Binomi 5 – Luku 12 – Tehtävien malliratkaisut

12.1

a)

Koska ei ole olemassa korttia, jonka arvo on samaan aikaan ässä ja kuningas, tapahtumat ”kortti on ässä” ja ”kortti on kuningas” ovat erilliset.

b)

Koska ruutukuningas toteuttaa tapahtumat ”kortti on ruutu” ja ”kortti on kuningas”, tapahtumilla on yhteinen alkeistapaus ja tapahtumat eivät ole erilliset.

c)

Koska silmäluku 2 on parillinen ja korkeintaan kolme, tapahtumilla ”silmäluku on parillinen” ja ”silmäluku on korkeintaan kolme” on yhteinen alkeistapaus ja tapahtumat eivät ole erillisiä.

d)

Valitussa ryhmässä ei voi olla samaan aikaan korkeintaan yksi alaikäinen ja ainakin kaksi alaikäistä. Tapahtumat ”ryhmässä ainakin kaksi alaikäistä” ja ”ryhmässä on korkeintaan yksi alaikäinen” ovat siis erilliset.

Vastaus **a)** ovat

b) eivät ole

c) eivät ole

d) ovat

12.2

a)

Hiukset eivät voi olla samanaikaisesti vaaleat ja ruskeat, joten tapahtumat ”ruskeat hiukset” ja ”vaaleat hiukset” ovat erilliset.

Satunnaisesti valitulla henkilöllä on ruskeat hiukset todennäköisyydellä 12 % = 0,12. Vastaavasti vaaleiden hiuksien todennäköisyys on 84 % = 0,84.

Lasketaan kysytty todennäköisyys erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön avulla.

P(”ruskeat hiukset tai vaaleat hiukset”)
$= 0{,}12 + 0{,}84 = 0{,}96$

$P(A$ **tai** $B) = P(A) + P(B)$

b)

Ryhmässä 84 %:lla on vaaleat hiukset ja 89 %:lla on siniset silmät. Koska henkilöitä, joilla on sekä vaaleat hiukset että siniset silmät, on 78 %, eivät kyseiset tapahtumat ole erillisiä.

Valitulla henkilöllä on siis todennäköisyydellä 0,84 vaaleat hiukset ja todennäköisyydellä 0,89 siniset silmät. Henkilöllä on molemmat ominaisuudet todennäköisyydellä 0,78.

Kysytty todennäköisyys voidaan laskea yleisellä yhteenlaskusäännöllä.

P(”Vaaleat hiukset tai siniset silmät”)
$= P$(”vaaleat hiukset”) $+ P$(”siniset silmät”) $- P$(”vaaleat hiukset ja siniset silmät”)
$= 0{,}84 + 0{,}89 - 0{,}78 = 0{,}95$

$P(A$ **tai** $B) = P(A) + P(B) - P(A$ ja $B)$

Vastaus **a)** 0,96

b) 0,95

12.3

a) Kukkasipuli itää todennäköisyydellä 95 % = 0,95. Tapahtuman ”molemmat itävät” todennäköisyys lasketaan kertolaskusäännöllä, sillä itämiset ovat toisistaan riippumattomia.

$P(\text{”molemmat itävät”})$
$= 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}9025 \approx 0{,}903$

b) Tapahtuman ”ainakin toinen itää” vastatapahtuma eli komplementti on ”kumpikaan ei idä”.

Siemen ei idä todennäköisyydellä $1 - 0{,}95 = 0{,}05$.

$P(\text{”ainakin yksi siemen itää”})$
$= 1 - P(\text{”kumpikaan ei idä”})$
$= 1 - 0{,}05 \cdot 0{,}05$
$= 0{,}9975 \approx 0{,}998$

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

c)

Tapahtuma ”vain toinen itää” sisältää kaksi erillistä tapahtumaa:

- Sipuli 1 itää ja sipuli 2 ei idä
- Sipuli 1 ei idä ja sipuli 2 itää

Näiden tapahtumien todennäköisyydet lasketaan kertolaskusäännöllä.

$P(\text{”sipuli 1 itää ja sipuli 2 ei idä”})$
$= 0{,}95 \cdot 0{,}05 = 0{,}0475$

$P(\text{”sipuli 1 ei idä ja sipuli 2 itää”})$
$= 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}0475$

Kysytyn tapahtuman todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla.

