

Binomi 8 – Luku 8 – Tehtävien malliratkaisut

8.1

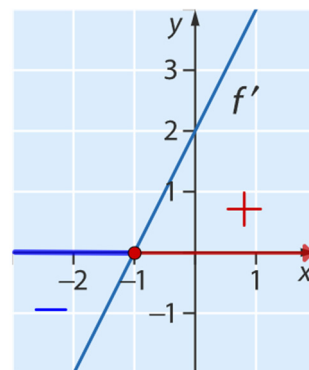
a)

Kuvaaja esittää derivaattafunktiota f' , jonka nollakohta on x -akselin leikkauskohta $x = -1$.

Derivaatan kuvaaja on

- x -akselin **yläpuolella**, kun $x > -1$.
Tällöin derivaatan arvot ovat **positiivisia**.
- x -akselin **alapuolella**, kun $x < -1$.
Tällöin derivaatan arvot ovat **negatiivisia**.

Siis $f'(x) > 0$, kun $x > -1$, ja $f'(x) < 0$, kun $x < -1$.



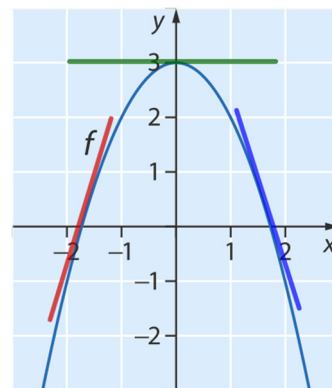
b)

Kuvaaja esittää funktiota f . Piirretään kuvaajalle tangentteja ja tutkitaan tangentin kulmakertoimen eli derivaatan f' merkkiä.

Funktion f kuvaajan perusteella

- tangentti on vaakasuora kohdassa $x \approx 0$,
joten derivaatan nollakohta on $x \approx 0$
- tangentit ovat **nousevia**, kun $x < 0$,
eli derivaatan arvot ovat **positiivisia**, kun $x < 0$
- tangentit ovat **laskevia**, kun $x > 0$,
eli derivaatan arvot ovat **negatiivisia**, kun $x > 0$.

Siis $f'(x) > 0$, kun $x < 0$, ja $f'(x) < 0$, kun $x > 0$.



Vastaus a) $f'(x) > 0$, kun $x > -1$, ja $f'(x) < 0$, kun $x < -1$

 b) $f'(x) > 0$, kun $x < 0$, ja $f'(x) < 0$, kun $x > 0$

8.2

a)

Kuvaaja esittää derivaattafunktiota g' , jonka kuvaaja kulkee koko ajan x -akselin alapuolella. Näin ollen derivaatan arvot ovat **negatiivisia** kaikilla muuttujan x arvoilla.

Siis $g'(x) < 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

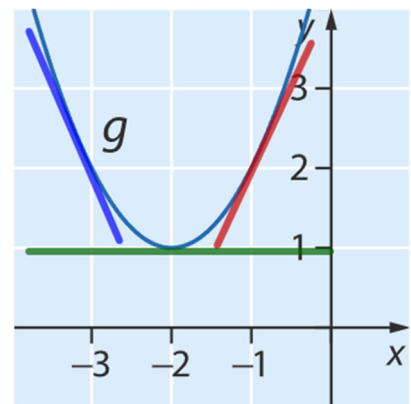
b)

Kuvaaja esittää funktiota g . Piirretään kuvaajalle tangenteja ja tutkitaan tangentin kulmakertoimen eli derivaatan g' merkkiä.

Funktion g kuvaajan perusteella

- tangentti on vaakasuora kohdassa $x \approx -2$, joten derivaatan nollakohta on $x \approx -2$
- tangentit ovat **nousevia**, kun $x > -2$, eli derivaatan arvot ovat **positiivisia**, kun $x > -2$
- tangentit ovat **laskevia**, kun $x < -2$, eli derivaatan arvot ovat **negatiivisia**, kun $x < -2$.

Siis $g'(x) > 0$, kun $x > -2$, ja $g'(x) < 0$, kun $x < -2$.



Vastaus a) $g'(x) < 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla

 b) $g'(x) > 0$, kun $x > -2$, ja $g'(x) < 0$, kun $x < -2$

8.3

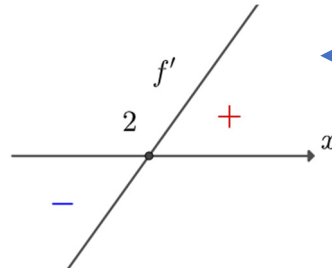
a)

Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = 3 \cdot 2x - 12 = 6x - 12$$

Muodostetaan ja ratkaistaan derivaattaepäyhtälö $f'(x) > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \\ 6x - 12 &> 0 \\ 6x &> 12 \quad \| : 6 \\ x &> 2 \end{aligned}$$



Derivaattaepäyhtälön voi ratkaista myös suoraan kuvaajan avulla, jos ensin ratkaisee derivaatan nollakohdan derivaattafunktion lausekkeen avulla.

b)

Derivoidaan funktio g .

$$g'(x) = 3x^2 - 27$$

Funktio g' saa negatiivisia arvoja, kun $g'(x) < 0$. Ratkaistaan derivaattaepäyhtälö.

