

Binomi 8 – Luku 10 – Tehtävien malliratkaisut

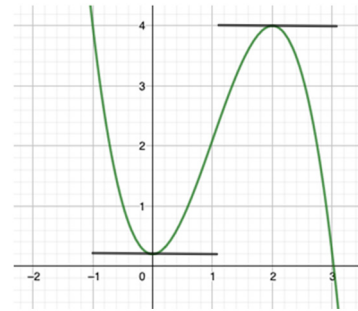
10.1

a)

Kuvaajan perusteella funktiolla on vain yksi nollakohta $x = 3$. Väite on siis väärin.

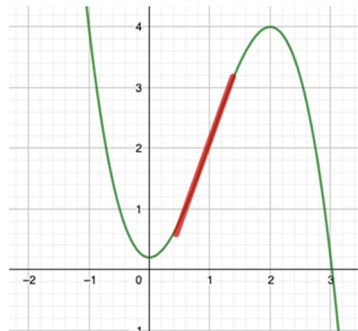
b)

Funktion derivaatta on nolla, kun tangentin kulmakerroin on nolla eli tangenti on vaakasuora. Kuvan perusteella näin on kohdissa $x = 0$ ja $x = 2$. Väite on siis oikein.



c)

Kohtaan $x = 1$ piirretty tangenti on nouseva suora, joten sen kulmakerroin on positiivinen. Näin ollen funktio on kasvava kun $x = 1$. Väite on oikein.

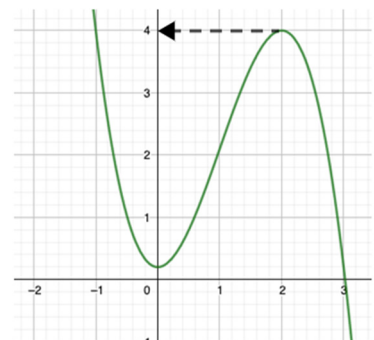


d)

Funktio muuttaa kulkusuuntaansa ääriarvokohdassa. Koska kulkusuunta muuttuu kohdissa $x = 0$ ja $x = 2$, funktiolla on ainakin kaksi ääriarvokohtaa. Väite on siis väärin.

e)

Funktiolla on paikallinen maksimikohta kohdassa $x = 2$ ja funktio saa kyseisessä kohdassa arvon 4. Funktion maksimiarvo on siis 4.



Vastaus

- a) väärin
- b) oikein
- c) oikein
- d) väärin
- e) oikein

10.2

a)

Funktion g kuvaajalla voidaan piirtää vaakasuora tangentti kohtaan $x = 2$.

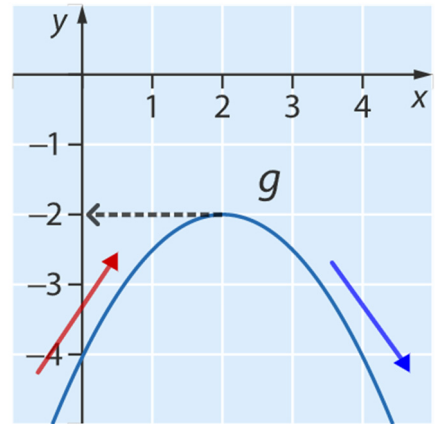
Kohta $x = 2$ on tällöin derivaatan nollakohta.

Kyseisessä kohdassa funktion kulkusuunta muuttuu **kasvavasta väheneväksi**, joten kohta on ääriarvokohta. Kuvan perusteella kyseessä on paikallinen maksimikohta.

Ääriarvo saadaan lukemalla kuvaajalta funktion arvo kohdassa $x = -4$.

$$g(2) \approx -2$$

Funktion maksimikohta on siis $x = 2$ ja maksimiarvo -2 .



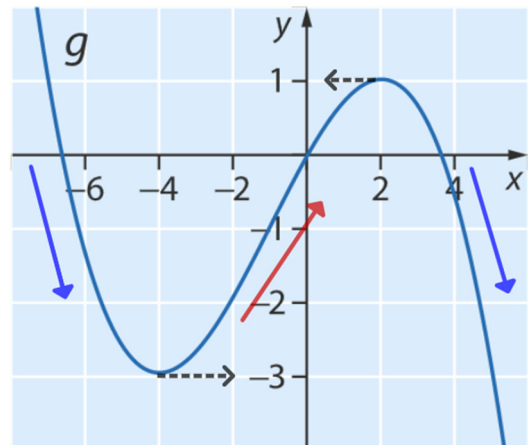
b)

Funktiolla g on kaksi derivaatan nollakohtaa $x = -4$ ja $x = 2$.

- Kohdassa $x = -4$ funktion kulkusuunta muuttuu **vähenevästä kasvavaksi**, joten kohta on minimikohta.
- Kohdassa $x = 2$ funktion kulkusuunta muuttuu **kasvavasta väheneväksi**, joten kohta on maksimikohta.

Ääriarvot saadaan lukemalla kuvasta funktion arvot ääriarvokohdissa.

- Funktion arvo $f(-4) \approx -3$. Funktion minimiarvo on siis **-3**.
- Funktion arvo $f(2) \approx 1$. Funktion maksimiarvo on siis **1**.



