

Binomi 8 – Luku 7 – Tehtävien malliratkaisut

7.1

a)

$f'(-3)$ tarkoittaa derivaatan arvoa kohdassa $x = -3$.

Määritetään funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ derivaattafunktio $f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} - 4 + 0 \\ &= 3x^2 + 4x - 4 \end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa $x = -3$.

$$f'(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 4 = 11$$

b)

Sievennetään funktion $f(x) = 2x^2(x - 4x^2)$ lauseketta ja muodostetaan funktion derivaattafunktio $f'(x)$.

$$f(x) = 2x^2(x - 4x^2) = 2x^2 \cdot x + 2x^2 \cdot (-4x^2) = 2x^3 - 8x^4 = -8x^4 + 2x^3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -8 \cdot 4x^{4-1} + 2 \cdot 3x^{3-1} \\ &= -32x^3 + 6x^2 \end{aligned}$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa $x = -3$.

$$f'(-3) = -32 \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 = 918$$

Vastaus a) 11

 b) 918

7.2

a)

Määritetään ensin funktion $g(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2$ derivaatafunkti $g'(x)$.

$$g'(x) = 2 \cdot 4x^{4-3} - 3 \cdot 2x^{2-1} + 0 = 8x^3 - 6x$$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 1$.

$$g'(1) = 8 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 = 2$$

b)

Sievennetään funktion $g(x) = (x - 2)(x^2 - 3)$ lauseke osittelulain avulla ja muodostetaan funktion derivaatafunkti $g'(x)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - 2)(x^2 - 3) \\ &= x \cdot x^2 + x \cdot (-3) - 2 \cdot x^2 - 2 \cdot (-3) \\ &= x^3 - 3x - 2x^2 + 6 \\ &= x^3 - 2x^2 - 3x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^{3-1} - 2 \cdot 2x^{2-1} - 3 + 0 \\ &= 3x^2 - 4x - 3 \end{aligned}$$

Lasketaan derivaatafunktion arvo kohdassa $x = 1$.

$$g'(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 3 = -4$$

Vastaus **a)** 2

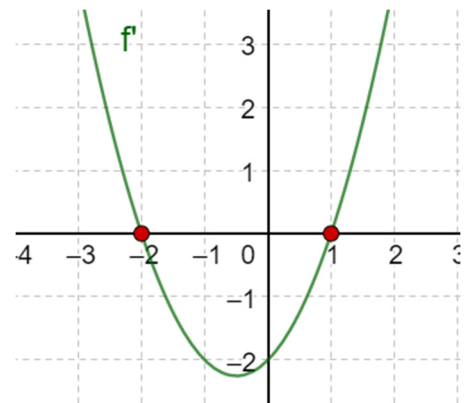
b) -4

7.3

a)

Kuvassa on funktion f derivaattafunktion kuvaaja.

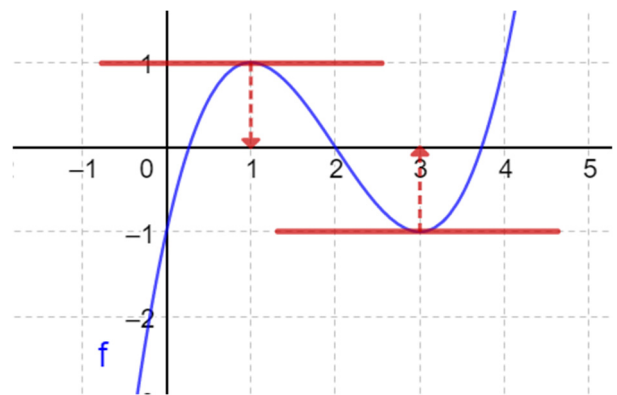
Kuvan perusteella $f'(x) = 0$, kun $x = -2$ tai $x = 1$.



b)

Kuvassa on funktion f kuvaaja. Sen derivaatta on nolla, kun kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on nolla. Tangentti on siis vaakasuora.

Kuvan perusteella $f'(x) = 0$, kun $x = 1$ tai $x = 3$.



c)

Muodostetaan ensin funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x) = 2 \cdot 2x + 8 - 0 = 4x + 8$$

Muodostetaan yhtälö $f'(x) = 0$ ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x + 8 &= 0 \\ 4x &= -8 \quad \| : 4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Vastaus a) $x = -2$ tai $x = 1$

 b) $x = 1$ tai $x = 3$

 c) $x = -2$

7.4

a)

Muodostetaan ensin funktion f derivaatafunktio.

$$f'(x) = -3 \cdot 2x^{2-1} + 18 - 0 = -6x + 18$$

Muodostetaan yhtälö $f'(x) = 0$ ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -6x + 18 &= 0 \\ -6x &= -18 \quad \| : (-6) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

b)

