Binomi 5 – Luku 14 – Tehtävien malliratkaisut

14.1

a)

Muuttujan arvon $x = 0$ frekvenssi on 8, joten 8 ihmistä ei ollut käynyt elokuvissa kertaakaan.

b)

x	f	f %	sf	sf %
0	8	16	8	16
1	20	40	28	56
2	1	22	39	78
3	3	6	42	84
4	6	12	48	96
5	2	4	50	100

Ehdon ”korkeintaan kaksi kertaa” toteuttavat arvot 0, 1 ja 2. Koska muuttujan 2 summafrekvenssi on 78 %, niin korkeintaan kaksi kertaa elokuvissa kävi 78 %.

c)

Ainakin kolme kertaa elokuvissa kävivät ne, jotka kävivät elokuvissa 3, 4 tai 5 kertaa. Näiden suhteellisten frekvenssien summa on $6\ \% + 12\ \% + 4\ \% = 22\ \%$, joten ainakin kolme kertaa elokuvissa kävi 22 %.

d)

Muuttujan moodi on se muuttujan arvo, jonka frekvenssi on suurin. Suurin frekvenssi on 20 ja se on muuttujan arvolla 1, joten $\mathrm{Mo} = 1$.

Mediaani on se muuttujan arvo, jonka suhteellinen frekvenssi ylittää ensimmäisen kerran 50 %. Tämä tapahtuu muuttujan arvon 1 kohdalla, joten $\mathrm{Md} = 1$.

Vastaus **a)** 8

b) 78 %

c) Mo = 1

d) Md = 1

14.2

Muuttujan arvon 1 frekvenssi on 5, joten myös summafrekvenssi on 5.

Muuttujan 2 summafrekvenssi on 15, joten sen frekvenssi on $15 - 5 = 10$.

Kaikkien frekvenssien summa on 25, joten muuttujan arvon 3 frekvenssi on
$25 - 5 - 10 - 7 = 3$.

Lasketaan suhteelliset frekvenssit taulukkoon.

x	*f*	*f* %	*sf*	*sf* %
1	**5**	$\frac{5}{25} = 0{,}2 = 20\ \%$	**5**	**20 %**
2	**10**	$\frac{10}{25} = 0{,}4 = 40\ \%$	**15**	**60 %**
3	**3**	$\frac{3}{25} = 0{,}12 = 12\ \%$	**18**	**72 %**
4	**7**	$\frac{7}{25} = 0{,}28 = 28\ \%$	**25**	**28 %**

14.3

a)

Kuvaajasta nähdään, että kun muuttujan arvo on 170 cm, niin suhteellinen summafrekvenssi on 75 %. Näin ollen korkeintaan 170 cm pitkiä oli 75 %.

b)

Mediaani pituus on se pituus, jossa suhteellinen summafrekvenssi on 50 %.
Kuvaajasta nähdään, että tämä pituus on 160 cm.

c)

Kuvaajasta nähdään, että kun muuttujan arvo on 155 cm, niin suhteellinen summafrekvenssi on 25 %.

Koska opiskelijoita oli 220, niin heistä $220 \cdot 0{,}25 = 55$ oli korkeintaan 155 cm pitkiä.

Vastaus **a)** 75 %

b) 160 cm

c) 55 opiskelijaa

14.4

a)

Pylväät kuvastavat kyläkauppojen lukumäärää. Koska korkein pylväs on Länsi- ja Sisä-Suomi, niin siellä on eniten kyläkauppoja.

b)

Diagrammin mukaan Lapissa kyläkauppoja on n. 19 kappaletta.

c)

Oranssi kuvaaja kertoo keskimääräisestä myynnistä. Etelä-Suomessa myynti on noin 16 miljoonaa euroa.

d)

Lasketaan kyläkauppakohtaiset myynnit.

Ahvenanmaa: $\frac{7}{13} = 0{,}538\ldots \approx 0{,}54$ (milj. €)

Etelä-Suomi: $\frac{16}{35} = 0{,}457\ldots \approx 0{,}46$ (milj. €)

Itä-Suomi: $\frac{14}{26} = 0{,}538\ldots \approx 0{,}54$ (milj. €)

Lappi: $\frac{12}{19} = 0{,}631\ldots \approx 0{,}63$ (milj. €)

Lounais-Suomi: $\frac{9}{28} = 0{,}321\ldots \approx 0{,}32$ (milj. €)

Länsi- ja Sisä-Suomi: $\frac{26}{48} = 0{,}541\ldots \approx 0{,}54$ (milj. €)

Pohjois-Suomi: $\frac{9}{23} = 0{,}391\ldots \approx 0{,}39$ (milj. €)

Suurin kauppakohtainen myynti on Lapissa.

Vastaus **a)** Länsi- ja Sisä-Suomessa

b) 19

c) 16 milj. €

d) Lapissa

14.5

a)

Ehdon ”vähintään kolme tietokonetta” täyttävät ne kotitaloudet, joissa oli 3, 4 tai 5 konetta. Näitä oli yhteensä $120 + 40 + 10 = 170$ kappaletta.

b)

Kaikkien frekvenssien summa on $10 + 20 + 60 + 120 + 40 + 10 = 260$,
joten tutkimukseen osallistui 260 kotitaloutta.

c)

Korkeintaan kaksi tietokonetta oli yhteensä $10 + 20 + 60 = 90$ kotitaloudessa.
Tämä on $\frac{90}{260} = 0{,}3461\ldots \approx 35\ \%$ kotitalouksista

d)

Korkein pylväs eli suurin frekvenssi on muuttujan arvolla 3. Näin ollen $\mathrm{Mo} = 3$.

Koska kotitalouksia oli yhteensä 260, mediaani on se muuttujan arvo, jonka summafrekvenssi ylittää ensimmäisen kerran 130 (eli 50 %).

Lasketaan summafrekvenssit:

$x = 0,\ \ sf = 5$
$x = 1,\ \ sf = 5 + 10 = 15$
$x = 2,\ \ sf = 5 + 10 + 60 = 75$
$x = 3,\ \ sf = 5 + 10 + 60 + 120 = 195$

Mediaani on siis 3.

Vastaus **a)** 170

b) 260

c) 35 %

d) Mo = 3, Md = 3

14.6

a)

Muodostetaan frekvenssijakauma taulukkolaskentaohjelmalla.

Käytä soluviittausta apuna, kun lasket arvoja.

x	f	f%	sf	sf%
0	1	2,2	1	2,2
1	10	21,7	11	23,9
2	15	32,6	26	56,5
3	6	13,0	32	69,6
4	7	15,2	39	84,8
5	5	10,9	44	95,7
6	1	2,2	45	97,8
7	1	2,2	46	100,0
Yhteensä	46			

Voit käyttää summa-funktiota frekvenssien summan laskemiseen.