Vastaus a) maksimikohta on $x = 2$ ja maksimiarvo -2

b) minimikohta on $x = -4$ ja minimiarvo -3
maksimikohta on $x = 2$ ja maksimiarvo 1

10.3

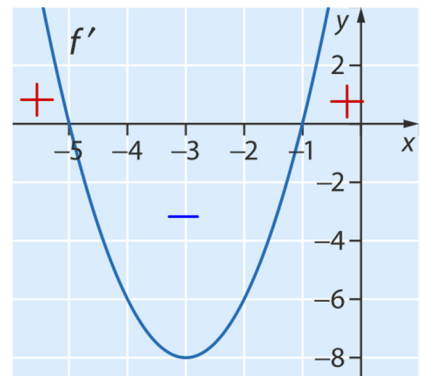
a)

Määritetään ensin derivaatan nollakohdat. Koska kyseessä on derivaattafunktion kuvaaja, nollakohdat löytyvät x -akselin leikkauspisteistä.

Derivaatalla f' on kaksi nollakohtaa $x = -5$ ja $x = -1$.

Laaditaan derivaattafunktion kuvaajan avulla derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.

	-5	-1	
f'	+	-	+
f	↗	↘	↗
	max	min	



Päätellään kulkukaavion perusteella ääriarvokohtien laatu.

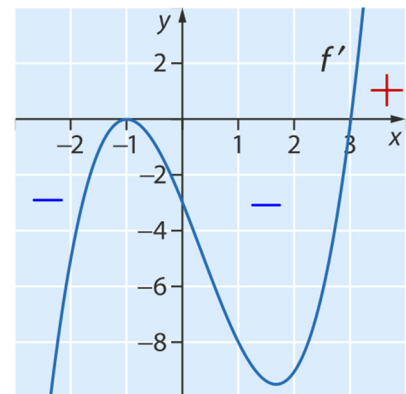
Funktiolla f on maksimikohta $x = -5$ ja minimikohta $x = -1$.

b)

Derivaatan f' nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 3$.

Laaditaan derivaattafunktion kuvaajan avulla derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.

	-1	3	
f'	-	-	+
f	↘	↘	↗
		min	



Kulkukaavion perusteella funktiolla on minimikohta $x = 3$.

Vastaus a) maksimikohta $x = -5$ ja minimikohta $x = -1$

b) minimikohta $x = 3$

10.4

Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla.

Määritetään ensin funktion derivaatta f' .

$$f'(x) = 2 \cdot 2x - 16 = 4x - 16$$

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.

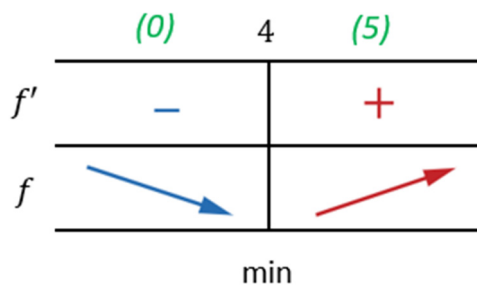
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x - 16 &= 0 \\ 4x &= 16 \quad \| : 4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio. Päättellään kulkukaavion avulla ääriarvokohdat.

Valitaan testikohdat nollakohdan $x = 4$ eri puolilta.

$$f'(0) = 4 \cdot 0 - 16 = -16 < 0$$

$$f'(5) = 4 \cdot 5 - 16 = 4 > 0$$



Kohdassa $x = 4$ funktio vaihtaa kulkusuuntansa vähenevästä kasvavaksi. Kohta $x = 4$ on tällöin minimikohta.

Lasketaan funktion arvo minimikohdassa $x = 4$.

$$f(4) = 2 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 + 64 = 32$$

Minimiarvo on siis 32.

Vastaus minimikohta $x = 4$ ja minimiarvo 32

Ääriarvo on funktion arvo (ei derivaatan arvo). Huomaa, että ääriarvokohta sijoitetaan alkuperäisen funktion f lausekkeeseen.

10.5

a)

Funktio f muuttuu vähenevästä kasvavaksi kohdassa $x = -1$.

Funktiolla on siis minimikohta $x = -1$.

b)

Funktio f on kuvaajan perusteella nouseva suora, jonka kulkusuunta ei muutu. Koska funktio ei muuta kulkusuuntaansa, sillä ei voi olla ääriarvokohtia.

c)

Funktio f muuttuu kasvavasta väheneväksi kohdassa $x = 1$.

Funktiolla on siis maksimikohta $x = 1$.

d)

Funktio f muuttaa kulkusuuntaansa kahdessa kohdassa.

- Kohdassa $x = 0$ funktio muuttuu kasvavasta väheneväksi. Kohta $x = 0$ on siis maksimikohta.
- Kohdassa $x = 4$ funktion kulkusuunta muuttuu vähenevästä kasvavaksi. Kohta $x = 4$ on siis minimikohta.

Vastaus **a)** minimikohta $x = -1$

b) ei ääriarvokohtia

c) maksimikohta $x = 1$

d) maksimikohta $x = 0$ ja minimikohta $x = 4$

10.6

a)

Funktion arvo kohdassa -3 on 0 . Väite on tosi.

b)

Kohtaan $x = 0$ piirretty tangentti on vaakasuora, joten derivaatan arvo on nolla eikä -3 . Väite on epätosi.

c)

Funktion derivaatalla on vain yksi nollakohta $x = 0$. Kohdat $x = -3$ ja $x = 3$ ovat funktion nollakohdat. Väite on epätosi.

d)

Funktion kulkusuunta muuttuu ääriarvokohdassa. Kulkusuunta ei muutu kohdassa $x = -3$, joten väite on epätosi.

e)

Kun $x = 0$, funktion kulkusuunta muuttuu vähenevästä kasvavaksi. Kohta $x = 0$ on siis ääriarvokohta. Väite on tosi.

f)

Funktio saa ääriarvokohdassa $x = 0$ arvon -3 . Näin ollen funktion ääriarvo on -3 . Väite on tosi.