$P(\text{”vain toinen itää”})$
$= P(1.\,\text{itää ja }2.\,\text{ei tai }1.\,\text{ei idä ja }2.\,\text{itää})$
$= 0{,}0475 + 0{,}0475 = 0{,}095$

$P(A$ **tai** $B) = P(A) + P(B)$

Vastaus **a)** 0,903 **b)** 0,998 **c)** 0,095

12.4

Ari näkee Panun todennäköisyydellä 0,75 ja Reetan todennäköisyydellä 0,85.

Koska Panu näkee molemmat todennäköisyydellä 0,68, tapahtumat eivät ole erilliset.

Lasketaan todennäköisyys yleisen yhteenlaskusäännön avulla.

$P(\text{"Panu tai Reetta"})$
$= P(\text{"Panu"}) + P(\text{"Reetta"}) - P(\text{"Panu ja Reetta"})$
$= 0{,}75 + 0{,}85 - 0{,}68$
$= 0{,}92$

Vastaus 0,92

12.5

a)

Kentällä on yhteensä 6 + 6 = 12 pelaajaa.

Tapahtumat ”Tapparan maalivahti” ja ”HIFK:n puolustaja” ovat erilliset, joten kysytty todennäköisyys saadaan erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännöllä.

$$P(\text{”Tapparan maalivahti tai HIFK: n puolustaja”})$$
$$= P(\text{”Tapparan maalivahti}) + P(\text{”HIFK: n puolustaja”})$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3}{12} = 0{,}25$$

b)

Pelaaja ei voi olla samaan aikaan maalivahti tai puolustaja, joten tapahtumat ovat erilliset. Kysytty todennäköisyys saadaan erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännöllä.

$$P(\text{”maalivahti tai puolustaja”})$$
$$= P(\text{”maalivahti”}) + P(\text{”puolustaja”})$$
$$= \frac{2}{12} + \frac{4}{12}$$
$$= \frac{6}{12} = 0{,}5$$

Kentällä yhteensä kaksi maalivahtia ja neljä puolustajaa.

c)

Tapahtumat ”hyökkääjä” ja ”HIFK:n pelaaja” eivät ole erilliset, sillä HIFK:n pelaaja voi olla myös hyökkääjä.

$$P(\text{”hyökkääjä tai HIFK:n pelaaja”})$$
$$= P(\text{”hyökkääjä”}) + P(\text{”HIFK:n pelaaja”}) - P(\text{”hyökkääjä ja HIFK:n pelaaja”})$$
$$= \frac{6}{12} + \frac{6}{12} - \frac{3}{12} = \frac{9}{12} = 0{,}75$$

Vastaus **a)** 0,25

b) 0,5

c) 0,75

12.6

a)

Korttipakassa on 52 pelikorttia. Korttipakassa on 4 eri maata ja jokaista maata on kortit 1–13.

Kortti ei voi olla samaan aikaan 2 ja 6, joten tapahtumat ”kortti on 2” ja ”kortti on 6” ovat erilliset. Lasketaan kysytty todennäköisyys erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännöllä.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{”kortti on 2 tai kortti on 6”})\\
&= P(2) + P(6)\\
&= \frac{4}{52} + \frac{4}{52}\\
&= \frac{8}{52} = \frac{2}{13}
\end{aligned}
$$

Saman arvoisia kortteja on aina 4, eli yksi kutakin maata.

b)

Kortti ei voi olla samaan aikaan hertta ja ruutu, joten tapahtumat ”kortti on hertta” ja ”kortti on ruutu” ovat erilliset. Lasketaan kysytty todennäköisyys erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännöllä.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{”hertta tai ruutu”})\\
&= P(\text{hertta}) + P(\text{ruutu})\\
&= \frac{13}{52} + \frac{13}{52}\\
&= \frac{26}{52} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

c)

Kortti voi olla pata ja arvoltaan 7, joten tapahtumat ”kortti on pata” ja ”kortti on 7” eivät ole erilliset. Kysytty todennäköisyys saadaan yleisellä yhteenlaskusäännöllä.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{”pata tai 7”})\\
&= P(\text{”pata”}) + P(\text{”7”}) - P(\text{”pata ja 7”})\\
&= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52}\\
&= \frac{16}{52} = \frac{4}{13}
\end{aligned}
$$

Vastaus **a)** $\frac{2}{13}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{4}{13}$

12.7

a)

Ominaisuus A periytyy todennäköisyydellä 0,15.

Ominaisuus B ei periydy todennäköisyydellä 1 – 0,65 = 0,35.

