Binomi 5 – Luku 11 – Tehtävien malliratkaisut

11.1

a)

Kukkien itämiset eivät vaikuta toisiinsa, joten tapahtumat ovat toisistaan riippumattomat. Lasketaan kysytyn tapahtuman todennäköisyys kertolaskusäännön avulla.

P(”molemmat sipulit itävät”)
$=$ P(”narsissi itää” JA ”krookus itää”)
$= 0{,}75 \cdot 0{,}82$
$= 0{,}615 \approx 0{,}62$

b)

Lasketaan ensin tapahtumien, joissa kukka ei idä, todennäköisyydet.

kukka	sipuli itää	sipuli ei idä
narsissi	0,75	1 – 0,75 = 0,25
krookus	0,82	1 – 0,82 = 0,18

Tapahtuman A komplementin eli vastatapahtuman todennäköisyys on $1 - P(A)$.

P(”kumpikaan sipuli ei idä”)
$=$ P(”narsissi ei idä” JA ”krookus ei idä”)
$= 0{,}25 \cdot 0{,}18$
$= 0{,}045$

c)

Lasketaan kertolaskusäännön avulla.

P(”narsissi itää” JA ”krookus ei idä”)
$= 0{,}75 \cdot 0{,}18$
$= 0{,}135$
$\approx 0{,}14$

Vastaus **a)** 0,62 **b)** 0,045 **c)** 0,14

11.2

a)

Joka kuudes arpa voittaa, joten yksi kuudesta arvasta on voittoarpa.

$P(\text{"arpa voittaa"}) = \frac{1}{6}$

Oletetaan, että arpoja on paljon, jolloin arvan voitto ei riipu toisista nostetuista arvoista. Tapahtumat ovat siis riippumattomia. Lasketaan todennäköisyys, että viidestä arvasta jokainen arpa voittaa.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{"kaikki arvat voittavat"})\\
&= P(\text{"1. voittaa" JA "2. voittaa JA} \ldots \text{JA "6. voittaa"})\\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\\
&= \left(\frac{1}{6}\right)^5\\
&= \frac{1}{7776} = 0{,}0001286\ldots \approx 0{,}00013
\end{aligned}
$$

b)

Tapahtuman "ainakin yksi arpa voittaa" vastatapahtuma on "yksikään arpa ei voita". Lasketaan kysytyn tapahtuman todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

Koska kuudesta arvasta viisi ei voita, niin $P(\text{"arpa ei voita"}) = \frac{5}{6}$.

Lasketaan kertolaskusäännön avulla todennäköisyys, ettei yksikään arpa voita.

$$
\begin{aligned}
P(\text{"yksikään ei voita"}) &= P(\text{"1. ei voita" JA "2. ei voita JA ... JA "6. ei voita"})\\
&= \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776}
\end{aligned}
$$

Lasketaan komplementin avulla todennäköisyys, että ainakin yksi arpa voittaa.

$$
\begin{aligned}
P(\text{"ainakin yksi voittaa"}) &= 1 - P(\text{"yksikään ei voita"})\\
&= 1 - \frac{3125}{7776} = 0{,}5981 \ldots \approx 0{,}60
\end{aligned}
$$

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

Vastaus **a)** 0,00013 **b)** 0,60

11.3

a)

Koska ensimmäisen heiton tulos ei vaikuta toisen heiton tulokseen mitenkään, peräkkäiset heitot ovat riippumattomia.

b)

Lasketaan ensin tapahtumien todennäköisyydet.

$$P(\text{"1. heitolla 1 tai 2"}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Silmälukuja on yhteensä 6, joista suotuisia on 2. (silmäluvut 1 ja 2).

$$P(\text{"2. heitolla vähintään 3"}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Suotuisia silmälukuja on nyt 4 (silmäluvut 3, 4, 5 ja 6).

