Binomi 8 – Kertauskoe – Tehtävien malliratkaisut

1.

a)

Funktion nollakohdassa funktio saa arvon nolla. Funktio siis leikkaa tai sivuaa x-akselia.

Kuvaajan perusteella nollakohdat ovat $x \approx -2$ ja $x \approx 1$.

b)

Funktion arvot ovat positiivisia tai nolla, kun funktion kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella tai funktio saa arvon nolla.

Kuvaajan perusteella $f'(x) \geq 0$, kun $x \leq 1$.

c)

Funktion keskimääräinen muutosnopeus välillä $[-1, 0]$ saadaan välille piirretyn tangentin kulmakertoimesta. Lasketaan pisteiden $(-1, 2)$ ja $(0, 4)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{4-2}{0-(-1)} = 2$$

Keskimääräinen muutosnopeus on siis 2.

d)

Kohtaan $x = -2$ piirretty tangentti on vaakasuora, joten hetkellinen muutosnopeus kyseisessä kohdassa on 0.

Vastaus **a)** $x \approx -2$ ja $x \approx 1$

b) $x \leq 1$

c) 2

d) 0

2.

a)

$f'(x) = 8 \cdot 4x^3 - 3 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 1 - 0 = 32x^3 - 9x^2 + 5$

b)

Sievennetään ensin funktion lauseke ja sitten derivoidaan.

$f(x) = 2x\left(x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right) = 2x^3 + x^2 + 2x$

$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 2x + 2 = 6x^2 + 2x + 2$

c)

Sievennetään ensin funktion lauseke ja sitten derivoidaan.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+3)^2 - (4-3x) = (x+3)(x+3) - 4 + 3x \\ &= x^2 + 3x + 3x + 9 - 4 + 3x = x^2 + 9x - 4 \end{aligned}$$

$f'(x) = 2x + 9$

Vastaus **a)** $f'(x) = 32x^3 - 9x^2 + 5$

b) $f'(x) = 6x^2 + 2x + 2$

c) $f'(x) = 2x + 9$

3.

a)

Derivoidaan funktio.

$f'(x) = -6 \cdot 2x + 7 + 0 = -12x + 7$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = -2$.

$f'(-2) = -12 \cdot (-2) + 7 = 24 + 7 = 31$

b)

Tangentin kulmakerroin on derivaatan arvo.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 \\ -12x + 7 &= -2 \\ -12x &= -9 \\ x &= \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

c)

Polynomifunktio on vähenevä, kun derivaatta ei ole positiivinen.

$$\begin{aligned} f'(x) &\leq 0 \\ -12x + 7 &\leq 0 \\ -12x &\leq -7 \\ x &\geq \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Vastaus **a)** $f'(-2) = 31$

b) $x = \frac{3}{4}$

c) $x \geq \frac{7}{12}$

4.

a)

Funktion f kuvaajan perusteella derivaatan nollakohdat ovat $x \approx -1$ ja $x \approx -2$.

Funktio on kasvava eli derivaatta on positiivinen kun $x < -1$ ja $x > 2$.

Funktio on vähenevä eli derivaatta on negatiivinen kun $-1 < x < -2$.

Tällainen kuvaaja on kuvaaja III.

b)

Edellisten perustelujen mukaan merkkikaavio A.

Vastaus **a)** kuvaaja III

b) merkkikaavio A

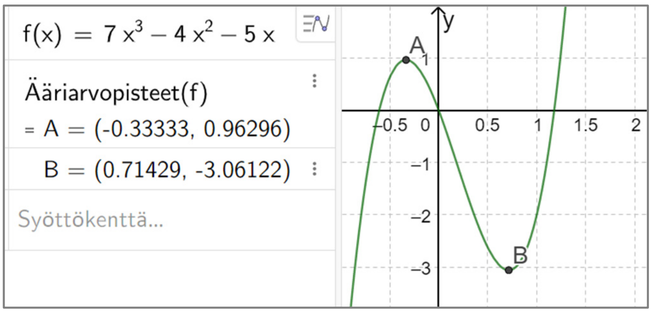
5.

Piirretään funktion kuvaaja ja määritetään vastaukset kuvasta.

a) Määritetään ääriarvot ääriarvo-toiminnolla.

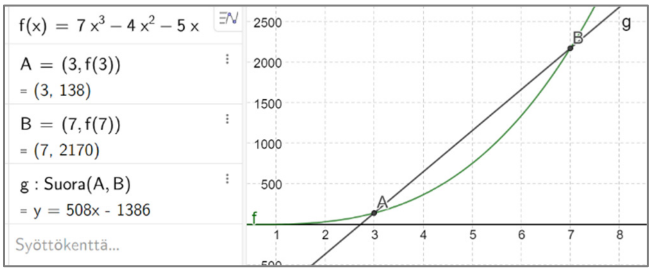
Maksimi on 0,96 kohdassa $x \approx -0{,}33$.

