

Luku 7 – Tehtävien malliratkaisut

7.1

a)

Puolisuunnikkaan korkeus on 3,0 cm ja yhdensuuntaisten sivujen pituudet 4,0 cm ja 7,0 cm. Lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala.

$$A = \frac{4,0 + 7,0}{2} \cdot 3,0 = 16,5 \approx 17 \text{ (cm}^2\text{)}$$


$$A = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

b)

Puolisuunnikkaan korkeus on 3,0 m ja yhdensuuntaisten sivujen pituudet 2,0 m ja 7,0 m. Lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala.

$$A = \frac{2,0 + 7,0}{2} \cdot 3,0 = 13,5 \text{ (m}^2\text{)}$$


$$A = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

Vastaus a) 17 cm²

 b) 9,0 cm²

7.2

a)

Säännöllisen 10-kulmion kulmien summa on

$$(10 - 2) \cdot 180^\circ = 1440^\circ.$$



n -kulmion kulmien summa
 $(n - 2) \cdot 180^\circ$

Kulman β suuruus on tällöin

$$\frac{1440^\circ}{10} = 144^\circ.$$

b)

Tasakylkisessä puolisuunnikkaassa kantakulmat ovat yhtä suuret sekä kannan vastaiset kulmat ovat yhtä suuret. Puolisuunnikkaan kulmien summa on 360° .

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulman β suuruus.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 108^\circ + 2\beta &= 360^\circ \\ 2\beta &= 144^\circ \\ \beta &= 72^\circ \end{aligned}$$

Vastaus a) 144°

 b) 72°

7.3

Piirretään puolisuunnikkaalle korkeusjana h siten, että syntyy suorakulmainen kolmio.

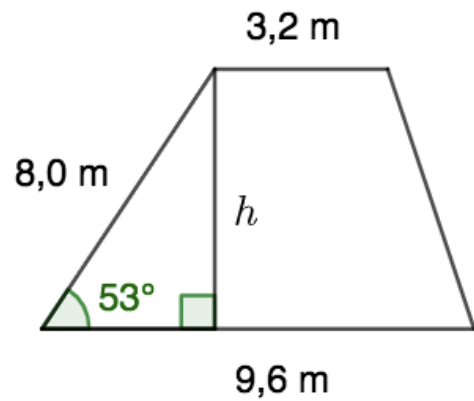
Kolmion hypotenuusa on 8,0 m. Ratkaistaan korkeusjanan h pituus sinin avulla.

$$\begin{aligned}\sin 53^\circ &= \frac{h}{8,0} \\ h &= \sin 53^\circ \cdot 8,0 \\ h &= 6,389 \dots \text{ (m)}\end{aligned}$$

Lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala.

$$A = \frac{9,6 + 3,2}{2} \cdot 6,389 \dots = 40,890 \dots \approx 41 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vastaus 41 m²



7.4

Piirretään tasakylkiselle puolisuunnikkaalle korkeusjanat, joiden pituus on h . Korkeusjanat muodostavat samanlaiset suorakulmaiset kolmiot.

Merkitään suorakulmaisen kolmion toista kateettia kirjaimella x .

Muodostetaan yhdensuuntaisten sivujen pituuksien avulla yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\begin{aligned}4,4 + 2x &= 9,0 \\2x &= 4,6 \\x &= 2,3 \text{ (cm)}\end{aligned}$$

Lasketaan puolisuunnikkaan korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

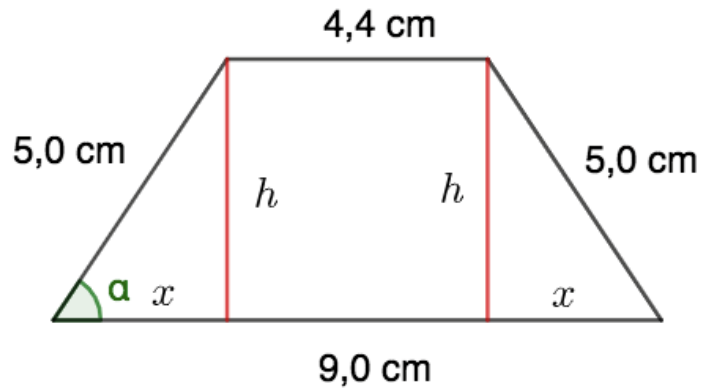
$$\begin{aligned}h^2 + 2,3^2 &= 5,0^2 \\h^2 &= 19,71 \\h &= \pm\sqrt{19,71} \\h &= \pm 4,439 \dots \text{ (cm)}\end{aligned}$$

Korkeus on positiivinen luku, joten $h = 4,439 \dots$ cm.

Lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala.

$$A = \frac{9,0 + 4,4}{2} \cdot 4,439 \dots = 29,741 \dots \approx 30 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus 30 cm^2



7.5

Puolisuunnikkaan korkeusjana h muodostaa suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusan pituus on 6,0 cm ja toinen kateetti 8,0 cm – 4,9 cm = 3,1 cm.