Lasketaan kysytyn tapahtuman todennäköisyys kertolaskusäännön avulla.

$$P(\text{"1. heitolla 1 tai 2 JA 2. heitolla vähintään 3"}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

Vastaus **a)** ei mitenkään, heitot ovat riippumattomia

b) $\frac{2}{9}$

11.4

a)

Ilarin ja Matin tikanheitot eivät vaikuta toisiinsa, joten tapahtumat ovat riippumattomat. Lasketaan kysytty todennäköisyys kertolaskusäännön avulla.

$$
\begin{aligned}
P(\text{"molemmat osuvat häränsilmään"}) &= P(\text{"Ilari osuu"}) \cdot P(\text{"Matti osuu"}) \\
&= 0{,}17 \cdot 0{,}30 = 0{,}051 = 5{,}1\ \%
\end{aligned}
$$

b)

Lasketaan ensin tapahtumien ”ei osu häränsilmään” todennäköisyydet.

	osuu	ei osu
Matti	0,30	1 – 0,30 = 0,70
Ilari	0,17	1 – 0,17 = 0,83

Tapahtuman A komplementin eli vastatapahtuman todennäköisyys on 1 – $P(A)$.

$$
\begin{aligned}
P(\text{"Kumpikaan ei osu häränsilmään"}) &= P(\text{"Ilari ei osu"}) \cdot P(\text{"Matti ei osu"}) \\
&= 0{,}83 \cdot 0{,}70 = 0{,}581 \approx 58\ \%
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
P(\text{"Matti osuu JA Ilari ei"}) &= P(\text{"Matti osuu"}) \cdot P(\text{"Ilari ei osu"}) \\
&= 0{,}30 \cdot 0{,}83 = 0{,}249 \approx 25\ \%
\end{aligned}
$$

Vastaus **a)** 5,1 %

b) 58 %

c) 25 %

11.5

a)

Todennäköisyys, että suomalainen ei asu pääkaupunki seudulla on $1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Henkilöiden arpomiset eivät vaikuta toisiinsa, joten tapahtumat ovat riippumattomat.
Lasketaan kysytty todennäköisyys kertolaskusäännöllä.

$P(\text{"kumpikaan ei pääkaupunkiseudulta"})$
$= P(\text{"1. ei ole pääkaupunkiseudulta"}) \cdot P(\text{"2. ei ole pääkaupunkiseudulta"})$
$= 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64 = 64\ \%$

b)

Tapahtuman ”ainakin toinen” vastatapahtuma on ”ei kumpikaan”.
Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$P(\text{"ainakin toinen on pääkaupunkiseudulta"})$
$= 1 - P(\text{"kumpikaan ei ole pääkaupunkiseudulta"})$
$= 1 - 0{,}64 = 0{,}36 = 36\ \%$

Vastaus **a)** 64 %

b) 36 %

11.6

a)

Oletetaan, että valot ovat toisistaan riippumattomia. Lasketaan kysytty todennäköisyys kertolaskusäännön avulla. Sandra joutuu pysähtymään valoissa, jos valo on punainen.

$P(\text{"pysähtyy molemmissa valoissa"})$
$= P(\text{"1. valo punainen"}) \cdot P(\text{"2. valo punainen"})$
$= 0{,}45 \cdot 0{,}30 = 0{,}135 \approx 0{,}14$

b)

Lasketaan ensin vastatapahtumien todennäköisyydet.

	punainen	vihreä
1. valot	0,45	1 – 0,45 = 0,55
2. valot	0,30	1 – 0,30 = 0,70

Tapahtuman *A* komplementin eli vastatapahtuman todennäköisyys on 1 – *P*(*A*).

$P(\text{"ei joudu pysähtymään valoissa"})$
$= P(\text{"1. valo vihreä"}) \cdot P(\text{"2. valo vihreä"})$
$= 0{,}55 \cdot 0{,}70 = 0{,}385 \approx 0{,}39$

c)

$P(\text{"pysähtyy 1. valoissa, mutta ei 2. valoissa})$
$= P(\text{"1. valo punainen"}) \cdot P(\text{"2. valo vihreä"})$
$= 0{,}45 \cdot 0{,}70 = 0{,}315 \approx 0{,}32$

Vastaus **a)** 0,14

b) 0,39

c) 0,32

11.7

a)

Koska joka kolmas sairastaa anemiaa, on

$P(\text{"henkilö sairastaa anemiaa"}) = \dfrac{1}{3}$.

Valitaan satunnaisesti kahdeksan ihmistä alueelta, jolloin ihmisten sairastaminen on toisistaan riippumatonta. Lasketaan kysytty todennäköisyys kertolaskusäännön avulla.