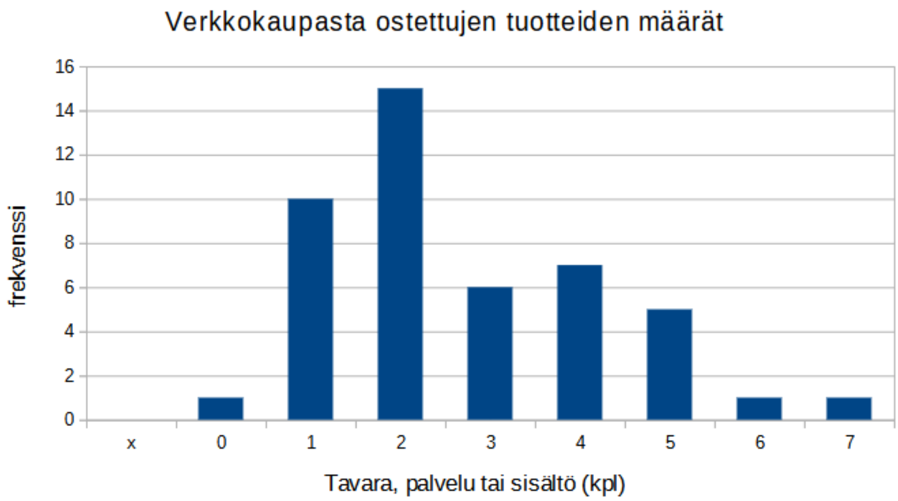
b)

Koska muuttujan arvon 2 frekvenssi on suurin, moodi on 2.

Mediaani on se muuttujan arvo, jonka suhteellinen summafrekvenssi ylittää ensimmäisen kerran 50 %. Jakauman perusteella mediaani on 2.

c)

Piirretään pylväsdiagrammi taulukkolaskentaohjelmiston avulla.



Vastaus **a)** taulukko yllä **b)** Mo = 2, Md = 2 **c)** kuva yllä

14.7

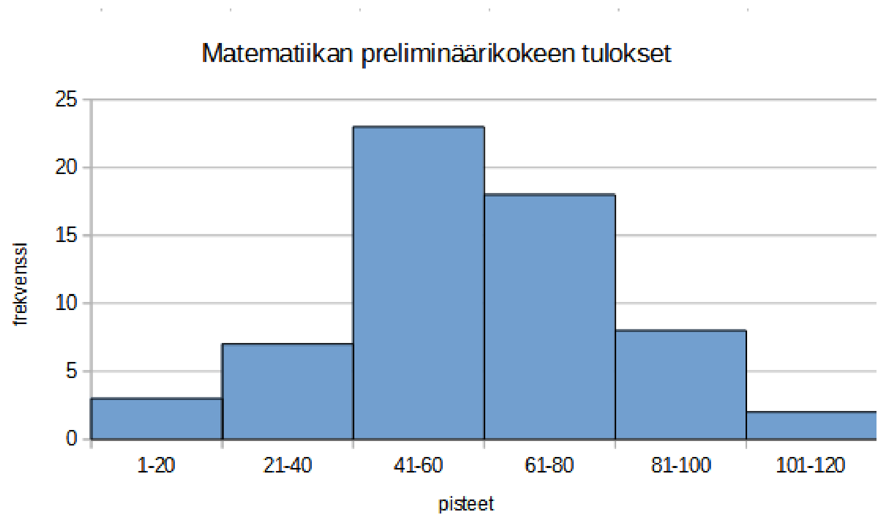
a) Muodostetaan frekvenssijakauma taulukkolaskentaohjelmalla.

luokka	f	f%	sf	sf%
1-20	3	4,9	3	4,9
21-40	7	11,5	10	16,4
41-60	23	37,7	33	54,1
61-80	18	29,5	51	83,6
81-100	8	13,1	59	96,7
101-120	2	3,3	61	100,0
Yhteensä	61			

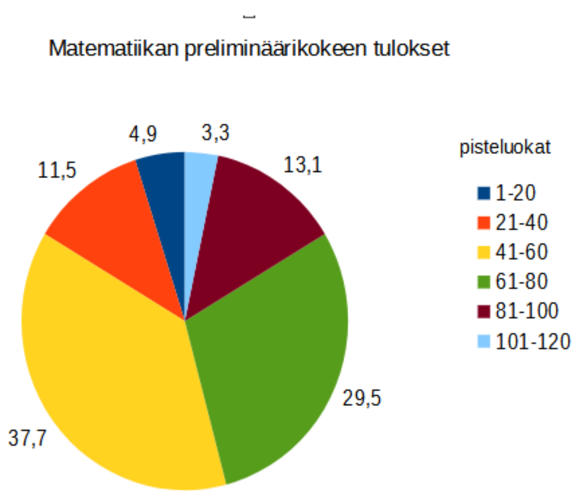
Käytä soluviittausta apuna, kun lasket arvoja.

$\frac{3}{61} = 0{,}491\ldots \approx 4{,}9\ \%$

b) Muodostetaan pylväsdiagrammi taulukkolaskentaohjelmalla.



c) Muodostetaan ympyrädiagrammi taulukkolaskentaohjelmalla.



14.8

a)

Pituuksien pienin arvo on 46 cm ja suurin 82 cm, joten kyyn pituus vaihtelee välillä 46 cm – 82 cm.

b)

Muodostetaan frekvenssijakauma käyttämällä TAAJUUS-komentoa.

Luokka (cm)	alaraja	yläraja	f	sf	f%	sf%
40-49	40	49	4	4	6,0	6,0
50-59	50	59	14	18	20,9	26,9
60-69	60	69	17	35	25,4	52,2
70-79	70	79	24	59	35,8	88,1
80-89	80	89	8	67	11,9	100,0

c)

Luokkakeskus on ala- ja ylärajan keskiarvo.

Luokka (cm)	alaraja	yläraja	keskus
40-49	40	49	44,5
50-59	50	59	54,5
60-69	60	69	64,5
70-79	70	79	74,5
80-89	80	89	84,5

d)

Moodi on sen luokan luokkakeskus, jonka frekvenssi on suurin.

Mo = 74,5 cm

Mediaani on sen luokan luokkakeskus, jolla suhteellinen summafrekvenssi on ensimmäisen kerran suurempi kuin 50 %.

Md = 64,5 cm

Vastaus **a)** 46 cm – 82 cm
b) jakauma yllä
c) taulukko yllä
d) Mo = 74,5 cm, Md = 64,5 cm

14.9

a)

Lasketaan arvosanojen keskiarvo.

$$\bar{x} = \frac{8+8+6+7+7}{5} = \frac{36}{5} = 7{,}2$$

b)

Korkein arvosana, jonka kurssista voi saada, on 10. Lasketaan keskiarvo, kun viimeinen kurssiarvosana on 10. Päättötodistuksen arvosana lasketaan normaalien pyöristyssääntöjen mukaan.

$$\bar{x} = \frac{8+8+6+7+7+10}{6} = \frac{46}{6} = 7{,}6 \approx 8$$

Amelia voi saada arvosanaksi 8.

Vastaus **a)** 7,2

b) voi saada

14.10

a)

Syötetään arvosanat taulukkolaskentaohjelmaan ja selvitetään heittosarjojen keskiarvot.

Niilo:

n	7
Keskiarvo	7.28571
σ	2.60298
s	2.81154
Σx	51
Σx²	419
Min	3
Q1	4
Mediaani	8
Q3	10
Max	10

Noora:

n	7
Keskiarvo	7.42857
σ	1.04978
s	1.13389
Σx	52
Σx²	394
Min	6
Q1	6
Mediaani	8
Q3	8
Max	9

Geogebrassa saat tunnusluvut yhden muuttujan analyysillä.