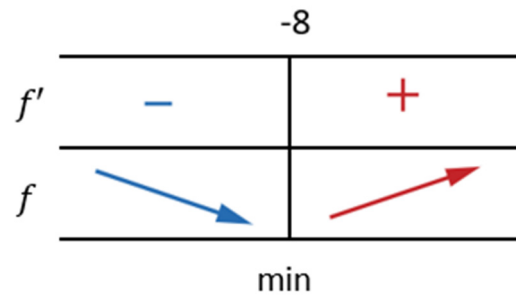
Vastaus

- a) tosi
- b) epätosi
- c) epätosi
- d) epätosi
- e) tosi
- f) tosi

10.7

a)

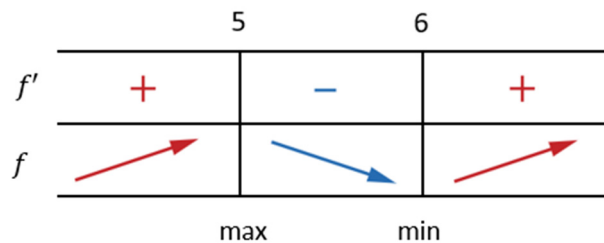
Funktion f on kasvava, kun derivaatan merkki on positiivinen ja vähenevä, kun derivaatan merkki on negatiivinen. Muodostetaan kulkukaavio.



Funktio vaihtaa kulkusuuntaansa vähenevästä kasvavaksi derivaatan nollakohdassa $x = -8$. Näin ollen $x = -8$ on funktion minimikohta.

b)

Muodostetaan derivaatan merkin avulla funktion kulkukaavio.



Funktio vaihtaa kulkusuuntaansa kahdessa kohdassa.

- Kohdassa $x = 5$ kulkusuunta vaihtuu kasvavasta väheneväksi. Kohta $x = 5$ on siis maksimikohta.
- Kohdassa $x = 6$ kulkusuunta vaihtuu vähenevästä kasvavaksi. Kohta $x = 6$ on siis minimikohta.

Vastaus a) minimikohta $x = -8$

b) maksimikohta $x = 5$ ja minimikohta $x = 6$

10.8

a)

Määritetään ensin derivaatan nollakohdat. Koska kyseessä on derivaattafunktion kuvaaja, nollakohdat löytyvät x -akselin leikkauspisteistä.

Derivaatalla f' on yksi nollakohta $x = 2$.

Laaditaan derivaattafunktion kuvaajan avulla derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio. Päättellään kulkukaavion perusteella ääriarvokohtien laatu.

	2		
f'	+	-	
f	↗	↘	
	max		

Funktiolla f on maksimikohta $x = 2$.

b)

Derivaatan f' nollakohdat ovat $x = -2$ ja $x = 6$.

Laaditaan derivaattafunktion kuvaajan avulla derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.

	-2		6		
f'	-	+	-		
f	↘	↗	↘		
	min		max		

Kulkukaavion perusteella funktiolla on minimikohta $x = -2$ ja maksimikohta $x = 6$.

Vastaus a) maksimikohta $x = 2$

b) minimikohta $x = -2$ ja maksimikohta $x = 6$

10.9

a)

Latausnopeus kasvaa, kun kuvaajalle piirretyt tangentit ovat nousevia eli funktion derivaatta ei ole negatiivinen.

Kuvaajan perusteella latausnopeus kasvaa välillä $0 < t \leq 4$ (h) sekä $7 \leq t < 15$ (h).

b)

Funktion kulkusuunta ei muutu kohdassa $x = 11$ (h), joten funktiolla g ei ole ääriarvoa kyseisessä kohdassa.

c)

Funktion g kulkusuunta muuttuu kasvavasta väheneväksi, kun $x = 4$ sekä $x = 15$.
Funktion maksimikohdat ovat siis $x = 4$ sekä $x = 15$.

Selvitetään kuvasta maksimikohtien arvot.

$$g(4) \approx 100 \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{s}} \right)$$

$$g(15) \approx 98 \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{s}} \right)$$

Funktion kulkusuunta muuttuu vähenevästä kasvavaksi kohdassa $x = 7$.
Funktion minimikohta on siis $x = 7$.

Minimiarvo on kuvaajan perusteella $g(7) \approx 65 \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{s}} \right)$.

Vastaus a) $0 < t \leq 4$ (h) ja $7 \leq t < 15$ (h)

b) ei ole, sillä funktion kulkusuunta ei muutu

c) maksimiarvot $g(4) \approx 100 \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{s}} \right)$ ja $g(15) \approx 98 \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{s}} \right)$
minimiarvo $g(7) \approx 65 \left(\frac{\text{Mbit}}{\text{s}} \right)$

10.10

a)

Tarkastelun alussa $t = 0$ (kk).

Kuvaajan perusteella $h(0) = 180$, joten viljan hinta tarkastelun alussa oli 180 €/1000 kg.