$P(\text{"kaikki sairastavat anemiaa"})$
$= P(\text{"1. sairastaa"}) \cdot P(\text{"2. sairastaa"}) \cdot \ldots \cdot P(\text{"8. sairastaa"})$
$= \left(\dfrac{1}{3}\right)^8 = \dfrac{1}{6561} = 0{,}000152\ldots \approx 0{,}00015$

b)

Tapahtuman ”ainakin yksi sairastaa” vastatapahtuma on ”yksikään ei sairasta”.

$P(\text{"henkilö ei sairasta anemiaa"})$
$= 1 - P(\text{"henkilö sairastaa anemiaa"})$
$= 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

Lasketaan kysytty todennäköisyys komplementin avulla.

$P(\text{"ainakin yksi sairastaa anemiaa"})$
$= 1 - P(\text{"yksikään ei sairasta"})$
$= 1 - P(\text{"1. ei sairasta"}) \cdot P(\text{"2. ei sairasta"}) \cdot \ldots \cdot P(\text{"8. ei sairasta"})$
$= 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^8 = 1 - \dfrac{256}{6561} = 0{,}9609\ldots \approx 0{,}96$

Vastaus **a)** 0,00015

b) 0,96

11.8

a)

Kirjaimen virheellisyys ei riipu muista kirjaimista, joten tapahtumat ovat riippumattomat. Ratkaistaan kysytty todennäköisyys kertolaskusäännön avulla.

$P(\text{"kaikki virheellisiä"})$
$= P(\text{"1. virheellinen"}) \cdot P(\text{"2. virheellinen"}) \cdot \ldots \cdot P(\text{"18. virheellinen"})$
$= 0{,}12^{18} = 2{,}662\ldots \cdot 10^{-17} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-17}$

b)

Lasketaan ensin todennäköisyys tapahtumalle ”kirjain on oikein”.

$P(\text{"kirjain on oikein"}) = 1 - P(\text{"kirjain on väärin"}) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$

Tapahtuman ”kaikki kirjaimet ovat oikein” todennäköisyys saadaan kertolaskusäännön avulla.

$P(\text{"kaikki oikein"})$
$= P(\text{"1. oikein"}) \cdot P(\text{"2. oikein"}) \cdot \ldots \cdot P(\text{"18. oikein"})$
$= 0{,}88^{18} = 0{,}10015 \approx 0{,}10$

c)

Tapahtuman ”ainakin yksi väärä kirjain” vastatapahtuma on ”ei yhtään väärää kirjainta”. Lasketaan kysytty todennäköisyys komplementin avulla.

$P(\text{"ainakin yksi väärä kirjain"})$
$= 1 - P(\text{"kaikki oikein"})$
$= 1 - 0{,}10015\ldots = 0{,}8998\ldots \approx 0{,}90$

Vastaus **a)** $2{,}7 \cdot 10^{-17}$

b) 0,10

c) 0,90

11.9

a)

Korttipakassa on 52 korttia, joista 13 on herttoja. Todennäköisyys, että täydestä pakasta nostetaan hertta, on

$$P(\text{"hertta"}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

Jos kortit palautetaan pakkaan, tilanne jokaisen noston kohdalla on sama, eli tapahtumien todennäköisyydet eivät riipu toisistaan.

$$P(\text{"3. herttaa"}) = P(\text{"1. hertta"}) \cdot P(\text{"2. hertta"}) \cdot P(\text{"3. hertta"})$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64} = 0{,}015625 \approx 0{,}016$$

b)

Jos kortteja ei palauteta pakkaan, niin jokaisella nostolla korttien määrä pienenee yhdellä. Myös suotuisten tapausten eli herttojen määrä pienenee yhdellä.

$$P(\text{"1. kortti hertta"}) = \frac{13}{52}$$

$$P(\text{"2. kortti hertta"}) = \frac{12}{51}$$

$$P(\text{"3. kortti hertta"}) = \frac{11}{50}$$

Toisella ja kolmannella nostokerralla sekä korttien määrä pakassa, että herttojen määrä pienenee yhdellä.

