

01 Erilaisia kolmioita

Tavoitteet

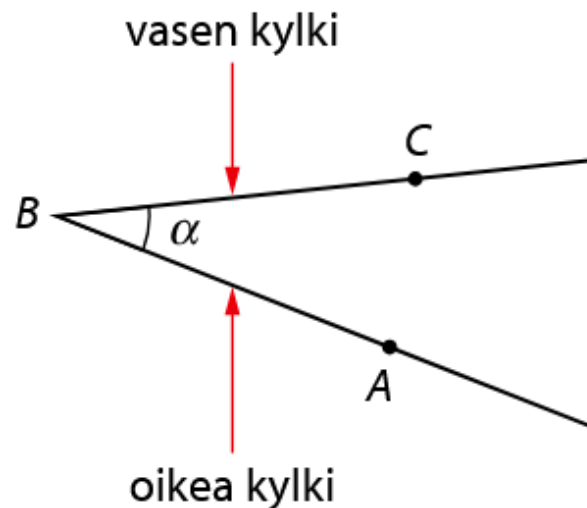
- Tietää kulman nimeämisen periaatteet
- Tuntee kulmien luokittelu
- Osata kolmien kulmien summa 180° ja sen käyttö laskuissa
- Osata laskea kolmion pinta-ala
- Tuntee yleisimmät kolmiotyypit: suorakulmainen kolmio, tasakylkinen kolmio ja tasasivuinen kolmio sekä hyödyntää niiden ominaisuuksia laskuissa
- Osata käyttää Pythagoraan lausetta kolmion sivujen ratkaisemisessa sekä kolmion suorakulmaisuuuden todistamisessa.

Kulma

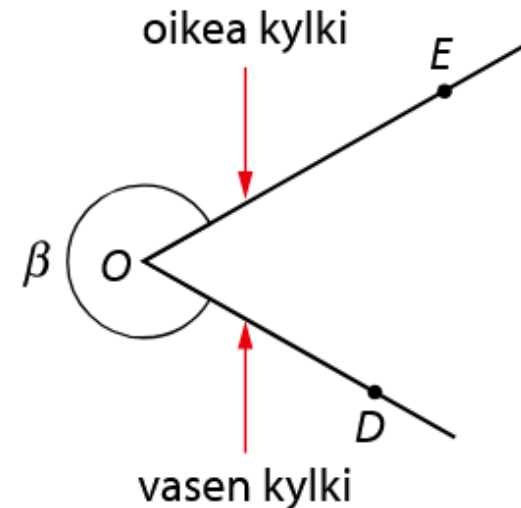
- Kulma on kahden puolisuoran rajaama tasoalue.
- Kulmaa voidaan merkitä seuraavilla tavoilla:
 - Kreikkalaisilla kirjaimilla α , β , γ , δ jne.
 - Kulkien ja kulman kärkipisteen avulla esim. kulma ABC
 - Kolmiossa kärkipisteen avulla

Kulman nimeäminen
pisteiden avulla:

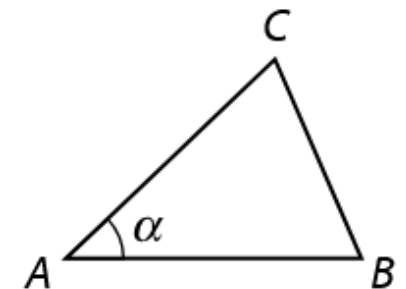
1. oikean kyljen piste
2. kulman kärkipiste
3. vasemman kyljen piste



kulma ABC



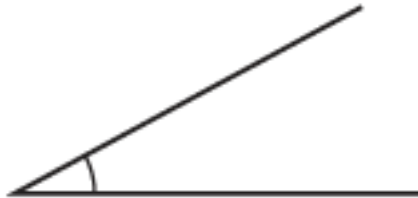
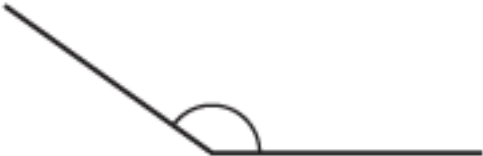
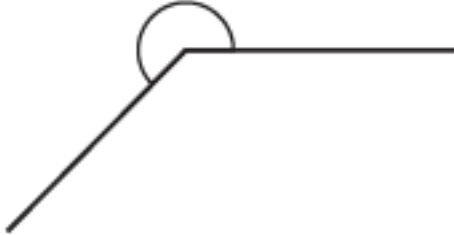
kulma EOD



kolmion kulma A

$$\sphericalangle A = \sphericalangle BAC = \alpha$$

Erilaisia kulmia

Terävä kulma Kulman suuruus on alle 90°.	
Suora kulma - Kulman suuruus on 90°. - Kulmaa merkitään omalla merkinnällä.	
Tylppä kulma Kulman suuruus on yli 90° mutta alle 180°.	
Oikokulma Kulman suuruus on 180°.	
Kupera kulma Kulman suuruus on yli 180° mutta alle 360°.	
Täysi kulma Kulman suuruus on 360°.	 Adobe Acrobat Reader DC