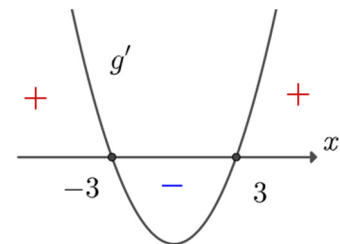
$$\begin{aligned} g'(x) &< 0 \\ 3x^2 - 27 &< 0 \end{aligned}$$

Saadaan toiseen asteen epäyhtälö. Ratkaistaan epäyhtälön vasemmalla puolella olevan toisen asteen funktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 27 &= 0 \\ 3x^2 &= 27 \quad \| : 3 \\ x^2 &= 9 \quad \| \sqrt{} \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli ($a = 3$). Hahmotellaan kuvaaja ja päätellään epäyhtälön ratkaisu.

$$g'(x) < 0, \text{ kun } -3 < x < 3.$$



Vastaus a) $x > 2$

 b) $-3 < x < 3$

8.4

a)

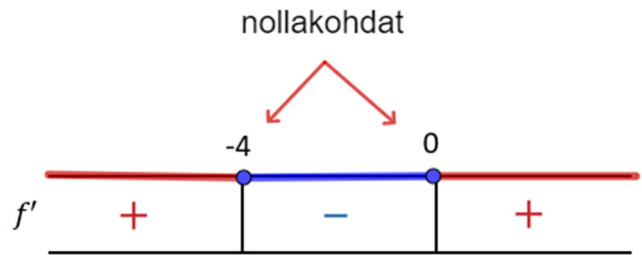
Merkkikaavion mukaan derivaatta saa arvon nolla kohdissa $x = -4$ ja $x = 0$.

b)

Derivaatan merkki on positiivinen eli $f'(x) > 0$, kun $x < -4$ tai $x > 0$.

c)

Derivaatan merkki on negatiivinen tai nolla eli $f'(x) \leq 0$, kun $-4 \leq x \leq 0$.



Vastaus a) $x = -4$ tai $x = 0$

 b) $x < -4$ tai $x > 0$

 c) $-4 \leq x \leq 0$

8.5

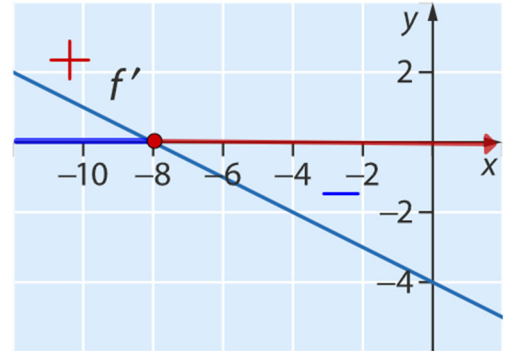
a)

Kuvaaja esittää derivaattafunktiota f' , jonka nollakohta on x -akselin leikkauskohta $x \approx -8$.

Derivaatan kuvaaja on

- x -akselin **yläpuolella**, kun $x < -8$.
Tällöin derivaatan arvot ovat **positiivisia**.
- x -akselin **alapuolella**, kun $x > -8$.
Tällöin derivaatan arvot ovat **negatiivisia**.

Siis $f'(x) > 0$, kun $x < -8$, ja $f'(x) < 0$, kun $x > -8$.



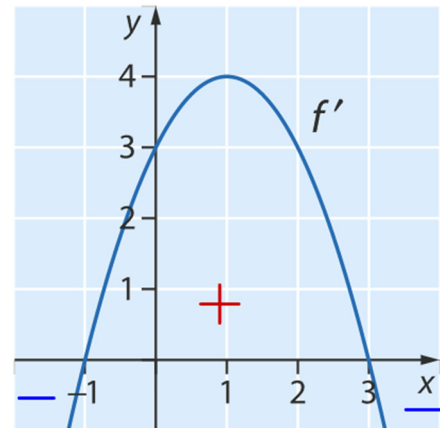
b)

Kuvaaja esittää derivaattafunktiota f' , jonka nollakohta on x -akselin leikkauskohdat ovat $x \approx -1$ ja $x \approx 3$.

Derivaatan kuvaaja on

- x -akselin **yläpuolella**, kun $-1 < x < 3$.
Tällöin derivaatan arvot ovat **positiivisia**.
- x -akselin **alapuolella**, kun $x < -1$ tai $x > 3$.
Tällöin derivaatan arvot ovat **negatiivisia**.

Siis $f'(x) > 0$, kun $-1 < x < 3$,
ja $f'(x) < 0$, kun $x < -1$ tai $x > 3$.



Vastaus a) $f'(x) > 0$, kun $x < -8$, ja $f'(x) < 0$, kun $x > -8$

 b) $f'(x) > 0$, kun $-1 < x < 3$, ja $f'(x) < 0$, kun $x < -1$ tai $x > 3$

8.6

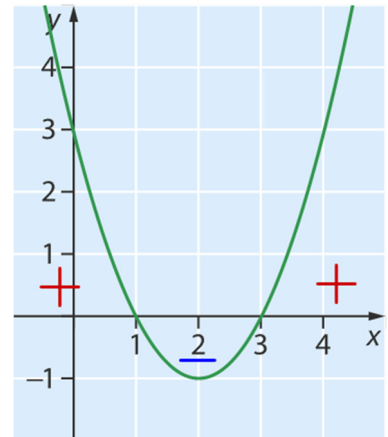
a)

Kuvaaja esittää derivaattafunktiota g' , jonka nollakohta on x -akselin leikkauskohdat ovat $x \approx 1$ ja $x \approx 3$.

