

Luku 15 – Tehtävien malliratkaisut

15.1

a)

Pesäpallon halkaisija on 6,9 cm.

Pallon säde on tällöin

$$r = \frac{6,9 \text{ cm}}{2} = 3,45 \text{ cm}.$$

Lasketaan säteen avulla pallon pinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= 4\pi \cdot (3,45 \text{ cm})^2 \\ &= 149,571 \dots \text{ cm}^2 \\ &\approx 150 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$


$$A = 4\pi r^2$$

b)

Lasketaan säteen avulla pallon tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4 \cdot \pi \cdot (3,45 \text{ cm})^3}{3} \\ &= 172,006 \dots \text{ cm}^3 \\ &\approx 170 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$


$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Vastaus a) 150 cm²

 b) 170 cm³

15.2

Ontto osa on myös pallon muotoinen ja sen säde on koko pallon säteen ja kuoren paksuuden erotus.

$$r_{\text{ontto}} = 33 \text{ mm} - 2,0 \text{ mm} = 31 \text{ mm}.$$

Lasketaan ontton osan tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4 \cdot \pi \cdot (31 \text{ mm})^3}{3} \\ &= 124788,248 \dots \text{ mm}^3 \\ &\approx 125 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$


$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Vastaus 125 cm^3

15.3

Marmorikuulan ympärysmitta on 4,40 cm.

Ratkaistaan kuulan säde r ympärysmitan avulla.

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 4,40 \\ r &= 0,700 \dots \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\leftarrow p = 2\pi r$$

Lasketaan säteen avulla kuulan tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4 \cdot \pi \cdot (0,700 \text{ cm})^3}{3} \\ &= 1,436 \dots \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$$\leftarrow V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Lasketaan tiheyden $2,20 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ja tilavuuden avulla kuulan massa.

$$m = 2,20 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 1,436 \dots \text{ cm}^3 = 3,160 \dots \text{ g} \approx 3,16 \text{ g}$$

$$\leftarrow \text{massa} = \text{tiheys} \cdot \text{tilavuus}$$

Vastaus 3,16 g

15.4

Maapallon säde on puolet sen halkaisijasta.

$$r_{\text{Maa}} = \frac{12756 \text{ km}}{2} = 6378 \text{ km}$$

Lasketaan maan tilavuus.

$$V_{\text{Maa}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot (6378 \text{ km})^3}{3} = 1,086 \dots \cdot 10^{12} \text{ km}^3$$

$V = \frac{4\pi r^3}{3}$

Jupiterin säde on 11-kertainen maapallon säteeseen verrattuna eli

$$r_{\text{Jupiter}} = 11 \cdot 6378 \text{ km} = 70158 \text{ km}.$$

Jupiterin tilavuus on

$$V_{\text{Jupiter}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot (70158 \text{ km})^3}{3} = 1,446 \dots \cdot 10^{15} \text{ km}^3$$

Verrataan Jupiterin tilavuutta Maan tilavuuteen.

$$\frac{V_{\text{Jupiter}}}{V_{\text{Maa}}} = \frac{1,446 \dots \cdot 10^{15} \text{ km}^3}{1,086 \dots \cdot 10^{12} \text{ km}^3} = 1331$$

Jupiterin tilavuus on 1331-kertainen Maan tilavuuteen verrattuna.

Vastaus 1331-kertainen

15.5

a)

Karttapallon ympärysmitta on 151 cm.

Ratkaistaan pallon säde r ympärysmittan avulla.

$$2\pi r = 151$$

$$r = 24,032 \dots \text{ cm}$$

$$\leftarrow \boxed{p = 2\pi r}$$

Lasketaan säteen avulla pallon pinta-ala.

$$A = 4\pi \cdot (24,032 \dots \text{ cm})^2$$

$$= 7257,783 \dots \text{ cm}^2$$

$$\approx 7260 \text{ cm}^2$$

$$\leftarrow \boxed{A = 4\pi r^2}$$

b)

Lasketaan säteen avulla pallon tilavuus.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot (24,032 \dots \text{ cm})^3}{3}$$

$$= 58140,645 \dots \text{ cm}^3$$

$$\approx 58,1 \text{ l}$$

$$\leftarrow \boxed{V = \frac{4\pi r^3}{3}}$$

Vastaus a) 7260 cm^2

 b) $58,1 \text{ l}$

15.6

Herneen ympärysmitta on 14,8 mm.