Koska ominaisuudet periytyvät toisistaan riippumattomina,
voidaan kysytty todennäköisyys laskea kertolaskusäännön avulla.

$P(\text{"A periytyy ja B ei periydy"})$
$= P(\text{A periytyy}) \cdot P(\text{B periytyy})$
$= 0{,}15 \cdot 0{,}35 = 0{,}0525 \approx 0{,}053$

b)

Tapahtumalle "vain toinen ominaisuus periytyy" suotuisia tapahtumia ovat

- A periytyy ja B ei periydy
- A ei periydy ja B ei periydy

Kummankin tapahtuman todennäköisyys saadaan kertolaskusäännön avulla.

Koska suotuisat tapahtumat ovat erilliset, saadaan kysytty todennäköisyys
erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön avulla.

$P(\text{"vain toinen periytyy"})$
$= P(\text{"A periytyy ja B ei periydy"}) + P(\text{"A ei periydy ja B periytyy"})$
$= 0{,}15 \cdot 0{,}35 + (1 - 0{,}15) \cdot 0{,}65$
$= 0{,}15 \cdot 0{,}35 + 0{,}85 \cdot 0{,}65$
$= 0{,}605 \approx 0{,}61$

Vastaus **a)** 0,053

b) 0,61

12.8

a)

Oletetaan, että kellot toimivat oikein toisistaan riippumattomina.

Uudempi toimii 98 % = 0,98 todennäköisyydellä ja vanhempi toimii 85 % = 0,85 todennäköisyydellä

Koska tapahtumat ovat riippumattomia, kysytty todennäköisyys saadaan kertolaskusäännöllä.

$P(\text{"molemmat kellot soivat"})$
$= P(\text{"uusi soi ja vanha soi"})$
$= 0{,}98 \cdot 0{,}85$
$= 0{,}833$

b)

Tapahtumalle ”vain toinen toimii” on kaksi suotuisaa tapausta.

- Uusi toimii ja vanha ei
- Uusi ei toimi ja vanha toimii

Uudempi ei toimi todennäköisyydellä 1 – 0,98 = 0,02.

Vanhempi ei toimi todennäköisyydellä 1 – 0,85 = 0,15.

Kysytyn tapahtuman todennäköisyys saadaan erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännöllä.

$P(\text{"vain toinen toimii"})$
$= P(\text{"uusi toimii ja vanha ei"}) + P(\text{"uusi ei toimi ja vanha toimii"})$
$= 0{,}98 \cdot 0{,}15 + 0{,}02 \cdot 0{,}85$
$= 0{,}164$

c)

Tapahtuma ”ei kumpikaan” saadaan kertolaskusäännön avulla.

$P(\text{"kumpikaan ei toimi"})$
$= 0{,}02 \cdot 0{,}15$
$= 0{,}003$

Vastaus **a)** 0,833 **b)** 0,164 **c)** 0,003

12.9

a)

Vastaus on oikein todennäköisyydellä $\frac{1}{5}$.

Vastaukset eivät riipu toisistaan, joten kysytty todennäköisyys saadaan kertolaskusäännön avulla.

$$P(\text{"molemmat oikein"})$$
$$= P(\text{"1. oikein ja 2. oikein"})$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25} = 0{,}04$$

b)

Vastaus on oikein todennäköisyydellä $\frac{4}{5}$.

Vastaukset eivät riipu toisistaan, joten kysytty todennäköisyys saadaan kertolaskusäännön avulla.

$$P(\text{"molemmat väärin"})$$
$$= P(\text{"1. väärin ja 2. väärin"})$$
$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25} = 0{,}64$$

Huomaa! Tapahtumat ”molemmat oikein” ja ”molemmat väärin” **eivät ole** toistensa vastatapahtumat.

c)

Tapahtumalle ”vain toinen on oikein” on kaksi suotuisaa tapausta. Joko vain 1. vastaus on oikein tai vain 2. vastaus on oikein. Lasketaan kysytty tapahtuma yhteenlaskusäännön avulla.

$$P(\text{"vain toinen oikein"})$$
$$= P(\text{"1. oikein ja 2. väärin"}) + P(\text{"1. väärin ja 2. oikein"})$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}$$
$$= \frac{4}{25} + \frac{4}{25} = \frac{8}{25} = 0{,}32$$

Vastaus **a)** 0,04 **b)** 0,64 **c)** 0,32

12.10

a)

Kortteja ei palauteta pakkaan, joten noston jälkeen korttien kokonaismäärä pienenee yhdellä ja myös suotuisten alkeistapausten määrä voi muuttua.