Derivaatan kuvaaja on

- x -akselin **yläpuolella**, kun $x < 1$ tai $x > 3$.
Tällöin derivaatan arvot ovat **positiivisia**.
- x -akselin **alapuolella**, kun $1 < x < 3$.
Tällöin derivaatan arvot ovat **negatiivisia**.

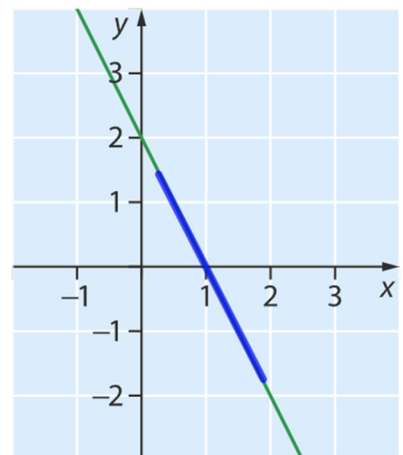
Siis $g'(x) < 0$, kun $1 < x < 3$, ja $g'(x) > 0$, kun $x < 1$ tai $x > 3$.



b)

Kuvaaja esittää funktiota g . Funktion kuvaaja on laskeva suora, joten kuvaajalle piirretyt tangentit ovat aina laskevia suoria. Näin ollen derivaatta on aina negatiivinen.

Funktion g kuvaajan perusteella $g'(x) < 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.



Vastaus a) $g'(x) < 0$, kun $1 < x < 3$, ja $g'(x) > 0$, kun $x < 1$ tai $x > 3$

 b) $g'(x) < 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

8.7

a)

Derivoidaan funktio g .

$$g'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x = 6x^2 - 6x$$

Muodostetaan ja ratkaistaan derivaattaepäyhtälö $g'(x) \leq 0$.

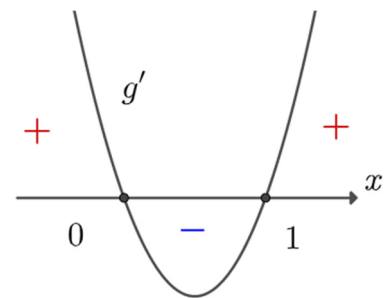
$$\begin{aligned} g'(x) &\leq 0 \\ 6x^2 - 6x &\leq 0 \end{aligned}$$

Saadaan toiseen asteen epäyhtälö. Ratkaistaan epäyhtälön vasemmalla puolella olevan toisen asteen funktion nollakohdat.

$$\begin{aligned} 6x^2 - 6x &= 0 \\ 6x(x - 1) &= 0 \\ 6x &= 0 \quad \text{tai} \quad x - 1 = 0 \\ x &= 0 \quad \text{tai} \quad x = 1 \end{aligned}$$

Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli ($a = 6$). Hahmotellaan kuvaaja ja päätellään epäyhtälön ratkaisu.

$$g'(x) \leq 0, \text{ kun } 0 \leq x \leq 1.$$



b)

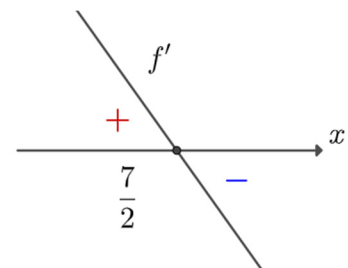
Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = -2x + 7$$

Muodostetaan ja ratkaistaan derivaattaepäyhtälö $f'(x) > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \\ -2x + 7 &> 0 \\ -2x &> -7 \quad \parallel : (-2) \\ x &< \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Epäyhtälömerkki kääntyy



Vastaus a) $0 \leq x \leq 1$

b) $x < \frac{7}{2}$

8.8

a) Derivoidaan funktio g .

$$g'(x) = -6x + 5$$

Muodostetaan ja ratkaistaan derivaattaepäyhtälö $g'(x) < 0$.

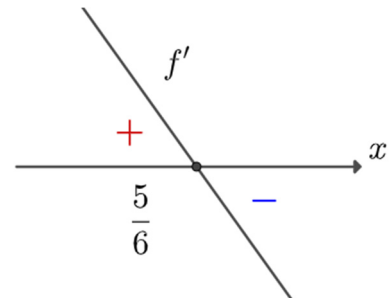
$$g'(x) < 0$$

$$-6x + 5 < 0$$

$$-6x < -5 \quad || : (-6)$$

$$x > \frac{5}{6}$$

Epäyhtälömerkki kääntyy



b) Sievennetään ja derivoidaan funktio h .

$$h(x) = x(5x^2 - 3) = 5x^3 - 3x$$

$$h'(x) = 15x^2 - 3$$

Tangentin kulmakerroin on suurempi kuin 12, kun derivaatta on suurempi kuin 12.