Minimi on $-3{,}06$ kohdassa $x \approx 0{,}71$.



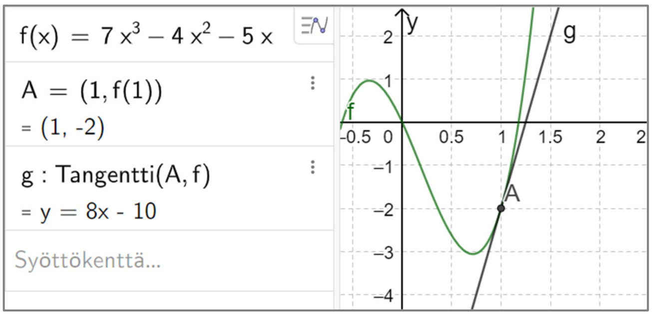
b) Määritetään välille $[3, 7]$ piirretyn tangentin kulmakerroin.

Tangentin kulmakerroin on 508, joten keskimääräinen muutosnopeus kyseisellä välillä on 508.



c) Piirretään funktion kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 1$.

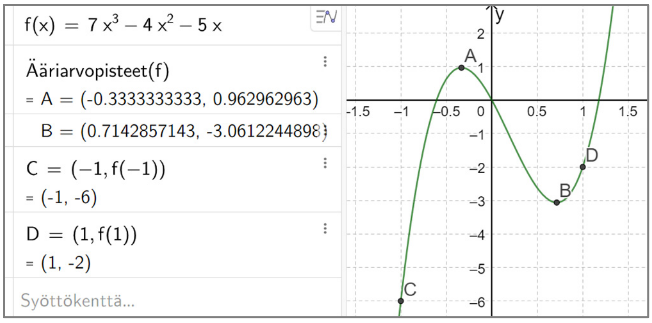
Tangentin kulmakerroin on 8, joten hetkellinen muutosnopeus on 8.



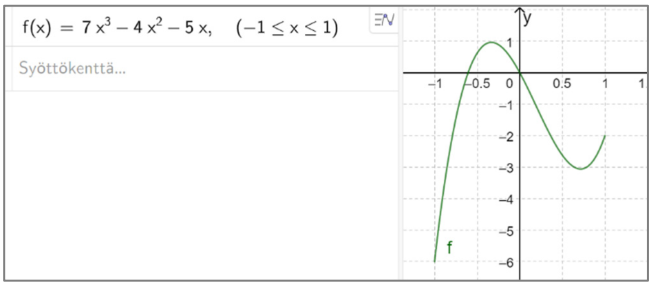
d) Suurin ja pienin arvo löytyvät välin ääriarvokohdista tai välin päätepisteistä.

Suurin arvo on siis 0,96 (piste A).

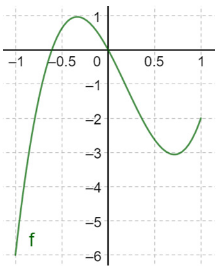
Pienin arvo on siis −6,00 (piste D).



e) Piirretään kuvaaja välillä $[-1, 1]$.



Vastaus **a)** Maksimi 0,96 kohdassa $x \approx -0{,}33$, minimi $-3{,}06$ kohdassa $x \approx 0{,}71$
b) 508 **c)** 8
d) suurin 0,96, pienin −6,00
e)



6.

a) Lasketaan funktion arvo, kun $x = 5$.

$f(5) = -0{,}0060 \cdot 5^3 + 0{,}24 \cdot 5^2 + 0{,}072 \cdot 5 + 0{,}60 = 6{,}21 \approx 6{,}2$ (%)

b) Muutosnopeus saadaan derivaatan avulla.

$f'(x) = -0{,}018x^2 + 0{,}48x + 0{,}072$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 10$.

$f'(10) = 3{,}072 \approx 3{,}1 \left(\frac{\%}{\text{vrk}}\right)$

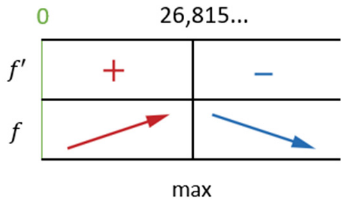
c) Tutkitaan funktion kulkua, kun $x \geq 0$.

Ratkaistaan ensin derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -0{,}018x^2 + 0{,}48x + 0{,}072 &= 0 \\ x &= 26{,}815\ldots \end{aligned}$$

Muodostetaan kulkukaavio välille $x \geq 0$ testipisteiden avulla.

$f'(0) = 0{,}072$
$f'(27) = -0{,}09$



Funktio on kasvava, kun $0 \leq x \leq 26{,}815\ldots$, eli prosentuaalinen osuus kasvaa ensimmäiset 27 vuorokautta.

d) Kulkukaavion perusteella suurin arvo saadaan, kun $x = 26{,}815\ldots$. Lasketaan suurin arvo.