Niilon keskiarvo on $7{,}28\ldots \approx 7{,}3$ ja Nooran $7{,}42\ldots \approx 7{,}4$,
joten Noora heitti keskiarvon perusteella paremmin.

b)

Niilon keskihajonta $s = 2{,}81\ldots \approx 2{,}8$ja Nooran $s = 1{,}13.. \approx 1{,}1$.
Koska Nooran keskihajonta on pienempi, hän heitti tasaisemman heittosarjan.

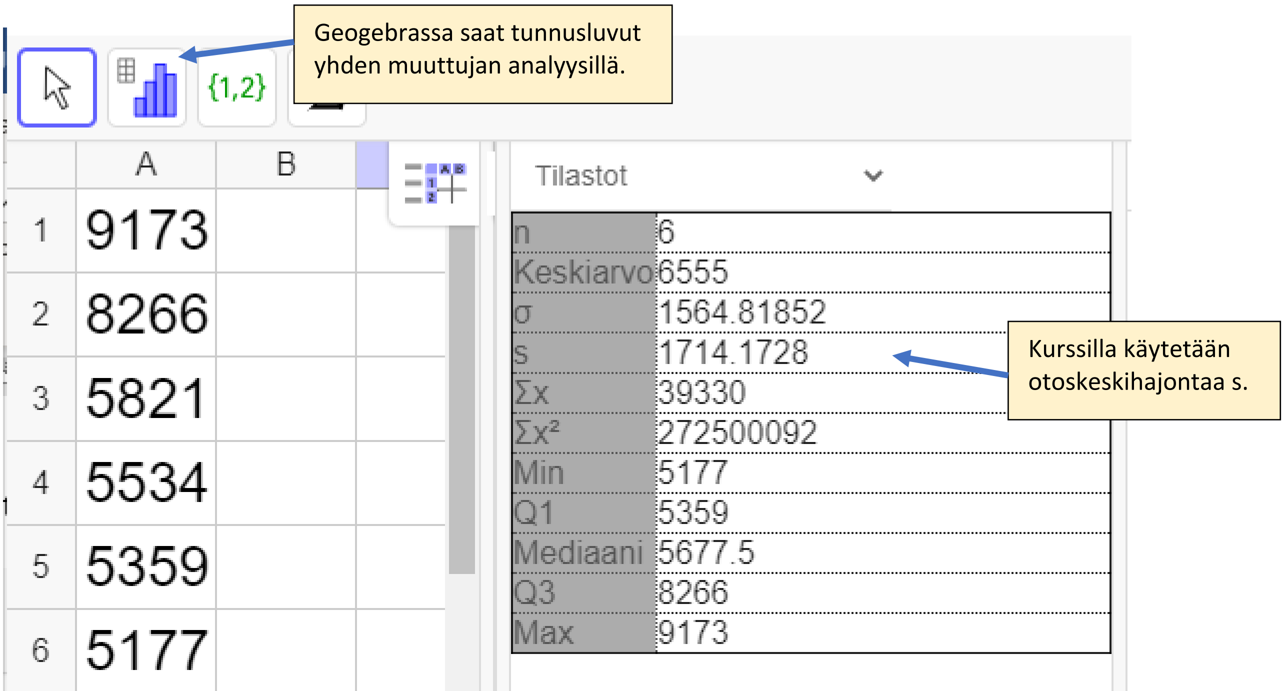
Vastaus **a)** Noora

b) Noora

14.11

a)

Syötetään arvot taulukkolaskentaohjelmaan ja määritetään tunnusluvut.



Katsojalukujen keskiarvo on 6555 ja keskihajonta $s = 1714{,}17\ldots \approx 1714$.

b)

Lasketaan, kuinka paljon katsojamäärä poikkeaa keskiarvosta.

Jokerit	9173 – 6555 = 2618
HIFK	8266 – 6555 = 1711
Kärpät	5821 – 6555 = −734
TPS	5534 – 6555 = −1021
Tappara	5359 – 6555 = −1196
Ilves	5177 – 6555 = −1378

Voit luoda myös kaavan taulukkolaskentaohjelmassa. Esim. =A1-6555

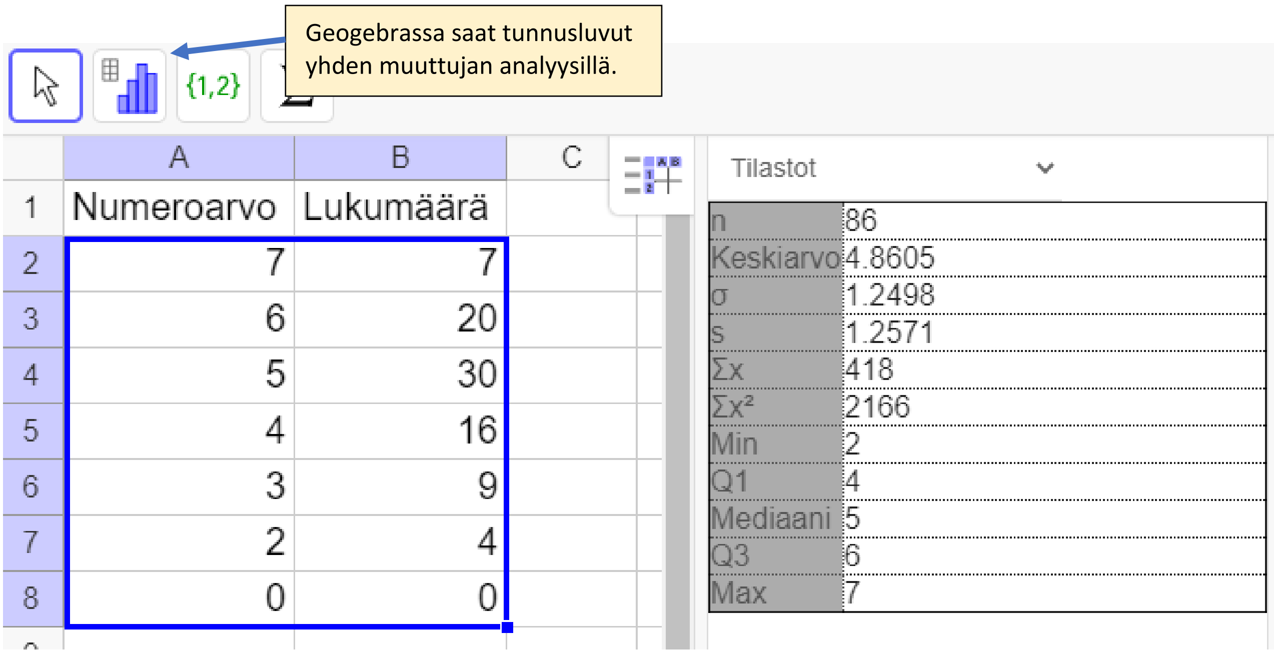
Poikkeaman itseisarvo on suurempi kuin keskihajonta ainoastaan Jokereilla.

Vastaus **a)** $\bar{x} = 6555,\ s \approx 1714$

b) Jokereiden

14.12

Syötetään numeroarvo ja lukumäärä taulukkolaskentaohjelmaan ja määritetään tunnusluvut.



Arvosanojen keskiarvo on $\overline{x} = 4{,}8605\ldots \approx 4{,}86$ ja keskihajonta $s = 1{,}2571\ldots \approx 1{,}26$.

