Binomi 5 – Luku 8 – Tehtävien malliratkaisut

8.1

A – 4

Lotossa arvotaan seitsemän voittonumeroa ja yksi lisänumero,
joten yksi tapahtuma on viisi oikein.

B – 3

Yksi mahdollinen silmien väri on sininen.

C – 1

Kun korttipakasta nostetaan kolme korttia, ne voivat olla kaikki herttoja.
Sopiva tapahtuma on siis kolme herttaa.

D – 2

Noppaa heitettäessä kaksi kertaa, voi molemmilla tulla kuutonen.
Sopiva tapahtuma on siis kuutospari.

Vastaus A – 4

B – 3

C – 1

D – 2

8.2

a)

Tapahtumia ovat kaikki ne eri väriset paidat, jotka opiskelija voi kaapista ottaa.

Tilanteeseen liittyvät tapahtumat ovat:

1. ”Opiskelija ottaa mustan paidan.”

2. ”Opiskelija ottaa valkoisen paidan.”

3. ”Opiskelija ottaa punaisen paidan.”

b)

Tapahtuman ”opiskelija ottaa mustan tai valkoisen paidan” vastatapahtuma on, että ”opiskelija ei ota mustaa paitaa eikä punaista”. Vastatapahtumassa opiskelijan on siis otettava punainen paita.

Vastaus **a)** ”Opiskelija ottaa mustan paidan”, ”opiskelija ottaa valkoisen paidan”, ”opiskelija ottaa punaisen paidan.”

b) Opiskelija ottaa punaisen paidan.

8.3

Määritetään kysytyt todennäköisyydet suhteellisten frekvenssien avulla.

a)

Kyselyyn vastanneista nuorista 32 % oli 15-vuotiaita.

$P(\text{"lahjakortin saaja on 15-vuotias"}) = 32\ \%$

b)

Vähintään 15-vuotiaita ovat 15-, 16- ja 17-vuotiaat. Todennäköisyys on näiden suhteellisten frekvenssien summa.

$P(\text{"lahjakortin saaja on vähintään 15-vuotias"})$
$= 32\ \% + 15\ \% + 6\ \% = 53\ \%$

c)

Alle 15-vuotiaita ovat 12-, 13- ja 14-vuotiaat. Kysytty todennäköisyys on näiden suhteellisten frekvenssien summa.

$P(\text{"lahjakortin saaja on alle 15-vuotias"})$
$= 8\ \% + 13\ \% + 26\ \% = 47\ \%$

Vastaus **a)** 32 %

b) 53 %

c) 47 %

8.4

a)

Koripallon heitossa pallo joko menee koriin tai sitten ei mene.
Koripallon heittoon liittyvät tapahtumat ovat siis

”pallo menee koriin” ja ”pallo ei mene koriin”.

b)

Nelihenkisessä ryhmässä voi olla 0, 1, 2, 3 tai 4 poikaa. Tapahtumat ovat siis

”ei yhtään poikaa”, ”yksi poika”, ”kaksi poikaa”, ”kolme poikaa”, ”neljä poikaa”.

c)

Kun heitetään kolikkoa, voi tulla joko kruuna tai klaava.
Kahta kolikkoa heitettäessä mahdolliset tapahtumat ovat

”molemmat kolikot kruunia”, ”molemmat kolikot klaavoja”,
”1. kolikko kruuna ja 2. kolikko klaava” ja ”1. kolikko klaava ja 2. kolikko kruuna”.

Vastaus **a)** ”pallo menee koriin” ja ”pallo ei mene koriin”

b) ”ei yhtään poikaa”, ”yksi poika”, ”kaksi poikaa”, ”kolme poikaa” ja ”neljä poikaa”

c) ”molemmat kolikot kruunia”, ”molemmat kolikot klaavoja”, ”1. kolikko kruuna ja 2. kolikko klaava” ja ”1. kolikko klaava ja 2. kolikko kruuna”

8.5

a)

Vastatapahtumassa ”nopan heitossa ei saada parillista silmälukua”. Tässä tapahtumassa nopan silmäluvun on oltava pariton. Tapahtuman A komplementti on siis

$\overline{A} =$ ”nopan heitossa saadaan pariton silmäluku”.

b)

Vastatapahtumassa kahdella nopanheitolla ei saada kahta kuutosta. Tällöin kuutosia tulee yksi tai yhtään. Tapahtuman A komplementti on siis

$\overline{A} =$ ”kahdella nopan heitolla saadaan yksi tai ei yhtään kuutosta”.

c)

Kolmella nopan heitolla voidaan saada 0, 1, 2 tai 3 kuutosta. Tapahtuman ”saadaan korkeintaan kaksi kuutosta” vastatapahtumassa ei saada korkeintaan kaksi kuutosta. Tällöin ainoa vaihtoehto on kolme kuutosta.