Muodostetaan ja ratkaistaan derivaattaepäyhtälö $h'(x) > 12$.

$$h'(x) > 12$$

$$15x^2 - 3 > 12$$

$$15x^2 - 15 > 0$$

Saadaan toiseen asteen epäyhtälö. Ratkaistaan epäyhtälön vasemmalla puolella olevan toisen asteen funktion nollakohdat.

$$15x^2 - 15 = 0$$

$$15x^2 = 15 \quad || : 15$$

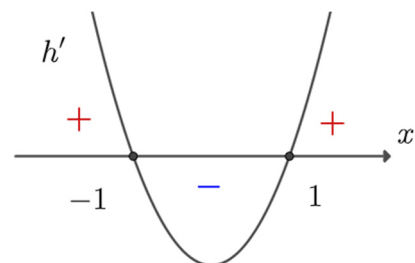
$$x^2 = 1 \quad || \sqrt{\quad}$$

$$x = \pm 1$$

Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli ($a = 1$). Hahmotellaan kuvaaja ja päätellään epäyhtälön ratkaisu.

$$15x^2 - 15 > 0, \text{ kun } x < -1 \text{ tai } x > 1.$$

Siis $h'(x) > 12$, kun $x < -1$ tai $x > 1$.



Vastaus a) $x > \frac{5}{6}$

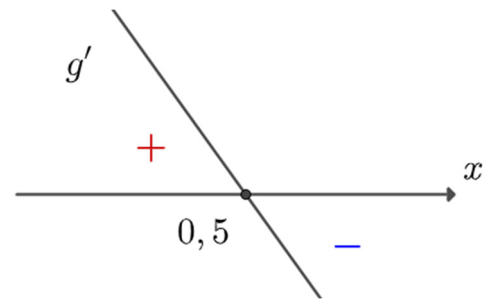
b) $x < -1$ tai $x > 1$

8.9

a)

Koska derivaattafunktion kuvaaja on laskeva suora, funktio saa **positiivisia** arvoja, kun $x < 0,5$, ja **negatiivisia**, kun $x > 0,5$. Muodostetaan merkkikaavio.

	0,5	
g'	+	-



b)

Merkkikaavion mukaan derivaatta saa positiivisia arvoja, kun $x < 0,5$, ja arvon nolla, kun $x = 0,5$.

Näin ollen $g'(x) \geq 0$, kun $x \leq 0,5$.

Vastaus

a)

	0,5	
g'	+	-

b) $x \leq 0,5$

8.10

a)

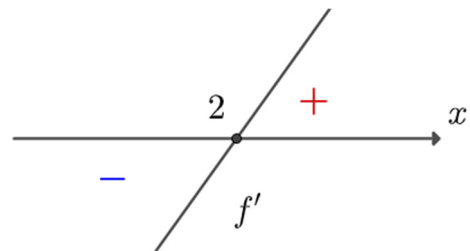
Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = 4x - 8$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x - 8 &= 0 \\ 4x &= 8 \quad \| : 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Hahmotellaan derivaattafunktion kuvaaja.
Kyseessä on nouseva suora, jonka nollakohta on $x = 2$.



Muodostetaan merkkikaavio.

	2	
f'	—	+

b)

Muodostetaan merkkikaavio testipisteiden avulla.
Valitaan testipiste nollakohdan $x = 2$ kummaltakin puolelta.

$$f'(1) = 4 \cdot 1 - 8 = -4 (< 0)$$

$$f'(3) = 4 \cdot 3 - 8 = 4 (> 0)$$

Muodostetaan merkkikaavio.

	(1)	2	(3)	
f'	—		+	

Vastaus

	2	
f'	—	+

8.11

a)

Derivoidaan funktio g .

$$g'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3t^2 - 16 = t^2 - 16$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} g'(t) &= 0 \\ t^2 - 16 &= 0 \\ t^2 &= 16 \quad \parallel \sqrt{} \\ t &= \pm 4 \end{aligned}$$

Muodostetaan merkkikaavio testipisteiden avulla. Valitaan testipiste nollakohtien $t = -4$ ja $t = 4$ muodostamilta väleiltä.

$$g'(-5) = (-5)^2 - 16 = 9 (> 0)$$

$$g'(0) = 0^2 - 16 = -16 (< 0)$$

$$g'(5) = 5^2 - 16 = 9 (> 0)$$

	(-5)	-4	(0)	4	(5)
g'	+		-		+

b)

Funktiolle piirretty tangentti on nouseva suora, kun derivaatta on positiivinen.

Merkkikaavion perusteella $g'(t) > 0$, kun $t < -4$ tai $t > 4$.

Vastaus a)

	-4	4	
f'	+	-	+

b) $t < -4$ tai $t > 4$

8.12

a)

Rinteen huippukohdassa derivaatan arvo on nolla.

Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = -0,0042x^2 + 0,082x + 0,23; \quad 0 < x < 34$$

Derivaattaa ei ole määritelty suljetun välin päätepisteissä (päätepisteeseen ei voi piirtää tangenttia yksikäsitteisesti).

