Binomi 8 – Luku 11 – Tehtävien malliratkaisut

11.1

a)

Kulkukaavion perusteella funktion on kasvava, kun $x < -1$, ja vähenevä, kun $x > -1$.

Funktio saa siis suurimman arvon kohdassa $x = -1$, mutta funktiolla ei ole pienintä arvoa.

b)

Funktio on rajattu välille $-5 \leq x \leq 2$.

Kulkukaavion perusteella funktion on kasvava, kun $x < -1$, ja vähenevä, kun $x > -1$.

Funktio saa siis suurimman arvon kohdassa $x = -1$ ja pienimmän arvon jommassakummassa välin päätepisteessä $x = -5$ tai $x = 2$.

c)

Funktio on laskeva kaikilla muuttujan $x$arvoilla, joten funktiolla ei ole suurinta eikä pienintä arvoa.

d)

Funktio on rajattu välille $0 \leq x \leq 7$.

Koska funktion laskeva koko rajatulla välillä, se saa suurimman arvonsa,
kun $x = 0$, ja pienimmän arvonsa, kun $x = 7$.

Vastaus **a)** suurin arvo on, pienintä arvoa ei ole

b) suurin ja pienin arvo on

c) ei ole suurinta eikä pienintä arvoa

d) suurin ja pienin arvo on

11.2

a)

Suljetulla välillä $[-2, 1]$ funktio saa pienimmän arvonsa -2 kohdassa $x = 0$.

b)

Suljetulla välillä $[-4, 5]$ funktion suurin arvo on 6 kohdassa $x = 5$.

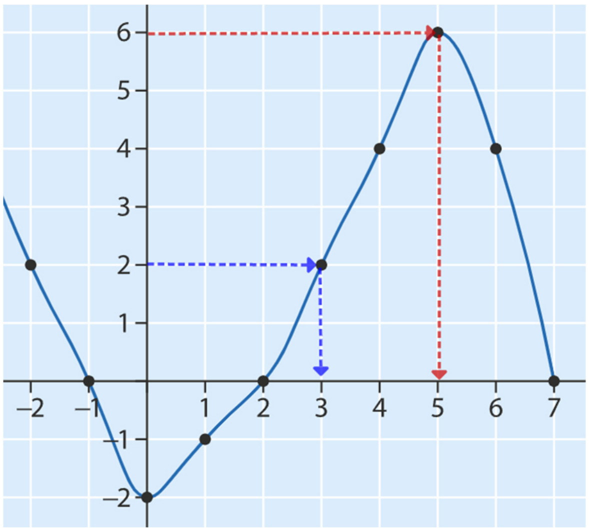
c)

Funktio on kasvava välillä $[3, 5]$.

Koska $f(3) = 2$ ja $f(5) = 6$ niin kyseisellä välillä pienin arvo on 2 ja suurin 6.

Suljetun välin oikeanpuolimmaista päätepistettä voidaan kasvattaa niin pitkälle, että funktio saa välin päätepisteessä arvon 2.

Siis esimerkiksi väli $[3, 6]$ käy myös.



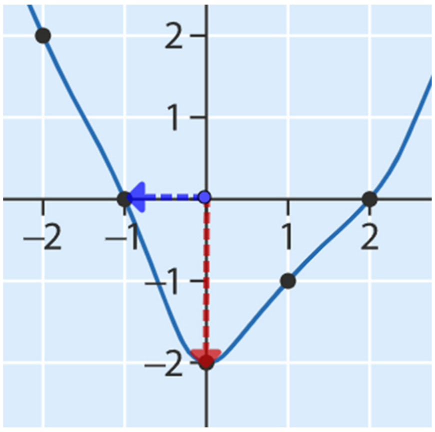
d)

Funktio on vähenevä välillä $[-1, 0]$.

Koska $f(-1) = 0$ ja $f(0) = -2$, niin kyseisellä välillä pienin arvo on -2 ja suurin 0.

Suljetun välin oikeanpuolimmaista päätepistettä voidaan kasvattaa niin pitkälle, että funktio saa välin päätepisteessä arvon 0.

Siis esimerkiksi välit $[-1, 1]$ ja $[-1, 2]$ käyvät myös.



Vastaus **a)** Pienin arvo -2 kohdassa $x = 0$ **c)** esimerkiksi $[3, 5]$

b) Suurin arvo 6 kohdassa $x = 5$ **d)** esimerkiksi $[-1, 0]$

11.3

Laaditaan funktion kulkukaavio. Kulkukaavion laatimista varten määritetään funktion derivaatta.