Tapahtuman A komplementti on siis

$\overline{A} =$ ”kolmella nopan heitolla saadaan kolme kuutosta”

Vastaus **a)** $\overline{A} =$ ”nopan heitossa saadaan pariton silmäluku”

b) $\overline{A} =$ ”kahdella nopan heitolla saadaan yksi tai ei yhtään kuutosta”

c) $\overline{A} =$ ”kolmella nopan heitolla saadaan kolme kuutosta”

8.6

a)

Suomen rajanaapureita ovat Venäjä, Ruotsi ja Norja. Kysytty todennäköisyys on näiden maiden suhteellisten frekvenssien summa.

$P(\text{"Turisti on Suomen rajanaapurista"}) = 11{,}3\ \% \ + \ 4{,}5\ \% \ + \ 3{,}2\ \% \ = \ 19\ \%$

b)

Turisti ei ole Suomen rajanaapurista, jos hän ei ole Venäjältä, Ruotsista tai Norjasta. Koska suhteellisten frekvenssien summa on 100 %, niin

$P(\text{"Turisti ei ole Suomen rajanaapurista"})$
$= 100\ \% - P(\text{"Turisti on Suomen rajanaapurista"})$
$= 100\ \% - 19\ \% \ = \ 81\ \%$

Vastaus **a)** 19 %

b) 81 %

8.7

a)

Kojunpitäjä pyöritti neulaa yhteensä $16 + 11 + 5 + 2 + 126 = 160$ kertaa.

Neula pysähtyi ”ei voittoa” -kohdalle 126 kertaa. Lasketaan tapahtuman ”ei voittoa” tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{”ei voittoa”}) = \frac{126}{160} = 0{,}7875 \approx 79\ \%$$

b)

Viiden ja kymmenen euron voittoja tuli yhteensä $16 + 11 = 27$.
Lasketaan tapahtuman ”voittaa 5 € tai 10 €” tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{”voittaa 5 € tai 10 €”}) = \frac{27}{160} = 0{,}16875 \approx 17\ \%$$

c)

Voittokertoja, joissa ei voittanut 500 €, oli yhteensä $16 + 11 + 5 + 126 = 158$.
Lasketaan tapahtuman ”ei voita 500 €” tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{”ei voita 500 €”}) = \frac{158}{160} = 0{,}9875 \approx 99\ \%$$

Vastaus **a)** 79 %

b) 17 %

c) 99 %

8.8

a)

Kaikista autoista punaisia oli 34. Lasketaan tilastollinen todennäköisyys eli punaisten autojen suhteellinen frekvenssi.

$$P(\text{"koulun ohi ajava auto on punainen"}) = \frac{34}{117} = 0{,}2905\ldots \approx 29\ \%$$

b)

Autoista mustia tai harmaita oli $15 + 23 = 38$. Todennäköisyys saadaan suhteellisen frekvenssin avulla.

$$P(\text{"koulun ohi ajava auto on musta tai harmaa"}) = \frac{38}{117} = 0{,}3247\ldots \approx 32\ \%$$

c)

Valkoisia autoja oli 21, joten muun värisiä on $117 - 21 = 96$. Kysytty todennäköisyys on

$$P(\text{"koulun ohi ajava auto ei ole valkoinen"}) = \frac{96}{117} = 0{,}8205\ldots \approx 82\ \%.$$

Vastaus **a)** 29 %

b) 32 %

c) 82 %

8.9

a)

Kiekkoja heitettiin yhteensä $8 + 10 + 16 + 12 + 4 = 50$ kertaa.