Kolmio

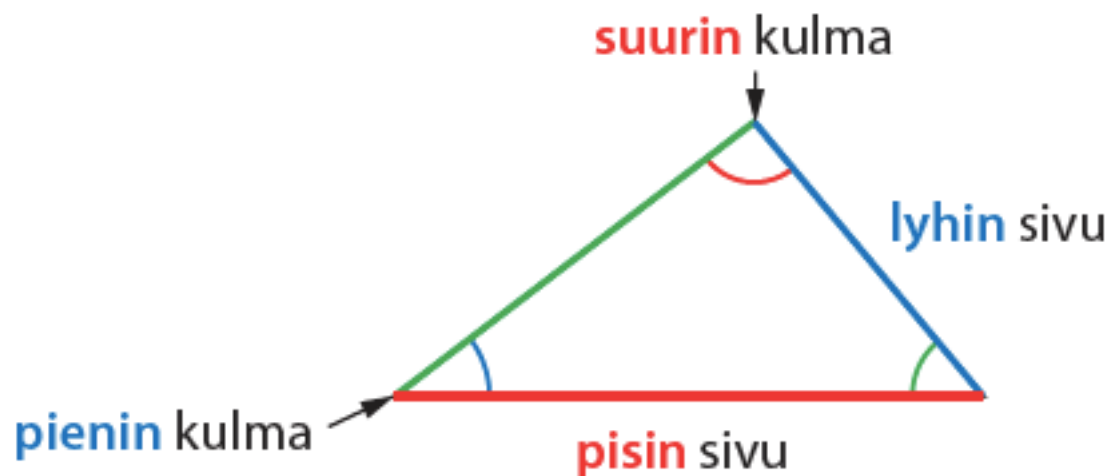
Kolmio on monikulmio, jossa on kolme kulmaa.

- Kolmion **kulmien summa** on 180° .



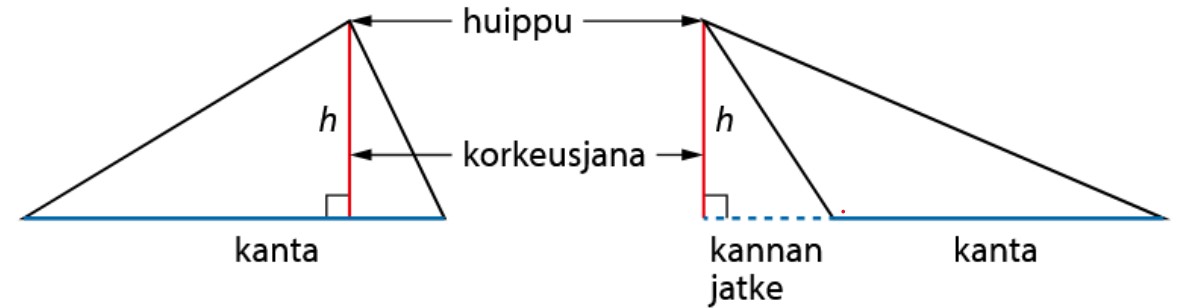
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

- Kolmion kulmat ja sivut sijaitsevat toisiinsa nähden tietyssä järjestyksessä.



Kolmio on monikulmio, jossa on kolme kulmaa

- Kolmion kulmien summa on 180°
- Kolmion korkeusjana h , on kolmion huipusta kantaa vastaan piirretty kohtisuora jana.
- Kolmion pinta-ala lasketaan kannan ja korkeuden avulla.