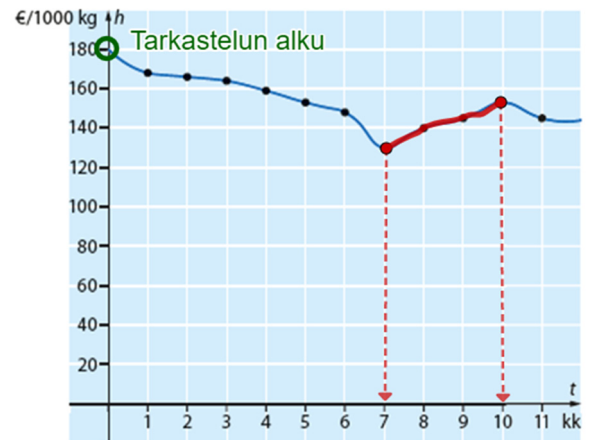
b)

Viljan hinta nousee, kun funktio on kasvava.
Kuvan perusteella funktio on kasvava välillä $7 \text{ (kk)} \leq t \leq 10 \text{ (kk)}$.

c)

Funktion h kulkusuunta vaihtuu vähenevästä kasvavaksi, kun $t = 7$.
Kohta $t = 7$ (kk) on siis minimikohta.

Funktion kulkusuunta vaihtuu kasvavasta väheneväksi, kun $t = 10$.
Kohta $t = 10$ (kk) on siis maksimikohta.



Vastaus a) 180 €/1000 kg

b) $7 \leq t \leq 10$ (kk)

c) minimikohta $t = 7$ (kk), maksimikohta $t = 10$ (kk)

10.11

a)

Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla.

Määritetään ensin funktion derivaatta f' .

$$f'(x) = -3 \cdot 2x + 6 = -6x + 6$$

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.



$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -6x + 6 &= 0 \\ -6x &= -6 \quad || : (-6) \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio. Päättellään kulkukaavion avulla ääriarvokohdat.

Valitaan testikohdat nollakohdan $x = 1$ eri puolilta.

$$f'(0) = -6 \cdot 0 + 6 = 6 > 0$$

$$f'(2) = -6 \cdot 2 + 6 = -6 < 0$$

	(0)	1	(2)
f'	+		-
f			
		max	

Kohdassa $x = 1$ funktio vaihtaa kulkusuuntansa kasvavasta väheneväksi. Kohta $x = 1$ on tällöin maksimikohta.

b)

Lasketaan funktion arvo maksimikohdassa $x = 1$.

$$f(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 5 = 8$$

Minimiarvo on siis 8.

Ääriarvo on funktion arvo (ei derivaatan arvo). Huomaa, että ääriarvokohta sijoitetaan alkuperäisen funktion f lausekkeeseen.

Vastaus a) maksimikohta $x = 1$

b) maksimiarvo 8

10.12

a) Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla.

Määritetään ensin funktion derivaatta f' : $f'(x) = 2x^2 - 6 = 4x$

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio. Päätellään kulkukaavion avulla ääriarvokohdat. Valitaan testikohdat nollakohdan $x = 0$ eri puolilta.

$$f'(1) = 4 \cdot 1 = 4 > 0$$

$$f'(-1) = 4 \cdot (-1) = -4 < 0$$

Kohdassa $x = 0$ funktio vaihtaa kulkusuuntansa vähenevästä kasvavaksi. Kohta $x = 0$ on tällöin minimikohta.

	(-1)	0	(1)
f'	-		+
f	↘		↗
	min		

b) Nyt tunnetaan funktion derivaatta $f'(x) = 2x^2 - 6$.

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x^2 - 6 &= 0 \\ 2x^2 &= 6 && \parallel : 2 \\ x^2 &= 3 && \parallel \sqrt{} \\ x &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio. Päätellään kulkukaavion avulla ääriarvokohdat. Valitaan testikohdat derivaatan nollakohtien $x = -\sqrt{3}$ ja $x = \sqrt{3}$ muodostamilta väleiltä.

$$f'(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 6 = 8 - 6 = 2 > 0$$

$$f'(0) = 4 \cdot 0^2 - 6 = -6 < 0$$

$$f'(2) = 4 \cdot 2^2 - 6 = 10 - 6 = 4 > 0$$

	(-2)	$-\sqrt{3}$	(0)	$\sqrt{3}$	(2)
f'	+	-		-	+
f	↗	↘		↘	↗
	max		min		

Funktion kulkusuunta muuttuu kasvavasta väheneväksi kohdassa $x = -\sqrt{3}$.

Kohta on siis maksimikohta. Funktion kulkusuunta muuttuu vähenevästä kasvavaksi kohdassa $x = \sqrt{3}$. Kohta on siis minimikohta.

Vastaus a) minimikohta $x = 0$

b) minimikohta $x = \sqrt{3}$, maksimikohta $x = -\sqrt{3}$

10.13

a)

Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla.
Määritetään ensin funktion derivaatta f' .

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2x - 2 = \frac{1}{2}x - 2$$

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.



$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{1}{2}x - 2 &= 0 \\ \frac{1}{2}x &= 2 \quad \| \cdot 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.
Päätellään kulkukaavion avulla ääriarvokohtat.