Tapahtuman ”molemmat kortit ovat ristejä” todennäköisyys voidaan laskea kertolaskusäännön avulla

$P(\text{”molemmat ristejä”})$
$= P(\text{”1. risti ja 2. risti”})$
$= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}$
$= 0{,}0588\ldots \approx 0{,}059$

Alussa ristejä 13 ja kortteja 52. Kun poistetaan yksi risti, kortteja on 51 ja ristejä enää 12.

b)

Tapahtuman ”ainakin toinen korteista on pata” vastatapahtuma on ”kumpikaan ei ole pata”. Tällöin suotuisia tapauksia ovat kaikki muut kortit paitsi padat. Lasketaan todennäköisyys komplementin avulla.

$P(\text{”ainakin toinen on pata”})$
$= 1 - P(\text{”kumpikaan ei ole pata”})$
$= 1 - P(\text{”1. ei pata ja 2. ei pata”})$
$= 1 - \frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51}$
$= 0{,}441\ldots \approx 0{,}44$

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

c)

Tapahtumalle ”vain toinen korteista on hertta” on kaksi suotuisaa tapausta.

$$P(\text{1. on hertta ja 2. ei ole hertta}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51}$$

$$P(\text{1. ei ole hertta ja 2. on hertta}) = \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51}$$

Kysytty todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla.

$P(\text{”vain toinen korteista on hertta”})$
$= \frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51} + \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51} = 0{,}382\ldots \approx 0{,}38$

Vastaus **a)** 0,059 **b)** 0,44 **c)** 0,38

12.11

a)

Palloja on yhteensä 15 + 12 = 27. Yhden pallon noston jälkeen pallojen kokonaismäärä muuttuu.

Lasketaan tapahtuman ”kumpikaan ei ole valkoinen” todennäköisyys kertolaskusäännöllä.

$$P(\text{”kumpikaan ei ole valkoinen”})$$
$$= P(\text{”1. punainen”}) \cdot P(\text{”2. punainen”})$$
$$= \frac{12}{27} \cdot \frac{11}{26} = 0{,}188\ldots \approx 0{,}19$$

Alussa palloja 27 ja punaisia 12. Kun yksi punainen otetaan pois, palloja on 26 ja punaisia 11.

b)

Tapahtumalle ”vain yksi valkoinen pallo” on kaksi suotuisaa tapausta.

$$P(\text{”1. valkoinen ja 2. on punainen”}) = \frac{15}{27} \cdot \frac{12}{26}$$

$$P(\text{”1. punainen ja 2. valkoinen”}) = \frac{12}{27} \cdot \frac{15}{26}$$

Kysytty todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla.

$$P(\text{”vain yksi valkoinen”})$$
$$= \frac{15}{27} \cdot \frac{12}{26} + \frac{12}{27} \cdot \frac{15}{26} = 0{,}512\ldots \approx 0{,}51$$

c)

Tapahtumalle ”kaksi samanväristä palloa” on kaksi suotuisaa tapausta.

$$P(\text{”molemmat valkoisia”}) = \frac{15}{27} \cdot \frac{14}{26}$$

$$P(\text{”molemmat punaisia”}) = \frac{12}{27} \cdot \frac{11}{26}$$

Kysytty todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla.

$$P(\text{”molemmat saman värisiä”})$$
$$= P(\text{”molemmat valkoisia”}) + P(\text{”molemmat punaisia”})$$
$$= \frac{15}{27} \cdot \frac{14}{26} + \frac{12}{27} \cdot \frac{11}{26} = 0{,}487\ldots \approx 0{,}49$$

Vastaus **a)** 0,19 **b)** 0,51 **c)** 0,49

12.12

a)

Jos Kerttu ei joudu pysähtymään valoissa kertaakaan, ovat kaikki valot vihreitä.

Koska valot ovat toisistaan riippumattomat, kysytty todennäköisyys lasketaan kertolaskusäännön avulla.

$P(\text{”ei pysähdy kertaakaan”})$
$= P(\text{”1. valo vihreä}) \cdot P(\text{”2. valo vihreä}) \cdot P(\text{”3. valo vihreä})$
$= 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}012$

b)

Kerttu pysähtyy 1. valoihin todennäköisyydellä 1 – 0,4 = 0,6,
2. valoihin todennäköisyydellä 1 – 0,3 = 0,7
3. valoihin todennäköisyydellä 1 – 0,1 = 0,9.