Sievennetään funktio f ja muodostetaan sen derivaatafunktio.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x(4 - x) \\ &= 2x \cdot 4 + 2x \cdot (-x) \\ &= 8x - 2x^2 \\ &= -2x^2 + 8x \end{aligned}$$

$$f'(x) = -2 \cdot 2x^{2-1} + 8 = -4x + 8$$

Muodostetaan yhtälö $f'(x) = 0$ ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -4x + 8 &= 0 \\ -4x &= -8 \quad \| : (-4) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Vastaus **a)** $x = 3$

b) $x = 2$

7.5

a)

Määritetään ensin funktion f derivaattafunktio $f'(x)$.

$$f'(x) = 2x + 1 + 0 = 2x + 1$$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 3$.

$$f'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

b)

Määritetään funktion g derivaattafunktio $g'(x)$.

$$g'(x) = 4 - 0 = 4$$

Derivaattafunktio on vakiofunktio, jonka arvo on aina 4, joten myös $g'(3) = 4$.

c)

Määritetään ensin funktion h derivaattafunktio $h'(x)$.

$$h'(x) = 3x^{3-1} - 2x^{2-1} - 0 = 3x^2 - 2x$$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 3$.

$$h'(3) = 3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 = 21$$

Vastaus **a)** 7

b) 4

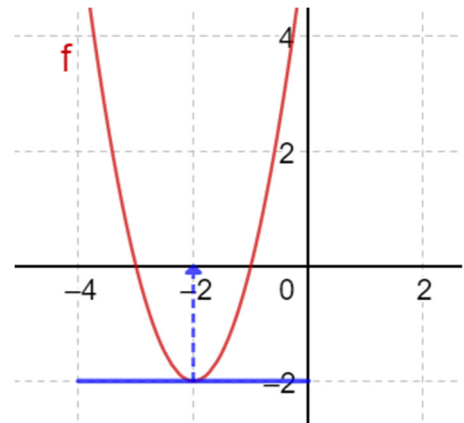
c) 21

7.6

a)

Kuvassa on funktion f kuvaaja. Sen derivaatta on nolla, kun kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on nolla eli tangentti on vaakasuora.

Kuvan perusteella $f'(x) = 0$, kun $x = -2$.

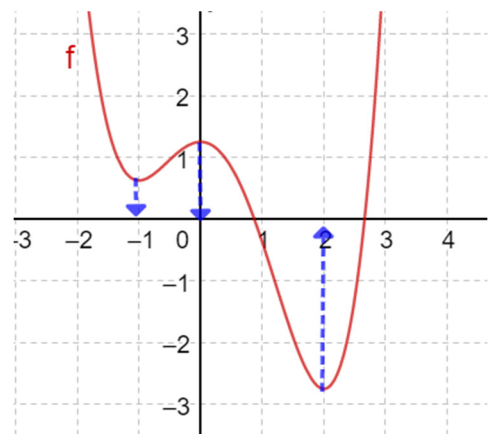


b)

Kuvassa on funktion f kuvaaja. Sen derivaatta on nolla, kun kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on nolla eli tangentti on vaakasuora.

Kuvan perusteella $f'(x) = 0$, kun

$x = -1$, $x = 0$ tai $x = 2$.



Vastaus a) $x = -2$

b) $x = -1$, $x = 0$ tai $x = 2$

7.7

a)

$g'(2)$ tarkoittaa derivaatan arvoa kohdassa $x = 2$.

Määritetään funktion g derivaattafunktio $g'(x)$.

$$g'(x) = 2 \cdot 3x^{3-2} - 3 + 0 = 6x^2 - 3$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa $x = 2$.

$$g'(2) = 6 \cdot 2^2 - 3 = 21$$

b)

Sievennetään funktion g lauseke ja määritetään derivaattafunktio $g'(x)$.

$$\begin{aligned} g(x) &= 5x^2(x^2 - 2x - 1) \\ &= 5x^2 \cdot x^2 + 5x^2 \cdot (-2x) + 5x^2 \cdot (-1) \\ &= 5x^4 - 10x^3 - 5x^2 \end{aligned}$$

$$g'(x) = 5 \cdot 4x^{4-1} - 10 \cdot 3x^{3-1} - 5 \cdot 2x^{2-1} = 20x^3 - 30x^2 - 10x$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa $x = 2$.

$$g'(2) = 20 \cdot 2^3 - 30 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 = 20$$

c)

$$\begin{aligned} g(x) &= (2x^2 - 3)(1 - 3x) \\ &= 2x^2 \cdot 1 + 2x^2 \cdot (-3x) - 3 \cdot 1 - 3 \cdot (-3x) \\ &= 2x^2 - 6x^3 - 3 + 9x \\ &= -6x^3 + 2x^2 + 9x - 3 \end{aligned}$$

$$g'(x) = -6 \cdot 3x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} + 9 - 0 = -18x^2 + 4x + 9$$

Lasketaan derivaattafunktion arvo kohdassa $x = 2$.

