei ole negatiivinen eli $V(x) \geq 0$.

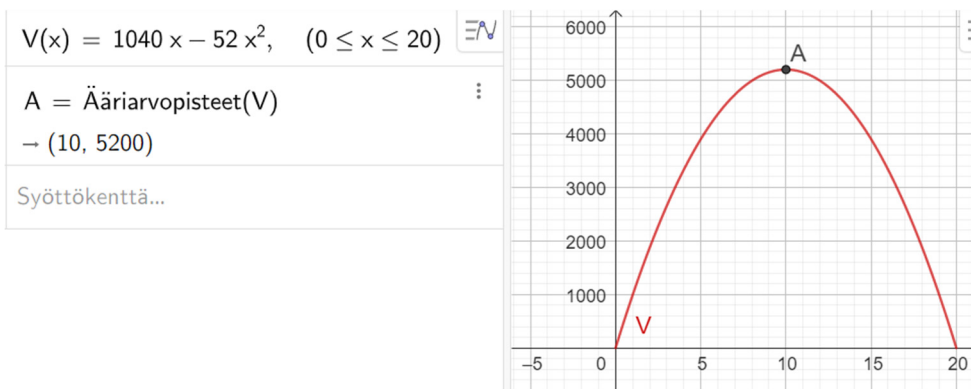
Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan se CAS-laskimella.

$$\begin{aligned} V(x) &\geq 0 \\ 1040x - 52x^2 &\geq 0 \\ 0 &\leq x \leq 20 \end{aligned}$$

Funktio on määritelty, kun $0 \leq x \leq 20$ (min).

b)

Piirretään funktion kuvaaja, kun $0 \leq x \leq 20$. Määritetään kuvaajasta funktion maksimipisteen koordinaatit.



Funktio saa kuvaajan mukaan suurimman arvonsa ääriarvopisteessä (10, 5200).

Pisteen x -koordinaatti on 10, joten suurin arvo saavutetaan 10 minuutin kuluttua.

Veden tilavuus on tällöin 5200 litraa.

Vastaus a) $0 \leq x \leq 20$ (min)

b) 10 min kuluttua, vettä on 5200 litraa

12.4

Funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa määrittelyvälille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa tai suljetun välin $[0, 12]$ päätepisteissä.

Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = -19,737x^2 + 283,6x - 94,14 \quad (0 < x < 12)$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -19,737x^2 + 283,6x - 94,14 &= 0 \\ x &= 0,33999 \dots \end{aligned}$$

Lasketaan funktion arvot välin $[0, 12]$ päätepisteissä ja tarkasteluvälille kuuluvassa nollakohdassa $x = 0,33999 \dots$

$$f(0) = 10725$$

$$f(12) = 18646,008 \approx 18600$$

$$f(0,339 \dots) = 10709,1259 \approx 10700$$

Valitaan arvoista suurin ja pienin. Suurin arvo on $18\,600 \text{ kpl/m}^3$ ja pienin arvo $10\,700 \text{ kpl/m}^3$.

Vastaus Suurin $18\,600 \text{ kpl/m}^3$, pienin $10\,700 \text{ kpl/m}^3$

12.5

Derivoidaan ensin funktio.

$$g'(x) = x^2 + x - \frac{3}{4}$$

B-osan tehtävissä derivoinnin voi suorittaa laskimella.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.




$$\begin{aligned}g'(x) &= 0 \\x^2 + x - \frac{3}{4} &= 0 \\x &= -\frac{3}{2} \text{ tai } x = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio. Valitaan testikohdat derivaatan nollakohtien eri puolilta.

$$g'(-2) = \frac{5}{4} (> 0)$$

$$g'(0) = -\frac{3}{4} (< 0)$$

$$g'(1) = \frac{5}{4} (> 0)$$

	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	
g'	+	-	+
g			
	max	min	

Kulkukaavion perusteella maksimikohta on $x = -\frac{3}{2}$. Lasketaan maksimiarvo.

$$g\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{5}{4}\right) + 8 = \frac{73}{8}$$

Minimikohta on $x = \frac{1}{2}$. Lasketaan minimiarvo.