Lasketaan kertolaskusäännön avulla kysytyn tapahtuman todennäköisyys.

$$P(\text{"3. herttaa"}) = P(\text{"1. kortti hertta"}) \cdot P(\text{"2. kortti hertta"}) \cdot P(\text{"3. kortti hertta"})$$
$$= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} = \frac{11}{850} = 0{,}0129\ldots \approx 0{,}013$$

Vastaus **a)** 0,016

b) 0,013

11.10

a)

Makeisia on yhteensä $8 + 6 + 4 = 18$**.**

Kun Linnea valitsee ensimmäisen karamellin, niin karkkien lukumäärä pienenee yhdellä. Jos se on suklaakonvehti, myös suotuisten määrä pienenee yhdellä.

$$P(\text{”1. suklaakonvehti”}) = \frac{8}{18}$$

$$P(\text{”2. suklaakonvehti”}) = \frac{7}{17}$$

Ensimmäisen suklaakonvehdin jälkeen makeisten ja suklaakonvehtien määrä pienenee yhdellä.

Lasketaan kysytty todennäköisyys kertolaskusäännön avulla.

$$\begin{aligned} P(\text{”molemmat konvehteja”}) &= P(\text{”1. konvehti”}) \cdot P(\text{”2. konvehti”}) \\ &= \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{17} = \frac{56}{306} = 0{,}183\ldots \approx 0{,}18 \end{aligned}$$

b)

Tapahtuman ”saa ainakin yhden toffeen” vastatapahtuma on ”ei yhtään toffeeta”.

Lasketaan ensin vastatapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} P(\text{”ei yhtään toffeeta”}) &= P(\text{”1. ei toffee”}) \cdot P(\text{”2. ei toffee}) \\ &= \frac{12}{18} \cdot \frac{11}{17} = \frac{22}{51} \end{aligned}$$

Kysytyn tapahtuman todennäköisyys on siis

$$\begin{aligned} P(\text{”ainakin yksi toffee”}) &= 1 - P(\text{”ei yhtään toffeeta”}) \\ &= 1 - \frac{22}{51} = \frac{29}{51} = 0{,}5686\ldots \approx 0{,}57 \end{aligned}$$

Vastaus **a)** 0,18

b) 0,57

11.11

a)

Yhden pop-laulun todennäköisyys on $P(\text{"Pop"}) = \frac{12}{25}$.
Jos edellä valittuja kappaleita ei poisteta listalta, niin pop-laulun todennäköisyys ei muutu ja valinnat ovat riippumattomia.

Lasketaan kysytty todennäköisyys kertolaskusäännön avulla.

$P(\text{"kaikki viisi pop-kappaleita"})$
$$= \frac{12}{25} \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{12}{25} = \left(\frac{12}{25}\right)^5 = 0{,}02548\ldots \approx 0{,}025$$

b)

Mikäli valitut kappaleet poistetaan listalta, vähenee kaikkien alkeistapausten ja suotuisten alkeistapausten määrä aina yhdellä jokaisen valinnan jälkeen.

$P(\text{"kaikki 5 pop-lauluja"})$

$$= P(\text{"1. pop"}) \cdot P(\text{"2. pop"}) \cdot \ldots \cdot P(\text{"5. pop"})$$
$$= \frac{12}{25} \cdot \frac{11}{24} \cdot \frac{10}{23} \cdot \frac{9}{22} \cdot \frac{8}{21}$$
$$= 0{,}01490\ldots \approx 0{,}015$$

Vastaus **a)** 0,025

b) 0,015

11.12

a)

Lasketaan ensin tapahtumien todennäköisyydet laatikoille erikseen.

$P(\text{"1. laatikosta punainen"}) = \frac{2}{6}$
$P(\text{"2. laatikosta punainen"}) = \frac{3}{8}$

Jos nostetaan molemmista laatikoista yksi pallo, tapahtumat ovat riippumattomia.
Lasketaan kysytty todennäköisyys kertolaskusäännön avulla.

$P(\text{"kaksi punaista palloa"})$
$= P(\text{"1. laatikosta punainen"}) \cdot P(\text{"2. laatikosta punainen"})$
$= \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$

b)

Tapahtuman ”nostaa ainakin yhden punaisen pallon” vastatapahtuma on
”ei nosta yhtään punaista palloa.