Ratkaistaan herneen säde r ympärysmitan avulla.

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 14,8 \\ r &= 2,355 \dots \text{ mm} \end{aligned}$$


$$p = 2\pi r$$

Lasketaan säteen avulla herneen tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4 \cdot \pi \cdot (2,355 \dots \text{ mm})^3}{3} \\ &= 55,743 \dots \text{ mm}^3 \end{aligned}$$


$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Astian tilavuus on $3,00 \text{ l} = 3,00 \text{ dm}^3 = 3000000 \text{ mm}^3$.

Lasketaan kuinka monta hernettä mahtuu astiaan.

$$\frac{3000000 \text{ mm}^3}{55,743 \dots \text{ mm}^3} = 54800,825 \approx 54800$$

Astiassa voi olla korkeintaan 54 800 hernettä.

Vastaus 54 800 hernettä

15.7

Muodostetaan kuun pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan säde r .

$$4\pi \cdot r^2 = 3,788 \cdot 10^7$$
$$r = \pm 1736,201 \dots$$



$A = 4\pi r^2$

Pituus on aina positiivinen, joten $r = 1736,201 \dots$ km.

Lasketaan säteen avulla kuun tilavuus.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot (1736,201 \dots \text{ km})^3}{3}$$
$$= 2,19222 \dots \cdot 10^{10} \text{ km}^3$$
$$\approx 2,192 \cdot 10^{10} \text{ km}^3$$



$V = \frac{4\pi r^3}{3}$

Vastaus $2,192 \cdot 10^{10} \text{ km}^3$

15.8

Muodostetaan lentopallon pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan säde r .

$$4\pi r^2 = 1340$$
$$r = \pm 10,326 \dots$$

$$\leftarrow A = 4\pi r^2$$

Pituus on aina positiivinen, joten $r = 10,326 \dots$ cm.

Lasketaan säteen avulla pallon tilavuus.

$$V_{\text{pallo}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot (10,326 \dots \text{ cm})^3}{3} = 4612,442 \dots \text{ cm}^3$$

$$\leftarrow V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Ontto osa on pallo, jonka säde on pallon säteen ja pallon kuoren paksuuden erotus.

$$r_{\text{ontto}} = 10,326 \dots \text{ cm} - 0,30 \text{ cm} = 10,026 \dots \text{ cm}$$

Onton osan tilavuus on

$$V_{\text{ontto}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot (10,026 \dots \text{ cm})^3}{3} = 4222,008 \dots \text{ cm}^3.$$

Verrataan ontton osan tilavuutta koko pallon tilavuuteen.

$$\frac{V_{\text{ontto}}}{V_{\text{pallo}}} = \frac{4222,008 \dots \text{ cm}^3}{4612,442 \dots \text{ cm}^3} = 0,915 \dots \approx 92 \%$$

Vastaus 92 %

15.9

Muodostetaan biljardipallon tilavuuden avulla yhtälö ja ratkaistaan säde r .

$$\frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = 97$$
$$r = 2,850 \dots \text{ (cm)}$$

Biljardipallon halkaisija on

$$d = 2r = 2 \cdot 2,850 \dots \text{ cm} = 5,700 \dots \text{ cm} \approx 5,7 \text{ cm}.$$

Vastaus 5,7 cm

15.10

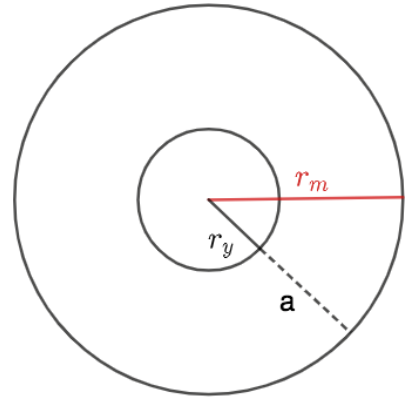
Muodostetaan ytimen tilavuuden avulla yhtälö ja ratkaistaan ytimen tilavuus r_y .

$$\frac{4 \cdot \pi \cdot r_y^3}{3} = 1,808 \cdot 10^{11}$$
$$r = 3507,814 \dots (\text{km})$$

Lasketaan porausmatka a maapallon säteen ja ytimen säteen erotuksena.

$$a = r_m - r_s = 6378 \text{ km} - 3507,814 \dots \text{ km} = 2870,186 \dots \text{ km} \approx 2870 \text{ km}$$

Vastaus 2870 km



15.11

Piirretään poikkileikkaus paketista.