$f'(x) = 2x - 8$

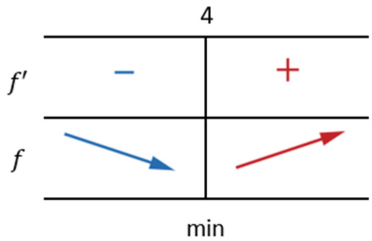
Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x - 8 &= 0 \\ 2x &= 8 \quad \| : 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Tutkitaan derivaatan merkkiä. Valitaan testikohdat derivaatan nollakohdan $x = 4$ eri puolilta.

$f'(0) = 2 \cdot 0 - 8 = -8 \ \ (< 0)$

$f'(5) = 2 \cdot 5 - 8 = 2 \ \ (> 0)$



Kulkukaavion perusteella funktiolla on kohdassa $x = 4$ minimiarvo.
Tämä minimiarvo on myös funktion pienin arvo.

$f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 - 3 = -19$

Funktion arvo lasketaan sijoittamalla kohta funktion lausekkeeseen, EI derivaattaan.

Funktion pienin arvo on -19.

Kulkukaavion perusteella funktiolla ei ole suurinta arvoa.

Vastaus Pienin arvo -19, suurinta arvoa ei ole

11.4

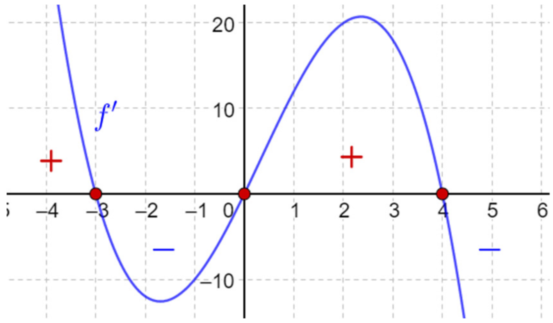
Laaditaan funktion kulkukaavio derivaatan merkkikaavion perusteella.

Kuvan perusteella derivaatan nollakohdat ovat $x = -3$, $x = 0$ ja $x = 4$.

Päätellään kuvaajan avulla lisäksi derivaatan merkki.

- Derivaatan arvot ovat positiivisia, kun derivaattafunktion kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella.

- Derivaatan arvot ovat negatiivisia, kun derivaattafunktion kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella.



Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.

		-3		0		4	
f'	+		−		+		−
f	↗		↘		↗		↘
		max		min		max	

Kulkukaavion perusteella funktio saa suurimman arvonsa jommassakummassa maksimikohdassa $x \approx -3$ tai $x \approx 4$.

Kulkukaavion perusteella minimi ei voi olla funktion pienin arvo, koska funktio on vähenevä, kun $x > 4$. Kulkukaavion perusteella funktiolla ei ole pienintä arvoa.

Derivaatan kuvaajan avulla ei pystytä määrittämään itse ääriarvoja.

Vastaus Funktiolla on suurin arvo, mutta ei pienintä arvoa.

11.5

a)

Funktio on kasvava funktio, jota tarkastellaan puoliavoimella välillä $x > 3$.
Kulkukaavion perusteella funktiolla on pienin arvo kohdassa $x = 3$, mutta ei suurinta arvoa.

b)

Funktio on rajattu välille $-2 \leq x \leq 5$. Kulkukaavion perusteella funktio saa pienimmän arvonsa minimikohdassa $x = 0$. Suurimman arvonsa funktio saa jommassakummassa välin päätepisteessä $x = -2$ tai $x = 5$.

Funktiolla on siis sekä suurin että pienin arvo.

c)

Koska funktiota tarkastellaan suljetulla välillä, se saa pienimmän arvonsa joko minimissä $x = 2$ tai $x = 10$ ja suurimman arvonsa jommassakummassa maksimissa $x = -4$ tai $x = 6$.

Funktiolla on siis sekä suurin että pienin arvo.

d)

Funktiolla on minimi kohdassa $x = -3$ ja terassikohta $x = 0$.

Kulkukaavion perusteella funktiolla on pienin arvo kohdassa $x = 3$, mutta ei suurinta arvoa.

Vastaus **a)** pienin on, suurinta ei

b) suurin ja pienin arvo on

c) suurin ja pienin arvo on

d) pienin on, suurinta ei

11.6

a)

Kuvassa on funktion g kuvaajaa, joten funktion arvoja voidaan selvittää kuvaajan avulla.

Funktiota tarkastellaan suljetulla välillä $1 \leq x \leq 4$, joten sen suurin ja pienin arvo löytyvät välin päätepisteistä tai derivaatan nollakohdasta.

Tarkasteluvälillä oleva derivaatan nollakohta on $x \approx 2$.

Funktion kuvaajalle piirretty tangentti on vaakasuora.

Määritetään funktion arvot näissä kohdissa.