Vastaus $\overline{x} \approx 4{,}86,\ s \approx 1{,}26$

14.13

a)

Syötetään aineisto taulukkolaskentaohjelmaan ja määritetään tunnusluvut.

n	21
Keskiarvo	14.22857
σ	3.00478
s	3.07898
Σx	298.8
Σx²	4441.1
Min	9.5
Q1	11.95
Mediaani	13.6
Q3	16.7
Max	19.8

Vaahteran keskimääräinen pituus on aineiston keskiarvo $\overline{x} = 14{,}22\ldots\,\text{m} \approx 14{,}2$ m.

Pituuden keskihajonta on $s = 3{,}078\ldots \approx 3{,}1$ m.

b)

Pisin vaahtera on 19,8 m. Lasketaan, kuinka monen keskihajonnan päässä se on keskiarvosta.

$$\frac{19{,}8 - 14{,}22\ldots}{3{,}078\ldots} = 1{,}809\ldots < 2$$

Pisimmän vaahteran pituus poikkeaa vähemmän kuin kahden keskihajonnan verran keskiarvosta, joten se ei poikkea merkitsevästi keskiarvosta.

Vastaus **a)** $\overline{x} \approx 14{,}2$ m, $s \approx 3{,}1$ m

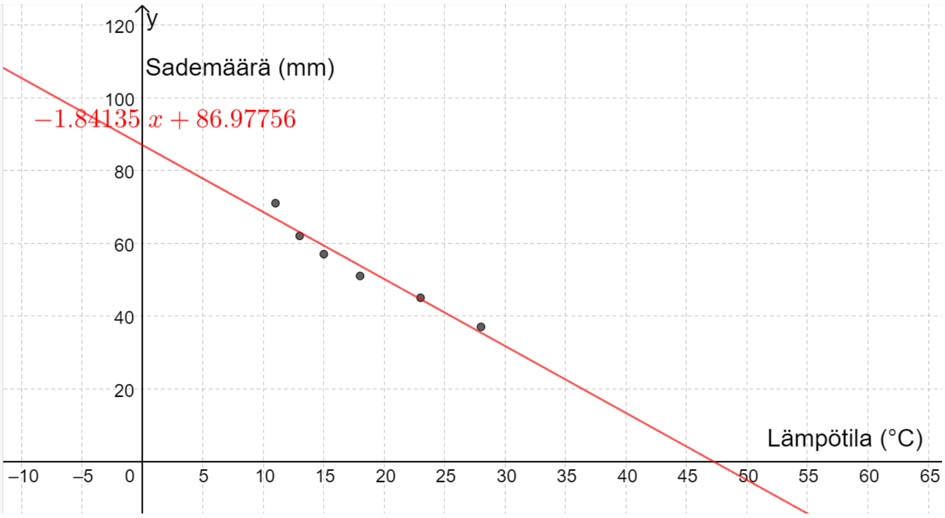
b) ei poikkea

14.14

Tutkitaan sademäärän riippuvuutta lämpötilasta. Tällöin x on lämpötila (°C) ja y on sademäärä (mm). Syötetään tiedot taulukkolaskentaohjelmaan. Valitaan kahden muuttujan analyysi.

a)

	A	B
1	Lämpötila	Sademäärä
2	11	71
3	13	62
4	15	57
5	18	51
6	23	45
7	28	37



Sademäärää kuvaava regressiosuoran yhtälö on $y = -1{,}84x + 87{,}0$.

b)
Selvitetään korrelaatiokerroin tunnuslukujen avulla.

KeskiarvoX	18
KeskiarvoY	53.8333
Sx	6.4498
Sy	12.1724
r	-0.9757
ρ	-1
Sxx	208
VarianssiY	740.8333
Sxy	-383
R²	0.9519
SSE	35.5978

Korrelaatiokerroin on $r = -0{,}975\ldots \approx -0{,}98$.

Korrelaation itseisarvo on suurempi kuin 0,8, joten korrelaatio on voimakas.

c)
Lasketaan sademäärä, kun $x = 30$ (°C).

$y = -1{,}84 \cdot 30 + 87{,}0 = 32$ (mm)

Sademäärä on 32 mm.

d)
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x, kun sademäärä $y = 55$ (mm).

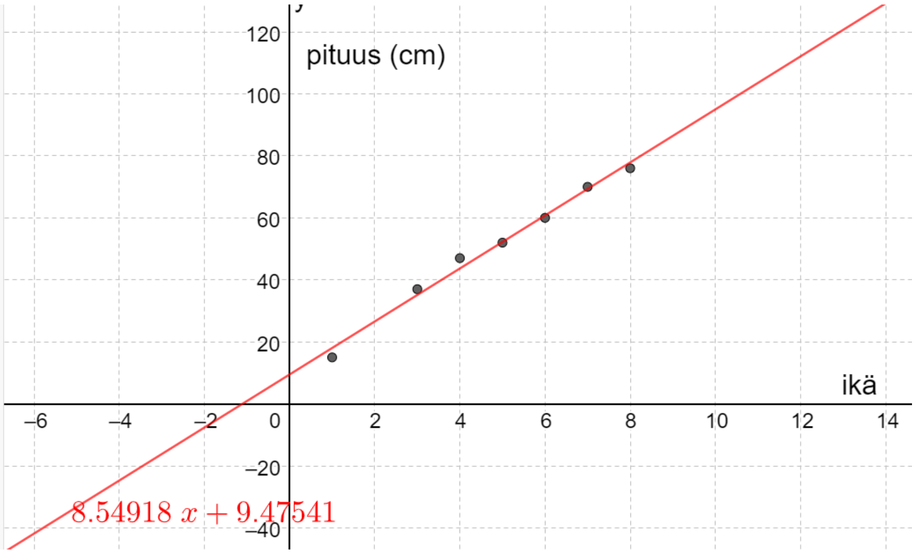
$55 = -1{,}84x + 87{,}0$
$x = 17{,}3981\ldots \approx 17$ (°C)

Vastaus
a) $y = -1{,}84x + 87{,}0$
b) $r \approx -0{,}98$, korrelaatio on voimakas
c) 32 mm
d) 17 °C

14.15

Olkoon x ikä ja y pituus (cm). Syötetään tiedot taulukkolaskentaohjelmaan ja sovitetaan erilaisia regressiomalleja.

ikä	pituus (cm)
1	15
3	37
4	47
5	52
6	60
7	70
8	76



Hauen pituus näyttää noudattavan lineaarista mallia.
Regressiosuoran yhtälö on $y = 8{,}55x + 9{,}48$.

Lasketaan hauen pituus y, kun ikä on $x = 2$.

$y = 8{,}55 \cdot 2 + 9{,}48 = 26{,}58\ldots \approx 27$ (cm)

Pituus on 2-vuotiaana 27 cm.

Lasketaan hauen pituus y, kun ikä on $x = 12$.