Koska pallo koskettaa reunoja kaikilla reunoilla, sen säde on puolet laatikon sivun pituudesta.

$$r = \frac{22 \text{ cm}}{2} = 11 \text{ cm}$$

Lasketaan pallon ja paketin tilavuudet.

$$V_{\text{pallo}} = \frac{4\pi(11 \text{ cm})^3}{3} = 5575,279 \dots \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{paketti}} = (22 \text{ cm})^3 = 10648 \text{ cm}^3$$

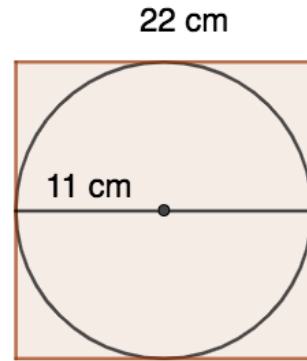
Tyhjää tilaa on tällöin

Verrataan pallon tilavuutta paketin tilavuuteen.

$$\frac{V_{\text{pallo}}}{V_{\text{paketti}}} = \frac{5575,279 \dots \text{ cm}^3}{10648 \text{ cm}^3} = 0,523 \dots \approx 52 \%$$

Tyhjää tilaa on on tällöin $100 \% - 52 \% = 48 \%$.

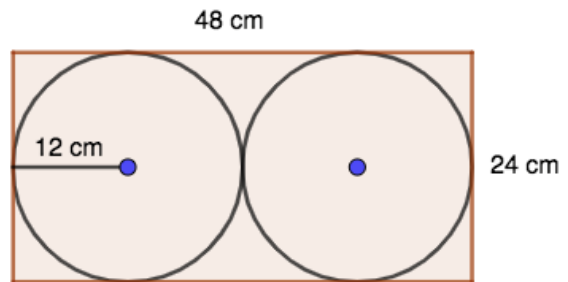
Vastaus 48 %



15.12

Piirretään mallikuva poikkileikkauksesta.

Lieriön korkeus on 4-kertainen pallon säteeseen verrattuna eli $4 \cdot 12 \text{ cm} = 48 \text{ cm}$ ja lieriön pohjaympyrän säde on sama kuin pallon säde eli 12 cm.



Lasketaan pallojen tilavuus.

$$V_{\text{pallot}} = 2 \cdot \frac{4\pi \cdot (12 \text{ cm})^3}{3} = 14476,458 \dots \text{ cm}^3$$

Lasketaan lieriön tilavuus.

$$V_{\text{lieriö}} = \pi \cdot (12 \text{ cm})^2 \cdot 48 \text{ cm} = 21714,688 \dots \text{ cm}^3$$

Verrataan pallojen tilavuutta lieriön tilavuuteen.

$$\frac{V_{\text{pallot}}}{V_{\text{lieriö}}} = \frac{14476,458 \dots \text{ cm}^3}{21714,688 \dots \text{ cm}^3} = 0,666 \dots \approx 67 \%$$

Pallojen tilavuus on 67 % lieriön tilavuudesta.

Vastaus 67 %

15.13

Vedenpinta nousee pallon tilavuuden verran.

Lasketaan pallon tilavuus.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot (1,3 \text{ cm})^3}{3} = 9,202 \dots \text{ cm}^3 = 9,202 \dots \text{ ml}$$

Vedenpinta nousee lukemaan

$$120 \text{ ml} + 9,202 \dots \text{ ml} = 129,202 \dots \text{ ml} \approx 129 \text{ ml}$$

Vastaus 129 ml

15.14

Muodostetaan bakteerin ja viruksen ympärysmittojen avulla yhtälöt ja ratkaistaan niiden säteet.

$$\begin{aligned}2\pi r_b &= 6,3 \cdot 10^{-6} & 2\pi r_v &= 377 \cdot 10^{-9} \\ r_b &= \frac{6,3 \cdot 10^{-6}}{2\pi} & r_v &= \frac{377 \cdot 10^{-9}}{2\pi} \\ r_b &= 1,002 \dots \cdot 10^{-6} \text{ (m)} & r_v &= 6,000 \dots \cdot 10^{-8} \text{ (m)}\end{aligned}$$