$f(1) \approx 3$
$f(2) \approx 4$
$f(4) \approx 0$

Funktion suurin arvo on siis 4 ja pienin arvo 0.

b)

Kun funktiota tarkastellaan välillä $x \geq 3$, niin kuvaajan perusteella välille ei osa yhtään derivaatan nollakohtaa. Koska kuvaaja on laskeva koko välillä, niin funktio saa suurimman arvonsa välin päätepisteessä $x = 3$.

Suurin arvo on siis $g(3) \approx 3$. Pienintä arvoa ei ole.

Vastaus **a)** suurin arvo on 4 ja pienin arvo 0

b) suurin arvo on 3 ja pienintä ei ole

11.7

a)

A sopii. Kuvaajan huippupiste on $(-1, 3)$, joten funktion suurin arvo on 3.

B ei sovi. Funktio saa pienempiä arvoja kuin nolla, koska se kulkee x-akselin alapuolella.

C ei sovi. Suurin arvo on 3.

D sopii. Funktiolla ei ole pienintä arvoa.

E sopii. Suurin arvo 3 on myös paikallinen maksimiarvo.

b)

A sopii. Funktion saa suurimman arvonsa 3, kun $x = -1$.

B sopii. Funktio saa pienimmän arvonsa –1 välin päätekohdassa $x = 1$.

C sopii. Funktion minimiarvo on –2 välin päätekohdassa $x = -2$.

D sopii. Funktion pienin arvo on myös minimiarvo.

E sopii. Funktion suurin arvo on myös maksimiarvo.

Vastaus **a)** A, D ja E

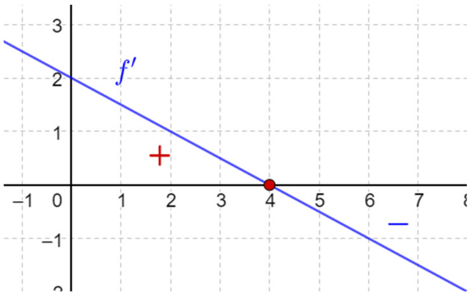
b) A, B, C, D, E

11.8

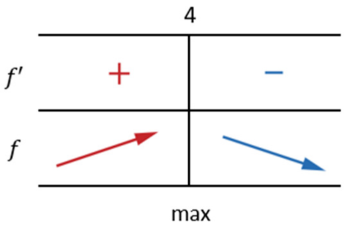
a) Laaditaan funktion kulkukaavio derivaatan merkkikaavion perusteella. Kuvan perusteella derivaatan nollakohta on $x \approx 4$.

Päätellään kuvaajan avulla lisäksi derivaatan merkki.

- Derivaatan arvot ovat positiivisia, kun derivaattafunktion kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella.
- Derivaatan arvot ovat negatiivisia, kun derivaattafunktion kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella.



Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.



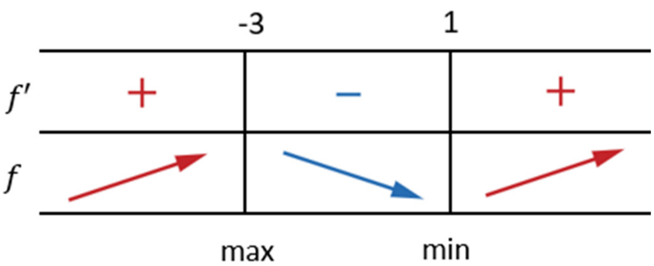
Kulkukaavion perusteella funktio saa suurimman arvonsa maksimikohdassa $x \approx 4$.

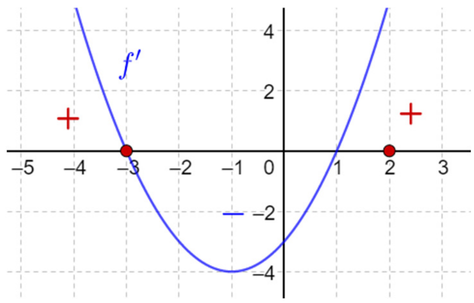
Kulkukaavion perusteella funktiolla ei ole pienintä arvoa.

Derivaatan kuvaajan avulla ei pystytä määrittämään itse ääriarvoja.

b) Kuvaajan perusteella derivaatan nollakohdat ovat $x \approx -3$ ja $x \approx 1$.

Päätellään kuvaajasta derivaatan merkki ja muodostetaan kulkukaavio.





Kulkukaavion perusteella funktio saa suurempia arvoja kuin maksimissa $x = -3$ ja pienempiä arvoja kuin minimissä $x = 1$.

Vastaus **a)** suurin arvo on, ei pienintä arvoa
b) ei suurinta eikä pienintä arvoa

11.9

Määritetään funktion *f* derivaatta.