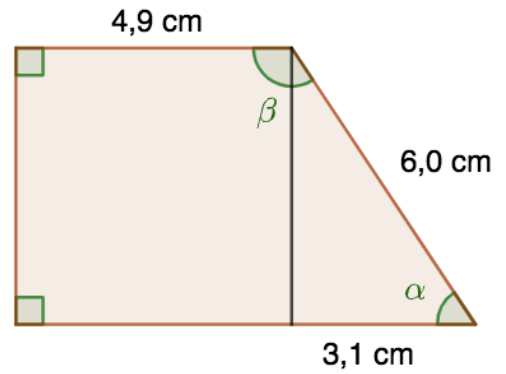
Ratkaistaan kulma α kosinin avulla.

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{3,1}{6,0} \\ \alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{3,1}{6,0}\right) \\ \alpha &\approx 58,891 \dots^\circ \\ \alpha &\approx 59^\circ\end{aligned}$$

Puolisuunnikkaan kulmien summa on 360° . Lasketaan kulman β suuruus.

$$\beta = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 58,891^\circ = 121,109 \dots^\circ \approx 121^\circ$$

Vastaus $\alpha = 59^\circ$, $\beta = 121^\circ$



7.6

15-kulmion kulmien summa on

$$(15 - 2) \cdot 180^\circ = 2340^\circ.$$



n -kulmion kulmien summa
 $(n - 2) \cdot 180^\circ$

Säännöllisen 15-kulmion kulman suuruus on tällöin

$$\frac{2340^\circ}{15} = 156^\circ.$$

Vastaus kulmien summa 2340° , kulman suuruus 156°

7.7

Piirretään tasakylkiselle puolisuunnikkaalle korkeusjanat, joiden pituus on 1 m. Korkeusjanat muodostavat samanlaiset suorakulmaiset kolmiot.

Merkitään suorakulmaisen kolmion toista kateettia kirjaimella a .

Muodostetaan yhdensuuntaisten sivujen pituuksien avulla yhtälö ja ratkaistaan a .

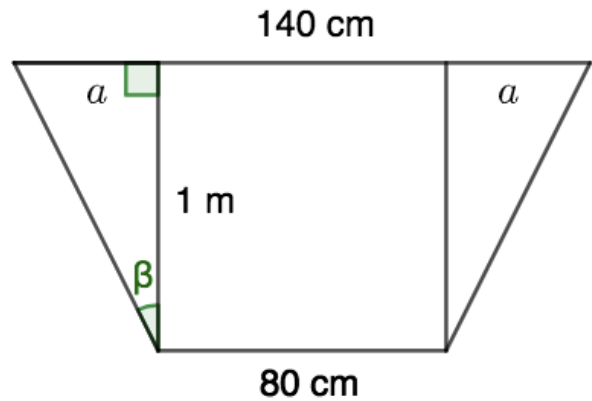
$$\begin{aligned} 80 + 2a &= 140 \\ 2a &= 60 \\ a &= 30 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

Ratkaistaan kulma β tangentin avulla.

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \frac{30}{100} \\ \beta &= 16,699^\circ \end{aligned}$$

Pohjan ja sivun välinen kulma on $90^\circ + 16,699 \dots^\circ = 106,699 \dots^\circ \approx 106,7^\circ$.

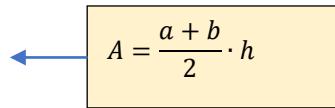
Vastaus $106,7^\circ$



7.8

Muodostetaan yhtälö puolisuunnikkaan pinta-alan avulla ja ratkaistaan korkeus h .

$$\frac{4+8}{2} \cdot h = 30$$


$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$6h = 30 \quad | : 5$$

$$h = 5 \text{ (cm)}$$

Puolisuunnikkaan korkeus on 5 cm.

Vastaus 5 cm

7.9

Piirretään mallikuva.

Merkitään yhdensuuntaisista sivuista lyhyempää kirjaimella x .

Pidemmän sivun pituus on siis $x + 2,3$ (m).

Puolisuunnikkaan korkeus on yhtä pitkä kuin lyhyempi yhdensuuntaisista sivuista, joten korkeusjanan pituus on x .

Muodostetaan pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan x .

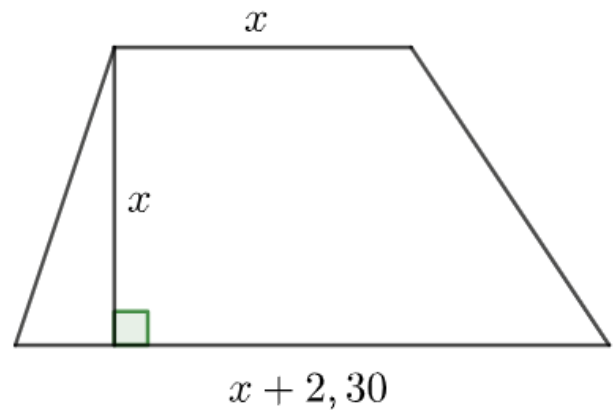
$$\frac{x + (x + 2,3)}{2} \cdot x = 22$$
$$x = -5,300 \dots \text{ tai } x = 4,150 \dots$$

Pituus on positiivinen luku, joten lyhemmän sivun pituus on $x = 4,150 \dots \text{ m} \approx 4,2 \text{ m}$.