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 8 = \frac{187}{24}$$

Vastaus maksimiarvo $\frac{73}{8}$, minimiarvo $\frac{187}{24}$

12.6

a)

Funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa derivaatan nollakohdissa tai suljetun välin päätepisteissä.

Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = 12x^2 - 22x - 14$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 12x^2 - 22x - 14 &= 0 \\ x &= -\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Lasketaan funktion arvot välin $[-2, 3]$ päätepisteissä ja tarkasteluvälille kuuluvissa nollakohdassa $x = -\frac{1}{2}$ ja $x = \frac{7}{3}$.

$$f(-2) = -73$$

$$f(3) = -58$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{85}{4} = -21,25$$

$$f\left(\frac{7}{3}\right) = -\frac{1802}{27} \approx -66,74 \dots$$

Valitaan arvoista suurin ja pienin. Suurin arvo on $-\frac{85}{4}$ ja pienin -73 .

b)

Välille $[3, 5]$ ei kuulu kumpikaan nollakohdista.

Lasketaan funktion arvot välin $[3, 5]$ päätepisteissä.

$$f(3) = -58$$

$$f(5) = 130$$

Valitaan arvoista suurin ja pienin. Suurin arvo on 130 ja pienin -58 .

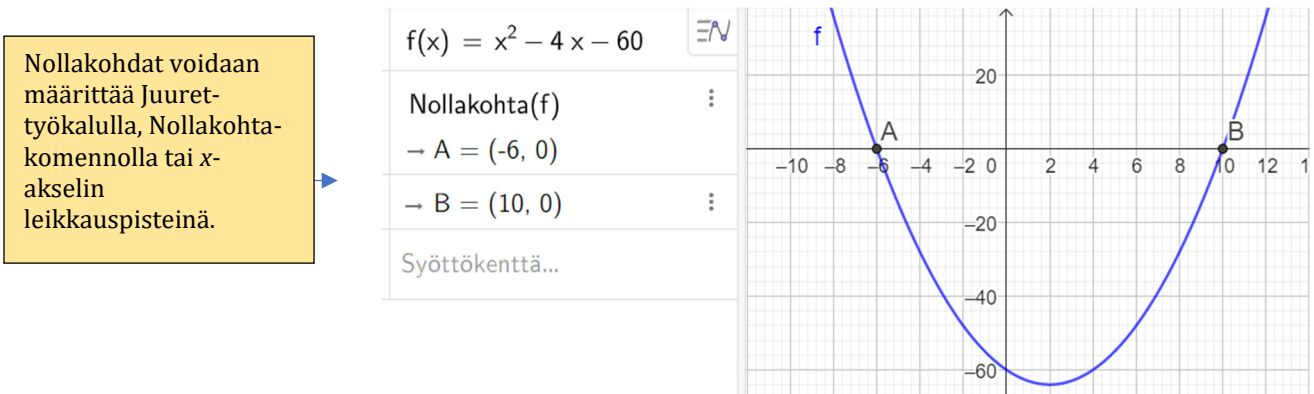
Vastaus a) Suurin arvo on $-\frac{85}{4}$ ja pienin -73

 b) Suurin arvo on 130 ja pienin -58 .

12.7

a)

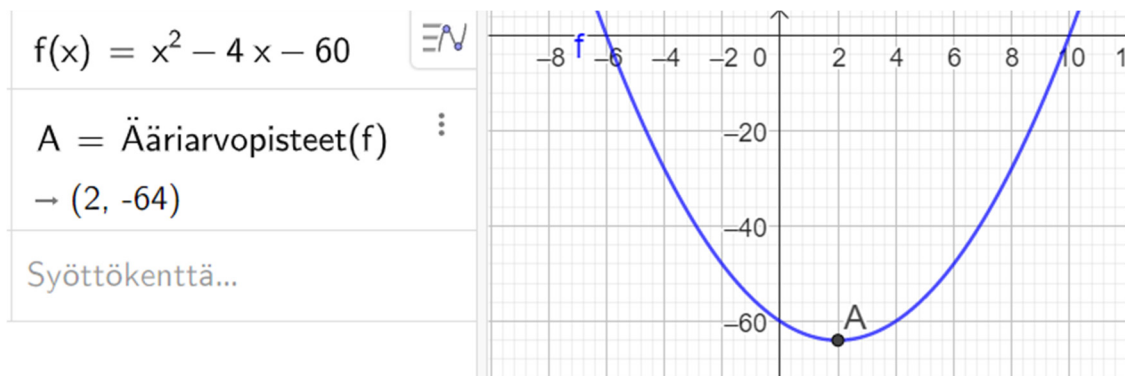
Piirretään funktion kuvaaja ja määritetään funktion nollakohdat.