$f'(x) = 3x^2 - 3 \cdot 2x - 9 + 0 = 3x^2 - 6x - 9$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 6x - 9 &= 0 \quad \| :3 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ tai } x = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Funktiota tarkastellaan suljetulla välillä $-2 \leq x \leq 6$. Suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai välillä olevista derivaatan nollakohdista.

Lasketaan funktion arvot

- derivaatan nollakohdissa
  $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 4 = 9$
  $f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 4 = -23$

- välin päätepisteissä
  $f(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 9 \cdot (-2) + 4 = 2$
  $f(6) = 6^3 - 3 \cdot 6^2 - 9 \cdot 6 + 4 = 58$

Funktion suurin arvo on siis 58 ja pienin arvo on −23.

Vastaus Suurin arvo 58 ja pienin arvo −23

11.10

a)

Määritetään funktion f derivaatta.

$f'(x) = 2x - 8$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x - 8 &= 0 \\ 2x &= 8 \quad \| :2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Funktiota tarkastellaan suljetulla välillä $1 \leq x \leq 5$. Suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai välillä olevista derivaatan nollakohdista.

Lasketaan funktion arvot

- derivaatan nollakohdissa
  $f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 18 = 2$

- välin päätepisteissä
  $f(1) = 1^2 - 8 \cdot 1 + 18 = 11$
  $f(5) = 5^2 - 8 \cdot 5 + 18 = 3$

Funktion suurin arvo on siis 11 ja pienin arvo on 2.

b)

Funktiota tarkastellaan suljetulla välillä $-3 \leq x \leq 3$.

Nyt derivaatan nollakohta $x = 4$ ei kuulu tarkasteluvälille.

Välin päätepisteissä arvot ovat

$$f(-3) = (-3)^2 - 8 \cdot (-3) + 18 = 51$$
$$f(3) = 3^2 - 8 \cdot 3 + 18 = 3$$

Funktion suurin arvo on siis 51 ja pienin arvo on 3.

Vastaus **a)** suurin arvo 11 ja pienin arvo 2

b) suurin arvo 51 ja pienin arvo 3

11.11

a) Määritetään funktion f derivaatta.

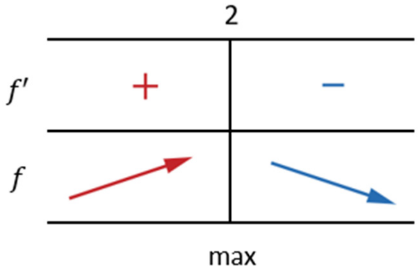
$f'(x) = -2 \cdot 2x + 8 + 0 = -4x + 8$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
-4x + 8 &= 0 \\
-4x &= -8 \quad \| : (-4) \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Tutkitaan derivaatan merkkiä. Valitaan testikohdat derivaatan nollakohdan $x = 2$ eri puolilta.

$f'(0) = -4 \cdot 0 + 8 = 8 \ (> 0)$
$f'(3) = -4 \cdot 3 + 8 = -4 \ (< 0)$



Funktio saa siis suurimman arvonsa maksimikohdassa $x = 2$. Suurin arvo on $f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 1 = 9$.

Kulkukaavion perusteella funktiolla ei ole pienintä arvoa.

b) Funktiota tarkastellaan suljetulla välillä $-1 \leq x \leq 3$. Suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai välillä olevista derivaatan nollakohdista.

Funktion arvo derivaatan nollakohdassa on $f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 1 = 9$.

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä

$f(-1) = -2 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 1 = -9$
$f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 1 = 7$

Funktion suurin arvo on siis 9 ja pienin arvo on -9.

c) Funktiota tarkastellaan suljetulla välillä $-2 \leq x \leq 0$.

Nyt derivaatan nollakohta $x = 2$ ei kuulu tarkasteluvälille.

Välin päätepisteissä arvot ovat

$f(-2) = -2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 1 = -23$
$f(0) = -2 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 + 1 = 1$

Funktion suurin arvo on siis 1 ja pienin arvo on -23.

Vastaus **a)** suurin arvo 9, ei pienintä arvoa
b) suurin arvo 9 ja pienin arvo -9
c) suurin arvo 1 ja pienin arvo -23

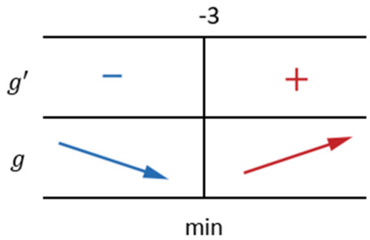
11.12

a) Määritetään funktion g derivaatta: $g'(t) = 2t + 6$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} g'(t) &= 0 \\ 2t + 6 &= 0 \\ 2t &= -6 \quad \| :2 \\ t &= -3 \end{aligned}$$

Tutkitaan derivaatan merkkiä. Valitaan testikohdat derivaatan nollakohdan $t = -3$ eri puolilta.