Ratkaistaan derivaatan nollakohta.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -0,0042x^2 + 0,082x + 0,23 &= 0 \\ x &= -2,487 \dots \text{ tai } x = 22,011 \dots \end{aligned}$$

Näistä määrittelyvälillä $0 < x < 34$ on vain $x = 22,011 \dots \approx 22$ (m).

b)

Profiilin hetkellinen muutosnopeus on positiivinen, kun derivaatan arvo on positiivinen.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan x . Otetaan määrittelyehto huomioon.

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \\ -0,0042x^2 + 0,082x + 0,23 &> 0 \\ 0 &< x < 22,011 \dots \\ 0 &< x < 22 \text{ (m)} \end{aligned}$$

c)

Profiilin hetkellinen muutosnopeus on pienempi kuin $-0,5$, kun derivaatan arvo on pienempi kuin $-0,5$.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan x . Otetaan määrittelyehto huomioon.

$$\begin{aligned} f'(x) &< -0,5 \\ -0,0042x^2 + 0,082x + 0,23 &< -0,5 \\ 26,166 \dots &< x < 34 \\ 26 &< x < 34 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Vastaus a) 22 m

 b) $0 < x < 22$ (m)

 c) $26 < x < 34$ (m)

8.13

a)

Funktio s on määritelty välillä $0 \leq x \leq 3$ (s).

Derivoidaan funktio s .

$$s'(x) = -7,4x + 12, \text{ kun } 0 < x < 3$$

Derivaattaa ei ole määritelty suljetun välin päätepisteissä (päätepisteeseen ei voi piirtää tangenttia yksikäsitteisesti).

Muutosnopeus on 0 m/s, kun derivaatta on nolla. Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} s'(x) &= 0 \\ -7,6x + 12 &= 0 \\ x &= 1,578 \dots \\ x &\approx 1,58 \text{ (s)} \end{aligned}$$

Lasketaan kappaleen etäisyys ajanhetkellä $x = 1,578 \dots$ (s).

$$s(1,578 \dots) = -3,8 \cdot 1,578 \dots^2 + 12 \cdot 1,578 = 9,473 \dots \approx 9,47 \text{ (m)}$$

b)

Muodostetaan epäyhtälö $s'(x) < 6$ ja ratkaistaan se määrittelyvälillä.

$$\begin{aligned} s'(x) &< 6 \\ -7,6x + 12 &< 6 \\ 0,789 &< x < 3,00 \\ 0,79 &< x < 3,00 \text{ (s)} \end{aligned}$$

Vastaus a) 1,58 s ja 9,47 m

 b) $0,79 < x < 3,00$ (s)

8.14

a)

Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = 4x - 2$$

Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 0$.

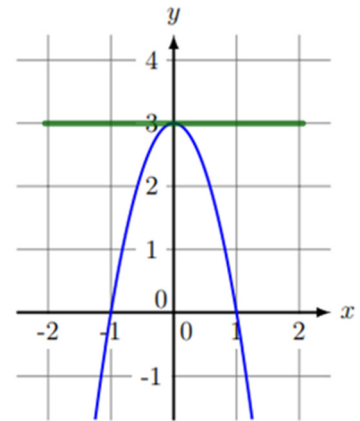
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x - 2 &= 0 \\ 4x &= 2 \quad || : 4 \\ x &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b)

Funktion g derivaatan arvo on nolla, kun tangentin kulmakerroin on nolla eli tangenti on vaakasuora.

Kuvaajaan piirretty tangenti on vaakasuora kohdassa $x = 0$.

Siis yhtälön $g'(x) = 0$ ratkaisu on $x = 0$.



c)

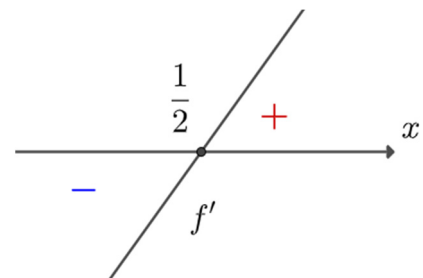
Funktion f derivaatta $f'(x)$ on ensimmäisen asteen funktio, jonka kuvaaja on suora. Koska kulmakerroin on positiivinen ($k = 4$), suora on kasvava.

Hahmotelman perusteella $f'(x) < 0$, kun $x < \frac{1}{2}$.

Funktion g kuvaajalle piirrettyjen tangenttien kulmakertoimet ovat negatiivisia, kun $x > 0$.

Siis $g'(x) < 0$, kun $x > 0$.

Yhdistetään ratkaisut. $x > 0$ ja $x < \frac{1}{2}$, kun $0 < x < \frac{1}{2}$.



Vastaus a) $x = \frac{1}{2}$

b) $x = 0$

c) $0 < x < \frac{1}{2}$

8.15

a)

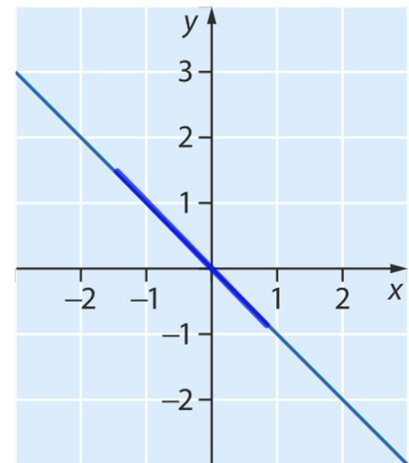
Kuvaaja esittää derivaattafunktiota h' , jolla ei ole nollakohtia. Derivaattafunktion kuvaaja kulkee aina x -akselin yläpuolella, joten sen arvot ovat aina positiivisia.