Pidemmän yhdensuuntaisen sivun pituus on tällöin

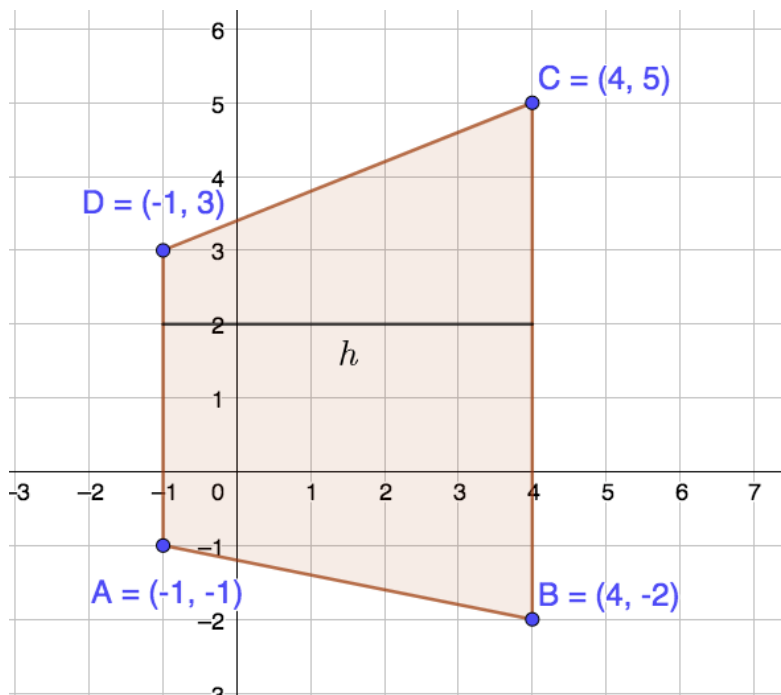
$$4,150 \dots \text{ m} + 2,3 \text{ m} = 6,450 \dots \text{ m} \approx 6,5 \text{ m}.$$

Vastaus 4,2 m ja 6,5 m



7.10

Piirretään puolisuunnikas.



Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisen sivujen pituudet ovat

$$AD = 3 - (-1) = 4 \text{ ja } BC = 5 - (-2) = 7.$$

Korkeus on x -koordinaattien erotus eli $h = 4 - (-1) = 5$.

Lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala.

$$A = \frac{4 + 7}{2} \cdot 5 = \frac{55}{2} = 27,5$$

$$\leftarrow A = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

Vastaus 27,5

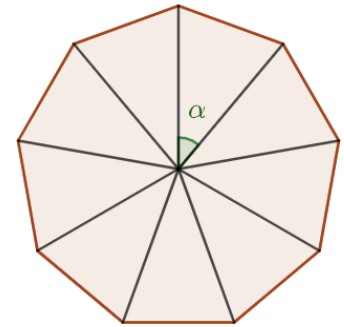
7.11

Säännöllinen 9-kulmio voidaan jakaa yhdeksään samanlaiseen tasakylkiseen kolmioon, joiden kannan pituus on 5,0 cm.

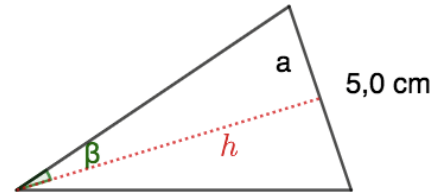
Lasketaan ensin huippukulman α suuruus.

$$\alpha = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

Jaetaan täysi kulma 360° kolmioiden lukumäärällä.



Lasketaan yhden tasakylkisen kolmion pinta-ala. Tasakylkisen kolmion korkeusjana h muodostaa suorakulmaisen kolmion. Merkitään suorakulmaisen kolmion toista kateettia kirjaimella a ja toista terävää kulmaa kirjaimella β .



$$a = \frac{5,0 \text{ cm}}{2} = 2,5 \text{ cm} \quad \beta = \frac{40^\circ}{2} = 20^\circ$$

Korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman.

Ratkaistaan korkeusjanan pituus h tangentin avulla.

$$\tan 20^\circ = \frac{2,5}{h} \\ h = 6,868 \dots (\text{cm})$$

Lasketaan 9-kulmion pinta-ala kolmion pinta-alan avulla.

$$A = 9 \cdot A_k = 9 \cdot \frac{5,0 \cdot 6,868 \dots}{2} = 154,545 \dots \approx 155 (\text{cm}^2)$$

9-kulmion pinta-ala on 155 cm^2 .

Vastaus 155 cm^2

7.12

Jaetaan kuvio suorakulmaan ja puolisuunnikkaaseen.