$g'(-4) = 2 \cdot (-4) + 6 = -2 \ (< 0)$
$g'(0) = 2 \cdot 0 + 6 = 6 \ (> 0)$

Funktio saa siis pienimmän arvonsa minimikohdassa $t = -3$. Pienin arvo on $g(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 4 = -13$.

Kulkukaavion perusteella funktiolla ei ole suurinta arvoa.

b) Funktiota tarkastellaan suljetulla välillä $-6 \leq t \leq 1$. Suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai välillä olevista derivaatan nollakohdista.

Funktion arvo derivaatan nollakohdassa on $g(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 4 = -13$.

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä

$$g(-6) = (-6)^2 + 6 \cdot (-6) - 4 = -4$$
$$g(1) = 1^2 + 6 \cdot 1 - 4 = 3$$

Funktion suurin arvo on siis 3 ja pienin arvo on -13.

c) Funktiota tarkastellaan suljetulla välillä $0 \leq t \leq 2$.

Nyt derivaatan nollakohta $t = -3$ ei kuulu tarkasteluvälille.

Välin päätepisteissä arvot ovat

$$g(0) = 0^2 + 6 \cdot 0 - 4 = -4$$
$$g(2) = 2^2 + 6 \cdot 2 - 4 = 12$$

Funktion suurin arvo on siis 12 ja pienin arvo on -4.

Vastaus **a)** pienin arvo -13, ei suurinta arvoa
b) suurin arvo 3 ja pienin arvo -13
c) suurin arvo 12 ja pienin arvo -4

11.13

a)

B sopii. Funktion derivaatta on $f'(x) = 2$.

E sopii. Funktio on kaikkialla kasvava eli sillä ei ole pienintä eikä suurinta arvoa.

b)

B sopii. Funktion derivaatta on $f'(x) = 2$.

C ja D sopii. Funktio on rajattu suljetulle välille, joten sillä on pienin ja suurin arvo.

c)

A sopii. Funktio saa pienimmän arvonsa huipussa.

D sopii. Funktio saa pienimmän arvonsa minimikohdassa.

d)

A sopii. Funktiolla on pienin arvo kohdassa $x \approx -1{,}5$.

D sopii. Funktio saa pienimmän arvonsa minimikohdassa.

E sopii. Funktiolla on maksimikohta välin päätepisteessä $x = -2$.

Vastaus **a)** B ja E

b) B, C ja D

c) A ja D

d) A, D ja E

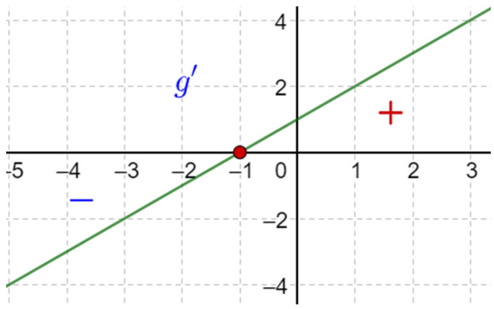
11.14

a)

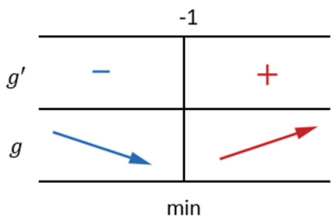
Laaditaan funktion kulkukaavio derivaatan merkkikaavion perusteella.
Kuvan perusteella derivaatan nollakohta on $x \approx -1$.

Päätellään kuvaajan avulla lisäksi derivaatan merkki.

- Derivaatan arvot ovat positiivisia, kun derivaattafunktion kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella.
- Derivaatan arvot ovat negatiivisia, kun derivaattafunktion kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella.



Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.



Kulkukaavion perusteella funktio saa pienimmän arvonsa minimikohdassa $x \approx -1$.

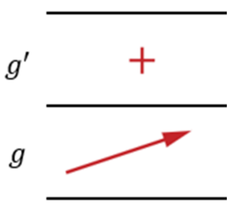
Kulkukaavion perusteella funktiolla ei ole suurinta arvoa.

> Derivaatan kuvaajan avulla ei pystytä määrittämään itse ääriarvoja.

b)

Kuvaajan perusteella funktion g' derivaatalla ei ole nollakohta ja sen kuvaaja kulkee kaikkialla x-akselin yläpuolella.

Derivaatta saa siis ainoastaan positiivisia arvoja. Muodostetaan kulkukaavio.



Kulkukaavion perusteella funktio on kaikkialla kasvava, eikä sillä ole suurinta tai pienintä arvoa.

Vastaus **a)** pienin arvo on, ei suurinta arvoa **b)** ei suurinta eikä pienintä arvoa

11.15

a) Määritetään funktion f derivaatta.