Siis $h'(x) > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

b)

Kuvaaja esittää funktiota h . Funktion kuvaaja on laskeva suora, joten kuvaajalle piirretyt tangentit ovat aina laskevia suoria. Näin ollen derivaatta on aina negatiivinen.

Funktion h kuvaajan perusteella $h'(x) < 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.



Vastaus **a)** $h'(x) > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.
 b) $h'(x) < 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

8.16

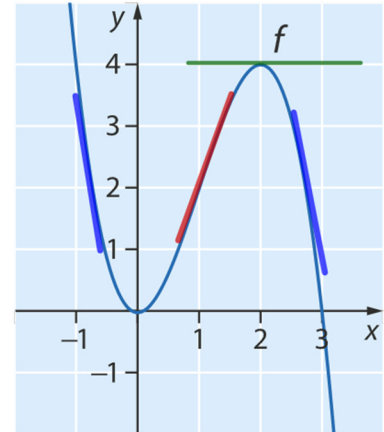
a)

Kuvaaja esittää f . Piirretään kuvaajalle tangenteja ja tutkitaan tangentin kulmakertoimen eli derivaatan f' merkkiä.

Funktion f kuvaajan perusteella

- tangentti on vaakasuora kohdissa $x \approx 0$ ja $x \approx 2$, joten derivaatta saa arvon nolla kyseisissä kohdissa
- tangentit ovat **nousevia**, kun $0 < x < 2$, eli derivaatan arvot ovat **positiivisia**, kun $0 < x < 2$
- tangentit ovat **laskevia**, kun $x < 0$ tai $x > 2$, eli derivaatan arvot ovat **negatiivisia**, kun $x < 0$ tai $x > 2$.

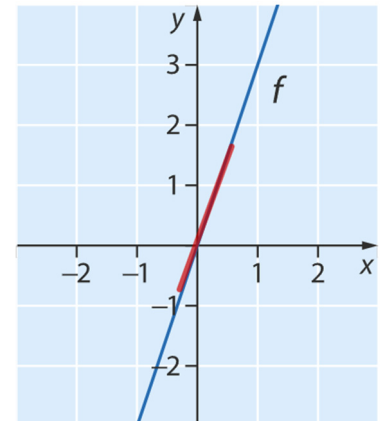
Siis $f'(x) > 0$, kun $0 < x < 2$, ja $f'(x) < 0$, kun $x < 0$ tai $x > 2$.



b)

Kuvaaja esittää funktiota f . Funktion kuvaaja on nouseva suora, joten kuvaajalle piirretyt tangentit ovat aina nousevia suoria. Näin ollen derivaatta on aina positiivinen.

Funktion f kuvaajan perusteella $f'(x) > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.



Vastaus a) $f'(x) > 0$, kun $0 < x < 2$, ja $f'(x) < 0$, kun $x < 0$ tai $x > 2$

 b) $f'(x) > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla

8.17

a)

Sievennetään ensin funktion h lauseke.

$$\begin{aligned}h(t) &= (t + 4)(t - 2) \\&= t^2 + 4t - 2t - 8 \\&= t^2 + 2t - 8\end{aligned}$$

Derivoidaan funktio h .

$$h'(t) = 2t + 2$$

Derivaatta saa arvon nolla, kun $h'(t) = 0$.

$$\begin{aligned}h'(t) &= 0 \\2t + 2 &= 0 \\2t &= -2 \quad \| : 2 \\t &= -1\end{aligned}$$

b)

Derivaatta on positiivinen, kun $h'(t) > 0$.

$$\begin{aligned}h'(t) &> 0 \\2t + 2 &> 0 \\2t &> -2 \\t &> -1\end{aligned}$$

c)

Kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on 1, kun derivaatan arvo on 1. Muodostetaan yhtälö $h'(t) = 1$ ja ratkaistaan t .

$$\begin{aligned}h'(t) &= 1 \\2t + 2 &= 1 \\2t &= -1 \quad \| : 2 \\t &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Vastaus a) $t = -1$ b) $t > -1$ c) $t = -\frac{1}{2}$

8.18

a)

Sievennetään ja derivoidaan funktio f .

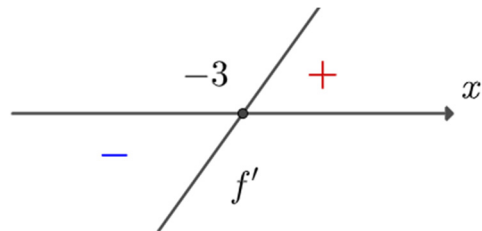
$$f(x) = x(x + 6) = x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 2x + 6$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x + 6 &= 0 \\ 2x &= -6 \quad \| : 2 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Hahmotellaan derivaattafunktion kuvaaja.
Kyseessä on nouseva suora, jonka nollakohta on $x = -3$.



Muodostetaan merkkikaavio.