$y = 8{,}55 \cdot 12 + 9{,}48 = 112{,}08 \approx 112$ (cm)

Vastaus Lineaarinen malli, $y = 8{,}55x + 9{,}48$
2-vuotiaana 27 cm ja 12-vuotiaana 112 cm

14.16

a)

Osallistujia eli alkeistapauksia on yhteensä $4 + 5 + 3 = 12$.
Näistä suotuisia alkeistapauksia (kuvanveistäjiä) on 5.
Lasketaan kysytyn tapahtuman klassinen todennäköisyys.

$$P(\text{"kuvanveistäjä"}) = \frac{5}{12}$$

b)

Kuvanveistäjiä ja valokuvaajia on yhteensä $3 + 5 = 8$.
Suotuisia alkeistapauksia on siis 8.
Kysytyn tapahtuman todennäköisyys on

$$P(\text{"kuvanveistäjä tai valokuvaaja"}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Vastaus **a)** $\frac{5}{12}$

b) $\frac{2}{3}$

14.17

a)

Herttoja on yhteensä 13, joten suotuisia alkeistapauksia on 13.
Lasketaan kysytyn tapahtuman klassinen todennäköisyys.

$$P(\text{"hertta"}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

b)

Kakkosia on korttipakassa yhteensä 4.
Kysytylle tapahtumalle suotuisia tapahtumia on siis 4.
Lasketaan todennäköisyys.

$$P(\text{"kakkonen"}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \approx 0{,}0769\ldots \approx 0{,}077$$

c)

Tapahtuman "hertta tai kakkonen" todennäköisyys voidaan laskea yleisen yhteenlaskusäännön avulla.

$$\begin{aligned}
&P(\text{"hertta tai kakkonen"})\\
&= P(\text{"hertta"}) + P(\text{"kakkonen"}) - P(\text{"hertta ja kakkonen"})\\
&= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52}\\
&= \frac{16}{52} = \frac{4}{13} = 0{,}307\ldots \approx 0{,}31
\end{aligned}$$

Vastaus **a)** $\frac{1}{4} = 0{,}25$

b) $\frac{1}{13} = 0{,}077$

c) $\frac{4}{13} = 0{,}31$

14.18

a)

Muodostetaan taulukko annetuista tiedoista.

	Opiskelee historiaa	**Ei opiskele historiaa**	**yhteensä**
Opiskelee biologiaa	8	15 – 8 = 7	15
Ei opiskele biologiaa	24 – 8 = 16	10 – 7 = 3	19
yhteensä	24	34 – 24 = 10	34

Lasketaan kysytty todennäköisyys yleisen yhteenlaskusäännön avulla.

$$P(\text{"biologia tai historia"})$$
$$= P(\text{"biologia"}) + P(\text{"historia"}) - P(\text{"biologia ja historia"})$$
$$= \frac{15}{34} + \frac{24}{34} - \frac{8}{34}$$
$$= \frac{31}{34} = 0{,}911\ldots \approx 0{,}91$$

b)

Tapahtuman ”henkilö ei opiskele biologiaa eikä historiaa” vastatapahtuma on ”henkilö opiskelee biologiaa tai historiaa”. Lasketaan kysytyn tapahtuman todennäköisyys komplementtisäännön avulla.

$$P(\text{"ei opiskele biologiaa eikä historiaa"})$$
$$= 1 - P(\text{"opiskelee biologiaa tai historiaa"})$$
$$= 1 - \frac{31}{34} = \frac{3}{34} = 0{,}0882\ldots \approx 0{,}088$$

c)

Historiaa opiskelee 24 opiskelijaa, joten alkeistapauksia on 24. Näistä 8 opiskelee myös biologiaa, joten kysytylle tapahtumalle suotuisia tapahtumia on 8. Lasketaan kysytyn tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{"historiaa opiskeleva opiskelee biologiaa"})$$
$$= \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \approx 0{,}3333\ldots \approx 0{,}33$$

Vastaus **a)** $\frac{31}{34} \approx 0{,}91$ **b)** $\frac{3}{34} \approx 0{,}088$ **c)** $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$

14.19

a)

Muodostetaan noppien silmälukujen summista taulukko.

Mahdollisia alkeistapauksia on yhteensä $6 \cdot 6 = 36$.

Summa on vähintään kahdeksan 15 silmälukuparissa. Suotuisia alkeistapauksia on siis 15.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(\text{"summa vähintään 8"}) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} = 0{,}4166\ldots \approx 0{,}42$$

b)

Merkitään taulukkoon summan jälkeen silmälukujen tulo.

Merkitään suotuista alkeistapaukset keltaisella. Niitä on yhteensä 11. Lasketaan kysytyn tapahtuman todennäköisyys

	1	2	3	4	5	6
1	2,1	3,2	4,3	5,4	6,5	7,6
2	3,2	4,4	5,6	6,8	7,10	8,12
3	4,3	5,6	6,9	7,12	8,15	9,18
4	5,4	6,8	7,12	8,16	9,20	10,24
5	6,5	7,1	8,15	9,20	10,25	11,30
6	7,6	8,16	9,18	10,24	11,30	12,36

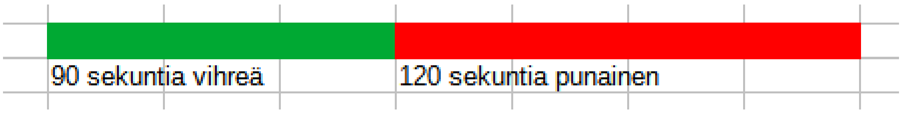
$$P(\text{"summa on suurempi kuin tulo"}) = \frac{11}{36} = 0{,}3055\ldots \approx 0{,}31$$

Vastaus **a)** $\frac{5}{12} \approx 0{,}42$

b) $\frac{11}{36} \approx 0{,}31$

14.20

a)

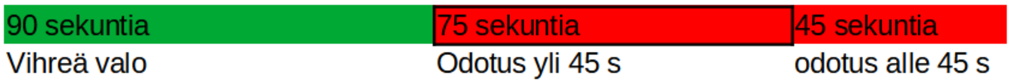


Mikäli jalankulkija ei joudu pysähtymään, hänen on tultava valoihin vihreän aikana. Vihreä palaa yhdestä 210 sekunnin syklistä 90 sekuntia. Lasketaan kysytyn tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{"ei joudu pysähtymään"}) = \frac{90}{210} = \frac{3}{7} = 0{,}428\ldots \approx 0{,}43$$

b)

Mikäli jalankulkija joutuu odottamaan vihreää valoa yli 45 sekuntia, hänen ei voi tulla punaisen valon viimeisten 45 sekunnin aikaan. Tällöin kysytylle tapahtumalle suotuisan ajanhetken pituus on 120 s − 45 s = 75 s.



Lasketaan tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{"odotus yli 45 s"}) = \frac{75}{210} = \frac{5}{14} \approx 0{,}357\ldots \approx 0{,}36$$

Vastaus **a)** $\frac{3}{7} \approx 0{,}43$

b) $\frac{5}{14} \approx 0{,}36$

14.21

a)

Luetellaan eri parit, jotka valmentaja voi valita.
Pelaajat ovat H (Henna), M (Maria), P3, P4 ja P5.

HM	MP3	P3P4	P4P5
HP3	MP4	P3P5	
HP4	MP5		
HP5			

Erilaisia mahdollisia pareja on 10. Yhdessä alkeistapauksessa valitaan Henna ja Maria.
Lasketaan kysytyn tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{"Henna ja Maria"}) = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

b)

Alkeistapauksia, joissa kumpikaan ei joudu vaihtoon, on 3 kappaletta.

$$P(\text{"kumpikaan ei joudu vaihtoon"}) = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

c)

Alkeistapauksia, joissa ainakin toinen joutuu vaihtoon, on 7 kappaletta.

$$P(\text{"ainakin toinen joutuu vaihtoon"}) = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

Vastaus **a)** $\frac{1}{10} = 0{,}1$

b) $\frac{3}{10} = 0{,}3$

c) $\frac{7}{10} = 0{,}7$

14.22

a)

Määritetään mahdolliset vaihtoehdot. Punaisella omenalla on muoto KK ja keltaisella kk.