Lasketaan bakteerin ja viruksen tilavuudet

$$V_b = \frac{4 \cdot \pi \cdot (1,002 \dots \cdot 10^{-6} \text{ m})^3}{3} = 4,213 \dots \cdot 10^{-18} \text{ m}^3$$

$$V_v = \frac{4 \cdot \pi \cdot (6,000 \dots \cdot 10^{-8} \text{ m})^3}{3} = 9,047 \dots \cdot 10^{-22} \text{ m}^3$$

Verrataan bakteerin tilavuutta viruksen tilavuuteen.

$$\frac{V_b}{V_v} = \frac{4,213 \dots \cdot 10^{-18} \text{ m}^3}{9,047 \dots \cdot 10^{-22} \text{ m}^3} = 4656,792 \dots \approx 4700$$

Bakteerin tilavuus on 4700-kertainen viruksen tilavuuteen nähden.

Vastaus 4700-kertainen

15.15

Muodostetaan appelsiinien ympärysmittojen avulla yhtälöt ja ratkaistaan niiden säteet.

$$\begin{array}{ll} 2\pi r_1 = 251 & 2\pi r_2 = 239 \\ r_1 = 39,947 \dots \text{ (mm)} & r_2 = 38,038 \dots \text{ (mm)} \end{array}$$

Lasketaan appelsiinin tilavuus kuoren kanssa.

$$V_1 = \frac{4 \cdot \pi \cdot (39,947 \dots \text{ mm})^3}{3} = 267018,356 \dots \text{ mm}^3$$

Lasketaan appelsiinin tilavuus ilman kuorta.

$$V_2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot (38,038 \dots \text{ mm})^3}{3} = 230537,527 \dots \text{ mm}^3$$

Kuoren tilavuus on

$$V_k = V_1 - V_2 = 267018,356 \dots \text{ mm}^3 - 230537,527 \dots \text{ mm}^3 = 36480,828 \dots \text{ mm}^3$$

Verrataan kuoren tilavuutta appelsiinin tilavuuteen.

$$\frac{V_k}{V_1} = \frac{36480,828 \dots \text{ mm}^3}{267018,356 \dots \text{ mm}^3} = 0,1366 \dots \approx 13,7 \%$$

Vastaus 13,7 %

15.16

Lasketaan muovailuvahapallon pinta-ala.

$$\begin{aligned}A_{\text{pallo}} &= 4\pi \cdot (15,7 \text{ cm})^2 \\ &= 3097,484 \dots \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Kun muovailuvahapallo halkaistaan keskeltä, pinta-ala lisääntyy kahden ympyrän verran. Ympyröiden pinta-ala on pallon säde 15,7 cm.

Lasketaan ympyröiden pinta-ala.

$$A_{\text{ympyrät}} = 2 \cdot \pi \cdot (15,7 \text{ cm})^2 = 1548,742 \dots \text{ cm}^2$$

Kahden puolipallon yhteispinta-ala on

$$A = A_{\text{pallo}} + A_{\text{ympyrät}} = 3097,484 \dots \text{ cm}^2 + 1548,742 \dots \text{ cm}^2 = 4646,226 \dots \text{ cm}^2$$

Verrataan puolipallojen pinta-alaa pallon pinta-alaan.

$$\frac{A}{A_{\text{pallo}}} = \frac{4646,226 \dots \text{ cm}^2}{3097,484 \dots \text{ cm}^2} = 1,5 \approx 150\%$$

Puolipallojen pinta-ala on $150\% - 100\% = 50\%$ suurempi kuin pallon.