$$g'(2) = -18 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 9 = -55$$

Vastaus **a)** 21 **b)** 20 **c)** -55

7.8

a) Muodostetaan funktion f derivaattafunktio.

$$f'(x) = 4 \cdot 2x + 4 - 0 = 8x + 4$$

Muodostetaan yhtälö $f'(x) = 0$ ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 8x + 4 &= 0 \\ 8x &= -4 && \| : 8 \\ x &= -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Sievennetään funktio f ja muodostetaan sen derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x(3x - 4) \\ &= 2x \cdot 3x + 2x \cdot (-4) \\ &= 6x^2 - 8x \end{aligned}$$

$$f'(x) = 6 \cdot 2x - 8 = 12x - 8$$

Muodostetaan yhtälö $f'(x) = 0$ ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 12x - 8 &= 0 \\ 12x &= 8 && \| : 12 \\ x &= \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

c) Sievennetään funktio f ja muodostetaan sen derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x + 1)(2 - x) \\ &= 3x \cdot 2 + 3x \cdot (-x) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-x) \\ &= 6x - 3x^2 + 2 - x \\ &= -3x^2 + 5x + 2 \end{aligned}$$

$$f'(x) = -3 \cdot 2x + 5 + 0 = -6x + 5$$

Muodostetaan yhtälö $f'(x) = 0$ ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -6x + 5 &= 0 \\ -6x &= -5 && \| : (-6) \\ x &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Vastaus **a)** $x = -\frac{1}{2}$ **b)** $x = \frac{2}{3}$ **c)** $x = \frac{5}{6}$

7.9

a)

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2 \cdot 3x^{3-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} - 12 - 0 \\&= 6x^2 - 6x - 12\end{aligned}$$

Derivaatta on nolla, kun $f'(x) = 0$. Ratkaistaan siis derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\6x^2 - 6x - 12 &= 0 \quad \| : 6 \\x^2 - x - 2 &= 0\end{aligned}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

b)

Tangentin kulmakerroin kohdassa x on sama, kuin derivaatan arvo $f'(x)$.
Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 24$.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 24 \\6x^2 - 6x - 12 &= 24 \\6x^2 - 6x - 36 &= 0 \quad \| : 6 \\x^2 - x - 6 &= 0\end{aligned}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Vastaus a) $x = -1$ tai $x = 2$ b) $x = -2$ tai $x = 3$

7.10

a)

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 4 \cdot 3x^{3-1} - 48 + 0 \\&= 12x^2 - 48\end{aligned}$$

Derivaatta on nolla, kun $f'(x) = 0$. Ratkaistaan siis derivaatan nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$12x^2 - 48 = 0$$

$$12x^2 = 48 \quad \| : 12$$

$$x^2 = 4 \quad \| \sqrt{}$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x = \pm 2$$

b)

Määritetään derivaattafunktio.

$$\begin{aligned}g'(x) &= -3 \cdot 3x^{3-1} + 9 \cdot 2x^{2-1} - 0 \\&= -9x^2 + 18x\end{aligned}$$

Derivaatta on nolla, kun $g'(x) = 0$. Ratkaistaan siis derivaatan nollakohdat.

$$g'(x) = 0$$

$$-9x^2 + 18x = 0$$

$$-9x(x - 2) = 0$$

$$-9x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 0 \quad \quad \quad x = 2$$



Tulon nollasääntö

Vastaus a) $x = \pm 2$

 b) $x = 0$ tai $x = 2$

7.11

a) Derivoidaan funktio f .

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^{3-1} + \frac{1}{2} \cdot 2x^{2-1} - 3 + 0 = x^2 + x - 3$$

Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 3$.

$$f'(x) = 3$$

$$x^2 + x - 3 = 3$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{-1 - 5}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \text{ tai } x = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

b) Hetkellinen muutosnopeus kohdassa x on sama, kuin derivaatan arvo $f'(x)$.

Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = \frac{1}{9}$.

$$f'(x) = \frac{1}{9}$$

$$x^2 + x - 3 = \frac{1}{9} \quad || \cdot 9$$

$$9x^2 + 9x - 27 = 1$$

$$9x^2 + 9x - 28 = 0$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-2)}}{2 \cdot 9} = \frac{-9 \pm \sqrt{1089}}{18} = \frac{-9 \pm 33}{18}$$

$$x = \frac{-9 - 33}{18} = \frac{-42}{18} = -\frac{7}{3} \text{ tai } x = \frac{-9 + 33}{18} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

c) Määritetään funktion g derivaattafunktio.

$$g'(x) = 4 \cdot 2x^{2-1} - 3 = 8x - 3$$

Merkitään funktioiden derivaatat yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälö $f'(x) = g'(x)$.

$$f'(x) = g'(x)$$

$$x^2 + x - 3 = 8x - 3$$

$$x^2 - 7x = 0$$

$$x(x - 7) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 7 = 0$$

$$x = 7$$

Tulon nollasääntö

Vastaus a) $x = -3$ tai $x = 2$ b) $x = -\frac{7}{3}$ tai $x = \frac{4}{3}$ c) $x = 0$ tai $x = 7$

7.12

a)

Lasketaan funktioiden arvot, kun $x = 3$.

$$a(3) = 0,12 \cdot 3^2 + 32 \cdot 3 + 200 = 297,08 \approx 297$$

$$b(3) = 0,30 \cdot 3^2 + 25 \cdot 3 + 200 = 277,7 \approx 278$$

Kanta A: 297 bakteeria

Kanta B: 278 bakteeria

b)

Hetkellinen muutosnopeus on derivaatan arvo.