Huomataan, että punaisen dominoiva alleeli K tulee pakosta jokaiseen vaihtoehtoon, joten millään alleeliparilla ei voi tulla keltaista tomaattia.

	k	k
K	Kk	Kk
K	Kk	Kk

$P(\text{"keltainen, kun punaisella KK"}) = \frac{0}{4} = 0\ \%$

b)

Määritetään mahdolliset vaihtoehdot. Punaisella omenalla on muoto Kk ja keltaisella kk.

Nyt keltainen tomaatti syntyy kahdessa alkeistapauksessa.

	k	k
K	Kk	Kk
k	kk	kk

$P(\text{"keltainen, kun punaisella Kk"})$
$= \frac{2}{4} = 0{,}5 = 50\ \%$

Vastaus **a)** 0 %

b) 50 %

14.23

a)

Tilaston mukaan vauvoja on syntynyt yhteensä

$112 + 101 + 87 + 133 + 169 + 82 + 101 = 785.$

Lauantaina on syntynyt tilaston mukaan 82 vauvaa. Lasketaan tilastollinen todennäköisyys tapahtumalle A = ”satunnaisesti valittu vauva on syntynyt lauantaina”.

$$P(A) = \frac{82}{785} = 0{,}1044\ldots \approx 0{,}104$$

b)

Vauvalla on seitsemän mahdollista päivää, jona syntyä, joten mahdollisia alkeistapauksia on 7. Näin ollen kysytyn tapahtuman klassinen todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{1}{7} = 0{,}1428\ldots \approx 0{,}143$$

c)

Verrataan b-kohdan vastausta a-kohdan vastaukseen.

$$\frac{0{,}1428\ldots}{0{,}1044\ldots} = 1{,}3675\ \ldots$$

B-kohdan vastaus on $1{,}3675\ldots - 1 = 0{,}3675\ldots \approx 36{,}8$ % suurempi.

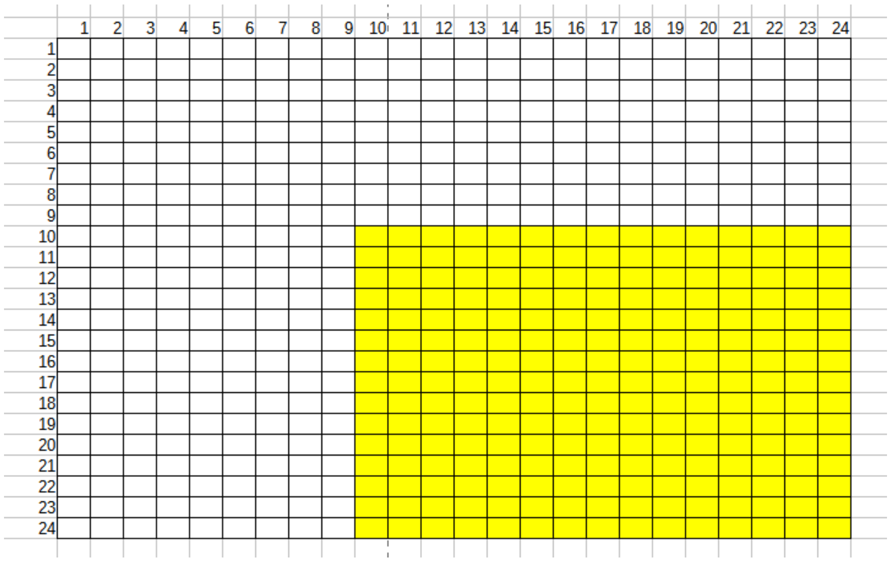
Vastaus **a)** 0,104

b) 0,143

c) 36,8 % suurempi

14.24

a)



Taulukoidaan mahdolliset parit.

Mahdollisia erilaisia pareja on $24 \cdot 24 = 576$.

Tapahtumia, joissa molemmissa palloissa on vähintään luku 10, on $15 \cdot 15 = 225$.

Lasketaan kysytyn tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{"kummassakin vähintään 10"}) = \frac{225}{576} = \frac{25}{64} = 0{,}390\ldots \approx 0{,}39$$

b)

Suotuisia alkeistapauksia, joissa palloilla on sama luku, on 24.

$$P(\text{"sama luku"}) = \frac{24}{576} = \frac{1}{24} = 0{,}04166\ldots \approx 0{,}042$$

Vastaus **a)** $\frac{25}{64} \approx 0{,}39$

b) $\frac{1}{24} \approx 0{,}042$

14.25

Koska astia on puoliksi täynnä, vanukasosan korkeus on $\frac{22\text{ cm}}{2} = 11\text{ cm}$.

Vanukkaan tilavuus on siis

$V = \pi \cdot 9^2 \cdot 11 = 2799{,}159\ldots\text{cm}^3 = 2{,}799\ldots\text{dm}^3 = 2{,}799\text{ l}$.

Suotuisan alueen tilavuus on $0{,}80\text{ dl} = 0{,}080\text{ l}$.
Lasketaan kysytyn tapahtuman geometrinen todennäköisyys.

$$P(\text{"siemen kauhassa"}) = \frac{0{,}080}{2{,}799\ldots} = 0{,}02858\ldots \approx 0{,}029$$

Vastaus 0,029

14.26

a)

Voidaan ajatella, että silmäluvulla kuusi on painokerroin 5.
Muiden tapahtumien painokerroin on 1.
Painokertoimien summa on tällöin $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5 = 10$.

$$P(\text{"kutonen"}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

b)

Tapahtumalle "parillinen silmäluku" suotuisat silmäluvut ovat 2, 4 ja 6.
Näiden painokerrointen summa on $1 + 1 + 5 = 7$.

$$P(\text{"parillinen silmäluku"}) = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

Vastaus **a)** $\frac{1}{2} = 0{,}5$

b) $\frac{7}{10} = 0{,}7$

14.27

a)

Poutapäivän todennäköisyys on 85 % = 0,85. Oletetaan, että säät ovat toisistaan riippumattomia. Tällöin kysytty todennäköisyys voidaan laskea kertolaskusäännöllä.

$P(\text{"molemmat poutapäiviä"}) = 0{,}85 \cdot 0{,}85 = 0{,}7225 \approx 0{,}72.$

b)

Tapahtuman ”ainakin toinen on poutapäivä” vastatapahtuma on
”kumpikaan ei ole poutapäivä”.

Tapahtuman ”ei poutapäivä” todennäköisyys on komplementtisäännön mukaan
$1 - 0{,}85 = 0{,}15.$

Kysytyn tapahtuman todennäköisyys saadaan komplementti- ja kertolaskusäännön avulla.

$P(\text{"ainakin toinen on poutapäivä"})$
$= 1 - P(\text{"kumpikaan ei ole poutapäivä"})$
$= 1 - 0{,}15 \cdot 0{,}15 = 0{,}9775\ldots \approx 0{,}98$

Vastaus **a)** 0,72

b) 0,98

14.28

a)

Kaksi korttia voidaan valita korttipakasta $\binom{52}{2} = 1326$ eri tavalla.