Valitaan testikohdat nollakohdan $x = 4$ eri puolilta.

$$f'(0) = 4 \cdot 0 - 16 = -16 < 0$$

$$f'(5) = 4 \cdot 5 - 16 = 4 > 0$$

	(0)	1	(5)
f'	-		+
f			
	min		

Kohdassa $x = 4$ funktio vaihtaa
kulkusuuntansa vähenevästä kasvavaksi.
Kohta $x = 4$ on tällöin minimikohta.

Lasketaan funktion arvo minimikohdassa $x = 4$.

$$f(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = -1$$

Minimiarvo on -1 .

← Ääriarvo on funktion arvo
(ei derivaatan arvo).
Huomaa, että ääriarvokohta
sijoitetaan alkuperäisen
funktion f lausekkeeseen.

b) Määritetään ensin funktion derivaatta f' .

$$f'(x) = -\frac{2}{3} \cdot 2x - 3 = -\frac{4}{3}x - 3$$

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -\frac{4}{3}x - 3 &= 0 \\ -\frac{4}{3}x &= 3 \quad \parallel \cdot 3 \\ -4x &= 9 \\ x &= -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio. Päättellään kulkukaavion avulla ääriarvokohdat.

Valitaan testikohdat nollakohdan $x = -\frac{9}{4}$ eri puolilta.

$$f'(-3) = -\frac{4}{3} \cdot (-3) - 3 = 1 > 0$$

$$f'(0) = -\frac{4}{3} \cdot 0 - 3 = -3 < 0$$

	(-3)	$-\frac{9}{4}$	(0)
f'	+		-
f	↗		↘
	max		

Kohdassa $x = -\frac{9}{4}$ funktio vaihtaa kulkusuuntansa kasvavasta väheneväksi. Kohta $x = -\frac{9}{4}$ on tällöin maksimikohta.

Lasketaan funktion arvo maksimikohdassa $x = -\frac{9}{4}$.

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{9}{4}\right) &= -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + 1 \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{81}{16} + \frac{27}{4} + 1 \\ &= -\frac{27}{8} + \frac{54}{8} + \frac{8}{8} \\ &= \frac{35}{8} \end{aligned}$$

Ääriarvo on funktion arvo (ei derivaatan arvo). Huomaa, että ääriarvokohta sijoitetaan alkuperäisen funktion f lausekkeeseen.

Vastaus a) minimikohta $x = 4$ ja minimiarvo -1

b) maksimikohta $x = -\frac{9}{4}$ ja maksimiarvo $\frac{35}{8}$

10.14

Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla.

Määritetään ensin funktion derivaatta f' .

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 9 \cdot 2x - 60 = 6x^2 + 18x - 60$$

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$6x^2 + 18x - 60 = 0 \quad || : 6$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$x = \frac{-3 - 7}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 + 7}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$a = 1, b = 3, c = -10$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.

Päätellään kulkukaavion avulla ääriarvokohdat.

Valitaan testikohdat derivaatan nollakohtien muodostamilta väleiltä.

$$f'(-6) = 6 \cdot (-6)^2 + 18 \cdot (-6) - 60 = 48 > 0$$

$$f'(0) = 6 \cdot 0^2 + 18 \cdot 0 - 60 = -60 < 0$$

$$f'(3) = 6 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 - 60 = 48 > 0$$

	(-6)	-5	(0)	2	(3)
f'	+		-		+
f	↗		↘		↗
		max		min	

Kohta $x = -5$ on funktion maksimikohta ja $x = 2$ on funktion minimikohta.

Lasketaan funktion arvo maksimikohdassa $x = -5$.

$$f(-5) = 2 \cdot (-5)^3 + 9 \cdot (-5)^2 - 60 \cdot (-5) + 1 = 276$$

Maksimiarvo on siis 276.

Lasketaan funktion arvo minimikohdassa $x = 2$.

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 + 9 \cdot 2^2 - 60 \cdot 2 + 1 = -67$$

Minimiarvo on siis -67.

Vastaus maksimiarvo 276 ja minimiarvo -67

10.15

Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla.

Määritetään ensin funktion derivaatta f' .

$$f'(x) = 2x^2 + 4x + 4$$

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.

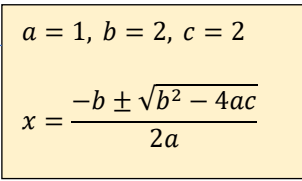
$$f'(x) = 0$$

$$2x^2 + 4x + 4 = 0 \quad || : 2$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-4}}{2}$$


$$a = 1, b = 2, c = 2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Juurrettava on negatiivinen, joten toisen asteen yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Derivaatalla ei ole siis nollakohtia, joissa funktion kulkusuunta voisi vaihtua.

Funktiolla f ei voi siis olla ääriarvokohtia eikä näin ollen ääriarvoja.

10.16

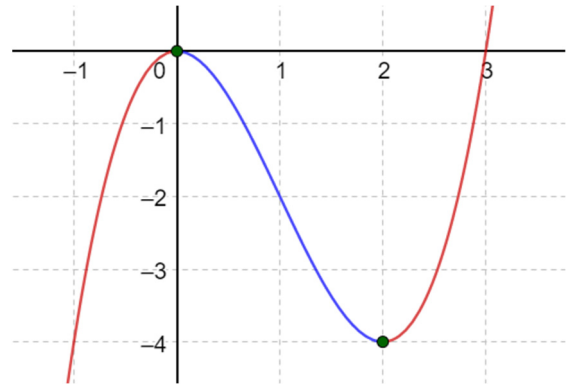
a)

Funktion f kulkusuunta muuttuu **kasvavasta väheneväksi** kohdassa $x = 0$.