$f'(x) = -2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x + 72 + 0 = -6x^2 + 6x + 72$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
-6x^2 + 6x + 72 &= 0 \quad \| : 6 \\
-x^2 + x + 12 &= 0
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{-2} = \frac{-1 \pm 7}{-2}$$

$$x = \frac{-1-7}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4 \ \text{ tai } \ x = \frac{-1+7}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$$

$ax^2 + bx + c = 0$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Funktiota tarkastellaan suljetulla välillä $-6 \leq x \leq 6$. Suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai välillä olevista derivaatan nollakohdista.

Lasketaan funktion arvot

- derivaatan nollakohdissa
  $f(-3) = -2 \cdot (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 + 72 \cdot (-3) + 3 = -132$
  $f(4) = -2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 72 \cdot 4 + 3 = 211$

- välin päätepisteissä
  $f(-6) = -2 \cdot (-6)^3 + 3 \cdot (-6)^2 + 72 \cdot (-6) + 3 = 111$
  $f(6) = -2 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 72 \cdot 6 + 3 = 111$

Funktion suurin arvo on siis 211 ja pienin arvo on −132.

b) Funktiota tarkastellaan suljetulla välillä $0 \leq x \leq 5$.
Välille kuuluu derivaatan nollakohdista $x = 4$.

Funktion arvo derivaatan nollakohdassa on $f(4) = -2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 72 \cdot 4 + 3 = 211$.

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä

$f(0) = -2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 72 \cdot 0 + 3 = 3$
$f(5) = -2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 72 \cdot 5 + 3 = 188$

Funktion suurin arvo on siis 211 ja pienin arvo on 3.

Vastaus **a)** Suurin arvo 211 ja pienin arvo −132
b) Suurin arvo 211 ja pienin arvo 3

11.16

a) Määritetään funktion f derivaatta.

$f'(x) = -0{,}1 \cdot 2x + 0{,}2 + 0 = -0{,}2x + 0{,}2$

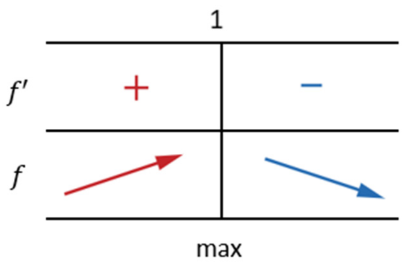
Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -0{,}2x + 0{,}2 &= 0 \\ -0{,}2x &= -0{,}2 \quad \| : (-0{,}2) \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Tutkitaan derivaatan merkkiä. Valitaan testikohdat derivaatan nollakohdan $x = 1$ eri puolilta.

$f'(0) = -0{,}2 \cdot 0 + 0{,}2 = 0{,}2 \ (> 0)$

$f'(2) = -0{,}2 \cdot 2 + 0{,}2 = -0{,}2 \ (< 0)$



Funktiolla on siis maksimi kohdassa $x = 1$.

$f(1) = -0{,}1 \cdot 1^2 + 0{,}2 \cdot 1 + 2 = 2{,}1$

Funktion ääriarvo on 2,1 (maksimi).

b) Kulkukaavion perusteella funktion maksimi 2,1 on myös funktion suurin arvo. Funktiolla ei ole pienintä arvoa.

c) Funktiota tarkastellaan suljetulla välillä $-1 \leq x \leq 3$.

Suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai välillä olevista derivaatan nollakohdista.

Derivaatan nollakohdassa funktion arvo on $f(1) = -0{,}1 \cdot 1^2 + 0{,}2 \cdot 1 + 2 = 2{,}1$.

Välin päätepisteissä arvot ovat

$$\begin{aligned} &f(-1) = -0{,}1 \cdot (-1)^2 + 0{,}2 \cdot (-1) + 2 = 1{,}7 \\ &f(3) = -0{,}1 \cdot 3^2 + 0{,}2 \cdot 3 + 2 = 1{,}7 \end{aligned}$$

Funktion suurin arvo on siis 2,1 ja pienin arvo on 1,7.

Vastaus **a)** maksimiarvo 2,1
b) suurin arvo 2,1 ja ei pienintä arvoa
c) suurin arvo 2,1 ja pienin arvo 1,7

11.17

a)

Määritetään funktion h lauseke ja derivaatta.