Kiekkoja, joiden lähtönopeus on 95–104 km/h, oli 8 kappaletta.
Lasketaan kysytyn tapahtuman tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{"kiekon lähtönopeus on 95–104 km/h"}) = \frac{8}{50} = 0{,}16 = 16\ \%$$

b)

Kiekkoja, joiden lähtönopeus on korkeintaan 114 km/h, oli yhteensä $8 + 10 = 18$.
Lasketaan kysytyn tapahtuman tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{"lähtönopeus korkeintaan 114 km/h"}) = \frac{18}{50} = 0{,}36 = 36\ \%$$

c)

Kiekkoja, joiden lähtönopeus on vähintään 125 km/h, oli yhteensä $12 + 4 = 16$.
Lasketaan kysytyn tapahtuman tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{"lähtönopeus vähintään 125 km/h}) = \frac{16}{50} = 0{,}32 = 32\ \%$$

Vastaus **a)** 16 %

b) 36 %

c) 32 %

8.10

a)

Kun koripalloa heitetään koriin, pallo joko menee koriin tai menee korin ohi.
Kun heittoja on kaksi, mahdolliset tapahtumat ovat

”molemmat pallot koriin”,
”molemmat pallot ohi”,
”1. koriin ja 2. ohi” ja
”1.ohi ja 2.koriin”.

b)

Kolikon heitossa voi tulla joku kruuna tai klaava. Kun kolikkoa heitetään kolme kertaa, mahdolliset tapahtumat ovat

”kaikki kruunia”,
”kaikki klaavoja”,
”saadaan yksi kruuna ja kaksi klaavaa jossain järjestyksessä” ja
”saadaan yksi klaava ja kaksi kruunaa jossain järjestyksessä”.

Vastaus **a)** ”molemmat pallot koriin”, ”molemmat pallot ohi”, ”1. koriin ja 2. ohi” ja ”1. ohi ja 2. koriin”

b) ”kaikki kruunia”, ”kaikki klaavoja”, ”saadaan yksi kruuna ja kaksi klaavaa jossain järjestyksessä” ja ”saadaan yksi klaava ja kaksi kruunaa jossain järjestyksessä”

8.11

a)

Vastatapahtumassa kahdella kolikon heitolla ei saada kahta klaavaa. Tässä tapahtumassa molemmat ovat joko kruunia tai toinen on kruuna ja toinen klaava. Tapahtuman A komplementti on siis

$\overline{A}$ = ”saadaan joko kaksi kruunaa tai 1 kruuna ja 1 klaava jossain järjestyksessä”.

b)

Vastatapahtumassa nopanheitolla ei saada korkeintaan nelosta.
Tällöin silmäluvun on oltava 5 tai 6. Tapahtuman A komplementti on siis

$\overline{A}$ = ”saadaan joko silmäluku 5 tai 6”.

c)

Vastatapahtumassa korttipakasta ei nosteta neljällä nostolla ainakin kaksi ässää.
Tällöin ässiä on oltava vähemmän kuin kaksi eli joko 1 tai ei yhtään.

Tapahtuman A komplementti on siis

$\overline{A}$ = ”neljästä kortista yksi on ässä tai ei nosteta yhtään ässää”

Vastaus **a)** ”saadaan joko kaksi kruunaa tai 1 kr ja 1 kl jossain järjestyksessä”

b) ”saadaan joko silmäluku 5 tai 6”

c) ”neljästä kortista yksi on ässä tai ei nosteta yhtään ässää”

8.12

Määritetään kysytyt todennäköisyydet suhteellisten frekvenssien avulla.

a)

Vastaajista vietti kauppakeskuksessa alle 2 tuntia eli alle 120 min yhteensä $8\ \% + 13\ \% = 21\ \%$.

$P(\text{"lahjakortin saaja on viettänyt alle kaksi tuntia"}) = 21\ \%$

b)

Vähintään 2 tuntia ovat viettäneet kauppakeskuksessa ne, jotka ovat olleet kauppakeskuksessa yli 120 minuuttia. Heitä oli yhteensä $26\ \% + 32\ \% + 21\ \% = 79\ \%$.

$P(\text{"lahjakortin saaja on viettänyt vähintään kaksi tuntia"}) = 79\ \%$

Vastaus **a)** 21 %

b) 79 %

8.13

a)

Koska jokainen silmäluku on yhtä todennäköinen, niin jokaisen silmäluvun tulisi esiintyä yhtä monta kertaa. Noppaa heitetään 600 kertaa ja silmälukuja on 6.

Jokaisen silmäluvun tulisi esiintyä $\frac{600}{6} = 100$ kertaa.

b)

Heittoja oli 300 kappaletta, joista 52 oli silmäluku 5.

