

MAB10_derivaatta

Sisällys

1. Kuulantyyntö	12 p.
2. Polynomifunktio	12 p.
3. Funktion muutosnopeus	12 p.
4. Derivoiva avaruusluotain	12 p.
5. Paraabelin tangentti	12 p.
6. Kuvaajat ja derivaatta	12 p.
7. Suurin pinta-ala	12 p.
8. Myyntitulojen maksimointi	12 p.
9. Myyntitulojen maksimointi	12 p.
10. Huippuparaabeli	12 p.
11. Taitellaan pahvista laatikko	Aineisto 12 p.
12. Polynomin merkkikaavio	12 p.
13. Funktion väheneminen	12 p.
Koe yhteensä	156 p.

1. Kuulantyyntö 12 p.

Ryan Crouserin 18.2.2023 työntämän huipputuloksen perusteella on mallinnettu kuulantyyntön tulosta metreinä polynomifunktiolla

$$f(x) = -0,0126x^2 + 1,07x + 0,630,$$

kun muuttuja $0 \leq x \leq 60$ on työntön suuntakulma asteina (vaakatasosta mitattuna). Määritä derivaattaa käyttämällä suurimpaan työntötulokseen johtava työntökulma asteen sadasosan tarkkuudella ja sitä vastaava työntötulos yhden senttimetrin tarkkuudella.

2. Polynomifunktio 12 p.

Olkoon $p(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 48x$.

1. Laske derivaatta $p'(x)$ ja ratkaise derivaatan nollakohdat. (4 p.)
2. Millä väleillä funktio p on kasvava? (4 p.)
3. Määritä funktion p pienin arvo. Missä kohdassa se saavutetaan? (4 p.)

3. Funktion muutosnopeus (12 p.)

Tarkastellaan polynomifunktiota $p(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 1$.

1. Osoita laskulla, että välillä $0 \leq x \leq 3$ funktion p keskimääräinen muutosnopeus on 4. (4 p.)
2. Määritä väliltä $0 \leq x \leq 3$ kaikki sellaiset kohdat, joissa funktion p hetkellinen muutosnopeus on yhtä suuri kuin keskimääräinen muutosnopeus 4. (8 p.)

4. Derivoiva avaruusluotain 12 p.

Avaruusluotain mittaa planeetan lämpötilaa. Sen piti lähettää tietoa lämpötilasta funktiona $T(t)$ aikavälillä $0 \leq t \leq 9$. Ohjelmistovirheen takia saatiin kuitenkin vain tieto, että funktion derivaatta $T'(t)$ on negatiivinen, kun $t < 2$, positiivinen, kun $2 < t < 4$, ja jälleen negatiivinen, kun $t > 4$. Tutkijat miettivät, mitä tämän perusteella voidaan sanoa lämpötilasta T .

1. Hahmottele esimerkki lämpötilafunktion T kuvaajasta, jolla on lisäksi se ominaisuus, että lämpötilan suurin arvo saavutetaan hetkellä $t = 4$. (6 p.)
2. Hahmottele esimerkki lämpötilafunktion T kuvaajasta, jolla on lisäksi se ominaisuus, että lämpötilan suurinta arvoa ei saavuteta hetkellä $t = 4$. (6 p.)

Selitä kummassakin tapauksessa sanallisesti, miten vaaditut lämpötilafunktion ominaisuudet näkyvät kuvaajassa.

5. Paraabelin tangentti 12 p.

Paraabeli $y = x^2 + bx + c$ kulkee pisteen $(9, 5)$ kautta, ja siinä sen tangentin kulmakerroin on 2 . Määritä kertoimet b ja c derivaatan avulla.

6. Kuvaajat ja derivaatta 12 p.

Funktioista f ja g tiedetään, että $f(0) = 0$ ja $g(0) = 5$ sekä

$$2 \leq f'(x) \leq 3 \quad \text{ja} \quad 1 \leq g'(x) \leq 2$$

kaikilla x .

1. Oletetaan, että funktioiden f ja g kuvaajat ovat suoria. Perustele graafisesti tai laskemalla, että $4 \leq f(2) \leq 6$ ja $7 \leq g(2) \leq 9$. (6 p.)
2. Oletetaan, että funktioiden f ja g kuvaajat eivät välttämättä ole suoria. Mitkä seuraavista tilanteista ovat mahdollisia:
 - $f(2) = g(2)$
 - $f(2) < g(2)$
 - $f(2) > g(2)$

Voit hyödyntää perustelussasi seuraavaa tietoa:

Jos kahdella funktiolla on sama arvo kohdassa **0** ja toisen funktion derivaatta on suurempi välillä **[0, 2]**, niin tämän funktion arvo on suurempi kohdassa **2**. (6 p.)