Funktion nollakohdat ovat $x = -6$ ja $x = 10$.

b)

Määritetään ääriarvopisteet.



Funktion ääriarvopiste on $(2, -64)$. Koska funktio saa kuvaajan perusteella paikallisesti pienimmän arvonsa, kyseessä on minimipiste.

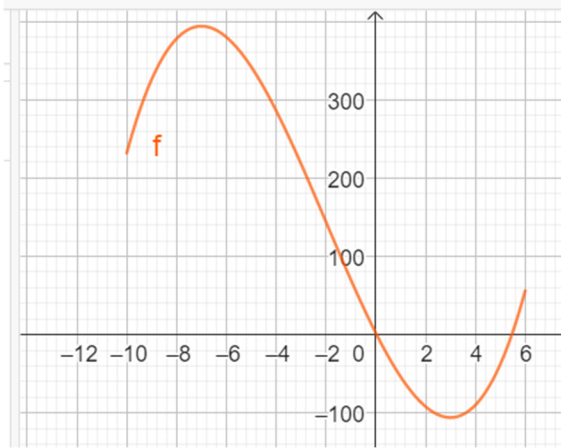
Vastaus a) $x = -6$ ja $x = 10$

b) minimipiste $(2, -64)$

12.8

a)

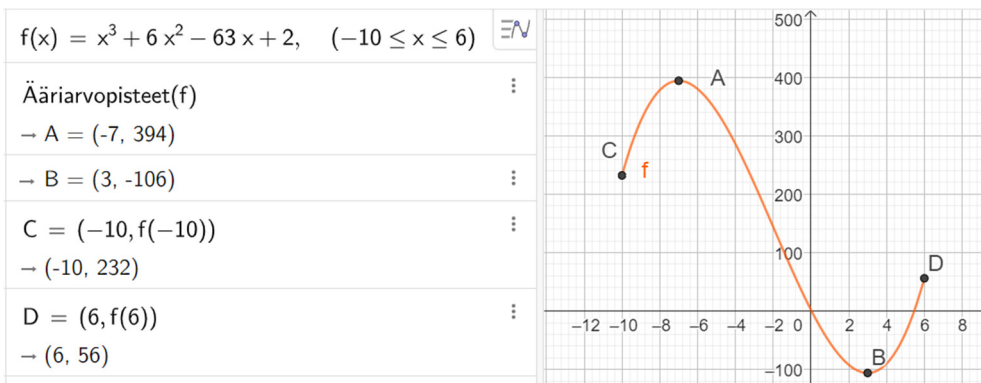
Piirretään funktion f kuvaaja välillä $-10 \leq x \leq 6$.



$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 63x + 2, \quad (-10 \leq x \leq 6)$$

b)

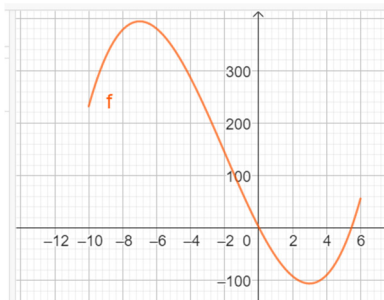
Funktion suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai välille osuvista ääriarvopisteistä.



Funktio saa suurimman arvonsa pisteessä A. Suurin arvo on 394.

Funktio saa pienimmän arvonsa pisteessä B. Pienin arvo on -106.