Derivoidaan funktiot ja lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 3$.

$$a'(x) = 0,24x + 32$$

$$a'(3) = 0,24 \cdot 3 + 32 = 32,72 \approx 33$$

Kannan A muutosnopeus on noin 33 bakteeria/min.

$$b'(x) = 0,60x + 25$$

$$b'(3) = 0,6 \cdot 3 + 25 = 26,8 \approx 27$$

Kannan B muutosnopeus on noin 27 bakteeria/min.

c)

Merkitään derivaattalausekkeet yhtä suuriksi ja ratkaistaan x .

$$a'(x) = b'(x)$$

$$0,24x + 32 = 0,6x + 25$$

$$x = 19,444 \dots \approx 19$$

Muutosnopeudet ovat yhtä suuret noin 19 minuutin kuluttua.

Vastaus **a)** Kanta A: 297 bakteeria, kanta B: 278 bakteeria

b) Kanta A: 33 bakteeria/min, kanta B 27 bakteeria/min

c) 19 minuutin kuluttua

7.13

Derivoidaan funktio muuttujan x suhteen.

$$f'(x) = a \cdot 3x^{3-1} - 2 \cdot 2x + a^2 = 3ax^2 - 4x + a^2$$

a on vakio, joten se säilyy kertoimena

Kun derivaatan nollakohta on $x = 1$, niin derivaatta saa arvon nolla kohdassa $x = 1$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a .

$$f'(1) = 0$$

$$a \cdot 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + a^2 = 0$$

$$a^2 + 3a - 4 = 0$$

$$a = -4 \text{ tai } a = 1$$

Vastaus $a = -4$ tai $a = 1$

7.14

a)

Sievennetään funktio f ja muodostetaan sen derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x - x(2x^2 - 4x - 2) \\ &= 3x - x \cdot 2x^2 - x \cdot (-4x) - x \cdot (-2) \\ &= 3x - 2x^3 + 4x^2 + 2x \\ &= -2x^3 + 4x^2 + 5x \end{aligned}$$

$$f'(x) = -2 \cdot 3x^{3-1} + 4 \cdot 2x^{2-1} + 5 = -6x^2 + 8x + 5$$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = -2$.

$$f'(-2) = -6 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 5 = -35$$

b)

Sievennetään funktio g ja muodostetaan sen derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} g(x) &= (4x^2 - x)(3x^2 - 2) \\ &= 4x^2 \cdot 3x^2 + 4x^2 \cdot (-2) - x \cdot 3x^2 - x \cdot (-2) \\ &= 12x^4 - 8x^2 - 3x^3 + 2x \\ &= 12x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 2x \end{aligned}$$

$$g'(x) = 12 \cdot 4x^{4-1} - 3 \cdot 3x^{3-1} - 8 \cdot 2x^{2-1} + 2 = 48x^3 - 9x^2 - 16x + 2$$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = -2$.

$$g'(-2) = 48 \cdot (-2)^3 - 9 \cdot (-2)^2 - 16 \cdot (-2) + 2 = -386$$

c)

Sievennetään funktio h ja muodostetaan sen derivaattafunktio.

$$\begin{aligned} h(x) &= (2x - 3)^2 \\ &= (2x - 3)(2x - 3) \\ &= 2x \cdot 2x + 2x \cdot (-3) - 3 \cdot 2x - 3 \cdot (-3) \\ &= 4x^2 - 6x - 6x + 9 \\ &= 4x^2 - 12x + 9 \end{aligned}$$

$$h'(x) = 4 \cdot 2x^{2-1} - 12 + 0 = 8x - 12$$

Lasketaan derivaatan arvo, kun $x = -2$.

$$h'(-2) = 8 \cdot (-2) - 12 = -28$$

Vastaus a) -35 b) -386 c) -28

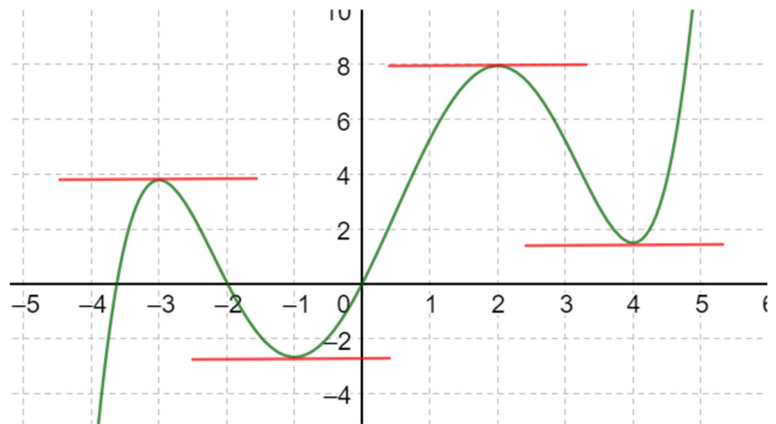
7.15

a)