Kertulla on kolme erilaista vaihtoehtoa pysähtyä valoihin kaksi kertaa.

1. ja 2. punaiset ja 3. vihreä 1. ja 3. punaiset ja 2. vihreä 2. ja 3. punaiset ja 1. vihreä

Lasketaan näiden tapahtumien todennäköisyydet.

$P(\text{”1. punainen ja 2. punainen ja 3. vihreä})$
$= 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}042$

$P(\text{”1. punainen ja 2. vihreä ja 3. punainen})$
$= 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}162$

$P(\text{”1. vihreä ja 2. punainen ja 3. punainen})$
$= 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}252$

Kysytty todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla.

$P(\text{”pysähtyy kaksi kertaa”})$
$= 0{,}042 + 0{,}162 + 0{,}252$
$= 0{,}456$

Vastaus **a)** 0,012 **b)** 0,456

12.13

a)

Vieras pääsee vieraspaikalle, kun jompikumpi paikoista on vapaa.

1. on vapaa todennäköisyydellä 35 % = 0,35.

2. on vapaa todennäköisyydellä 45 % = 0,45.

Molemmat ovat vapaina 10 % = 0,1 todennäköisyydellä. Näin ollen tapahtumat eivät ole erilliset. Lasketaan kysytty todennäköisyys yleisellä yhteenlaskusäännöllä.

$P(\text{”1. on vapaa tai 2. on vapaa”})$
$= P(\text{”1. on vapaa”}) + P(\text{”2. on vapaa”}) - P(\text{”1. ja 2. ovat vapaita”})$
$= 0{,}35 + 0{,}45 - 0{,}1 = 0{,}7$

Vieras pääsee vieraspaikalle todennäköisyydellä 0,7.

b)

Tapahtuman ”vieras ei pääse parkkipaikalle” vastatapahtuma on ”vieras pääsee parkkipaikalle”. Lasketaan kysytyn tapahtuman todennäköisyys komplementtisäännöllä.

$P(\text{”ei pääse parkkipaikalle”})$
$= 1 - P(\text{”pääsee parkkipaikalle”})$
$= 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Vastaus **a)** 0,7

b) 0,3

12.14

a)

Todennäköisyys saada nopanheitossa kuutonen on $\frac{1}{6}$.
Koska heitot ovat riippumattomia, voidaan kysytty todennäköisyys laskea kertolaskusäännön avulla.

$P(\text{"kolme heittoa ovat kuutosia"})$
$= P(\text{"1. on 6"}) \cdot P(\text{"2. on 6"}) \cdot P(\text{"3. on 6})$
$= \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = 0{,}00462\ldots \approx 0{,}0046$

b)

Todennäköisyys saada nopanheitossa ykkönen on myös $\frac{1}{6}$.
Näin ollen $P(\text{"kolme heittoa ovat ykkösiä"}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

Tapahtumat ”kaikki kuutosia” ja ”kaikki ykkösiä” ovat erillisiä, joten lasketaan kysytty todennäköisyys erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön avulla.

$P(\text{"kolme ykköstä tai kolme kuutosta"})$
$= P(\text{"kolme ykköstä"}) + P(\text{"kolme kuutosta"})$
$= \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6}$
$= 2 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = 0{,}00925\ldots \approx 0{,}0093$

Vastaus **a)** 0,0046

b) 0,0093

12.15

Tapahtumalle ”kahdella on sama veriryhmä” on neljä suotuisaa tapausta.

$P(\text{”molemmilla on A”}) = 0{,}41 \cdot 0{,}41 = 0{,}1681$

$P(\text{”molemmilla on B”}) = 0{,}18 \cdot 0{,}18 = 0{,}0324$

$P(\text{”molemmilla on AB”}) = 0{,}08 \cdot 0{,}08 = 0{,}0064$

$P(\text{”molemmilla on O”}) = 0{,}33 \cdot 0{,}33 = 0{,}1089$

Suotuista tapaukset ovat erillisiä, joten lasketaan kysytty todennäköisyys erillisten tapahtumien yhteenlaskusäännön avulla.

$P(\text{”molemmilla sama veriryhmä”})$
$= P(\text{”molemmilla A”}) + P(\text{”molemmilla B”}) + P(\text{”molemmilla AB”}) + P(\text{”molemmilla O”})$
$= 0{,}1681 + 0{,}0324 + 0{,}0064 + 0{,}1089$
$= 0{,}3158 \approx 0{,}32$

Vastaus 0,32

12.16

a)

Laatikossa on yhteensä $5 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 1 = 25$ sukkaa. Kun laatikosta otetaan yksi sukka pois, sukkien kokonaismäärä vähenee yhdellä. Myös suotuisten tapausten määrä saattaa muuttua.