Vastaus a)



b) suurin 394, pienin -106

12.9

a)

Kiipeilykaaren alareunojen etäisyys saadaan funktion nollakohtien avulla.

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\ -0,395x^2 + 1,778x &= 0 \\ x &= 0 \text{ tai } x = 4,501 \dots\end{aligned}$$

Alareunojen etäisyys on siis $4,501 \dots \text{ m} - 0 \text{ m} = 4,501 \dots \text{ m} \approx 4,50 \text{ m}$.

b)

Kiipeilykaarta mallinnetaan alaspäin aukeavalla paraabelilla. Korkein kohta eli suurin arvo on derivaatan nollakohdasta.

Derivoidaan funktio.

$$f'(x) = -0,79x + 1,778$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ -0,79x + 1,778 &= 0 \\ x &= 2,250 \dots\end{aligned}$$

Lasketaan kiipeilykaaren korkeus.

$$f(2,250 \dots) = -0,395 \cdot (2,250 \dots)^2 + 1,778 \cdot 2,250 \dots = 2,0008 \dots \approx 2,00$$

Vastaus a) 4,50 m

 b) 2,00 m

12.10

Funktion määrittelyväli on tunteina $0 \leq t \leq \frac{150}{60}$ eli $0 \leq t \leq 2,5$.

Derivoidaan funktio.

$$f'(t) = -694t + 893 \quad (0 < t < 2,5)$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0 \\ -694t + 893 &= 0 \\ x &= 1,286 \dots \end{aligned}$$

Funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin $[0; 2,5]$ päätepisteissä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa $t = 1,286 \dots$ Lasketaan funktion arvot.

$$f(0) = 20$$

$$f(2,5) = 83,75 \approx 84$$

$$f(1,286 \dots) = 594,53 \dots \approx 595$$

Valitaan arvoista suurin ja pienin. Pienin lämpötila on $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ja suurin $595 \text{ }^\circ\text{C}$.

Vastaus Pienin $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ja suurin $595 \text{ }^\circ\text{C}$

12.11

Funktion määrittelyväli on kuukausina $0 \leq t \leq 12$.

Derivoidaan funktio.

$$g'(t) = 0,15t^2 - 2,4t + 7,9 \quad (0 < t < 12)$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} g'(t) &= 0 \\ 0,15t^2 - 2,4t + 7,9 &= 0 \\ t &= 4,6335 \dots \text{ tai } t = 11,3665 \dots \end{aligned}$$

Funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin $[0, 12]$ päätepisteissä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa. Lasketaan funktion arvot.

$$\begin{aligned} g(0) &= 132 \\ g(12) &= 140,4 \\ g(4,6335 \dots) &= 147,815 \dots \approx 148 \\ g(11,3665 \dots) &= 140,184 \dots \approx 140 \end{aligned}$$

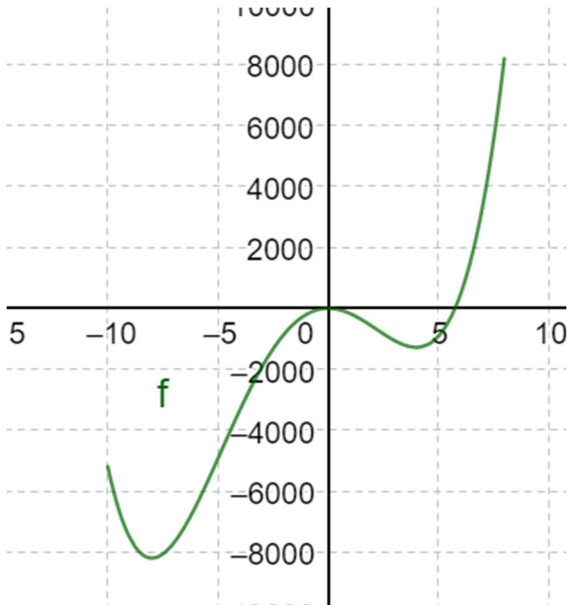
Valitaan arvoista suurin ja pienin. Alin litrahinta on $132 \frac{\text{snt}}{1} \approx 1,32 \frac{\text{€}}{1}$
ja ylin litrahinta on $148 \frac{\text{snt}}{1} \approx 1,48 \frac{\text{€}}{1}$.