Piirretään puolisuunnikkaan korkeusjana ja merkitään sitä kirjaimella x .

Korkeusjana muodostaa suorakulmaisen kolmion, jonka hypotenuusan pituus on 13 ja toisen kateetin pituus on $8 - 3 = 5$.

Ratkaistaan x Pythagoraan lauseen avulla.

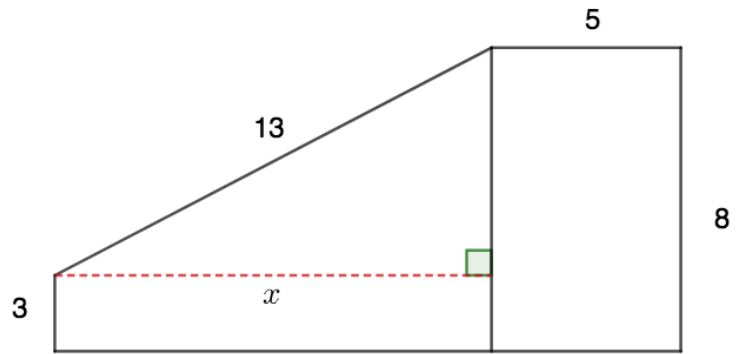
$$x^2 + 5^2 = 13^2$$
$$x = \pm 12$$

Pituus on positiivinen, joten korkeus on 12.

Viisikulmion pinta-ala on puolisuunnikkaan ja suorakulmion summa.

$$A = A_{ps} + A_{sk} = \frac{3 + 8}{2} \cdot 12 + 5 \cdot 8 = 106.$$

Vastaus 106 (pinta-alayksikköä)



7.13

Pakettikortti koostuu suorakulmiosta ja puolisuunnikkaasta.

Suorakulmion kanta on 4,8 cm ja korkeus 6,0 cm.

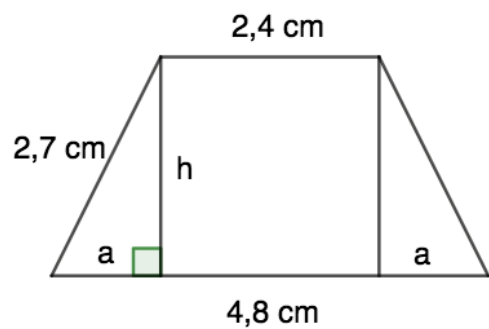
Lasketaan suorakulmion pinta-ala.

$$A_1 = 4,8 \cdot 6,0 = 28,8 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Piirretään puolisuunnikkaasta mallikuva.

Ratkaistaan ensin korkeusjanan h muodostaman suorakulmaisen kolmion toisen kateetin pituus a .

$$\begin{aligned} 2a + 2,4 &= 4,8 \\ a &= 1,2 \text{ (cm)} \end{aligned}$$



Lasketaan puolisuunnikkaan korkeus Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned} h^2 + 1,2^2 &= 2,7^2 \\ h &= \pm 2,418 \dots \end{aligned}$$

Korkeus on positiivinen luku, joten $h = 2,418 \dots$ cm.

Lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala.

$$A_2 = \frac{4,8 + 2,4}{2} \cdot 2,418 \dots = 8,707 \dots \text{ (cm}^2\text{)}$$

Pakettikortin pinta-ala on siis

$$A = A_1 + A_2 = 28,8 \text{ cm}^2 + 8,707 \dots \text{ cm}^2 = 37,507 \dots \approx 38 \text{ cm}^2.$$

Vastaus 38 cm^2

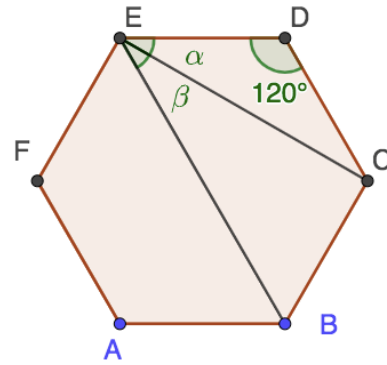
7.14

Säännöllisen 6-kulmion kulmien summa on

$$(6 - 2) \cdot 180^\circ = 720^\circ.$$

Yhden kulman suuruus on tällöin

$$\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ.$$



Kulman α oikea kylki EC on tasakylkisen kolmion kanta, jonka huippukulma on 120° . Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulma α .

$$\begin{aligned} 2\alpha + 120^\circ &= 180^\circ \\ \alpha &= 30^\circ \end{aligned}$$

Kulman β oikea kylki EB jakaa kuusikulmion kahteen yhtä suureen osaan. Näin ollen se puolittaa myös kuusikulmion kulman E . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan β .

$$\alpha + \beta = \frac{120^\circ}{2}$$

$$30^\circ + \beta = 60^\circ$$

$$\beta = 30^\circ$$

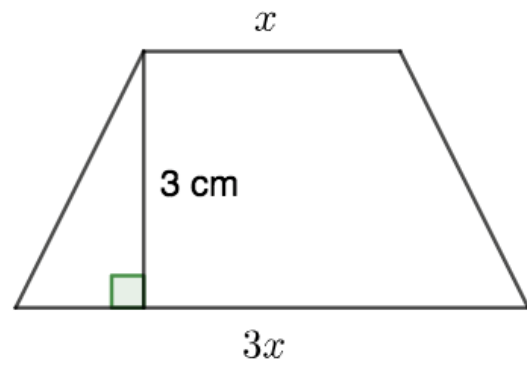
Vastaus $\alpha = 30^\circ, \beta = 30^\circ$

7.15

Piirretään mallikuva.