Kohta $x = 0$ on siis funktion maksimikohta.

Funktion kulkusuunta muuttuu **vähenevästä kasvavaksi** kohdassa $x = 2$.

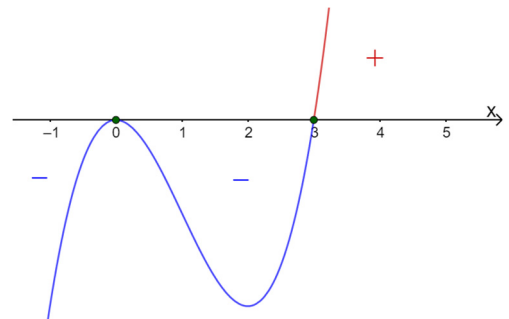
Kohta $x = 2$ on siis funktion minimikohta.



b)

Muodostetaan funktion f derivaatan f' kuvaajan avulla funktion kulkukaavio.

Derivaatan nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 3$. Määritetään derivaatan merkki kuvaajasta.



	0	3	
f'	-	-	+
f	↘		↗
	min		

Funktio f muuttaa kulkusuuntaansa **vähenevästä kasvavaksi** kohdassa $x = 3$. Kohta $x = 3$ on siis funktion minimikohta.

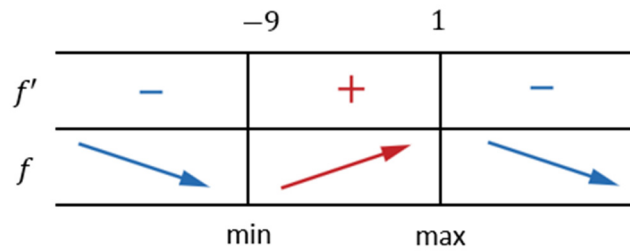
Vastaus a) maksimikohta $x = 0$, minimikohta $x = 2$

 b) minimikohta $x = 3$

10.17

a)

Funktion f on kasvava, kun derivaatan merkki on positiivinen ja vähenevä, kun derivaatan merkki on negatiivinen. Muodostetaan kulkukaavio.

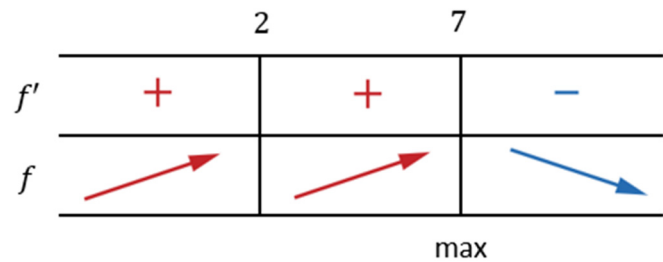


Funktio vaihtaa kulkusuuntaansa kahdessa kohdassa.

- Kohdassa $x = -9$ kulkusuunta vaihtuu vähenevästä kasvavaksi. Kohta $x = -9$ on siis minimikohta.
- Kohdassa $x = 1$ kulkusuunta vaihtuu kasvavasta väheneväksi. Kohta $x = 1$ on siis maksimikohta.

b)

Muodostetaan derivaatan merkin avulla funktion kulkukaavio.



Funktio vaihtaa kulkusuuntaansa vain kohdassa $x = 7$.

Koska kyseisessä kohdassa kulkusuunta vaihtuu kasvavasta väheneväksi, kohta $x = 7$ on maksimikohta.

Vastaus a) maksimikohta $x = 1$ ja minimikohta $x = -9$

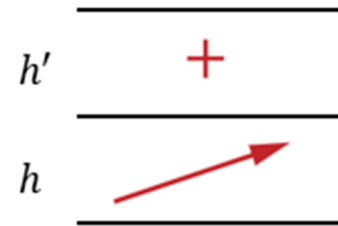
b) maksimikohta $x = 7$

10.18

a)

Kuvaajan perusteella derivaatalla ei ole nollakohtia ja se kulkee koko ajan x -akselin yläpuolella. Derivaatta saa siis vain positiivisia arvoja.

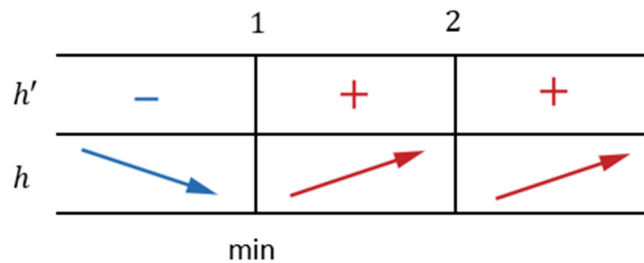
Koska funktio h on koko ajan kasvava, ei sen kulkusuunta muutu. Näin ollen sillä ei ole ääriarvokohtia.



b)

Derivaatan h' nollakohdat ovat $x = 1$ ja $x = 2$.

Laaditaan derivaattafunktion kuvaajan avulla derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.



Kulkukaavion perusteella funktiolla on minimikohta $x = 1$.