Vastaus alin 1,32 €/l, ylin 1,48 €/l

12.12

a)

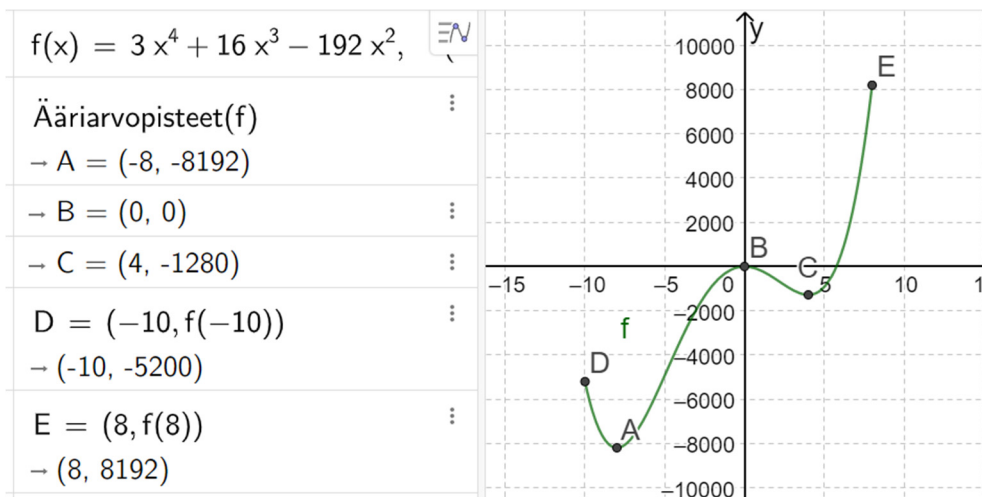
Piirretään funktion f kuvaaja välillä $-10 \leq x \leq 8$.



$$f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 192x^2, \quad (-10 \leq x \leq 8)$$

b)

Funktion suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai välille osuvista ääriarvopisteistä.



Funktio saa suurimman arvonsa pisteessä E. Suurin arvo on 8192.

Funktio saa pienimmän arvonsa pisteessä A. Pienin arvo on -8192.

Vastaus b) suurin 8192, pienin -8192

12.13

Funktion määrittelyväli on $0 \leq t \leq 30$, missä t on kuluneet vuodet vuodesta 1970 alkaen.

Derivoidaan funktio.

$$f'(t) = -0,0864t^2 + 2,6498t - 11,824 \quad (0 < t < 30)$$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0 \\ -0,0864t^2 + 2,6498t - 11,824 &= 0 \\ t &= 5,420 \dots \text{ tai } t = 25,248 \dots \end{aligned}$$

Funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin $[0, 30]$ päätepisteissä tai välille kuuluvassa derivaatan nollakohdassa. Lasketaan funktion arvot.

$$\begin{aligned} f(0) &= 99,3 \\ f(30) &= 159,39 \approx 160 \\ f(5,420 \dots) &= 69,549 \dots \approx 69,5 \\ f(25,248 \dots) &= 181,815 \dots \approx 182 \end{aligned}$$

Valitaan arvoista suurin ja pienin. Alin reaalihintaindeksin arvo on 69,5 ja suurin 182.

Vastaus pienin 69,5 ja suurin 182

12.14

a)

Korkeus ei voi olla negatiivinen. Ratkaistaan määrittelyehto epäyhtälön $s(x) \geq 0$ avulla.

$$\begin{aligned} s(x) &\geq 0 \\ -0,75x^2 + 30x &\geq 0 \\ 0 &\leq x \leq 40 \end{aligned}$$

Funktio on määritelty, kun $0 \leq x \leq 40$ (m).

b)

Muuttuja on etäisyys heittokohdasta, joten pallon lentomatka saadaan suuremmasta nollakohdasta. Ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} s(x) &= 0 \\ -0,75x^2 + 30x &= 0 \\ x &= 0 \quad \text{tai} \quad x = 40 \end{aligned}$$