Muodostetaan pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\begin{aligned}\frac{x + 3x}{2} \cdot 3 &= 12 \\ 2x \cdot 3 &= 12 \\ 6x &= 12 \\ x &= 2 \text{ (cm)}\end{aligned}$$



Yhdensuuntaisista sivuista lyhyemmän pituus on 2 cm ja pidemmän $3 \cdot 2 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$.

Vastaus 2 cm ja 6 cm

7.16

STOP-merkki saadaan, kun neliöstä poistetaan jokaisesta kulmasta samanlainen suorakulmainen kolmio.

Kolmion kanta AF on

$$\frac{90,0 - 30,0}{2} = 30,0 \text{ (cm)}.$$

Kolmion korkeus AE on

$$\frac{90,0 - 30,0}{2} = 30,0 \text{ (cm)}.$$

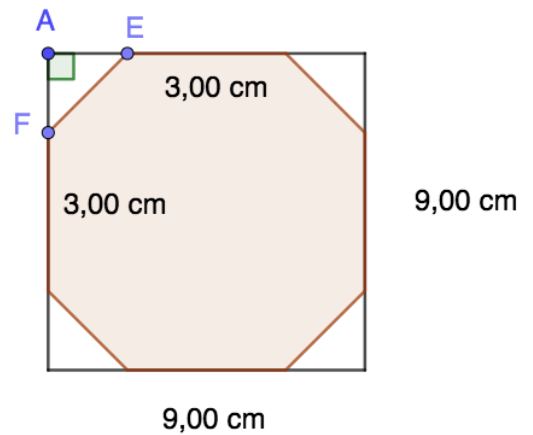
Kolmion pinta-ala on tällöin

$$A_k = \frac{30,0 \cdot 30,0}{2} = 450 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

STOP-merkin pinta-ala on neliön pinta-alan ja neljän kolmion alan erotus.

$$A = 90,0 \cdot 90,0 - 4 \cdot 450 = 6300 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus 6300 cm^2



7.17

Piirretään mallikuva kourun päädyistä.

Merkitään yhdensuuntaisista sivuista lyhyempää kirjaimella x .

Pidemmän sivun pituus on siis $x + 3,5$ (cm).

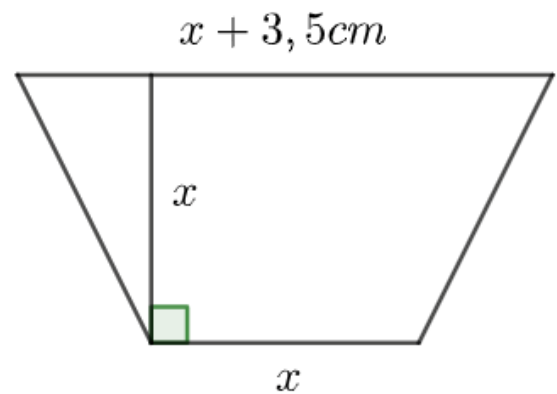
Puolisuunnikkaan korkeus on yhtä pitkä, kuin lyhyempi yhdensuuntaisista sivuista, joten kourun syvyys on x .

Muodostetaan pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x + (x + 3,5)}{2} \cdot x = 65$$
$$x = -8,984 \dots \text{ tai } x = 7,234 \dots$$

Pituus on positiivinen luku, joten kourun syvyys on $x = 7,234 \dots \text{ cm} \approx 7,2 \text{ cm}$.

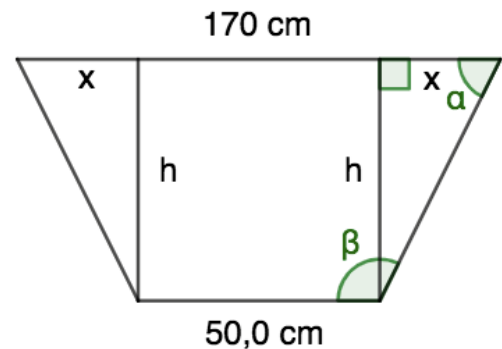
Vastaus 7,2 cm



7.18

Piirretään tasakylkiselle puolisuunnikkaalle korkeusjanat, joiden pituus on h . Korkeusjanat muodostavat samanlaiset suorakulmaiset kolmiot.

Merkitään suorakulmaisen kolmion toista kateettia kirjaimella x .