7. Suurin pinta-ala 12 p.

Suorakulmion alareuna on positiivisella x -akselilla, vasen pystyreuna positiivisella y -akselilla ja oikea yläkulma paraabelilla $y = -x^2 + 9$. Määritä derivaatan avulla suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala.

8. Myyntitulojen maksimointi 12 p.

Tuotteen nykyinen hinta on 60 euroa. Kauppias arvioi, että tällä hinnalla tuotetta myydään 1 000 kappaletta. Myyntituloja kasvattaakseen kauppias päättää muuttaa tuotteen hintaa. Vastaavan tuotteen myynnistä kertyneen kokemuksen perusteella kauppias arvioi, että jokainen euro, jolla tuotteen hinta nousee, vähentää myyntiä kymmenellä kappaleella. Vastaavasti jokainen euro, jolla tuotteen hintaa laskee, kasvattaa myyntiä kymmenellä kappaleella.

1. Kuinka suuret myyntitulot ovat, jos tuotteen hinta on 55 euroa? (2 p.)
2. Muodosta myyntituloja mallintava funktio $f(x)$, kun x on tuotteen hinnan muutos, ja laske sen derivaatta $f'(x)$. (5 p.)
3. Määritä se tuotteen hinta, jolla saadaan suurimmat mahdolliset myyntitulot. (5 p.)

9. Myyntitulojen maksimointi 12 p.

Tuotteen nykyinen hinta on 60 euroa. Kauppias arvioi, että tällä hinnalla tuotetta myydään 1 000 kappaletta. Myyntituloja kasvattaakseen kauppias päättää muuttaa tuotteen hintaa. Vastaavan tuotteen myynnistä kertyneen kokemuksen perusteella kauppias arvioi, että jokainen euro, jolla tuotteen hinta nousee, vähentää myyntiä kymmenellä kappaleella. Vastaavasti jokainen euro, jolla tuotteen hintaa laskee, kasvattaa myyntiä kymmenellä kappaleella.

1. Kuinka suuret myyntitulot ovat, jos tuotteen hinta on 55 euroa? (2 p.)
2. Muodosta myyntituloja mallintava funktio $f(x)$, kun x on tuotteen hinnan muutos, ja laske sen derivaatta $f'(x)$. (5 p.)
3. Määritä se tuotteen hinta, jolla saadaan suurimmat mahdolliset myyntitulot. (5 p.)

10. Huippuparaabeli (12 p.)

Millä parametrien b ja c arvoilla paraabelin $y = -x^2 + bx + c$ huippu on pisteessä $(2, 1)$? Perustele vastauksesi derivaatan avulla.

11. Taitellaan pahvista laatikko (12 p.)

Aineisto

11.A [Kuva: Leikattu pahvilevy](#)

Neliön muotoisen pahvilevyn sivun pituus on 1,0 m. Sen jokaisesta kulmasta leikataan pois pienempi neliö, jonka sivun pituus on x ([aineisto 11.A](#)). Tämän jälkeen kaikki neljä reunoille jäänyttä suorakulmion muotoista osaa taitetaan 90 astetta ylöspäin ja teipataan kiinni vierekkäisiin osiin niin, että syntyy suorakulmainen laatikko ilman kantta. Millä muuttujan x arvolla tämän laatikon tilavuus on mahdollisimman suuri?

12. Polynomien merkkikaavio (12 p.)

Tutkitaan kolmannen asteen polynomifunktiota $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Funktion derivaatan merkkikaavio on seuraavanlainen:

		-1		2	
$p'(x)$	+		-		+

Lisäksi tiedetään, että funktion $p(x)$ kuvaaja kulkee origon ja pisteiden $(-1, 7)$ ja $(2, -20)$ kautta.

1. Millä muuttujan x arvoilla $p'(x) = 0$? (2 p.)
2. Määritä funktio $p(x)$. (6 p.)
3. Määritä $p'(x)$. (4 p.)

13. Funktion väheneminen (12 p.)

Selvitä derivaatan avulla, missä välin $-1 \leq x \leq 3$ kohdassa funktio $f(x) = 2x^2 - x + 5$ vähenee nopeimmin.

Kokeen tehtävät loppuvat tähän.

Siirry tarkastelemaan vastauksiasi

Tarkastelun jälkeen voit vielä palata muokkaamaan vastauksia, tai päättää kokeen.

EE v.23.4.6