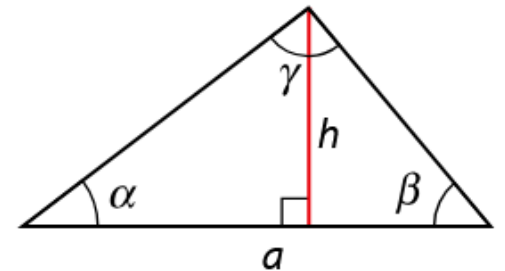
Kolmio

Kolmion kulmien summa

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

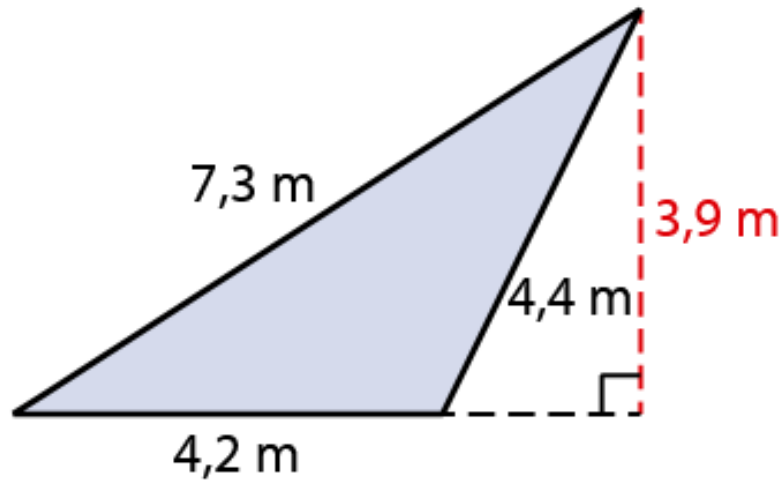
Kolmion pinta-ala

$$A = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2} = \frac{1}{2}ah$$



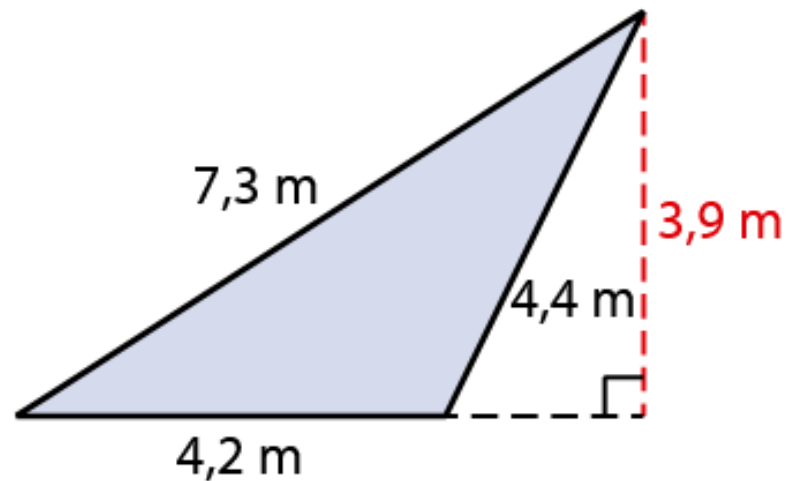
Esimerkki 2, kolmion pinta-ala

Laske monikulmion pinta-ala.



Esimerkki 2, kolmion pinta-ala

Laske monikulmion pinta-ala.



$$a=4,2 \text{ m}$$

$$h=3,9 \text{ m}$$

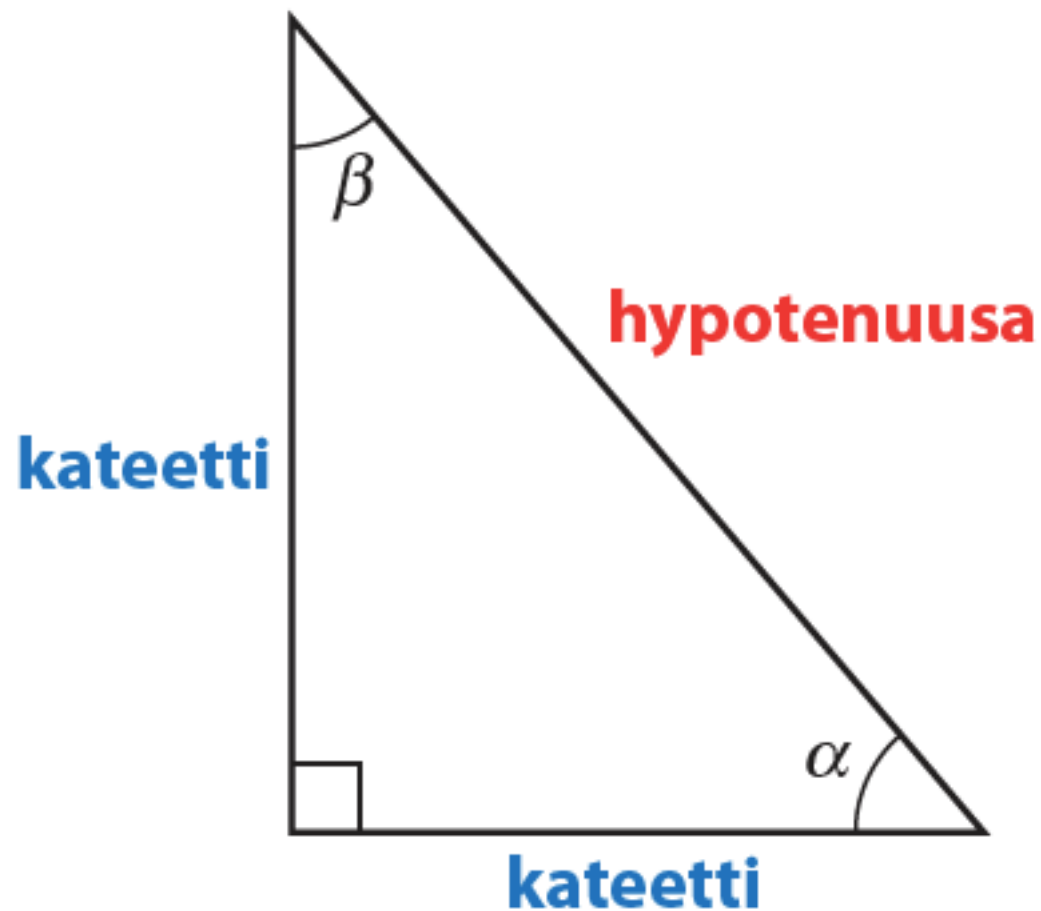
Kolmion pinta-alan kaava:

$$A = \frac{1}{2}ah$$

Sijoitetaan:

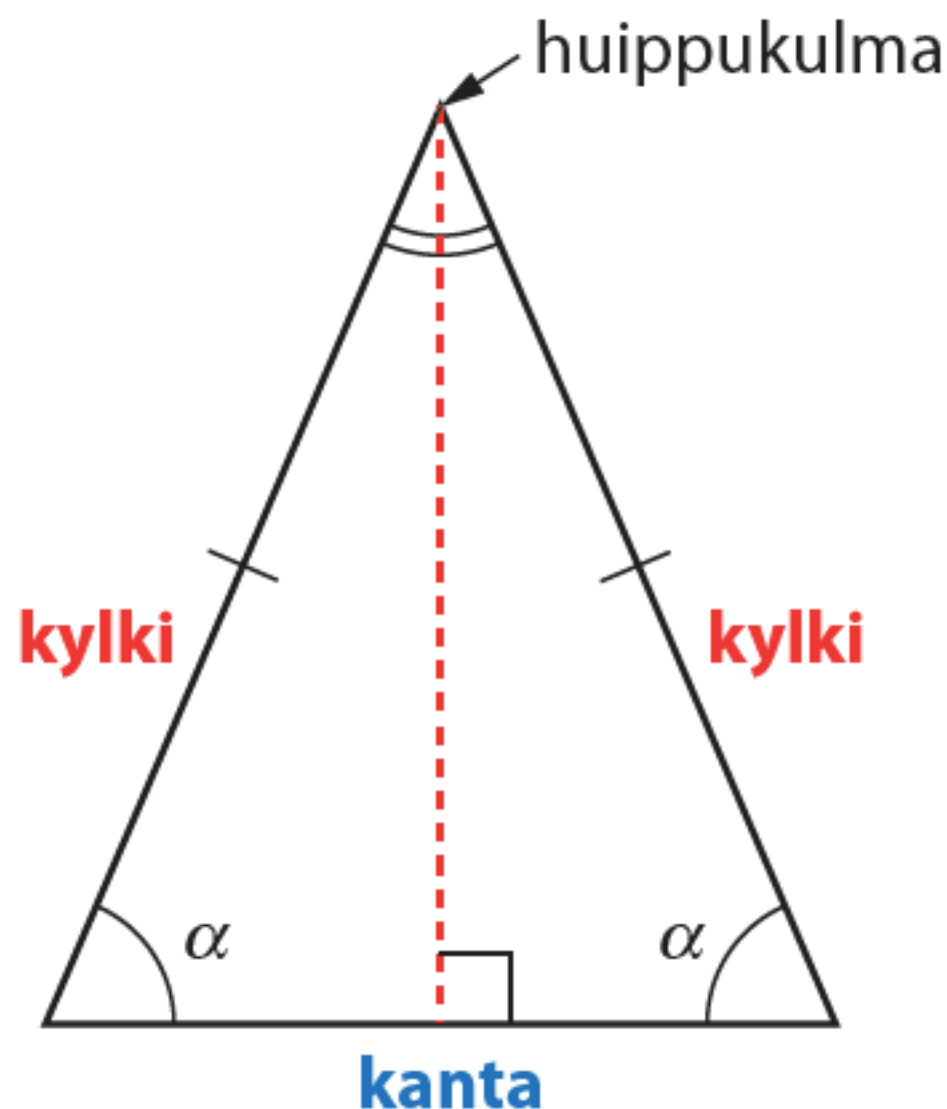
$$A = \frac{4,2m \cdot 3,9m}{2} = 8,19 \text{ m}^2 \approx 8,2 \text{ m}^2$$

Suorakulmainen kolmio



- Kolmiossa on yksi 90 asteen kulma.
- Kolmion kaksi muuta kulmaa (α ja β) ovat teräviä.
- Pisintä sivua kutsutaan **hypotenuusaksi** ja kaksi muuta sivua ovat **kateetteja**.
- Kateetit ovat suoran kulman kylkiä.