Vastaus 50 %

15.17

a)

Lasketaan pallon tilavuus massan ja tiheyden avulla.

$$V = \frac{536 \text{ g}}{8,96 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} = 59,821 \dots \text{ cm}^3$$

$$\leftarrow \text{tilavuus} = \frac{\text{massa}}{\text{tiheys}}$$

Muodostetaan pallon tilavuuden avulla yhtälö ja ratkaistaan pallon säde r .

$$\begin{aligned} \frac{4\pi r^3}{3} &= 59,821 \dots \\ r &= 2,426 \dots \\ r &\approx 2,43 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

b)

Lasketaan kullan tiheys massan ja tilavuuden avulla.

$$\rho = \frac{1161 \text{ g}}{59,821 \dots \text{ cm}^3} = 19,407 \dots \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 19,41 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$\leftarrow \text{tiheys} = \frac{\text{massa}}{\text{tilavuus}}$$

Vastaus a) 2,43 cm

 b) $19,41 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

15.18

Muodostetaan atomin ja ytimen tilavuuksien avulla yhtälöt ja ratkaistaan niiden säteet.

$$\begin{aligned}\frac{4\pi r_y^3}{3} &= 2,14 \cdot 10^{-42} & \frac{4\pi r_a^3}{3} &= 2,24 \cdot 10^{-29} \\ r_y &= 7,994 \dots \cdot 10^{-15} \text{ (m)} & r_a &= 1,75 \dots \cdot 10^{-10} \text{ (m)}\end{aligned}$$

Ytimen halkaisija on $d_y = 2 \cdot r_y = 2 \cdot 7,994 \dots \cdot 10^{-15} \text{ m} = 1,598 \dots \cdot 10^{-14} \text{ m}$.

Atomin halkaisija on $d_a = 2 \cdot r_a = 2 \cdot 1,75 \dots \cdot 10^{-10} \text{ m} = 3,500 \dots \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Verrataan ytimen halkaisijaa atomin halkaisijaan.

$$\frac{d_y}{d_a} = \frac{1,598 \dots \cdot 10^{-14} \text{ m}}{3,500 \dots \cdot 10^{-10} \text{ m}} = 0,00004565 \dots \approx 0,00457 \%$$

Vastaus 0,00457 %

15.19

Puolipallon pinta-ala koostuu r -säteisen ympyrän pinta-alasta sekä puolikkaan r -säteisen pallon pinta-alasta.

Muodostetaan kokonaispinta-alan yhtälö ja ratkaistaan r .

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 + \pi r^2 &= 2240 \\ 3\pi r^2 &= 2240 \\ r &= \pm 15,416 \dots\end{aligned}$$

Pituus on aina positiivinen, joten $r = 15,416 \dots \text{ cm}^2$.

Lasketaan säteen avulla kokonaisen pallon tilavuus.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot (15,416 \dots \text{ cm})^3}{3} = 15348,075 \dots \text{ cm}^3$$

Puolipallon tilavuus on puolet kokonaisen pallon tilavuudesta.

$$\frac{15348,075 \dots \text{ cm}^3}{2} = 7674,037 \dots \text{ cm}^3 \approx 7670 \text{ cm}^3$$

Vastaus 7670 cm^3

15.20

Lasketaan säteen avulla saippuakuplan tilavuus ennen putoamista.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot (3,8 \text{ cm})^3}{3} = 229,847 \dots \text{ cm}^3$$

Puolipallon tilavuus on puolet kokonaisen pallon tilavuudesta.

Muodostetaan tilavuuden avulla yhtälö ja ratkaistaan puolipallon säde.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = 229,847..$$
$$r = 4,787 \dots (\text{cm})$$

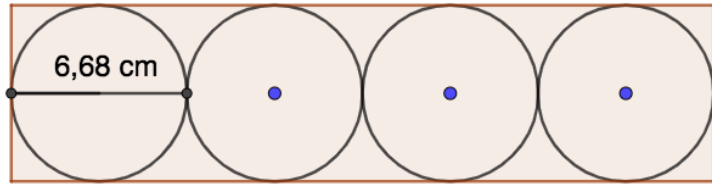
Puolipallon halkaisija on

$$d = 2r = 2 \cdot 4,787 \dots \text{ cm} = 9,574 \dots \text{ cm} \approx 9,6 \text{ cm}.$$

Vastaus 9,6 cm

15.21

Piirretään mallikuva poikkileikkauksesta.



Lieriön korkeus on 4-kertainen pallon halkaisijaan verrattuna eli $4 \cdot 6,68 \text{ cm} = 26,72 \text{ cm}$ ja lieriön pohjaympyrän säde on sama kuin pallon säde eli $\frac{6,68 \text{ cm}}{2} = 3,34 \text{ cm}$.