Lasketaan silmäluvun 5 suhteellinen frekvenssi eli tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{"Ellan heitto on 5"}) = \frac{52}{300} = 0{,}1733\ldots \approx 17{,}3\ \%$$

c)

Heittoja oli 300 kappaletta, joista vitosia oli 48 ja kuutosia 50. Heitosta vähintään silmälukuja 5 oli siis $48 + 50 = 98$ kappaletta.

Lasketaan heittojen, joissa silmäluku oli 5 tai 6 suhteellinen frekvenssi eli tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{"Alexin heitto on vähintään 5"}) = \frac{98}{300} = 0{,}3266\ldots \approx 32{,}7\ \%$$

d)

Lasketaan silmälukujen frekvenssit yhteen.

Silmäluku	1	2	3	4	5	6
Ellan frekvenssi	63	39	46	53	52	47
Alexin frekvenssi	67	42	52	41	48	50
Yhteensä	130	81	98	94	100	97

Koska silmälukua 1 esiintyy selvästi enemmän kuin muita, voidaan epäillä nopan olevan jollakin tapaa painotettu.

Vastaus **a)** 100 kertaa **b)** 17,3 % **c)** 32,7 % **d)** on

8.14

a)

Jakaumassa numerolla 3 on suurin frekvenssi. Näin ollen numeron 3 tilastollinen todennäköisyys on suurin ja se kannattaa valita.

b)

Todennäköisimmät numerot ovat 3 ja 1. Näiden frekvenssien summa on $39 + 26 = 65$.

Kyseisenä päivän onnenpyörää pyöritettiin yhteensä $26 + 17 + 39 + 21 + 18 + 6 = 127$ kertaa. Lasketaan numeroiden 1 ja 3 suhteellinen frekvenssi.

$$P(\text{"voitto osuu numerolle 1 tai 3"}) = \frac{65}{127} = 0{,}5118\ldots \approx 51\ \%$$

c)

Päivän tilaston mukaan numerolle 4 on osunut 21 voittoa.
Numeron 4 tilastollinen todennäköisyys on $\frac{21}{127}$.

Mikäli onnenpyörää pyöritetään 2000 kertaa, numerolle 4 osuisi voittoja

$$\frac{21}{127} \cdot 2000 = 330{,}708\ldots \approx 331$$

Vastaus **a)** numero 3

b) 51 %

c) 331 kertaa

8.15

a)

Opintotuen saajia on yhteensä $119 + 60924 + 105195 + 81457 + 72892 = 320587$.

Ahvenanmaalaisia opintotuen saajia on 119. Lasketaan ahvenanmaalaisen tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{"henkilö on Ahvenanmaalta"}) = \frac{119}{320587} = 0{,}000371\ldots \approx 0{,}037\ \%$$

b)

Etelä-suomalaisia opintotuen saajia oli 60 924. Lasketaan tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{"henkilö on Etelä-Suomesta"}) = \frac{60924}{320587} = 0{,}1900\ldots \approx 19\ \%$$

c)

Muualta kuin Etelä-Suomesta olevia opintotuen saajia oli $320587 - 60924 = 259663$. Lasketaan tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{"henkilö ei ole Etelä-Suomesta"}) = \frac{259663}{320587} = 0{,}8099\ldots \approx 81\ \%.$$

Vastaus **a)** 0,037 %

b) 19 %

c) 81 %

8.16

a)

Suomalaisia, joilla on veriryhmä AB+, on 0,39 miljoonaa.

Veriryhmä AB− on 0,06 miljoonalla suomalaisella. Veriryhmä AB on siis

$0{,}39\text{ milj.} + 0{,}06\text{ milj.} = 0{,}45\text{ milj.}$

Suomalaisia on yhteensä

$1{,}94 + 0{,}89 + 1{,}55 + 0{,}39 + 0{,}33 + 0{,}11 + 0{,}28 + 0{,}06 = 5{,}55\text{ milj.}$

Lasketaan veriryhmän AB suhteellinen frekvenssi eli tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{"henkilöllä on veriryhmä AB"}) = \frac{0{,}45\text{ milj.}}{5{,}55\text{ milj.}} = 0{,}0810\ldots \approx 8{,}1\ \%$$

b)

Veriryhmä O tai Rhesus+ on yhteensä
$1{,}55 + 0{,}28 + 1{,}94 + 0{,}89 + 0{,}39 = 5{,}05$ milj. suomalaisella.