Lasketaan todennäköisyydet tapahtumille, ettei laatikoista nosteta punaista palloa.

$P(\text{"1. laatikosta ei punaista"}) = \frac{4}{6}$
$P(\text{"2. laatikosta ei punaista"}) = \frac{5}{8}$

Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$P(\text{"ainakin yksi punainen pallo"})$
$= 1 - P(\text{"ei yhtään punaista"})$
$= 1 - P(\text{"1. laatikosta ei punaista"}) \cdot P(\text{"2. laatikosta ei punaista"})$
$= 1 - \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{8} = \frac{7}{12}$

Vastaus **a)** $\frac{1}{8}$ **b)** $\frac{7}{12}$

11.13

a)

Virkailija on vapaana todennäköisyydellä $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$.
Koska virkailijoiden tila ei riipu toisistaan, voidaan kysytty todennäköisyys laskea kertolaskusäännön avulla.

$$P(\text{"molemmat virkailijat vapaat"}) = P(\text{"1. vapaa"}) \cdot P(\text{"2. vapaa"}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

b)

Virkailija on varattu todennäköisyydellä $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$.

$$P(\text{"molemmat virkailijat varattuja"}) = P(\text{"1. varattu"}) \cdot P(\text{"2. varattu"}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

c)

Tapahtuman ”ainakin toinen on vapaana” vastatapahtuma on ”ei kumpikaan vapaana”.
Lasketaan kysytyn tapahtuman todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$P(\text{"ainakin toinen vapaa"}) = 1 - P(\text{"molemmat varattuja"}) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Vastaus **a)** $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{4}{9}$ **c)** $\frac{5}{9}$

11.14

a)

Oletetaan, että sadepäivät ovat toisistaan riippumattomat.
Lasketaan kysytty todennäköisyys kertolaskusäännön avulla.

$P(\text{”lauantaina JA sunnuntaina sataa”})$
$= P(\text{”lauantaina sataa”}) \cdot P(\text{”sunnuntaina sataa”})$
$= 0{,}07 \cdot 0{,}14 = 0{,}0098$

b)

Lasketaan ensin todennäköisyydet tapahtumille, ettei viikonpäivinä sada.

Viikonpäivä	Sateen todennäköisyys	Todennäköisyys, ettei sada
ma	0,51	1 – 0,51 =0,49
ti	0,33	1 – 0,33 = 0,67
ke	0,23	1 – 0,23 = 0,77
to	0,62	1 – 0,62 = 0,38
pe	0,11	1 – 0,11 = 0,89
la	0,07	1 – 0,07 =0,93
su	0,14	1 – 0,14 = 0,86

Kysytty todennäköisyys saadaan kertolaskusäännön avulla.

$P(\text{”ei ole sadepäiviä”})$
$= P(\text{”maanataina ei sada”}) \cdot P(\text{”tiistaina ei sada”}) \cdot \ldots \cdot P(\text{”sunnuntaina ei sada”})$
$= 0{,}49 \cdot 0{,}67 \cdot 0{,}77 \cdot 0{,}38 \cdot 0{,}89 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}86$
$= 0{,}06837\ldots \approx 0{,}068$

c)

Tapahtuman ”ainakin yhtenä päivänä sataa” vastatapahtuma on ”yhtenäkään päivänä ei sada”.
Lasketaan todennäköisyys komplementin avulla.

$P(\text{”ainakin yhtenä päivänä sataa”}) = 1 - P(\text{”ei ole sädepäiviä})$
$= 1 - 0{,}07131 \ldots \approx 0{,}9286 \ldots \approx 0{,}93$

Vastaus **a)** 0,0098 **b)** 0,068 **c)** 0,93

11.15

a)

Koska eri numeroita on 10 kappaletta, todennäköisyys valita oikea numero on $\frac{1}{10}$.
Koska numeroiden valinta ei riipu toisista numeroista, tapahtumat ovat riippumattomat.
Lasketaan kysytty todennäköisyys kertolaskusäännön avulla.3

$$P(\text{"kaikki 4 oikein"})$$
$$= P(\text{"1. oikein"}) \cdot P(\text{"2. oikein"}) \cdot P(\text{"3. oikein"}) \cdot P(\text{"4. oikein"})$$
$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10000} = 0{,}0001$$

b)