Tapahtuman ”molemmat sukat mustia” todennäköisyys voidaan laskea kertolaskusäännön avulla

$$\begin{aligned} & P(\text{”molemmat mustia”}) \\ &= P(\text{”1. musta } \textcolor{red}{\text{ja}} \text{ 2. musta”}) \\ &= \frac{14}{25} \cdot \frac{13}{24} \\ &= 0{,}3033\ldots \approx 0{,}303 \end{aligned}$$

Alussa sukkia on 25 ja mustia sukkia on 14. Yhden mustan sukan poiston jälkeen sukkia on 24 ja mustia 13.

b)

Tapahtuman ”ainakin toinen sukista on musta” vastatapahtuma on ”kumpikaan ei ole musta”. Tällöin suotuisia tapauksia ovat kaikki muut sukat paitsi mustat. Lasketaan todennäköisyys komplementin avulla.

$$\begin{aligned} & P(\text{”ainakin toinen on musta”}) \\ &= 1 - P(\text{”kumpikaan ei ole musta”}) \\ &= 1 - P(\text{”1. ei musta } \textcolor{red}{\text{ja}} \text{ 2. ei musta”}) \\ &= 1 - \frac{11}{25} \cdot \frac{10}{24} \\ &= 0{,}8166\ldots \approx 0{,}817 \end{aligned}$$

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

c)

Tapahtumalle ”vain toinen on musta” on kaksi suotuisaa tapausta.

$$P(\text{1. on musta } \textcolor{red}{\text{ja}} \text{ 2. ei ole musta}) = \frac{14}{25} \cdot \frac{11}{24}$$

$$P(\text{1. ei ole musta } \textcolor{red}{\text{ja}} \text{ 2. on musta}) = \frac{11}{25} \cdot \frac{14}{24}$$

Kysytty todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla.

$$\begin{aligned} & P(\text{”vain toinen sukista on musta”}) \\ &= \frac{14}{25} \cdot \frac{11}{24} + \frac{11}{25} \cdot \frac{14}{24} \\ &= 0{,}5133\ldots \approx 0{,}513 \end{aligned}$$

Vastaus **a)** 0,303 **b)** 0,817 **c)** 0,513

12.17

Suomalainen mies on punavihersokea 8,0 % = 0,08 todennäköisyydellä.
Näin ollen hän ei ole punavihersokea 1 – 0,08 = 0,92 todennäköisyydellä.

Tapahtumalle ”kolmesta miehestä ainakin kaksi on punavihersokeita” on neljä suotuisaa alkeistapausta.

1. ja 2. sokeita ja 3. ei ole	2. ja 3. sokeita ja 1. ei ole
1. ja 3. sokeita ja 2. ei ole	kaikki ovat

Lasketaan näiden tapahtumien todennäköisyydet.

$P(\text{”1. sokea ja 2. sokea ja 3. ei ole}) = 0{,}08 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}92 = 0{,}08^2 \cdot 0{,}92$

$P(\text{”1. sokea ja 2. ei ole ja 3. sokea}) = 0{,}08 \cdot 0{,}92 \cdot 0{,}08 = 0{,}08^2 \cdot 0{,}92$

$P(\text{”1. ei ole ja 2. sokea ja 3. sokea}) = 0{,}92 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}08 = 0{,}08^2 \cdot 0{,}92$

$P(\text{”1. ei ole ja 2. sokea ja 3. sokea}) = 0{,}08 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}08 = 0{,}08^3$

Kysytty todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla.

$P(\text{”ainakin kaksi on punavihersokeita”})$
$= 3 \cdot 0{,}08^2 \cdot 0{,}92 + 0{,}08^3$
$= 0{,}018176 \approx 0{,}0182$

Vastaus 0,0182

12.18

Tapahtumalle ”korkeintaan yhden karkin” on neljä suotuisaa alkeistapausta.

vain 1. karkki on salmiakki
vain 2. karkki on salmiakki
vain 3. karkki on salmiakki
yksikään karkki ei ole salmiakki

Kun karkki otetaan pussista, sekä suotuisten tapausten että kaikkien alkeistapausten määrä vähenee.