Muodostetaan yhdensuuntaisten sivujen pituuksien avulla yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\begin{aligned} 0,5 + 2x &= 1,7 \\ x &= 0,6 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Muodostetaan pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan h .

$$\begin{aligned} \frac{1,7 + 0,5}{2} \cdot h &= 2,3 \\ h &= 2,090 \dots \text{ (m)} \end{aligned}$$

Ratkaistaan kulma α tangentin avulla.

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{2,090 \dots}{0,6} \\ \alpha &= 73,988 \dots^\circ \\ \alpha &\approx 74^\circ \end{aligned}$$

Tasakylkisessä kolmiossa kantakulman ja sen vastaisen kulman summa on 180° . Lasketaan kulman β suuruus.

$$\beta = 180^\circ - 73,988 \dots^\circ = 106,012 \dots^\circ \approx 106^\circ.$$

Vastaus $74^\circ, 74^\circ, 106^\circ$ ja 106°

7.19

Säännöllisessä 7-kulmiossa on seitsemän sivua, joten yhden sivun pituus on

$$\frac{105 \text{ m}}{7} = 15 \text{ m}.$$

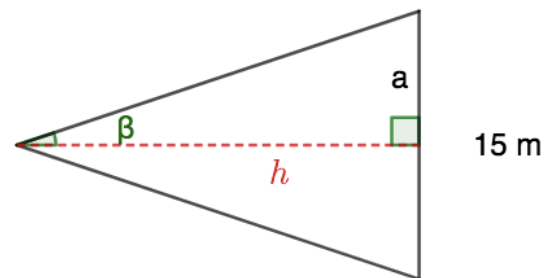
Säännöllinen 7-kulmio voidaan jakaa seitsemään samanlaiseen tasakylkiseen kolmioon, joiden kannan pituus on 15 m.

Lasketaan huippukulman α suuruus.

$$\alpha = \frac{360^\circ}{7} = 51,428 \dots^\circ$$

Jaetaan täysi kulma 180° kolmioiden lukumäärällä.

Lasketaan yhden tasakylkisen kolmion pinta-ala. Tasakylkisen kolmion korkeusjana h muodostaa suorakulmaisen kolmion. Merkitään suorakulmaisen kolmion toista kateettia kirjaimella a ja toista terävää kulmaa kirjaimella β .



$$a = \frac{15 \text{ m}}{2} = 7,5 \text{ m} \quad \beta = \frac{51,428 \dots^\circ}{2} = 25,714 \dots^\circ$$

Korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman.

Ratkaistaan korkeusjanan pituus h tangentin avulla.

$$\tan 25,714 \dots^\circ = \frac{7,5}{h}$$

$$h = 15,573 \dots \text{ (m)}$$

Lasketaan 7-kulmion pinta-ala kolmion pinta-alan avulla.

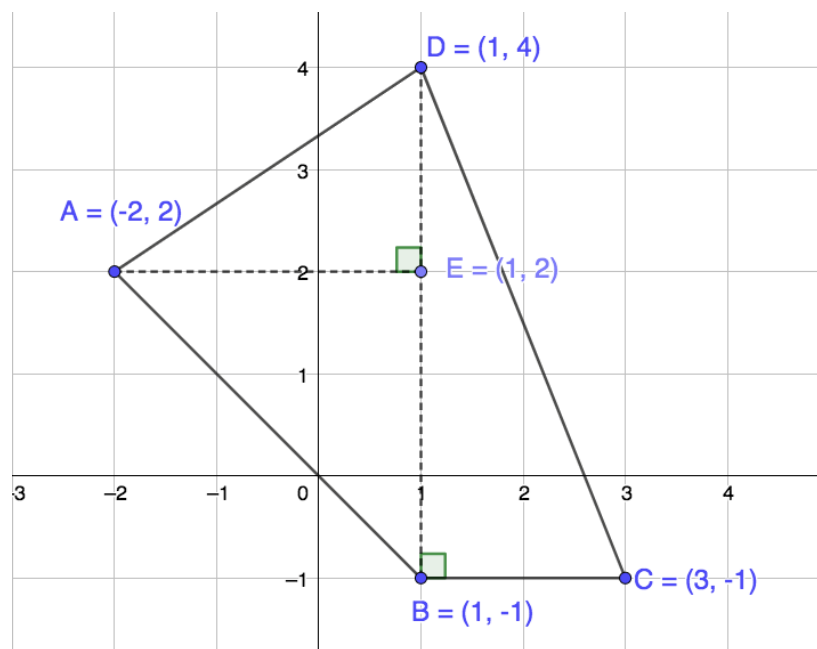
$$A = 7 \cdot A_k = 7 \cdot \frac{15 \text{ m} \cdot 15,573 \dots \text{ m}}{2} = 817,630 \dots \text{ m}^2 \approx 8,2 \text{ a}$$

Rakennuksen pohjan pinta-ala on 8,2 a.