$h'(x) = f(x) - g(x) = x^3 - (x^2 + 2) = x^3 - x^2 - 2$
$h'(x) = 3x^2 - 2x$

Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= 0 \\
3x^2 - 2x &= 0 \\
x(3x - 2) &= 0 \\
x = 0 \quad \text{tai} \quad 3x - 2 &= 0 \\
3x &= 2 \\
x &= \tfrac{2}{3}
\end{aligned}
$$

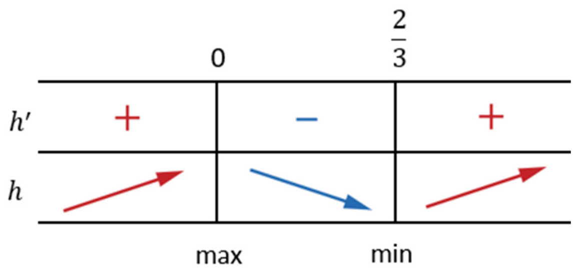
Tulon nollasääntö

Lasketaan derivaatan merkkitestipisteiden avulla.

$h'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 5 \ (> 0)$

$h'(0{,}5) = 3 \cdot (0{,}5)^2 - 2 \cdot 0{,}5 = -0{,}625 \ (< 0)$

$h'(1) = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 \ (> 0)$



Funktion maksimikohta on $x = 0$ ja minimikohta $x = \frac{2}{3}$.

b)

Funktiota tarkastellaan suljetulla välillä $-1 \leq x \leq 1$. Suurin ja pienin arvo löytyvät joko välin päätepisteistä tai välillä olevista derivaatan nollakohdista.

Lasketaan funktion arvot
- derivaatan nollakohdissa
  $h(0) = 0^3 - 0^2 - 2 = -2$
  $h\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} - 2 = \frac{8}{27} - \frac{12}{27} - \frac{54}{27} = -\frac{58}{27}$
- välin päätepisteissä
  $h(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 2 = -4$
  $h(1) = 1^3 - 1^2 - 2 = -2$

Funktion suurin arvo on siis -2 ja pienin arvo on -4.

Vastaus **a)** maksimikohta $x = 0$ ja minimikohta $x = \frac{2}{3}$
b) suurin arvo -2 ja pienin arvo -4

11.18

a)

Määritetään funktion f derivaatta.

$$f'(x) = -2x - 10$$

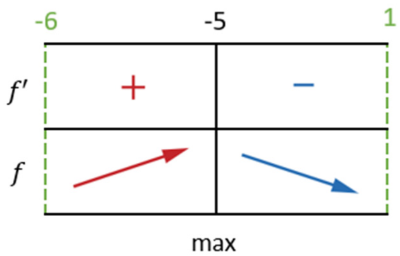
Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -2x - 10 &= 0 \\ -2x &= 10 \quad \| : (-2) \\ x &= -5 \end{aligned}$$

Funktiota ei tarkastella suljetulla välillä, joten suurinta ja pienintä arvoa on tutkittava kulkukaavion avulla. Rajataan tarkastelu välille $-6 < x < 1$.

$f'(-6) = -2 \cdot (-6) - 10 = 2 \; (> 0)$

$f'(0) = -2 \cdot 0 - 10 = -10 \; (< 0)$



Kulkukaavion perusteella funktiolla on kohdassa $x = -5$ maksimiarvo. Tämä arvo on myös funktion suurin arvo.

$f(-5) = -(-5)^2 - 10 \cdot (-5) + 3 = 28$

Funktion suurin arvo on 28.
Funktiolla ei ole pienintä arvoa.

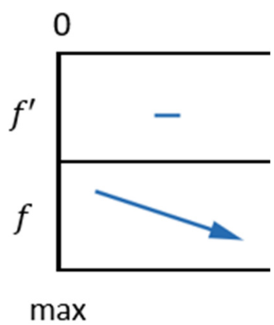
Välin päätepisteet −6 ja 1 eivät kuulu mukaan tarkasteluun, joten funktion arvoja ei voi laskea välin päätepisteissä.

b)

Tarkastellaan kulkukaavion avulla funktion kulkua, kun $x \geq 0$. Derivaatan nollakohta $x = -5$ ei kuulu tarkasteltavalle välille.

Derivaatan merkki on a-kohdan perusteella negatiivinen, kun $x > 5$.

Välin päätepiste $x = 0$ kuuluu tarkasteltavalle välille. Kulkukaavion perusteella funktio saa tässä kohdassa suurimman arvonsa.



$f(0) = -0^2 - 10 \cdot 0 + 3 = 3$

Funktion suurin arvo on 3. Funktiolla ei ole pienintä arvoa.

Vastaus **a)** Suurin arvo 28, pienintä arvoa ei ole

b) Suurin arvo 3, pienintä arvoa ei ole

11.19

a) Määritetään funktion f derivaatta.