Lasketaan näiden tapahtumien todennäköisyydet.

$$P(\text{”1. salmiakki ja 2. ei ja 3. ei”}) = \frac{3}{12} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} = \frac{216}{1320}$$

$$P(\text{”1. ei salmiakki ja 2. on ja 3. ei”}) = \frac{9}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{8}{10} = \frac{216}{1320}$$

$$P(\text{”1. ei salmiakki ja 2. ei ja 3. on”}) = \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{216}{1320}$$

$$P(\text{”1. ei salmiakki ja 2. ei ja 3. ei”}) = \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} = \frac{504}{1320}$$

Kertolaskussa tekijöiden järjestyksellä ei ole väliä, joten kaikkien todennäköisyys on sama.

Kysytty todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännön avulla.

$$P(\text{”korkeintaan yksi karkki on salmiakki”})$$
$$= \frac{216}{1320} + \frac{216}{1320} + \frac{216}{1320} + \frac{504}{1320}$$
$$= 0{,}8727\ldots \approx 0{,}873$$

Vastaus 0,873

12.19

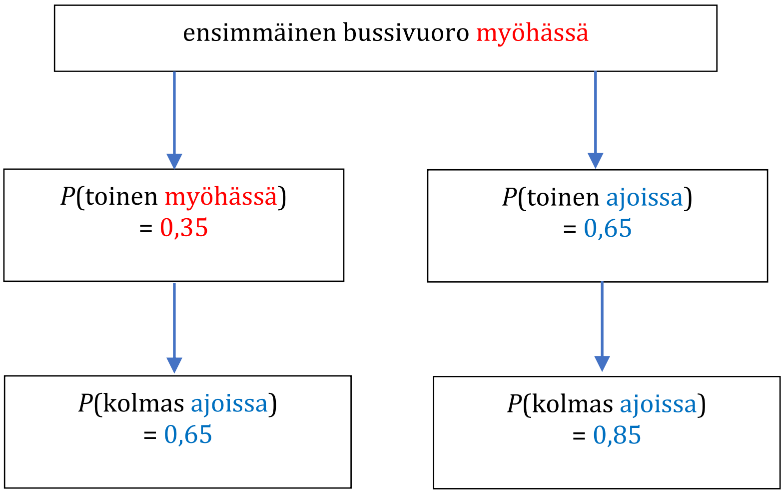
Jos edellinen bussi oli myöhässä, niin seuraava bussi on

- myöhässä todennäköisyydellä 0,35
- ajoissa todennäköisyydellä 1 – 0,35 = 0,65.

Jos edellinen bussi on ajoissa, niin seuraava bussi on

- ajoissa todennäköisyydellä 0,85
- myöhässä todennäköisyydellä 1 – 0,85 = 0,85

Havainnollistetaan tilannetta puukaaviolla.



Kysytty todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännöllä.

$P(\text{"kolmas ajoissa"}) = 0{,}35 \cdot 0{,}65 + 0{,}65 \cdot 0{,}85 = 0{,}78$

Vastaus 0,78

12.20

Jos vanhemmalla on heterokromia niin lapsella

- on heterokromia todennäköisyydellä 0,25
- ei ole heterokromiaa todennäköisyydellä 1 – 0,25 = 0,75.

Jos vanhemmalla ei ole heterokromiaa, niin lapsella

- on heterokromia todennäköisyydellä 0,12
- ei ole heterokromiaa todennäköisyydellä 1 - 0,12 = 0,88

Havainnollistetaan tilannetta puukaaviolla.

Isoäidillä on heterokromia

P(lapsella on heterokromia) = 0,25

P(lapsella ei ole heterokromiaa) = 0,75

P(lapsenlapsella on heterokromia) = 0,25

P(lapsenlapsella on heterokromia) = 0,12

Kysytty todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännöllä.

$$P(\text{"lapsenlapsella heterokromia"}) = 0{,}25 \cdot 0{,}25 + 0{,}75 \cdot 0{,}12 = 0{,}1525 \approx 0{,}15$$

Vastaus 0,15

12.21

a)

Pojan todennäköisyys on $\frac{104}{104+100} = \frac{104}{204}$.

Tytön todennäköisyys on $\frac{100}{104+100} = \frac{100}{204}$.

Tapahtumalle ”perheeseen syntyy kaksi saman sukupuolista lasta” on kaksi suotuisaa tapausta: molemmat tyttöjä tai molemmat poikia.