Kuvassa on funktion f kuvaaja. Sen derivaatta on nolla, kun kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on nolla eli tangenti on vaakasuora.

Kuvan perusteella $f'(x) = 0$, kun

$x = -3$, $x = -1$, $x = 2$ tai $x = 4$.

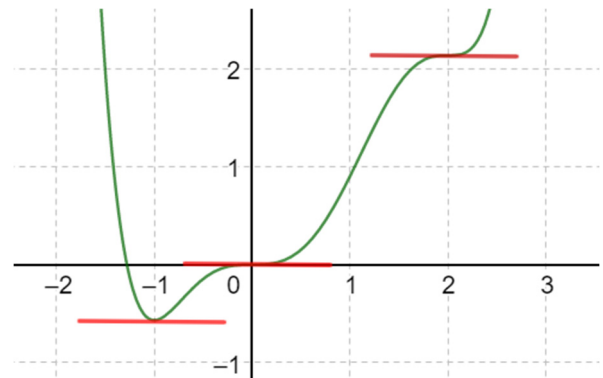


b)

Kuvassa on funktion g kuvaaja. Sen derivaatta on nolla, kun kuvaajalle piirretyn tangentin kulmakerroin on nolla eli tangenti on vaakasuora.

Kuvan perusteella $g'(x) = 0$, kun

$x = -1$, $x = 0$ tai $x = 2$.



Vastaus a) $x = -3$, $x = -1$, $x = 2$ tai $x = 4$

 b) $x = -1$, $x = 0$ tai $x = 2$

7.16

a) Määritetään derivaattafunktio: $f'(x) = \frac{3}{2} \cdot 2x^{2-1} - \frac{2}{3} + 0 = 3x - \frac{2}{3}$

Derivaatta on nolla, kun $f'(x) = 0$. Ratkaistaan siis derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x - \frac{2}{3} &= 0 \quad \| \cdot 3 \\ 9x - 2 &= 0 \\ 9x &= 2 \quad \| : 9 \\ x &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

b) Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x - 4)(5 - 4x) \\ &= 3x \cdot 5 + 3x \cdot (-4x) - 4 \cdot 5 - 4 \cdot (-4x) \\ &= 15x - 12x^2 - 20 + 16x \\ &= -12x^2 + 31x - 20 \end{aligned}$$

Määritetään derivaattafunktio: $f'(x) = -12 \cdot 2x^{2-1} + 31 - 0 = -24x + 31$

Derivaatta on nolla, kun $f'(x) = 0$. Ratkaistaan siis derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -24x + 31 &= 0 \\ -24x &= -31 \quad \| : (-24) \\ x &= \frac{31}{24} \end{aligned}$$

c) Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$\begin{aligned} f(x) &= x(2x - 1)^2 - 4x^3 \\ &= x(2x - 1)(2x - 1) - 4x^3 \\ &= (2x^2 - x)(2x - 1) - 4x^3 \\ &= 2x^2 \cdot 2x + 2x^2 \cdot (-1) - x \cdot 2x - x \cdot (-1) - 4x^3 \\ &= 4x^3 - 2x^2 - 2x^2 + x - 4x^3 \\ &= -4x^2 + x \end{aligned}$$

Määritetään derivaattafunktio: $f'(x) = -4 \cdot 2x^{2-1} + 1 = -8x + 1$

Derivaatta on nolla, kun $f'(x) = 0$. Ratkaistaan siis derivaatan nollakohdat.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -8x + 1 &= 0 \\ -8x &= -1 \quad \| : (-8) \\ x &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Vastaus **a)** $x = \frac{2}{9}$ **b)** $x = \frac{31}{24}$ **c)** $x = \frac{1}{8}$

7.17

a)

Määritetään derivaattafunktio.

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3x^{3-1} - \frac{7}{2} \cdot 2x^{2-1} + 3 - 0 = 2x^2 - 7x + 3$$

Derivaatta on nolla, kun $f'(x) = 0$. Ratkaistaan siis derivaatan nollakohdat.

$$f'(x) = 0$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ tai } x = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

b)

Tangentin kulmakerroin kohdassa x on sama, kuin derivaatan arvo $f'(x)$.

Suorat ovat yhdensuuntaiset, kun niiden kulmakertoimet ovat samat.