Tapahtuman ”saa ainakin yhden oikean numeron” vastatapahtuma on
”ei yhtään oikeaa numeroa”.

$$P(\text{"numero ei ole oikein"}) = \frac{9}{10}$$

Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$$P(\text{"ainakin yhden oikean numeron"})$$
$$= 1 - P(\text{"kaikki numerot väärin"})$$
$$= 1 - \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = 0{,}3439 \approx 0{,}34$$

Vastaus **a)** 0,0001

b) 0,34

11.16

a)

Satunnaisesti valitut tapahtumat ovat riippumattomia. Lasketaan todennäköisyys, että valitulla henkilöllä ei ole veriryhmänä A+.

$P(\text{"veriryhmä ei ole A+"}) = 1 - P(\text{"veriryhmä on A+"}) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$

Lasketaan kysytty todennäköisyys kertolaskusäännön avulla.

$P(\text{"5 henkilön veriryhmä ei ole A+"})$
$= P(\text{"1. ei A+"}) \cdot P(\text{"2. ei A+"}) \cdot P(\text{"3. ei A+"}) \cdot P(\text{"4. ei A+"}) \cdot P(\text{"5. ei A+"})$
$= 0{,}65 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}65$
$= (0{,}65)^5 = 0{,}1160\ldots \approx 0{,}12$

b)

Tapahtuman ”ainakin yhden veriryhmä on A+” vastatapahtuma on ”kenenkään veriryhmä ei ole A+”. Lasketaan kysytty todennäköisyys vastatapahtuman avulla.

$P(\text{"ainakin yhden veriryhmä on A+"})$
$= 1 - P(\text{"5 henkilön veriryhmä ei ole A+"})$
$= 1 - 0{,}1160\ldots = 0{,}8839 \approx 0{,}88$

Vastaus **a)** 0,12

b) 0,88

11.17

a)

Siementen itämiset ovat riippumattomia tapahtumia. Tapahtuman ”viidestä istutetusta siemenestä ainakin yksi itää” vastatapahtuma on ”viidestä yksikään ei idä.

$P(\text{”siemen ei idä”}) = 1 - P(\text{”siemen itää”}) = 1 - 0{,}60 = 0{,}4$

Lasketaan kysytyn tapahtuman komplementin todennäköisyys kertolaskusäännöllä.

$P(\text{”viidestä siemenestä yksikään ei idä”}) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}4^5 = 0{,}01024$

Kysytyn tapahtuman todennäköisyys on siis

$P(\text{”viidestä siemenestä ainakin yksi itää”})$
$= 1 - P(\text{”viidestä yksikään ei idä”})$
$= 1 - 0{,}01024 = 0{,}98976 \approx 99\ \%$

b)

Hyödynnetään a)-kohdan tulosta.

$P(\text{”kolmessa ruukussa jokaisessa ainakin yksi siemen viidestä itää”})$
$= P(\text{”1. ruukussa väh. 1 itää”}) \cdot P(\text{”2. ruukussa väh. 1 itää”}) \cdot P(\text{”3. ruukussa väh. 1 itää”})$
$= 0{,}98976 \cdot 0{,}98976 \cdot 0{,}98976$
$= 0{,}9695\ldots \approx 97\ \%$

Vastaus **a)** 99 %

b) 97 %

11.18

a)

Jos nostettua kirjainta ei palauteta pussiin, vähenee suotuisten tapausten ja kaikkien alkeistapausten määrä aina yhdellä jokaisella nostolla.

$$P(\text{"1. on A"}) = \frac{7}{46}$$

$$P(\text{"2. on A"}) = \frac{6}{45}$$

$$P(\text{"3. on A"}) = \frac{5}{44}$$

Jokaisella nostolla kirjainten kokonaismäärä ja A-kirjainten määrä vähenee yhdellä.

$$P(\text{"4. on A"}) = \frac{4}{43}$$

Lasketaan kysytty todennäköisyys kertolaskusäännöllä.