Pallo lensi 40 metrin päähän.

c)

Pallo on nousevassa liikkeessä, kun pallon kuvaajan rataan piirretyn tangentin kulmakerroin on positiivinen (tai hetkellisesti nolla). Muodostetaan funktion s derivaatta ja selvitetään, milloin derivaatta on epänegatiivinen.

$$s'(x) = -1,50x + 30 \quad (0 < x < 40)$$

Ratkaistaan epäyhtälö $s'(x) > 0$.

$$\begin{aligned} s'(x) &\geq 0 \\ -1,50x + 30 &\geq 0 \\ x &\leq 20 \end{aligned}$$

Otetaan huomioon määrittelyehto.

Pallo on nousevassa liikkeessä, kun $0 \leq x \leq 20$ (m).

Vastaus a) $0 \leq x \leq 40$ (m)

 b) 40 m

 c) $0 \leq x \leq 20$ (m)

12.15

a)

Lasketaan lämpötila, kun $x = 0$.

$$x(0) = -0,02 \cdot 0^2 + 0,61 \cdot 0 + 4,00 = 4,00 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

Lämpötila aluksi oli 4,00 °C.

b)

Lämpötilaa kuvaavan funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten lämpötila on korkeimmillaan derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan funktio ja ratkaistaan derivaatan nollakohta.

$$x'(t) = -0,04t + 0,61 \quad (0 < t < 24)$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= 0 \\ -0,04t + 0,61 &= 0 \\ t &= 15,25 \end{aligned}$$

Lämpötila oli korkeimmillaan 15,25 tunnin eli 15 tunnin ja 15 minuutin kuluttua.

Kello oli siis 15:15.

c)

Lämpötila kasvoi, kun funktion x derivaatta on positiivinen (tai hetkellisesti nolla).

$$\begin{aligned} x'(t) &\geq 0 \\ -0,04t + 0,61 &\geq 0 \\ t &\leq 15,25 \end{aligned}$$

Lämpötila kasvoi klo 0:00 – 15:15.

Vastaus a) 4,00 °C

 b) 15:15

 c) klo 0:00 – 15:15

12.16

Merkitään kysyttyä positiivista lukua kirjaimella x .

Luvun kuutio on tällöin x^3 ja luvun neliö x^2 .

Kuution ja neliön erotusta kuvaa siis lauseke $x^3 - x^2$.

Tutkitaan, missä kohdassa funktio $f(x) = x^3 - x^2$ saa pienimmän arvonsa.

Määritetään funktion derivaatta.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

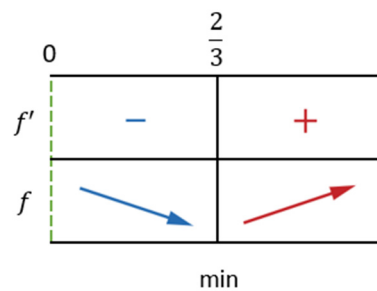
Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 2x &= 0 \\ x &= 0 \text{ tai } x = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Laaditaan funktion kulkukaavio. Koska luku x on positiivinen, rajataan kulkukaavio välille $x > 0$. Selvitetään derivaatan merkki testipisteiden avulla.

$$f'(0,1) = 3 \cdot 0,1^2 - 2 \cdot 0,1 = -0,197 (< 0)$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 (> 0)$$



Kulkukaavion perusteella funktion f minimiarvo on myös pienin arvo.

Erotuksen arvo on siis mahdollisimman pieni, kun luku on $\frac{2}{3}$.

Vastaus $\frac{2}{3}$

12.17

Merkitään toista lukua kirjaimella x .

Koska lukujen summa on 350, niin toisen luvun lauseke on $350 - x$.

Lukujen tuloa kuvaa siis lauseke $x(350 - x) = 350x - x^2$.

Tutkitaan, missä kohdassa funktio $f(x) = 350x - x^2$ saa suurimman arvonsa.