Suoran $y = 7x + 11$ kanssa yhdensuuntaisen suoran kulmakerroin on 7 .

Ratkaistaan yhtälö $f'(x) = 7$.

$$f'(x) = 7$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 7$$

$$2x^2 - 7x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4}$$

$$x = \frac{7-9}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ tai } x = \frac{7+9}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Vastaus a) $x = \frac{1}{2}$ tai $x = 3$ b) $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = 4$

7.18

Derivoidaan funktio muuttujan x suhteen.

$$f'(x) = a \cdot 3x^{3-1} + 9 \cdot 2x^{2-1} - 12 + 0 = 3ax^2 + 18x - 12$$

← a on vakio, joten se säilyy kertoimena

Jos hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 1$ on 18, niin derivaatan arvo on 18 eli $f'(1) = 18$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a .

$$f'(1) = 18$$

$$3a \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 - 12 = 18$$

$$3a + 6 = 18$$

$$3a = 12 \quad || : 3$$

$$a = 4$$

Vastaus $a = 4$

7.19

a)

Muodostetaan funktioiden derivaattafunktiot ja lasketaan derivaatan arvo, kun $x = 4$.

$$a'(x) = -0,456x^2 + 0,086x + 8,929$$

$$a'(4) = -0,456 \cdot 4^2 + 0,086 \cdot 4 + 8,929 = 1,977 \approx 2$$

Näyttelyn A hetkellinen muutosnopeus on 2 kävijää/h.

$$b'(x) = -2,817x^2 + 24,65x - 43,569$$

$$b'(4) = -2,817 \cdot 4^2 + 24,65 \cdot 4 - 43,569 = 9,959 \approx 10$$

Näyttelyn B hetkellinen muutosnopeus on 10 kävijää/h.

b)

Merkitään derivaattojen lausekkeet yhtä suuriksi ja ratkaistaan x .

$$a'(x) = b'(x)$$

$$-0,456x^2 + 0,086x + 8,929 = -2,817x^2 + 24,65x - 43,569$$

$$x = 3,0053 \text{ tai } x = 7,3987 \dots$$

Määrittelyehto on $0 \leq x \leq 6$, joten hetkelliset muutosnopeudet ovat samat, kun $x = 3,0053 \text{ h} = 180,318 \text{ min} \approx 180 \text{ min}$.

Vastaus **a)** Näyttely A: 2 kävijää/min, näyttely B: 10 kävijää/h

b) 180 min

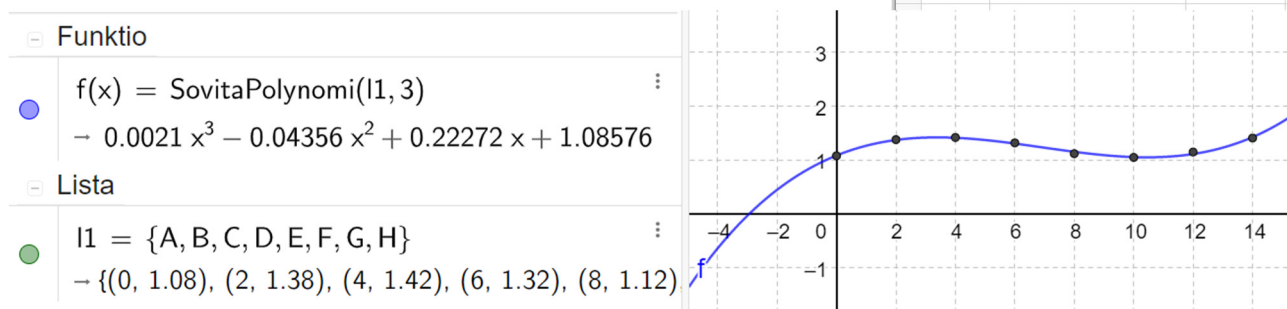
7.20

a)

Muodostetaan pistelistasta, jossa x on vuodesta 2008 kulunut aika vuosina ja y bensiinin litrahinta.

Sovitetaan pistelistaan kolmannen asteen polynomifunktio.

	A	B	C
1	vuosi	aika vuodesta 2008	hinta (€/l)
2	2008	0	1.08
3	2010	2	1.38
4	2012	4	1.42
5	2014	6	1.32
6	2016	8	1.12
7	2018	10	1.05
8	2020	12	1.15



Bensiinin hintaa mallintaa funktio

$$H(x) \approx 0,002x^3 - 0,044x^2 + 0,223x + 1,086 \quad \left(\frac{\text{€}}{\text{litra}} \right)$$

b)

Hetkellinen muutosnopeus saadaan derivaatan avulla. Funktion derivaattafunktio on

$$H'(x) = 0,006x^2 - 0,088x + 0,223.$$

Lasketaan derivaatan arvo kun $x = 2015 - 2008 = 7$.

$$H'(7) = 0,006 \cdot 7^2 - 0,088 \cdot 7 + 0,223 = -0,099$$

Litrahinta laski 0,099 €/vuosi.

c)

Litrahinta nousee nopeudella 0,30 €/litra, kun derivaatan arvo on 0,30.