$f(26{,}815\ldots) = 59{,}414\ldots \approx 59$ (%)

Enimmillään sairaana on 59 %.

e) Epidemia päättyy, kun varusmiehistä 0 % on sairaana. Ratkaistaan funktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -0{,}0060x^3 + 0{,}24x^2 + 0{,}072x + 0{,}60 &= 0 \\ x &= 40{,}358\ldots \end{aligned}$$

Epidemia kesti siis 40 vuorokautta.

Vastaus **a)** 6,2 % **b)** 3,1 %/vrk **c)** 27 vrk **d)** 59 % **e)** 40 vrk

7.

a)

Myyntitulo saadaan jäätelön kappalehinnan ja myyntimäärän tulona.
Tulosta vähennetään kiinteät kustannukset ja muuttuvat kustannukset.

$m(x) = x \cdot (1000 - 200x) - 0{,}5x - 400 = -200x^2 + 999{,}5x - 400$ (€)

Jäätelön myyntihinnan on oltava positiivinen eli $x > 0$ ja myyntimäärä ei voi olla negatiivinen eli $1000 - 200x \geq 0$, josta $x \leq 5$. Määrittelyväli on siis $0 < x \leq 5$ (€).

b)

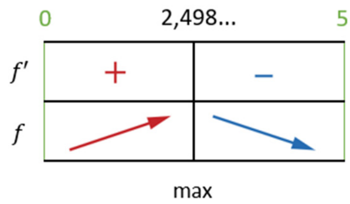
Tutkitaan funktion m kulkua välillä $0 < x \leq 5$ (€). Muodostetaan kulkukaavio derivaatan nollakohtien avulla.

$m'(x) = -400x + 999{,}5$

$$m'(x) = 0$$
$$-400x + 999{,}5 = 0$$
$$x = 2{,}498\ldots$$

Lasketaan derivaatan merkki testipisteiden avulla.

$m'(1) = 599{,}5$
$m'(3) = -200{,}5$



Yrityksen tulos kasvaa siis jäätelön myyntihinnoilla $0 < x \leq 2{,}50$ (€).

c)

Kulkukaavion mukaan suurin arvo saadaan, kun $x = 2{,}498\ldots \approx 2{,}50$ (€).

Tulos on tällöin $f(2{,}50) = -200 \cdot 2{,}50^2 + 999{,}5 \cdot 2{,}50 - 400 = 848{,}75$ (€).

Vastaus **a)** $m(x) = -200x^2 + 999{,}5x - 400$ (€)

b) $0 < x \leq 2{,}50$ (€)

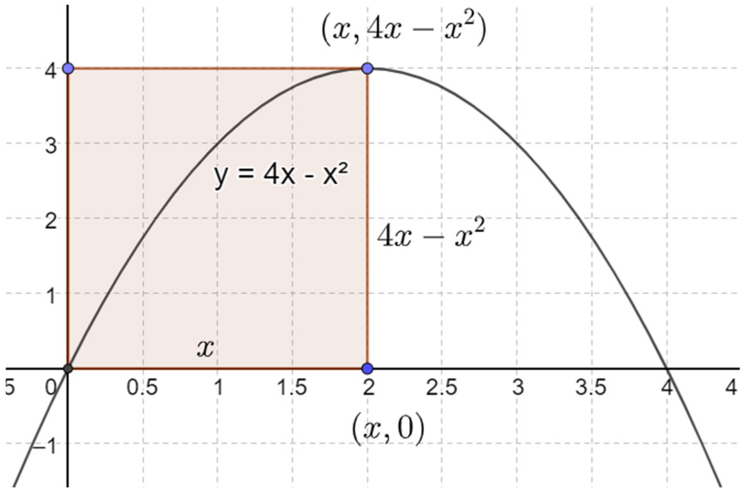
c) 2,50 €/kpl, tulos 848,75 €

8.

Suorakulmion kannan pituus on x ja korkeus saadaan paraabelin lausekkeesta $4x - x^2$.

Suorakulmion pinta-ala on siis $A(x) = x(4x - x^2) = -x^3 + 4x^2$, kun $0 \leq x \leq 4$.

Tutkitaan pinta-alafunktiota A suljetulla välillä $[0, 4]$. Funktion suurin arvo löytyy välin päätepisteistä tai välille kuuluvista derivaatan nollakohdista.



Derivoidaan funktio ja lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -3x^2 + 8x &= 0 \\ x &= 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Lasketaan funktion A arvot, kun $x = 0, x = 4$ ja $x = \frac{8}{3}$.

$A(0) = 0$
$A(4) = 0$
$A\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{256}{27}$

Pinta-alan suurin arvo on siis $\frac{256}{27}$.

Vastaus $\frac{256}{27}$