Risti voidaan valita 13 eri tavalla ja toinen kortti, joka ei ole risti, voidaan valita 39 eri tavalla. Näin ollen erilaisia suotuisia tapahtumia on $13 \cdot 39 = 507$.

Kysytyn tapahtuman todennäköisyys on

$$P(\text{"kahdessa kortissa täsmälleen yksi risti"})$$
$$= \frac{507}{1326} = \frac{13}{34} = 0{,}382\ldots \approx 0{,}38$$

Vastaus $\frac{13}{34} \approx 0{,}38$

14.29

a)

Oletetaan, että koulussa on niin paljon opiskelijoita,
etteivät todennäköisyydet muutu valinnan jälkeen.

Todennäköisyys sinisilmäisyydellä on 60 % = 0,60.

Lasketaan kysytty todennäköisyys kertolaskusäännöllä.

$$P(\text{”5 sinisilmäistä”}) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6$$
$$= 0{,}6^5 = 0{,}07776 \approx 0{,}078$$

b)

Tapahtuman ”ainakin yksi on sinisilmäinen” vastatapahtuma on
”yksikään ei ole sinisilmäinen”.

Tapahtuman ”ei sinisilmäinen” todennäköisyys on $1 - 0{,}6 = 0{,}4$.
Lasketaan kysytyn tapahtuman todennäköisyys komplementtisäännöllä.3

$$P(\text{”ainakin yksi sinisilmäinen”})$$
$$= 1 - P(\text{”yksikään ei sinisilmäinen”})$$
$$= 1 - 0,4^5 = 0{,}98976 \approx 0{,}990$$

Vastaus **a)** 0,078

b) 0,990

14.30

a)

Istumajärjestyksiä voidaan ajatella jonoina.
Näin ollen tuloperiaatteen mukaan erilaisia järjestyksiä on

$30! = 2{,}652\ldots \cdot 10^{32} \approx 2{,}65 \cdot 10^{32}$ kappaletta.

b)

Lasketaan kuinka monta 3 pulpetin osajoukkoa 30 pulpetista
voidaan muodostaa kombinaation avulla.

$$\binom{30}{3} = 4060$$

Tässä luokassa erilaisia istumajärjestyksiä on

$$30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 = \frac{30!}{3!} = 4{,}4208\ldots \cdot 10^{31} \approx 4{,}42 \cdot 10^{31}.$$

c)

Lasketaan, kuinka monta sekuntia järjestysten läpikäyntiin menisi.

$$\frac{30!}{10^{12}} = 2{,}652\ldots \cdot 10^{20}\text{s}$$

Vuodessa on $365{,}25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3{,}15576 \cdot 10^{7}$ s,
joten järjestysten läpikäymiseen menisi

$$\frac{2{,}652\ldots \cdot 10^{20}}{3{,}15576 \cdot 10^{7}} = 8{,}405\ldots \cdot 10^{12} \approx 8{,}4 \cdot 10^{12} \text{ vuotta.}$$

Vastaus **a)** $2{,}65 \cdot 10^{32}$

b) 4060 tavalla, järjestyksiä $4{,}42 \cdot 10^{31}$

c) $8{,}4 \cdot 10^{12}$ vuotta

14.31

a)

Kirjaimia on yhteensä 10, joista vokaaleja on 5.
Tapahtuman A = ”ensimmäinen on vokaali” todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

b)

Vokaali voidaan valita viidellä eri tavalla. Jäljelle jääneet kaksi konsonanttia voidaan valita $\binom{5}{2} = 10$ eri tavalla. Suotuisia alkeistapauksia on siis $5 \cdot 10 = 50$. Kymmenestä kirjaimesta voidaan valita kolme kirjainta $\binom{10}{3} = 120$ eri tavalla.
$P(\text{”kolmesta yksi on vokaali”}) = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$

c)

Kirjain I voidaan valita kahdella eri tavalla.
Kirjain L voidaan valita kahdella eri tavalla.
Kirjain O voidaan valita yhdellä eri tavalla.

Tuloperiaatteen mukaan suotuisat kirjaimet I L O voidaan valita $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ eri tavalla.

$$P(\text{”I L O”}) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

Vastaus **a)** $\frac{1}{2}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{1}{30}$

14.32

a)

Tapahtuman ”ainakin yksi punainen” vastatapahtuma on ”ei yhtään punaista”.
Tällöin kaikki pallot ovat mustia. Lasketaan kertolaskusäännön ja komplementtisäännön avulla kysytty todennäköisyys.

$$P(\text{”ainakin yksi punainen”})$$
$$= 1 - P(\text{”kaikki mustia”})$$
$$= 1 - \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11}$$
$$= 0{,}9160\ldots \approx 0{,}92$$

Jos pallot ovat samanvärisiä, ne voivat olla kaikki joko punaisia tai mustia.
Kysytty todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla.

$$P(\text{”kaikki samanvärisiä”}) = P(\text{”kaikki mustia”}) + P(\text{”kaikki punaisia”})$$
$$= \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11}$$
$$= 0{,}0842 \approx 0{,}084$$

Vastaus $P(\text{”ainakin yksi punainen”}) \approx 0{,}92$

$P(\text{”kaikki samanvärisiä”}) \approx 0{,}084$

14.33

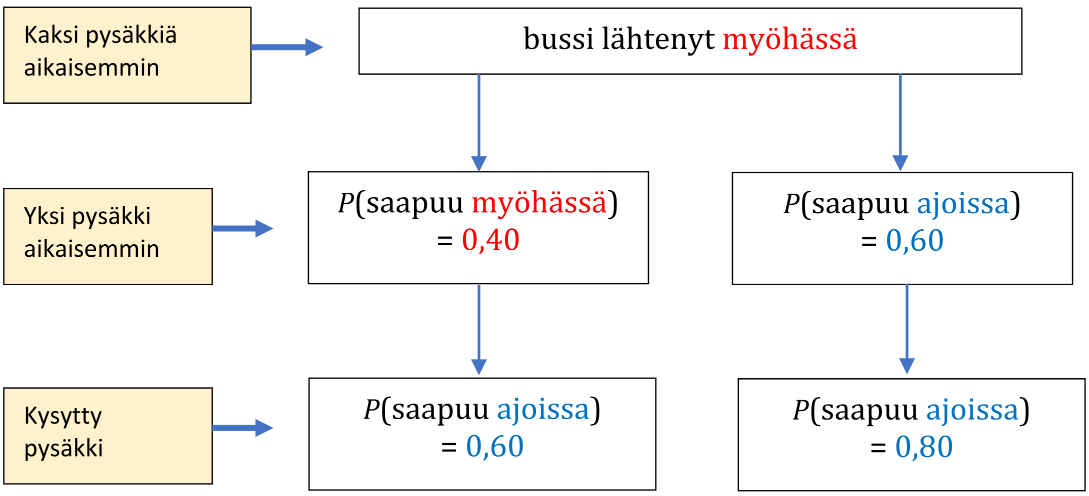
Jos bussi lähti edelliseltä pysäkiltä myöhässä, niin se saapuu seuraavalle pysäkille

- ajoissa todennäköisyydellä 60 % = 0,60.
- myöhässä todennäköisyydellä 1 – 0,60 = 0,40

Jos bussi lähti edelliseltä pysäkiltä ajoissa, niin se saapuu seuraavalle pysäkille

- ajoissa todennäköisyydellä 0,80
- myöhässä todennäköisyydellä 1 – 0,80 = 0,20

Havainnollistetaan tilannetta puukaaviolla.