$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 21 \cdot 2x - 0 = 6x^2 - 42x$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

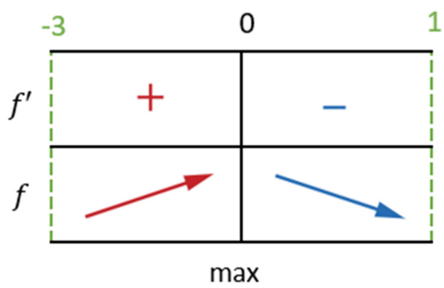
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 6x^2 - 42x &= 0 \\ 6x(x-7) &= 0 \\ 6x &= 0 \quad \text{tai} \quad x - 7 = 0 \\ x &= 0 \qquad\qquad\;\; x = 7 \end{aligned}$$

Tulon nollasääntö

Funktiota ei tarkastella suljetulla välillä, joten suurinta ja pienintä arvoa on tutkittava kulkukaavion avulla. Rajataan tarkastelu välille $-3 < x < 1$. Derivaatan nollakohdista vain $x = 0$ kuuluu välille.

$f'(-2) = 6 \cdot (-2)^2 - 42 \cdot (-2) = 108 \; (> 0)$

$f'(2) = 6 \cdot 2^2 - 42 \cdot 2 = -60 \; (< 0)$



Kulkukaavion perusteella funktiolla on kohdassa $x = 0$ maksimiarvo. Tämä arvo on myös funktion suurin arvo.

$f(0) = 2 \cdot 0^3 - 21 \cdot 0^2 - 6 = -6$

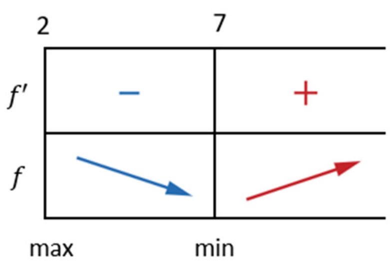
Funktion suurin arvo on -6.
Funktiolla ei ole pienintä arvoa.

Välin päätepisteet -3 ja 1 eivät kuulu mukaan tarkasteluun, joten funktion arvoja ei voi laskea välin päätepisteissä.

b) Tarkastellaan kulkukaavion avulla funktion kulkua, kun $x \geq 2$. Derivaatan nollakohta $x = 0$ ei kuuluu tarkasteltavalle välille, mutta $x = 7$ kuuluu. Muodostetaan kulkukaavio.

$f'(6) = 6 \cdot 6^2 - 42 \cdot 6 = -36 \; (< 0)$

$f'(8) = 6 \cdot 8^2 - 42 \cdot 8 = 48 \; (> 0)$



Kulkukaavion perusteella funktio saa pienimmän arvonsa minimissä $x = 7$.

$f(7) = 2 \cdot 7^3 - 21 \cdot 7^2 - 6 = -349$

Funktion pienin arvo on -349.

Funktiolla on maksimi päätepisteessä $x = 2$. Se ei kuitenkaan ole suurin arvo, sillä funktio on kasvava, kun $x > 7$. Funktiolla ei ole suurinta arvoa.

Vastaus **a)** Suurin arvo -6, pienintä arvoa ei ole **b)** Pienin arvo -349, suurinta arvoa ei ole

11.20

Määritetään funktion f derivaatta.

$f'(x) = -3x^2 + 3$

Vakion derivaatta $D(b) = 0$

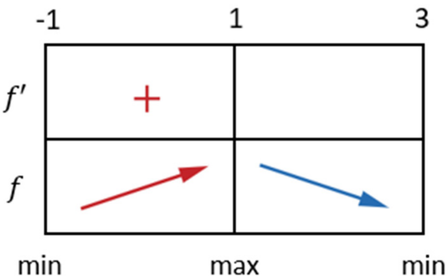
Lasketaan derivaatan nollakohdat.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
-3x^2 + 3 &= 0 \\
-3x^2 &= -3 \quad \| : (-3) \\
x^2 &= 1 \quad \| \sqrt{} \\
x &= \pm 1
\end{aligned}
$$

Muodostetaan funktion kulkukaavio välillä $-1 \leq x \leq 3$.

$f'(0) = -3 \cdot 0^2 + 3 = 3 \ (> 0)$

$f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 3 = -9 \ (< 0)$



Funktio saa kulkukaavion perusteella suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa $x = 1$.
Muodostetaan yhtälö $f(1) = 7$ ja ratkaistaan b.

$$
\begin{aligned}
-1^3 + 3 \cdot 1 + b &= 7 \\
-1 + 3 + b &= 7 \\
b &= 5
\end{aligned}
$$

Funktio on siis $f(x) = -x^3 + 3x + 5$.
Funktio saa pienimmän arvonsa jommassakummassa välin päätepisteessä.

$f(-1) = -(-1)^3 + 3 \cdot (-1) + 5 = 3$
$f(3) = -3^3 + 3 \cdot 3 + 5 = -13$

Pienin arvo on siis -13.

Vastaus $b = 5$, pienin arvo on -13