Vastaus a) ei ääriarvokohtia

b) minimikohta $x = 1$

10.19

a)

Lautapelin myyntiä kuvaava funktio on kasvava välillä $6 \leq t \leq 9$ (kk).

b)

Funktion kuvaajan kulkusuunta ei muutu kohdassa $t = 4$, joten kyseisessä kohdassa ei ole ääriarvoja.

c)

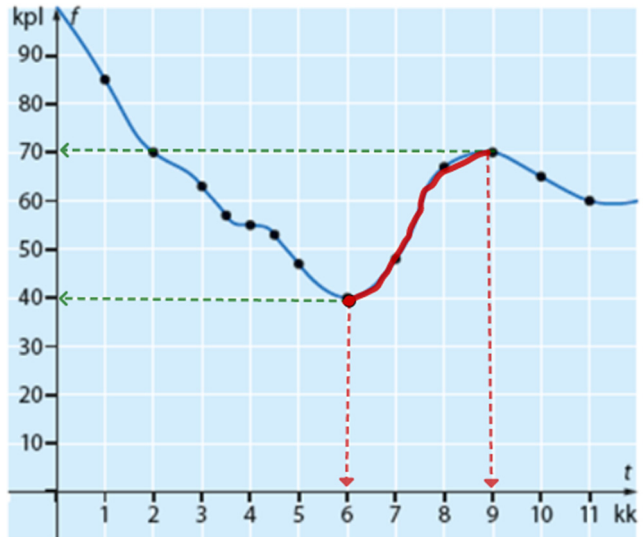
Funktion kulkusuunta muuttuu vähenevästä kasvavaksi kohdassa $t = 6$. Funktiolla on siis minimikohta $t = 6$ (kk).

Funktion kulkusuunta muuttuu kasvavasta väheneväksi kohdassa $t = 9$. Funktiolla on siis maksimikohta $t = 9$ (kk).

Selvitetään kuvaajasta vielä ääriarvokohtia vastaavat ääriarvot.

Minimiarvo on $f(6) \approx 40$ (kpl).

Maksimiarvo on $f(9) \approx 70$ (kpl).



Vastaus a) $6 \leq t \leq 9$ (kk)

b) Ei ole. Funktion kulkusuunta ei muutu.

c) minimikohta $t = 6$ kk, minimiarvo 40 kpl, maksimikohta $t = 9$ kk, maksimiarvo 70 kpl

10.20

a) Tutkittava funktio on $f(x) = x(3x - 6) = 3x^2 - 6x$

Määritetään ensin funktion derivaatta f' : $f'(x) = 6x - 6$

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.

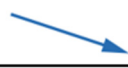

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 6x - 6 &= 0 \\ 6x &= 6 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio. Päätellään kulkukaavion avulla ääriarvokohdat. Valitaan testikohdat nollakohtaan $x = 1$ eri puolilta.

$$f'(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$$

$$f'(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$$

Kohdassa $x = 1$ funktio vaihtaa kulkusuuntansa vähenevästä kasvavaksi. Kohta $x = 1$ on tällöin minimikohta.

	(0)	1	(2)
f'	-		+
f			
	min		

b) Nyt tunnetaan funktion derivaatta $f'(x) = x(3x - 6)$.

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.


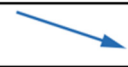

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x(3x - 6) &= 0 \text{ (tulon nollasääntö)} \\ x = 0 \text{ tai } 3x - 6 &= 0 \\ 3x &= 6 \quad \parallel : 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio. Päätellään kulkukaavion avulla ääriarvokohdat. Valitaan testikohdat derivaatan nollakohtien $x = 0$ ja $x = 2$ muodostamilta väleiltä.

$$f'(-1) = -1 \cdot (3 \cdot (-1) - 6) = -1 \cdot (-9) = 9 > 0$$

$$f'(1) = 1 \cdot (3 \cdot 1 - 6) = 1 \cdot (-3) = -3 < 0$$

$$f'(3) = 3 \cdot (3 \cdot 3 - 6) = 3 \cdot 3 = 9 > 0$$

	(0)	0	(1)	2	(3)
f'	+		-		+
f					
	max		min		

Funktion kulkusuunta muuttuu kasvavasta väheneväksi kohdassa $x = 0$.

Kohta on siis maksimikohta. Funktion kulkusuunta muuttuu vähenevästä kasvavaksi kohdassa $x = 2$. Kohta on siis minimikohta.

Vastaus a) minimikohta $x = 1$
 b) minimikohta $x = 2$, maksimikohta $x = 0$

10.21

Sievennetään ensin funktion f lauseke.

$$\begin{aligned}f(x) &= 2(x^2 - 3x) - (2x + 1) \\ &= 2x^2 - 6x - 2x - 1 \\ &= 2x^2 - 8x - 1\end{aligned}$$

Määritetään funktion derivaatta f' .

$$f'(x) = 4x - 8$$

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.

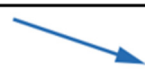
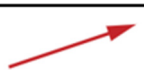
$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ 4x - 8 &= 0 \\ 4x &= 8 \quad || : 4 \\ x &= 2\end{aligned}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.
Päätellään kulkukaavion avulla ääriarvokohtat.

Valitaan testikohdat nollakohdan $x = 2$ eri puolilta.

$$f'(0) = 4 \cdot 0 - 8 = -8 < 0$$

$$f'(3) = 4 \cdot 3 - 8 = 4 > 0$$

	(0)	2	(3)
f'	-		+
f			
	min		

Kohdassa $x = 2$ funktio vaihtaa kulkusuuntansa vähenevästä kasvavaksi.
Kohta $x = 2$ on tällöin minimikohta.