Kysytty todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännöllä.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{”kaksi samansukupuolista lasta”}) \\
&= P(\text{”kaksi poikaa”}) + P(\text{”kaksi tyttöä”}) \\
&= \frac{104}{204} \cdot \frac{104}{204} + \frac{100}{204} \cdot \frac{100}{204} \\
&= 0{,}5001\ldots \approx 0{,}500
\end{aligned}
$$

b)

Tapahtumalle ”perheeseen syntyy viisi saman sukupuolista lasta” on kaksi suotuisaa tapausta: kaikki tyttöjä tai kaikki poikia.

Kysytty todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännöllä.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{”viisi samansukupuolista lasta”}) \\
&= P(\text{”viisi poikaa”}) + P(\text{”viisi tyttöä”}) \\
&= \left(\frac{104}{204}\right)^5 + \left(\frac{100}{204}\right)^5 \\
&= 0{,}06274\ldots \approx 0{,}063
\end{aligned}
$$

Vastaus **a)** 0,500

b) 0,063

12.22

Tapahtumalle ”kaksi koneista on ehjiä” on kolme suotuisaa tapausta.

A ja B ehjiä, C rikki
A ja C ehjiä, B rikki
B ja C ehjiä, A rikki
Kaikki ehjiä

Lasketaan suotuisten tapahtumien todennäköisyydet.

$P(\text{”A ehjä, B ehjä, C rikki”})$
$= 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1$
$= 0{,}056$

Kone A ehjä todennäköisyydellä 1 – 0,3 = 0,7.
Tällöin kone B ehjä todennäköisyydellä 1 – 0,2 = 0,8
ja kone C rikki todennäköisyydellä 0,1

$P(\text{”A ehjä, B rikki, C ehjä”})$
$= 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3$
$= 0{,}042$

Kone A ehjä todennäköisyydellä 1 – 0,3 = 0,7.
Tällöin kone B rikki todennäköisyydellä 0,2
ja kone C ehjä todennäköisyydellä 1- 0,7 = 0,3

$P(\text{”A rikki, B ehjä, C ehjä”})$
$= 0{,}3 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}3$
$= 0{,}0315$

Kone A rikki todennäköisyydellä 0,3.
Tällöin kone B ehjä todennäköisyydellä 1 – 0,65 = 0,35
ja kone C ehjä todennäköisyydellä 1 – 0,7 = 0,3

$P(\text{”A ehjä, B ehjä, C ehjä”})$
$= 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9$
$= 0{,}504$

Kone A ehjä todennäköisyydellä 1 – 0,3 = 0,7.
Tällöin kone B ehjä todennäköisyydellä 1 – 0,2 = 0,8
ja kone C ehjä todennäköisyydellä 1 – 0,1 = 0,9

Kysytty todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännöllä.

$P(\text{”kaksi koneista on ehjiä”})$
$= 0{,}056 + 0{,}042 + 0{,}0315 + 0{,}504$
$= 0{,}6335 \approx 63\ \%$

Vastaus 63 %

12.23

Italia (I) voittaa Ranskan (R), jos

- I4 saa maalin, R4 saa maalin, I5 saa maalin ja R5 ei saa maalia
- I4 ei saa maalia, R4 ei saa maalia, I5 saa maalin ja R5 ei saa maalia
- I4 saa maalin, R4 ei saa maalia, I5 ei saa maalia ja R5 ei saa maalia
- I4 saa maalin, R4 ei saa maalia, I5 saa maalin. Tällöin peli päättyy.

Lasketaan näiden tapahtumien todennäköisyys.

$P(\text{"I4 maali, R4 maali, I5 maali, R5 ei maalia"})$
$= 0{,}95 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}1$
$= 0{,}081225$

$P(\text{"I4 ei maalia, R4 ei maalia, I5 maali, R5 ei maalia"})$
$= 0{,}05 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}15$
$= 0{,}0005625$

$P(\text{"I4 maali, R4 ei maalia, I5 ei maalia, R5 ei maalia"})$
$= 0{,}95 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}15$
$= 0{,}0007125$

$P(\text{"I4 maali, R4 ei maalia, I5 maali"})$
$= 0{,}95 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}95$
$= 0{,}09025$

Kysytty todennäköisyys saadaan yhteenlaskusäännöllä.

$P(\text{"Italia voittaa"})$
$= 0{,}081225 + 0{,}0005625 + 0{,}0007215 + 0{,}09025$
$= 0{,}17275 \approx 0{,}17$

Vastaus 0,17