-3	
f'	
$-$	$+$

b)

Muodostetaan merkkikaavio testipisteiden avulla.
Valitaan testipiste nollakohdan $x = -3$ kummaltakin puolelta.

$$f'(-4) = 2 \cdot (-4) + 6 = -2 (< 0)$$

$$f'(0) = 2 \cdot 0 + 6 = 6 (> 0)$$

Muodostetaan merkkikaavio.

	(-4)	-3	(0)
f'			
	$-$		$+$

Vastaus

-3	
f'	
$-$	$+$

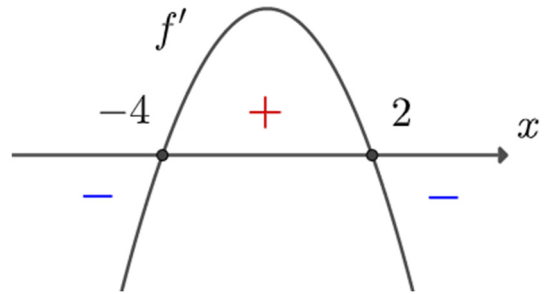
8.19

a)

Derivaattafunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli ja funktion nollakohdat ovat $x = -4$ ja $x = 2$. Hahmotellaan kuvaaja.

Muodostetaan merkkikaavio kuvaajan avulla.

	-4	2	
f'	-	+	-



b)

Merkkikaavion mukaan derivaatta saa positiivisia arvoja, kun $-4 < x < 2$, ja arvon nolla muuttujan arvoilla $x = -4$ ja $x = 2$.

Näin ollen $f'(x) \geq 0$, kun $-4 \leq x \leq 2$.

Vastaus a)

	-4	2	
f'	-	+	-

b) $-4 \leq x \leq 2$

8.20

a)

Derivoidaan funktio g .

$$g'(t) = -0,021t^2 + 0,338t + 0,004; \quad 0 < t < 24$$

Derivaattaa ei ole määritelty suljetun välin päätepisteissä (päätepisteeseen ei voi piirtää tangenttia yksikäsitteisesti).

Lämpötilan huippukohdassa tangentti on vaakasuora eli derivaatta on nolla.

$$\begin{aligned} g'(t) &= 0 \\ -0,021t^2 + 0,338t + 0,004 &= 0 \\ t &= -0,0118 \dots \quad \text{tai} \quad t = 16,107 \dots \end{aligned}$$

Määrittelyvälille kuuluu vain $t = 16,107 \dots \approx 16$, joten lämpötilan huippu saavutettiin klo 16.

b)

Lämpötilan hetkellinen muutosnopeus on negatiivinen, kun $g'(t) < 0$.
Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö määrittelyvälillä.

$$\begin{aligned} g'(t) &< 0 \\ -0,021t^2 + 0,338t + 0,004 &< 0 \\ 16,107 \dots &< x < 24 \end{aligned}$$

Muutosnopeus on negatiivinen klo 16–24.

c)

Ratkaistaan, milloin $g'(t) > 0$ ja $g'(t) < 4$.

$$\begin{aligned} g'(t) &> 0 \\ -0,021t^2 + 0,338t + 0,004 &> 0 \\ 0 &< t < 16,107 \\ 0 &< t < 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(t) &< 4 \\ -0,021t^2 + 0,338t + 0,004 &< 4 \\ \text{epäyhtälö on aina tosi} \end{aligned}$$

Näin ollen $0 < g'(t) < 4$, kun $0 < t < 16$.

Lämpötilan hetkellinen muutosnopeus oli positiivinen, mutta pienempi kuin $4 \text{ } ^\circ\text{C/h}$ klo 0 – klo 16.

Vastaus

- a) klo 16
- b) klo 16–24
- c) klo 0–16

8.21

a)

Derivoidaan funktio h .

$$h'(t) = -9t + 23, \text{ kun } 0 < t < 5,1$$

Derivaattaa ei ole määritelty suljetun välin päätepisteissä (päätepisteeseen ei voi piirtää tangenttia yksikäsitteisesti).

Nopeus on negatiivinen, kun funktion derivaatta on negatiivinen.
Muodostetaan yhtälö $h'(t) < 0$ ja ratkaistaan se määrittelyvälillä.

$$\begin{aligned} h'(t) &< 0 \\ -9t + 23 &< 0 \\ 2,555 \dots &< t < 5,1 \\ 2,6 &< t < 5,1 \end{aligned}$$

Nuolen nopeus on siis negatiivinen aikavälillä 2,6 s – 5,1 s. Kun nopeus on negatiivista, sen liike suuntautuu kohti lähtökorkeutta eli alaspäin.

b)

Ratkaistaan, milloin $h'(t) > 0$, mutta $h'(t) < 8$.

$$\begin{aligned} 0 &< h'(t) < 8 \\ 0 &< -9t + 23 < 8 \\ 1,666 \dots &< t < 2,555 \dots \\ 1,7 &< t < 2,6 \end{aligned}$$

Hetkellinen muutosnopeus on positiivinen, mutta pienempi kuin 8 m/s aikavälillä 1,7 s – 2,6 s.