Lasketaan vielä minimiarvo.

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 1 = -9$$

Vastaus minimikohta $x = 2$, minimiarvo -9

10.22

a) Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla. Määritetään ensin funktion derivaatta f' .

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6}$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$x = \frac{2+4}{6} = 1 \text{ tai } x = \frac{2-4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$a = 3, b = -2, c = -1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio. Päätellään kulkukaavion avulla ääriarvokohdat. Valitaan testikohdat derivaatan nollakohtien muodostamilta väleiltä.

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1 = 4 > 0$$

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 1 = 7 > 0$$

Kohta $x = -\frac{1}{3}$ on funktion maksimikohta ja $x = 1$ on funktion minimikohta.

	(-1)	$-\frac{1}{3}$	(0)	1	(2)
f'	+		-		+
f	↗		↘		↗
	max		min		

Lasketaan funktion arvo maksimikohdassa $x = -\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{3}\right) &= \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) - 3 \\ &= -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 3 \\ &= -\frac{1}{27} - \frac{3}{27} + \frac{9}{27} - \frac{81}{27} \\ &= -\frac{76}{27} \end{aligned}$$

Maksimiarvo on siis $-\frac{76}{27}$.

Lasketaan funktion arvo minimikohdassa $x = 1$.

$$f(1) = 1^3 - 1^2 - 1 - 3 = -4$$

Minimiarvo on siis -4 .

b) Määritetään ensin funktion derivaatta f' .

$$f'(x) = \frac{3}{6}x^2 - 2 \cdot 2x + 8 = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$$

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0 \quad \| \cdot 2$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

$$a = 1, b = -8, c = 16$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.
Päätellään kulkukaavion avulla ääriarvokohdat.

Valitaan testikohdat nollakohdan $x = 4$ eri puolilta.

$$f'(0) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 16 = 16 > 0$$

$$f'(5) = \frac{1}{2} \cdot 6^2 - 4 \cdot 6 + 16 = 10 > 0$$

	(0)	4	(5)
f'	+		+
f			

Funktion derivaatta ei saa negatiivisia arvoja,
joten funktio ei vaihda kulkusuuntaansa.

Näin ollen funktiolla ei ole ääriarvokohtia.

Vastaus **a)** maksimikohta $x = -\frac{1}{3}$, maksimiarvo $-\frac{76}{27}$
 minimikohta $x = 1$, minimiarvo -4

b) ei ääriarvokohtia

10.23

Tutkitaan ensin funktiota $f(x) = -4x^3$. Määritetään f' .

$$f'(x) = -4 \cdot 3x^2 = -12x^2$$

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -12x^2 &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio. Päättellään kulkukaavion avulla ääriarvokohdat.

Valitaan testikohdat derivaatan nollakohdan $x = 0$ kummaltakin puolelta.

$$f'(-1) = -12 \cdot (-1)^2 = -12 < 0$$

$$f'(1) = -12 \cdot 1^2 = -12 < 0$$

	(-1)	0	(1)
f'	-		-
f	↘		↘

Funktion derivaatta ei saa positiivisia arvoja, joten funktio ei vaihda kulkusuuntaansa. Näin ollen funktiolla f ei ole ääriarvokohtia.

Tutkitaan sitten funktiota $g(x) = x^3 + x$. Määritetään g' .

$$g'(x) = 3x^2 + 1$$

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ 3x^2 + 1 &= 0 \\ 3x^2 &= -1 \\ x^2 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Reaaliluvun neliö ei voi olla negatiivinen luku, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Derivaatalla ei ole siis nollakohtia, joissa funktio g voisi muuttaa kulkusuuntaansa. Näin ollen funktiolla g ei ole ääriarvokohtia.

Tutkitaan lopuksi summafunktiota $h(x) = f(x) + g(x)$. Muodostetaan ensin funktion lauseke.

$$h(x) = -4x^3 + x^3 + x = -3x^3 + x$$

Määritetään derivaatta h' .

$$h'(x) = -9x^2 + 1$$

Ratkaistaan sitten derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} h'(x) &= 0 \\ -9x^2 + 1 &= 0 \\ -9x^2 &= -1 \quad \| : (-9) \\ x^2 &= \frac{1}{9} \quad \| \sqrt{\quad} \\ x &= \pm \frac{1}{3} \end{aligned}$$




Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.
Päätellään kulkukaavion avulla ääriarvokohdat.

Valitaan testikohdat derivaatan nollakohtien kummaltakin puolelta.

$$f'(-1) = -9 \cdot (-1)^2 + 1 = -8 < 0$$

$$f'(0) = -9 \cdot 0^2 + 1 = 1 > 0$$

$$f'(1) = -9 \cdot 1^2 + 1 = -8 < 0$$

	(-1)	$-\frac{1}{3}$	(0)	$\frac{1}{3}$	(1)
h'	-		+		-
h					
		min		max	

Funktiolla h on minimikohta $x = -\frac{1}{3}$.

Minimiarvo on siis

$$h\left(-\frac{1}{3}\right) = -3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{27} - \frac{9}{27} = -\frac{6}{27} = -\frac{2}{9}.$$

Funktiolla h on maksimikohta $x = \frac{1}{3}$.

Maksimiarvo on siis

$$h\left(\frac{1}{3}\right) = -3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{3} = \frac{-3}{27} + \frac{9}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

Vastaus minimiarvo $h\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{9}$, maksimiarvo $h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$