Vastaus 8,2 a

7.20

Piirretään pisteet koordinaatistoon.



Nelikulmio koostuu kahdesta kolmiosta BCD ja ABD .

Kolmion BCD kanta on $BC = 3 - 1 = 2$ ja korkeus $BD = 4 - (-1) = 5$.

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A_{BCD} = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$$

Kolmion ABD kanta on $BD = 5$ ja korkeus $AE = 1 - (-2) = 3$.

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A_{ABD} = \frac{5 \cdot 3}{2} = 7,5$$

Lasketaan nelikulmion pinta-ala.

$$A = A_{BCD} + A_{ABD} = 5 + 7,5 = 12,5$$

Vastaus 12,5

7.21

Lasketaan ensin puolisuunnikkaan muotoisen pädyn pinta-ala.

Pääty koostuu suorakulmiosta ja suorakulmaisesta kolmiosta, jonka toinen kateetti on $6,9 \text{ m} - 4,5 \text{ m} = 2,4 \text{ m}$.

Ratkaistaan korkeusjanan x pituus tangentin avulla.

$$\tan 15^\circ = \frac{2,4}{x}$$
$$x = 8,956 \dots (\text{m})$$

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A_1 = \frac{4,5 + 6,9}{2} \cdot 8,956 \dots = 51,049 \dots (\text{m}^2).$$

Suuremman suorakulmioseinän ala on

$$A_2 = 10,8 \cdot 6,9 = 74,52 (\text{m}^2).$$

Pienemmän suorakulmioseinän ala on

$$A_3 = 10,8 \cdot 4,5 = 48,6 (\text{m}^2).$$

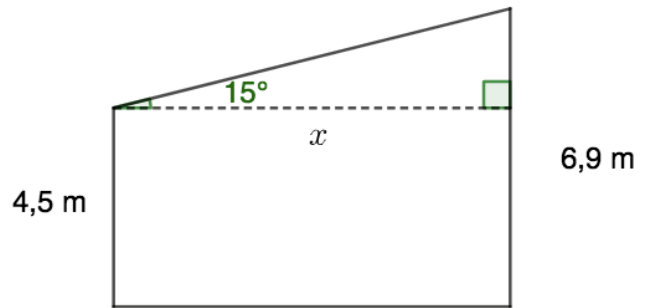
Seinäpinta-alaa on yhteensä

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 51,049 \dots + 74,52 + 48,6 = 225,218 \dots (\text{m}^2).$$

Koska 15 % pinta-alasta on ikkunaa, 85 % on maalattava.

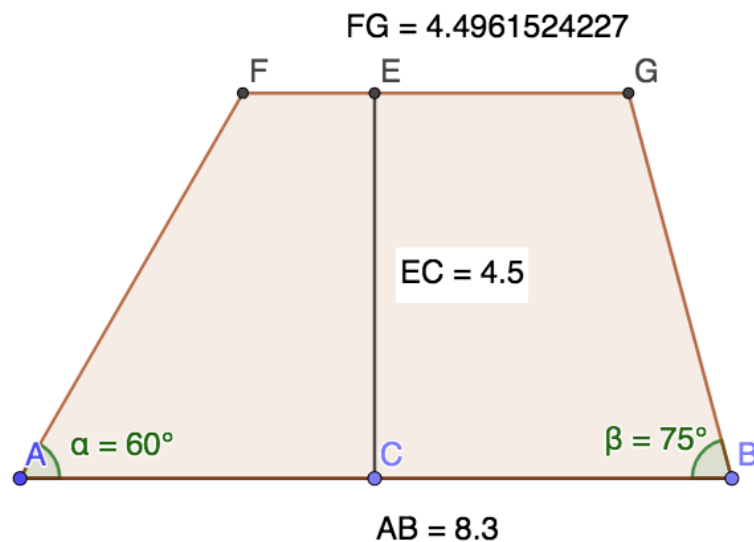
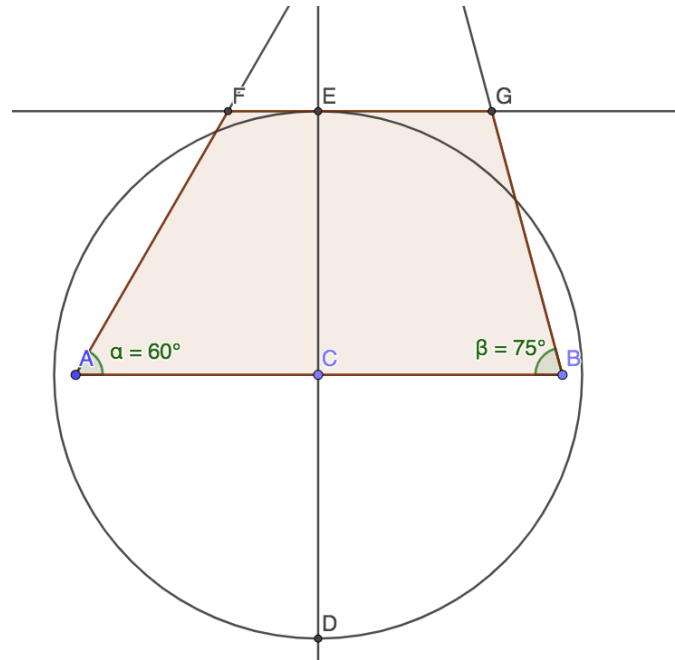
$$0,85 \cdot A = 0,85 \cdot 225,218 \dots \text{m}^2 = 191,435 \dots \text{m}^2 \approx 191 \text{ m}^2.$$