Lasketaan pallojen tilavuus.

$$V_{\text{pallot}} = 4 \cdot \frac{4\pi \cdot (3,34 \text{ cm})^3}{3} = 624,292 \dots \text{ cm}^3$$

Lasketaan lieriön tilavuus.

$$V_{\text{lieriö}} = \pi \cdot (3,34 \text{ cm})^2 \cdot 26,72 \text{ cm} = 947,686 \dots \text{ cm}^3$$

Verrataan pallojen tilavuutta lieriön tilavuuteen.

$$\frac{V_{\text{pallot}}}{V_{\text{lieriö}}} = \frac{624,292 \dots \text{ cm}^3}{947,686 \dots \text{ cm}^3} = 0,666 \dots \approx 67 \%$$

Pallot täyttävät 67 % pakkauksesta.

Vastaus 67 %

15.22

Piirretään poikkileikkauksesta mallikuva.

Koska pallo on suurin mahdollinen, se sivuaa kartion reunoja.

Kartion poikkileikkaus on tasakylkinen kolmio, jonka kyljet ovat pallon poikkileikkauksen eli ympyrän tangentteja.

Ratkaistaan kulma FCA tangentin avulla.

$$\sin \alpha = \frac{3,0}{7,0}$$

$$\alpha = 25,376 \dots^\circ$$

Ratkaistaan kartion pohjaympyrän säde r tangentin avulla.

$$\tan 25,376 \dots^\circ = \frac{r}{10,0}$$

$$r = 4,743 \dots \text{ (cm)}$$

Lasketaan kartion tilavuus.

$$V_{\text{kartio}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (4,743 \dots \text{ cm})^2 \cdot 10 \text{ cm} = 235,618 \dots \text{ cm}^3$$

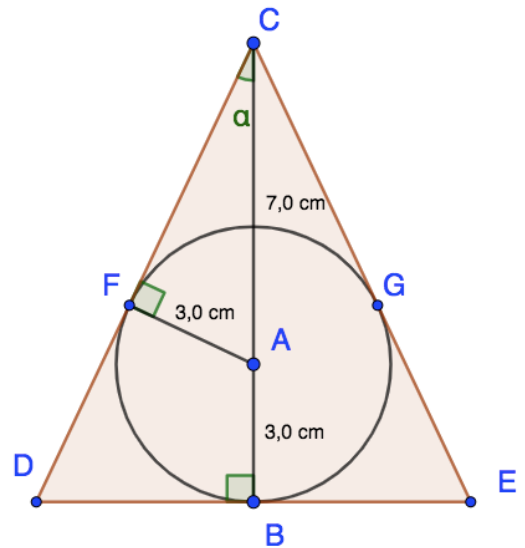
Lasketaan pallon tilavuus säteen avulla.

$$V_{\text{pallo}} = \frac{4\pi \cdot (3,0 \text{ cm})^3}{3} = 37,699 \dots \text{ cm}^3$$

Verrataan pallon tilavuutta kartion tilavuuteen.

$$\frac{V_{\text{pallo}}}{V_{\text{kartio}}} = \frac{37,699 \dots \text{ cm}^3}{235,618 \dots \text{ cm}^3} = 0,160 \dots \approx 16 \%$$

Vastaus 16 %



15.23

Pallon säde on $r = \frac{20 \text{ mm}}{2} = 10 \text{ mm} = 1,0 \text{ cm}$.

Lasketaan pallojen tilavuus.

$$V = 5 \cdot \frac{4\pi \cdot (1,0 \text{ cm})^3}{3} = 20,943 \dots \text{ cm}^3$$

Jos mehun pinta nousee $7 \text{ mm} = 0,7 \text{ cm}$, täytyy $0,7 \text{ cm}$ korkuisen ympyrälieriön tilavuuden olla sama kuin pallojen.

Muodostetaan lieriön tilavuuden avulla yhtälö ja ratkaistaan lasin pohjaympyrän säde r_{lasi} .

$$\begin{aligned}\pi r^2 \cdot 0,7 &= 20,943 \dots \\ r &= \pm 3,086 \dots \text{ cm}\end{aligned}$$

Pituus on aina positiivinen, joten $r = 3,086 \dots \text{ cm}$.

Lasin pohjan halkaisija on siis

$$d = 2r_{\text{lasi}} = 2 \cdot 3,086 \dots \text{ cm} = 6,172 \dots \text{ cm} \approx 6,2 \text{ cm}.$$

Vastaus $6,2 \text{ cm}$