Kysytty todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännöllä.

$P(\text{"kolmas ajoissa"}) = 0{,}40 \cdot 0{,}60 + 0{,}60 \cdot 0{,}80 = 0{,}72$

Vastaus 0,72

14.34

Koska ryhmässä on yhteensä 6 + 4 = 10 ihmistä, niin erilaisia kolmen hengen osajoukkoja voidaan muodostaa $\binom{10}{3} = 120$.

Neljästä lukiolaista voidaan valita kolme $\binom{4}{3} = 4$ eri tavalla, joten suotuisia alkeistapauksia on 4.

Lasketaan kysytyn tapahtuman todennäköisyys.

$P(\text{"sisään pääsee kolme lukiolaista"})$
$= \dfrac{4}{120} = \dfrac{1}{30} = 0{,}0333\ldots \approx 0{,}033$

Vastaus $\frac{1}{30} \approx 0{,}033$

14.35

a)

Tomaatteja on yhteensä 16, joista tuoreita on 10.
Lasketaan kertolaskusäännön avulla todennäköisyys,
että kaikki neljä tomaattia ovat tuoreita.

$P(\text{"yksikään ei ole pilaantunut"})$
$= \frac{10}{16} \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{13} = 0{,}1153\ldots \approx 0{,}115$

b)

Tomaateista voidaan valita neljä tomaattia $\binom{16}{4} = 1820$ eri tavalla.
Lasketaan tuloperiaatteen avulla, kuinka monella eri tavalla voidaan valita
yksi pilaantunut ja 3 tuoretta tomaattia.

$6 \cdot \binom{10}{3} = 720$

Lasketaan kysytyn tapahtuman todennäköisyys.

$P(\text{"yksi pilaantunut"})$
$= \frac{720}{1820} = 0{,}3956\ldots \approx 0{,}396$

c)

Kaksi pilaantunutta tomaattia voi nostaa $\binom{6}{2} \cdot \binom{10}{2} = 675$ eri tavalla.
Kolme pilaantunut tomaattia voi nostaa $\binom{6}{3} \cdot 10 = 200$ eri tavalla.

Kysytty todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla.

$P(\text{"kaksi tai kolme pilaantunutta"})$
$= P(\text{"kaksi pilaantunutta"}) + P(\text{"kolme pilaantunutta"})$
$= \frac{675}{1820} + \frac{200}{1820} = 0{,}4807\ldots \approx 0{,}481$

Vastaus **a)** 0,115

b) 0,396

c) 0,481

14.36

Tapahtuman ”ainakin yksi vasenkätinen” vastatapahtuma on ”ei yhtään vasenkätistä” eli kaikki ovat oikeakätisiä.

Todennäköisyys, että ryhmään valittu henkilö on oikeakätinen, on 1 – 0,10 = 0,9.

Merkitään ryhmän jäsenten lukumäärää kirjaimella n ja muodostetaan yhtälö.

$$\begin{aligned} P(\text{”ainakin yksi vasenkätinen”}) &> 0{,}80 \\ 1 - P(\text{”kaikki oikeakätisiä”}) &> 0{,}80 \\ 1 - 0{,}9^n &> 0{,}80 \\ n &> 15{,}27\ldots \end{aligned}$$

Ryhmässä tulee olla siis vähintään 16 jäsentä.

Vastaus 16

14.37

a)

12 hengen ryhmästä voidaan muodostaa neljän hengen osajoukkoja $\binom{12}{4} = 495$ eri tavalla.

b)

Pelaajista 7 on eläkkeellä ja 12 – 7 = 5 on työssäkäyviä.

Tuloperiaatteen mukaan erilaisia neljän hengen ryhmiä, joista kaksi on eläkeläistä ja kaksi työssäkäyvää, on $\binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} = 210$.

Lasketaan kysytyn tapahtuman todennäköisyys.

$P(\text{"2 eläkeläistä ja 2 työssäkäyvää"})$
$= \frac{210}{495} = \frac{14}{33} = 0{,}42424\ldots \approx 0{,}42$

c)

Tapahtuman ”ainakin yksi harrastaa muuta korttipeliä” vastatapahtuma on ”yksikään ei harrasta muuta korttipeliä”.

Todennäköisyys, että henkilö ei harrasta muuta korttipeliä, on 0,81.

Merkitään henkilöiden lukumäärää kirjaimella n ja muodostetaan yhtälö.

$$\begin{aligned} P(\text{"ainakin yksi harrastaa muuta"}) &> 0{,}94 \\ 1 - P(\text{"yksikään ei harrasta muuta"}) &> 0{,}94 \\ 1 - 0{,}81^n &> 0{,}94 \\ n &> 13{,}35\ldots \end{aligned}$$

Peli-iltaan tulee saapua vähintään 14 henkilöä.

Vastaus **a)** 495

b) $\frac{14}{33} \approx 0{,}42$

c) 14 henkilöä

14.38

Pelaaja A voittaa ensimmäisellä heitolla, jos hän saa 1 tai 2.

Tämän todennäköisyys $P(\text{"A voittaa"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Jotta pelaaja B voittaa, tulee pelaajan A heittää ensin 3,4,5 tai 6 ja tämän jälkeen pelaajan B tulee saada 1,2 tai 3. Lasketaan todennäköisyys kertolaskusäännön avulla.

$$P(\text{"B voittaa"}) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Vastaus $P(\text{"A voittaa"}) = \frac{1}{3}$

$P(\text{"B voittaa"}) = \frac{1}{3}$

14.39

1.

Todennäköisin tulos on 1 oikein, koska rivien määrä on suurin
Epätodennäköisin tulos on 4 oikein, koska rivien määrä on pienin.

2. 4 oikein -voittokerroin on 32, joten voittosumma on $32 \cdot 3\ € = 96\ €$.

3.

Lasketaan tapahtumien 0 oikein ja 4 oikein todennäköisyydet.

$$P(\text{"0 oikein"}) = \frac{230300}{916895} = \frac{6580}{26197}$$

$$P(\text{"4 oikein"}) = \frac{4845}{916895} = \frac{57}{10787}$$

Pelaaja saa voi saada 4 oikein -rivin ja 0 oikein -rivin kahdella tavalla.
Joko 1. rivi on 4 oikein ja 2. on 0 oikein tai toisinpäin.

$P(\text{"4 oikein ja 0 oikein"})$
$= \frac{6580}{26197} \cdot \frac{57}{10787} + \frac{57}{10787} \cdot \frac{6580}{26197}$
$= 0{,}00265\ldots \approx 0{,}3\ \%$

4.

Jotta rivissä olisi 4 oikein, niiden tulee olla valittu arvottujen 20 numeron joukosta.
Tämä voidaan tehdä $\binom{20}{4} = 4845$eri tavalla, joten 4-oikein rivien määrä on 4845.

Vastaus **1.** Todennäköisin 1 oikein ja epätodennäköisin 4 oikein

2. 96 €

3. $0{,}00265\ldots \approx 0{,}3\ \%$

4. $\binom{20}{4} = 4845$