Tasakylkinen kolmio

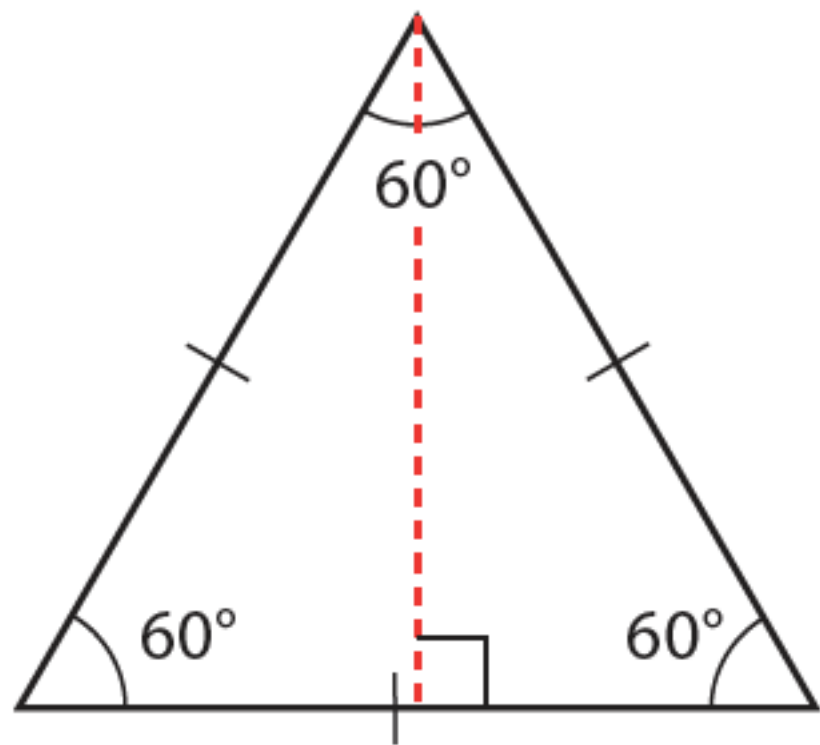


- Kolmiossa on kaksi yhtä pitkää sivua.

Keskenään yhtä pitkät sivut voidaan merkitä kuvaan pienillä poikkiviivoilla.

- Yhtä pitkät sivut ovat kolmion **kylkiä** ja kolmas sivu on kolmion **kanta**.
- Kantakulmat** (α) ovat yhtä suuret.
- Huipusta** piirretty korkeusjana puolittaa sekä **huippukulman** että kannan. Tällöin syntyy kaksi keskenään samanlaista suorakulmaista kolmiota.

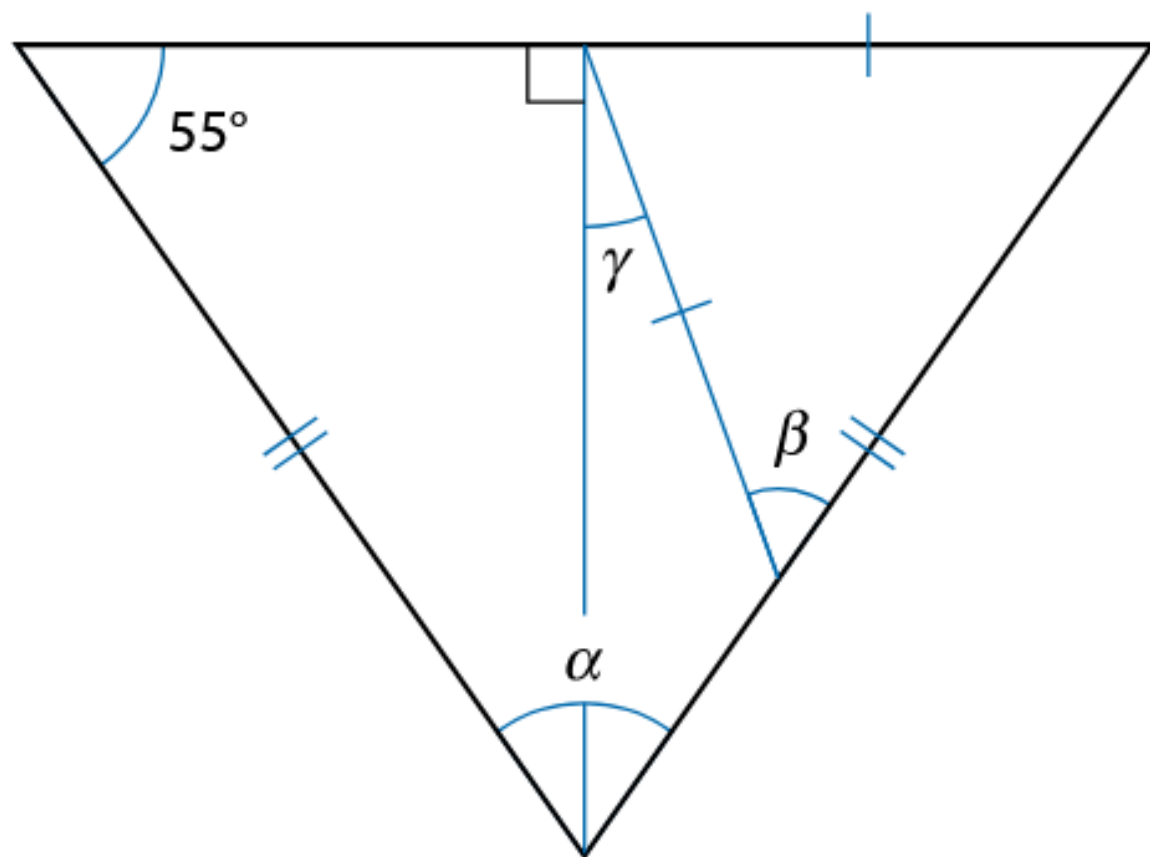
Tasasivuinen kolmio



- Kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.
- Kolmion jokainen kulma on 60° .
- Korkeusjana puolittaa sekä huippukulman että kannan.