Määritetään funktion derivaatta.

$$f'(x) = 350 - 2x$$

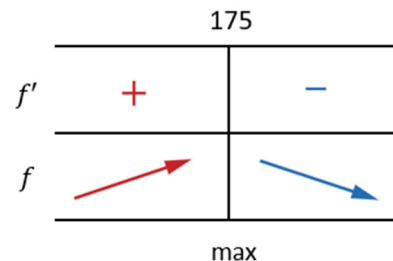
Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 350 - 2x &= 0 \\ x &= 175 \end{aligned}$$

Laaditaan funktion kulkukaavio. Selvitetään derivaatan merkki testipisteiden avulla.

$$f'(0) = 350 - 2 \cdot 0 = 350 (> 0)$$

$$f'(200) = 350 - 2 \cdot 200 = -50 (< 0)$$



Kulkukaavion perusteella funktion f maksimiarvo on myös suurin arvo.

Tulo on mahdollisimman suuri, kun toinen luku 175.

Toinen luku on myös tällöin $350 - 175 = 175$.

Vastaus Molemmat luvut ovat 175.

12.18

Paraabelilla $y = x^2 + 2x - 1$ kohdassa x olevan pisteen y -koordinaatti on $x^2 + 2x - 1$.

Koordinaattien summan lauseke on siis $x + y = x + (x^2 + 2x - 1) = x^2 + 3x - 1$.

Tutkitaan, missä kohdassa funktio $f(x) = x^2 + 3x - 1$ saa pienimmän arvonsa.

Määritetään funktion derivaatta.

$$f'(x) = 2x + 3$$

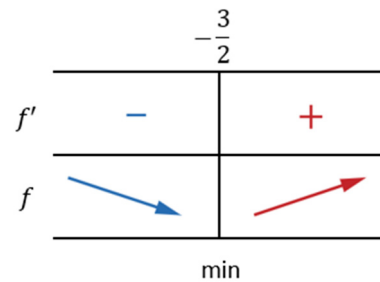
Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x + 3 &= 0 \\ x &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Laaditaan funktion kulkukaavio. Selvitetään derivaatan merkki testipisteiden avulla.

$$f'(-2) = 2 \cdot (-2) + 3 = -1 (< 0)$$

$$f'(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3 (> 0)$$



Kulkukaavion perusteella funktion f minimiarvo on myös pienin arvo.

Koordinaattien summa on pienin, kun $x = -\frac{3}{2}$ ja $y = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 1 = -\frac{7}{4}$.

Summa on siis pienimmillään pisteessä $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$.

Vastaus $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$

12.19

a) Alaspäin aukeavalla paraabelilla on vain yksi maksimikohta paraabelin huipussa.

Näin ollen esimerkiksi käy vaikkapa sellaiset toisen asteen funktiot, joiden huippukohta on välillä $-1 < x < 2$ ja jonka toisen asteen termi on negatiivinen.

Tällainen funktio voisi olla esimerkiksi $p(x) = -x^2$.

Funktion derivaatta on $p'(x) = -2x$ ja derivaatan nollakohta

$$p'(x) = 0$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

joten funktio saa ainoan maksimikohdan kohdassa $x = 0$, joten ainoa maksimikohta on avoimella välillä $-1 < x < 2$.

b) Mikäli funktio saa suurimmat arvot välin $[-1, 2]$ päätepisteissä, sen täytyy saada sama arvo molemmissa kohdissa.

Tällöin funktion on oltava ylöspäin aukeava paraabeli, jonka minimikohta on välin puolivälissä eli kohdassa $x = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$.

Tällainen funktio on esimerkiksi $p(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

Funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä tai välille kuuluvissa derivaatan nollakohdissa.

Polynomien derivaatta on $p'(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Derivaatan nollakohta on

$$p'(x) = 0$$

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä ja derivaatan nollakohdassa.

$$p(-1) = \frac{9}{4}$$

$$p(2) = \frac{9}{4}$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Funktio saa siis suurimmat arvonsa välin päätepisteissä.

Vastaus **a)** esimerkiksi $p(x) = -x^2$

b) esimerkiksi $p(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$