Muodostetaan yhtälö $H'(x) = 0,30$ ja ratkaistaan x .

$$\begin{aligned} H'(x) &= 0,30 \\ 0,006x^2 - 0,088x + 0,223 &= 0,30 \\ x &= -0,828 \dots \quad \text{tai} \quad x = 15,494 \dots \end{aligned}$$

Litrahintaa ennustetaan, joten valitaan positiivinen arvo $x = 15,494 \dots \approx 15$.

Mallin litrahinta nousee vuonna $2008 + 15 = 2023$ nopeudella 0,30 €/vuosi.

Vastaus

a) $H(x) \approx 0,002x^3 - 0,044x^2 + 0,223x + 1,086 \quad \left(\frac{\text{€}}{\text{litra}} \right)$

b) laski 0,099 €/vuosi

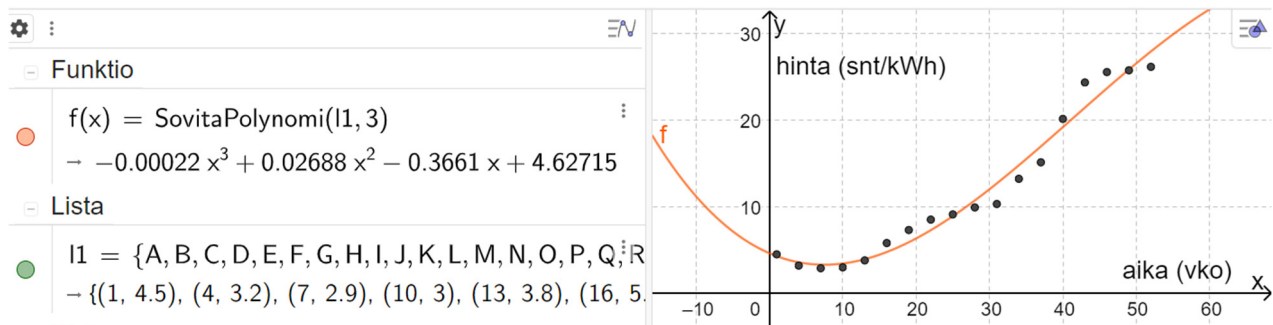
c) vuonna 2023

7.21

a)

Muodostaan pistelista, jossa x on kulunut aika viikkoina ja y sähkön hinta (snt/kWh).

Sovitetaan pistelistaan kolmannen asteen polynomifunktio.



Sähkön kilowattitunnin hintaa mallintaa funktio

$$s(x) = -0,00022x^3 + 0,02688x^2 - 0,36610x + 4,62715 \text{ (snt)}$$

b)

Hetkellinen muutosnopeus saadaan derivaatan avulla. Funktion derivaattafunktio on

$$s'(x) = -0,00065x^2 + 0,05377x - 0,3661.$$

Lasketaan derivaatan arvo kun $x = 35$.

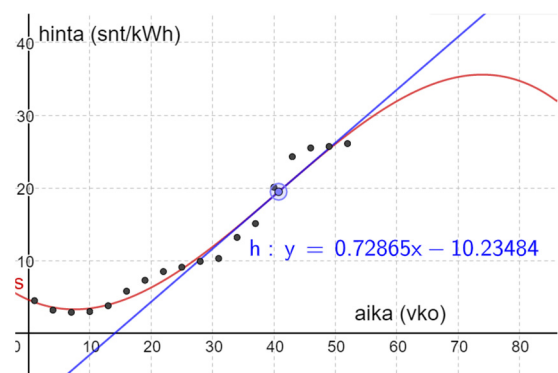
$$s'(35) = -0,00065 \cdot 35^2 + 0,05377 \cdot 35 - 0,3661 = 0,7196 \approx 0,7$$

Litrahinta nousee 0,7 snt/vko.

c)

Piirretään mallin (kertoimet viiden desimaalin tarkkuudella) kuvaajalle tangenti ja tutkitaan sen kulmakerrointa.

Suurin kulmakerroin on $k = 0,728 \dots \approx 0,73$, joten suurin hetkellinen kasvunopeus on 0,73 snt/vko.



Vastaus a) $s(x) \approx -0,00022x^3 + 0,02688x^2 - 0,36610x + 4,62715$ (snt)

b) nousee 0,7 snt/vko

c) 0,73 snt/vko

7.22

a)

Muodostaan pistelistasta, jossa x on vuodesta 2010 kulunut aika vuosina ja y tuotantovälineiden hintaindeksi.

Sovitetaan pistelistaan viidennen asteen polynomifunktio.