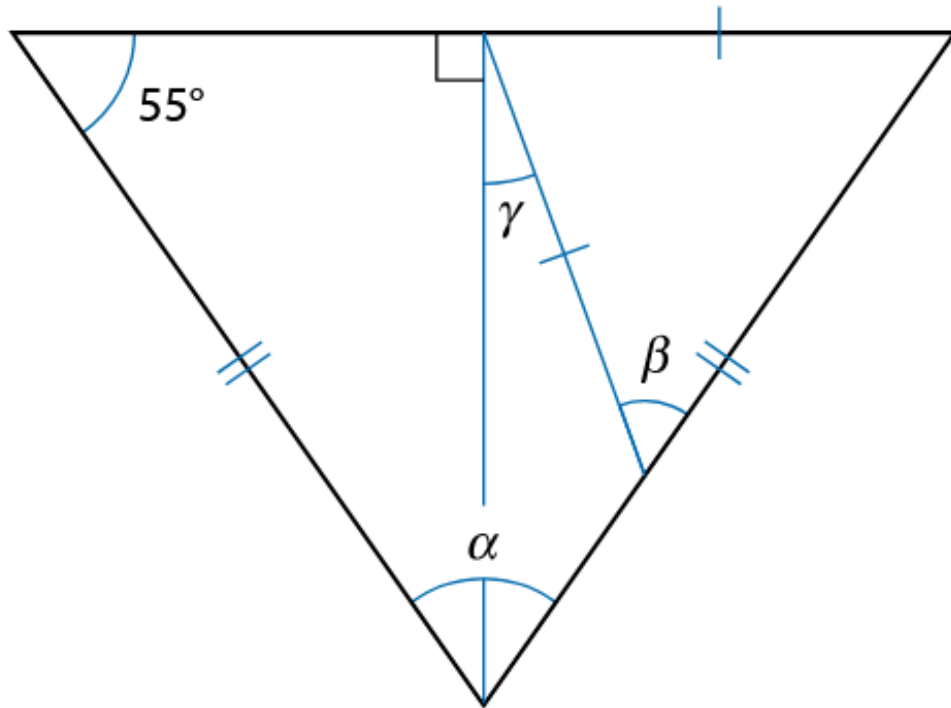
Esimerkki 4, kulmien suuruudet

Ratkaise kulmien α , β ja γ suuruudet.



Esimerkki 4 teht. 1.13. , kulmien suuruudet

Ratkaise kulmien α , β ja γ suuruudet.



Tasakylkisen kolmio kantakulmat ovat yhtä suuret eli 55°

Kulma α eli huippukulma

$$\alpha = 180^\circ - 55^\circ - 55^\circ = 70^\circ$$

Myös β kulma on tasakylkisen kolmion toinen kantakulma

$$\beta = 55^\circ$$

Kulma γ on osa 90° kulmaa, joka muodostuu kolmion korkeusjanalle.

$$\text{Kulman } \gamma \text{ viereinen kulma: } 180^\circ - 55^\circ - 55^\circ = 70^\circ$$

$$\gamma = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

Vastaus:

$$\alpha = 70^\circ$$

$$\beta = 55^\circ$$

$$\gamma = 20^\circ$$

2) Pythagoraan lause

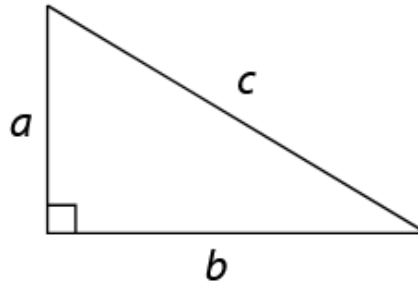
Pythagoraan lause

Pythagoraan lauseen avulla voidaan selvittää **suorakulmaisen kolmion** sivun pituus kun kahden muun sivun pituus tiedetään.

Pythagoraan lause

$$a^2 + b^2 = c^2$$

- a ja b ovat kateettien pituudet
- c on hypotenuusan pituus



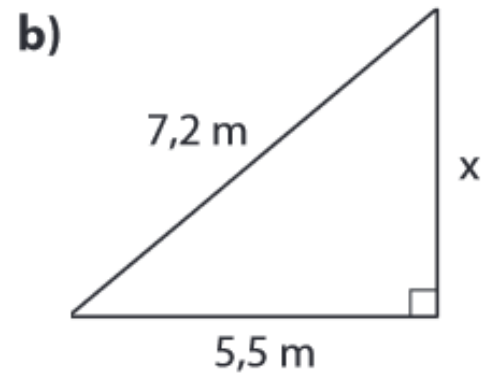
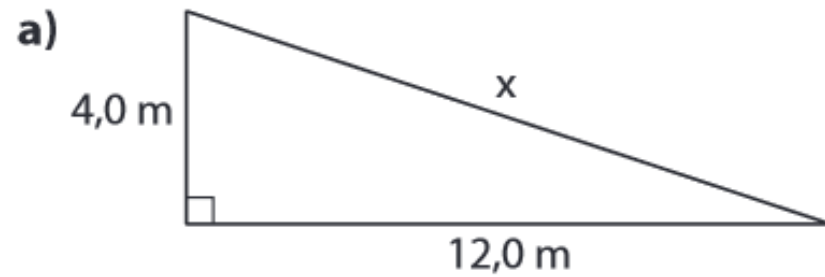
Pythagoraan lauseen käänteislause

Jos kolmion sivuille on voimassa ehto $a^2 + b^2 = c^2$, jossa a ja b ovat kolmion kahden lyhimmän sivun pituudet ja c on pisimmän sivun pituus, niin kolmio on suorakulmainen.