Vastaus a) 2,6 s – 5,1 s, liike suuntautuu alaspäin

 b) 1,7 s – 2,6 s

8.22

Sievennetään ensin funktio f muotoon, josta se voidaan derivoida.

$$f(x) = \frac{x(x^2 - 12x + 48)}{3} = \frac{x^3 - 12x^2 + 48x}{3} = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 16x$$

Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x + 16 = x^2 - 8x + 16$$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x^2 - 8x + 16 &= 0 \\ x &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{8 \pm 0}{2} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Muodostetaan merkkikaavio testipisteiden avulla.

Valitaan testipiste nollakohdan $x = 4$ kummaltakin puolelta.

$$f'(0) = 0^2 - 8 \cdot 0 + 16 = 16 \text{ (> 0)}$$

$$f'(5) = 5^2 - 8 \cdot 5 + 16 = 1 \text{ (> 0)}$$

Muodostetaan merkkikaavio.

	(0)	4	(5)
f'	+		+

Tangentti on nouseva suora, kun derivaatta on positiivinen. Merkkikaavion mukaan tangentti on nouseva suora kaikilla muuttujan x arvoilla, paitsi $x = 4$.

Vastaus		4	
	f'	+	+

$$f'(x) > 0, \text{ kun } x \neq 4$$

8.23

a) Derivoidaan funktio f : $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$.

Hetkellinen muutosnopeus on suurempi kuin 6, kun $f'(x) > 6$.

Ratkaistaan derivaattaepäyhtälö.

$$f'(x) > 6$$

$$3x^2 - 8x + 3 > 6$$

$$3x^2 - 8x - 3 > 0$$

Muodostuu toisen asteen epäyhtälö. Hahmotellaan vasemman puolen funktion kuvaaja nollakohtien ja avautumissuunnan avulla ja ratkaistaan epäyhtälö.

Nollakohdat saadaan ratkaisukaavan avulla.

$$3x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3}$$

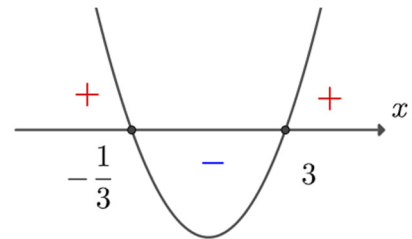
$$x = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6}$$

$$x = \frac{8 - 10}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{8 + 10}{6} = 3$$

Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli ($a = 3$).

Kuvan perusteella $3x^2 - 8x - 3 > 0$, kun $x < -\frac{1}{3}$ tai $x > 3$.

Siis $f'(x) > 6$, kun $x < -\frac{1}{3}$ tai $x > 3$.



b) Määritetään ensin suoran $y + 2x + 7 = 0$ kulmakerroin suoran ratkaistusta muodosta.

$$y + 2x + 7 = 0$$

$$y = -2x - 7$$

Suoran kulmakerroin on siis $k = -2$. Muodostetaan yhtälö $f'(x) = -2$ ja ratkaistaan x .

$$f'(x) = -2$$

$$3x^2 - 8x + 3 = -2$$

$$3x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{8 \pm 2}{6}$$

$$x = \frac{8 - 2}{6} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{8 + 2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

Vastaus a) $x < -\frac{1}{3}$ tai $x > 3$ b) $x = 1$ tai $x = \frac{5}{3}$

8.24

a)

Merkkikaavion mukaan derivaatan nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 2$.

b)

Derivoidaan funktio p .

$$p'(x) = a \cdot 3x^2 + b \cdot 2x - 12 = 3ax^2 + 2bx - 12$$

Tiedetään, että $p'(-1) = 0$ ja $p'(2) = 0$.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan vakiot a ja b .

$$\begin{cases} 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) - 12 = 0 \\ 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a - 2b - 12 = 0 \\ 12a + 4b - 12 = 0 \end{cases}$$



Ratkaistaan yhtälöpari
CAS-laskimella.

$$a = 2, b = -3$$

Kysytty funktio on siis $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

c)

Derivoidaan funktio p .

$$p'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

Vastaus a) $x = -1$ ja $x = 2$

 b) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

 c) $p'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

8.25

Derivoidaan funktio h .

$$h'(x) = 3ax^2 - 18x + 27$$

Hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 1$ on 12 eli $h'(1) = 12$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio a .

$$h'(1) = 12$$

$$3a \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + 27 = 12$$

$$a = 1$$

Derivaatta on siis $h'(x) = 3x^2 - 18x + 27$.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

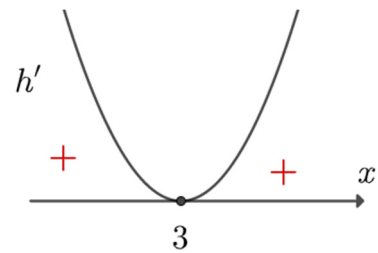
$$h'(x) = 0$$

$$3x^2 - 18x + 27 = 0$$

$$x = 3$$

Derivaattafunktio on ylöspäin aukeava paraabeli ja sen nollakohta on $x = 3$. Hahmotellaan kuvaaja.

Derivaatta on siis aina epänegatiivinen, eli kun $a = 1$, niin derivaatta ei saa negatiivisia arvoja.



Vastaus $a = 1$