$f(x) = \text{SovitaPolynomi}(l1, 5)$	:
$- 0.0077 x^5 - 0.23242 x^4 + 2.5656 x^3 - 12.55722 x^2 + 26.10209 x + 84.76923$	
Lista	:
$l1 = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M\}$	
$- \{(0, 85), (1, 100), (2, 104), (3, 103), (4, 101), (5, 100), (6, 102), (7, 104), (8, 104),$	

Indeksiä mallintaa funktio

$$i(x) \approx 0,0077x^5 - 0,2324x^4 + 2,5656x^3 - 12,5572x^2 + 26,1021x + 84,7692$$

b)

Hetkellinen muutosnopeus saadaan derivaatan avulla.

Funktion derivaatafunkti on

$$i'(x) = 0,0385x^4 - 0,92968x^3 + 7,6968x^2 - 25,1144x + 26,1021$$

Lasketaan derivaatan arvo kun $x = 2013 - 2010 = 3$ ja $x = 2021 - 2010 = 11$.

$$i'(3) = 0,0385 \cdot 3^4 - 0,92968 \cdot 3^3 + 7,6968 \cdot 3^2 - 25,1144 \cdot 3 + 26,1021 \\ = -1,95276 \approx -1,95$$

$$i'(11) = 0,0385 \cdot 11^4 - 0,92968 \cdot 11^3 + 7,6968 \cdot 11^2 - 25,1144 \cdot 11 + 26,1021 \\ = 7,43092 \approx 7,43$$

Vuonna 2013 indeksi väheni nopeudella 1,95 pistettä/vuosi ja vuonna 2021 kasvoi 7,43 pistettä/vuosi.

c)

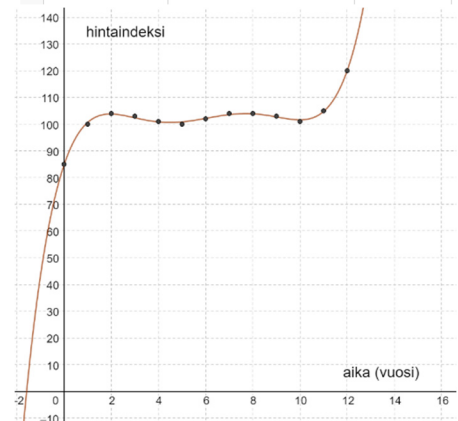
Muodostetaan yhtälö $i'(x) = 200$ ja ratkaistaan x .

$$i'(x) = 0 \\ 0,0385x^4 - 0,92968x^3 + 7,6968x^2 - 25,1144x + 26,1021 = 200 \\ x = -3,0105 \dots \text{ tai } x = 15,0749 \dots$$

Kasvunopeus ylittää 200 noin 15,1 vuoden kuluttua eli vuonna $2010 + 15 = 2025$.

Vastaus a) $i(x) \approx 0,0077x^5 - 0,2324x^4 + 2,5656x^3 - 12,5572x^2 + 26,1021x + 84,7692$
b) 2013 väheni 1,95 pistettä/vuosi, 2021 kasvoi 7,43 pistettä/vuosi
c) vuonna 2025

	A	B	C
1	vuosi	aika vuodesta 2010	indeksi
2	2010	0	85
3	2011	1	100
4	2012	2	104
5	2013	3	103
6	2014	4	101
7	2015	5	100
8	2016	6	102
9	2017	7	104
10	2018	8	104
11	2019	9	103
12	2020	10	101
13	2021	11	105
14	2022	12	120



7.23

Tangentin kulmakerroin kohdassa $x = 1$ on funktion derivaatan arvo kyseisessä kohdassa.

Derivoidaan funktio p ja lasketaan derivaatan arvo $p'(1)$.

$$p'(x) = 3x^2 + 5$$

$$k_{\text{tangentti}} = p'(1) = 3 \cdot 1^2 + 5 = 8$$

Tangentti kulkee pisteen $(1, 6)$ kautta.

Muodostetaan tangentin yhtälö suoran yhtälön kaavan avulla.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 6 = 8(x - 1)$$

$$y - 6 = 8x - 8$$

$$y = 8x - 2$$

Vastaus $y = 8x - 2$

7.24

Paraabelin huippukohdassa tangentti on vaakasuora, joten derivaatan arvo on nolla.

Paraabelin lausekkeen derivaatta on $-2x + b$.

Derivaatan arvo on siis nolla, kun huipun x -koordinaatti on $x = 2$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan b .

$$-2 \cdot 2 + b = 0$$

$$-4 + b = 0$$

$$b = 4$$

Paraabelin tulee kulkea pisteen $(2, 1)$ kautta. Sijoitetaan paraabelin yhtälöön $x = 2$, $y = 1$ ja $b = 4$ ja ratkaistaan vakio c .

$$y = -x^2 + bx + c$$

$$1 = -2^2 + 4 \cdot 2 + c$$

$$c = -3$$

Huippu on pisteessä $(2, 1)$, kun $b = 4$ ja $c = -3$.

Vastaus $b = 4$ ja $c = -3$