Esimerkki 5, Pythagoraan lause

$$a^2 + b^2 = c^2$$

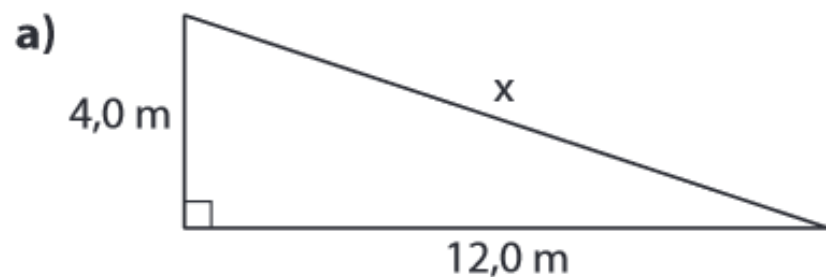
- Laske sivun x pituus



Esimerkki 5, Pythagoraan lause

$$a^2 + b^2 = c^2$$

- Laske sivun x pituus



a) x= hypotenuusa

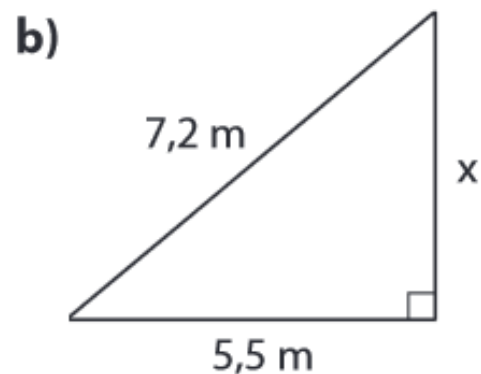
$$4,0^2 + 12,0^2 = x^2$$

$$16 + 144 = x^2$$

$$160 = x^2 \parallel \sqrt{}$$

$$x = \sqrt{160} = \pm 12,649110$$

Vast. 12,6 m



b) x = toinen kateetti

$$5,5^2 + x^2 = 7,2^2$$

$$7,2^2 - 5,5^2 = x^2$$

$$x = \sqrt{7,2^2 - 5,5^2} = 4,64650 \approx 4,6$$

Vast. 4,6 m

Geogebra

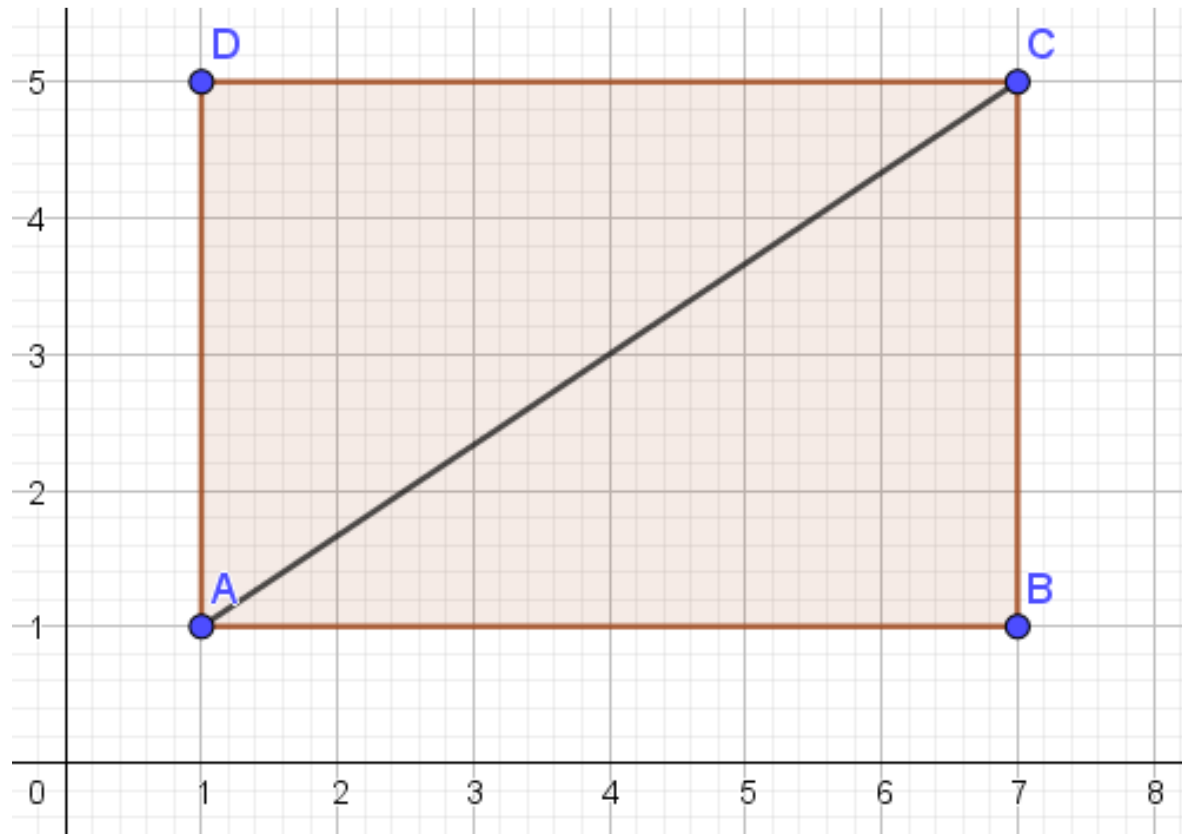
$$4^2 + 12^2 = x^2$$

RatkaiseNumeerisesti:

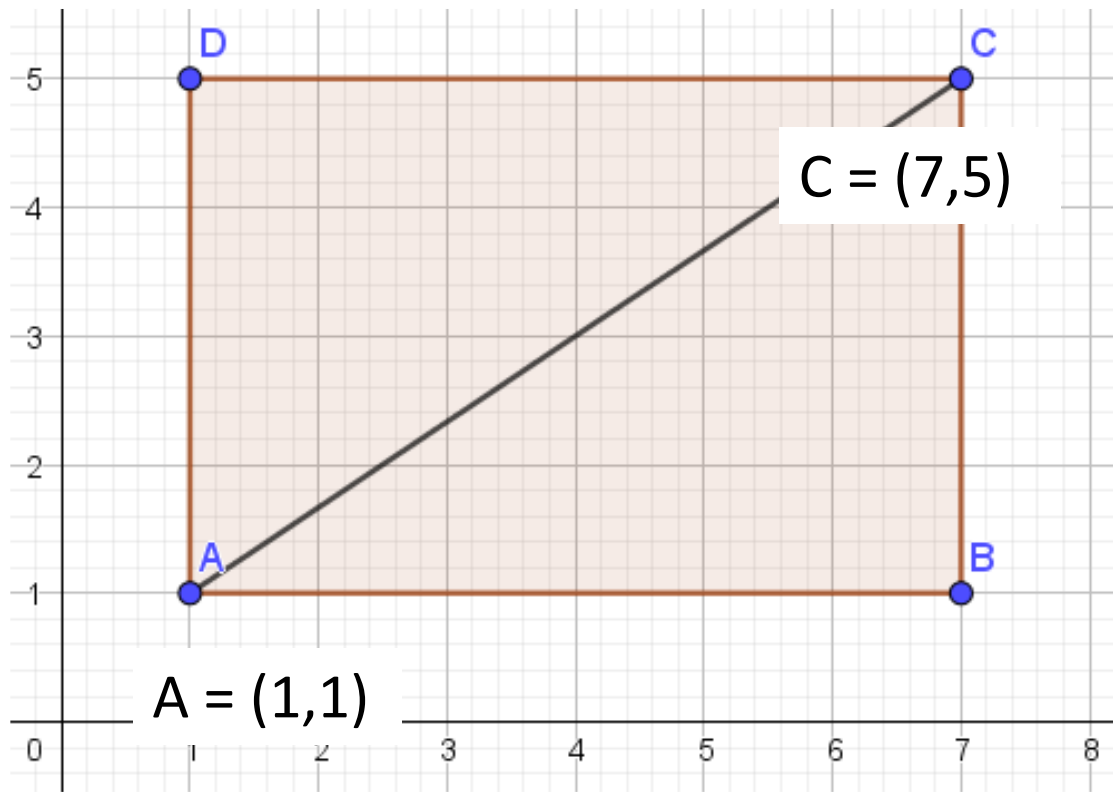
$$\{x = -12.6491106407, x = 12.6491106407\}$$

Esimerkki 6. Janan pituus

Laske kuvan suorakulmion pituuden tarkka arvo, kun $A = (1,1)$ ja $C = (7,5)$.



Esimerkki: Ratkaisu



1) Pythagoraan lauseella:

- Sivun AB pituus on $7 - 1 = 6$
- Sivun CB pituus $5 - 1 = 4$
- Merkitään kirjaimella x lävistäjän pituutta

$$x^2 = 6^2 + 4^2$$

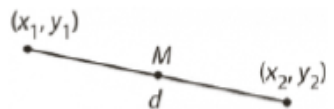
$$x^2 = 36 + 16$$

$$x^2 = 52$$

$$x = \pm\sqrt{52}$$

- Lävistäjän pituus ei voi olla negatiivinen, joten $x = \sqrt{52}$

2) Maolista löytyvällä janan pituuden kaavalla

pituus	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	
--------	--	---

$$|AC| = \sqrt{(7 - 1)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$