Vastaus 191 m^2



7.22

1. Piirretään jana AB , jonka pituus on 8,3.
2. Piirretään tunnetut kulmat ja kulmien kyljet.
3. Piirretään janalle AB normaali.
4. Piirretään ympyrä, jonka keskipiste C on janalla AB ja jonka säde on 4,5.
5. Piirretään janan AB kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee ympyrän ja normaalin leikkauspisteen E kautta.
6. Täydennetään puolisuunnikkaaksi $ABGF$.



Toisen yhdensuuntaisen sivun pituus on 4,496 ... cm $\approx$ 4,50 cm.

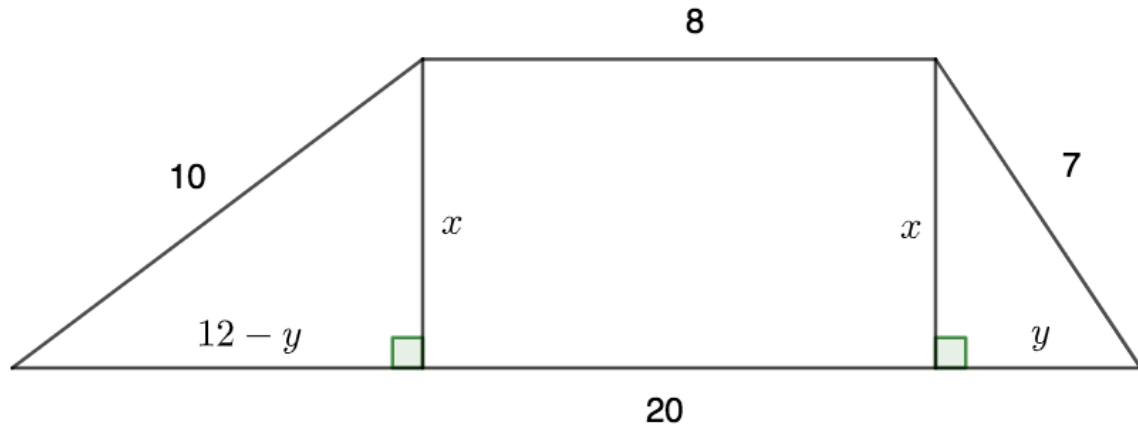
Lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala.

$$A = \frac{8,3 + 4,496 \dots}{2} \cdot 4,5 = 28,791 \dots \approx 28,8 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vastaus sivun pituus 4,50 cm ja pinta-ala 28,8 cm²

7.23

Piirretään puolisuunnikkaalle korkeusjanat niin, että ne muodostavat suorakulmaiset kolmiot. Merkitään korkeusjanan pituutta kirjaimella x .



Merkitään toisen suorakulmaisen kolmion kateettia kirjaimella y . Tällöin toisen kolmion kateetin pituus on $20 - 8 - y = 12 - y$.

Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälöpari ja ratkaistaan x .

$$\begin{cases} x^2 + (12 - y)^2 = 10^2 \\ x^2 + y^2 = 7^2 \end{cases}$$

$$x = -5,829 \dots \text{ (ja } y = 3,875)$$

tai

$$x = 5,829 \dots \text{ (ja } y = 3,875)$$

Korkeus on positiivinen luku, joten $x = 5,829 \dots \approx 5,8$.

Vastaus 5,8

7.24

Piirretään mallikuva. Merkitään 8-kulmion sivun pituutta kirjaimella x ja tasakylkisen kolmion sivun pituutta kirjaimella y .

Pythagoraan lauseesta saadaan, että

$$\begin{aligned}y^2 + y^2 &= x^2 \\ 2y^2 &= x^2\end{aligned}$$

Toisaalta kankaan sivun pituus on 1,2 m, eli

$$2y + x = 1,2.$$

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan x .

$$\begin{cases} 2y^2 = x^2 \\ 2y + x = 1,2 \end{cases}$$

$$x = -2,897 \dots \text{ (ja } y = 2,048 \dots \text{)}$$

tai

$$x = 0,497 \dots \text{ (ja } y = 0,351 \dots \text{)}$$

Sivun pituus on positiivinen, joten $x = 0,497 \dots$ m.

Kanttinauhaa menee jokaiselle sivulle eli $8 \cdot 0,497 \dots \text{ m} = 3,976 \dots \text{ m} \approx 4,0 \text{ m}$.

Vastaus 4,0 m