Lasketaan tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{"veriryhmä O tai Rhesus+"}) = \frac{5{,}05\text{ milj.}}{5{,}55\text{ milj.}} = 0{,}9099\ldots \approx 91\ \%$$

Vastaus **a)** 8,1 %

b) 91 %

8.17

a)

Kunnassa on asukkaita yhteensä $1305 + 4235 + 14350 + 5378 + 850 + 126 = 26244$.

Kuntalaisia, joilla on palkka yli 4000, on $850 + 126 = 976$. Lasketaan näiden suhteellinen frekvenssi eli tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{"henkilön kuukausipalkka on yli 4000 €"}) = \frac{976}{26244} = 0{,}0371\ldots \approx 3{,}7\ \%$$

b)

Vähintään 2000 €/kk ansaitsevia kuntalaisia on yhteensä
$14350 + 5378 + 850 + 126 = 20704$.

Vähintään 4000 €/kk ansaitsevia oli yhteensä 976. Lasketaan tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{"väh. 2000 €/kk tienaava tienaa yli 4000 €/kk"}) = \frac{976}{20704} = 0{,}0471 \approx 4{,}7\ \%$$

Vastaus **a)** 3,7 %

b) 4,7 %

8.18

a)

Vastaajia oli yhteensä 250. Opiskelijoita, jotka olivat ostaneet automaatista kahvia tai energiajuomaa oli yhteensä $161 + 126 - 65 = 222$.

Summasta on poistettava kertaalleen ne, jotka ovat ostaneet molempia.

Lasketaan kysytyn tapahtuman tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{"kahvia tai energiajuomaa"}) = \frac{222}{250} = 0{,}888 \approx 89\ \%$$

b)

Kahvia ostaneista opiskelijoista (161 opiskelijaa) oli ostanut energiajuomaa 65 opiskelijaa.

Lasketaan tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{"kahvia ostanut on ostanut myös energiajuomaa"}) = \frac{65}{161} = 0{,}403\ldots \approx 40\ \%$$

c)

Opiskelijoita, jotka ovat ostaneet joko kahvia tai energiajuomaa, oli 222.

Näin ollen opiskelijoita, jotka eivät ole ostaneet kumpaakaan on $250 - 222 = 28$.

Lasketaan kysytyn tapahtuman tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{"ei kahvia eikä energiajuomaa"}) = \frac{28}{250} = 0{,}112 \approx 11\ \%$$

Vastaus **a)** 89 % **b)** 40 % **c)** 11 %

8.19

Lasketaan aineistosta syntyneiden poikien yhteismäärä sekä syntyneiden lasten yhteismäärä vuosina 2000–2020.

Lapsia syntyi yhteensä 1 172 208, joista poikia oli 599 630. Lasketaan poikavauvan tilastollinen todennäköisyys.

$$P(\text{"poika"}) = \frac{599630}{1172208}$$
$$= 0{,}5115\ldots \approx 51{,}2\ \%$$

Summa saadaan määritettyä SUMMA-komennolla.

Lasten yhteismäärä on saatu komennolla =SUMMA(B4:B24)

Poikien yhteismäärä on saatu komennolla =SUMMA(C4:C24)

	A	B	C	D
1	Suomessa elävänä syntyneet lapset			
2				
3	**Vuosi**	**Yhteensä**	**Pojat**	**Tytöt**
4	**2000**	56742	29250	27492
5	**2001**	56189	28701	27488
6	**2002**	55555	28563	26992
7	**2003**	56630	28839	27791
8	**2004**	57758	29684	28074
9	**2005**	57745	29400	28345
10	**2006**	58840	30005	28835
11	**2007**	58729	30136	28593
12	**2008**	59530	30415	29115
13	**2009**	60430	30795	29635
14	**2010**	60 980	31 309	29 671
15	**2011**	59 961	30 546	29 415
16	**2012**	59 493	30 308	29 185
17	**2013**	58 134	29 858	28 276
18	**2014**	57 232	29 272	27 960
19	**2015**	55 472	28 469	27 003
20	**2016**	52 814	26 812	26 002
21	**2017**	50 321	25 674	24 647
22	**2018**	47 577	24 630	22 947
23	**2019**	45 613	23 186	22 427
24	**2020**	46 463	23 778	22 685
25				
26	Yhteensä	1172208	599630	
27				

Vastaus 51,2 %