$$\begin{aligned}
&P(\text{"4 A-kirjainta"}) \\
&= P(\text{"1. on A"}) \cdot P(\text{"2. on A"}) \cdot P(\text{"3. on A"}) \cdot P(\text{"4. on A"}) \\
&= \frac{7}{46} \cdot \frac{6}{45} \cdot \frac{5}{44} \cdot \frac{4}{43} = 0{,}0002144\ldots \approx 0{,}021\ \%
\end{aligned}$$

b)

Jos nostettu kirjainlaatta palautetaan pussiin, todennäköisyys nostaa A pysyy koko ajan samana.

$$P(\text{"4 A-kirjainta"}) = \frac{7}{46} \cdot \frac{7}{46} \cdot \frac{7}{46} \cdot \frac{7}{46} = \left(\frac{7}{46}\right)^4 = 0{,}0005362\ldots \approx 0{,}054\ \%$$

Vastaus **a)** 0,021 %

b) 0,054 %

11.19

a)

Omenoita on yhteensä $8 + 17 = 25$, joista suotuisia punaisia on 17.

Omenoita ei palauteta koriin, joten punaisten omenoiden ja kaikkien omenoiden määrä vähenee yhdellä jokaisella nostolla.

$P(\text{"kaikki 4 ovat punaisia"})$
$= P(\text{"1. punainen"}) \cdot P(\text{"2. punainen"}) \cdot P(\text{"3. punainen"}) \cdot P(\text{"4. punainen"})$
$= \dfrac{17}{25} \cdot \dfrac{16}{24} \cdot \dfrac{15}{23} \cdot \dfrac{14}{22} = 0{,}1881\ldots \approx 0{,}19$

b)

Tapahtuman ”ainakin yksi omenoista on punainen” vastatapahtuma on ”yksikään omenoista ei ole punainen”.

Lasketaan ensin vastatapahtuman todennäköisyys.

$P(\text{"yksikään ei ole punainen"})$
$= P(\text{"1. vihreä"}) \cdot P(\text{"2. vihreä"}) \cdot P(\text{"3. vihreä"}) \cdot P(\text{"4. vihreä"})$
$= \dfrac{8}{25} \cdot \dfrac{7}{24} \cdot \dfrac{6}{23} \cdot \dfrac{5}{22} = 0{,}005533\ldots$

Kysytyn tapahtuman todennäköisyys on

$P(\text{"ainakin yksi on punainen"})$
$= 1 - P(\text{"yksikään ei ole punainen"})$
$= 1 - 0{,}005533\ldots \approx 0{,}9944\ldots \approx 0{,}99$

Vastaus **a)** 0,19

b) 0,99

11.20

Lasketaan ensin kysytyn tapahtuman todennäköisyys, kun kortti palautetaan pakkaan.

Korttipakassa on 52 korttia, joista 26 on punaista. Todennäköisyys, että täydestä pakasta nostetaan punainen, on

$$P(\text{"punainen"}) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}.$$

Jos kortit palautetaan pakkaan, tilanne jokaisen noston kohdalla on sama,
eli tapahtumien todennäköisyydet eivät riipu toisistaan.

$$\begin{aligned} P(\text{"4. punaista"}) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \frac{1}{16} = 0{,}0625 \end{aligned}$$

Jos kortteja ei palauteta pakkaan, niin jokaisella nostolla korttien määrä pienenee yhdellä. Myös suotuisten tapausten eli punaisten korttien määrä pienenee yhdellä.

Lasketaan kertolaskusäännön avulla kysytyn tapahtuman todennäköisyys.

$$\begin{aligned} &P(\text{"4. punaista"}), \\ &= P(\text{"1. punainen"}) \cdot P(\text{"2. punainen"}) \cdot P(\text{"3. punainen"}) \cdot P(\text{"4. punainen"}) \\ &= \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49} = 0{,}0552\ldots \approx 0{,}055 \end{aligned}$$

Todennäköisempää on siis saada ne punaista, jos jokaisen noston jälkeen kortti palautetaan takaisin pakkaan. Verrataan takaisinpanon todennäköisyyttä todennäköisyyteen, jossa kortteja ei palauteta.

$$\frac{0{,}0625}{0{,}0552\ldots} = 1{,}1317\ldots$$

Todennäköisyys on $1{,}1317\ldots - 1 = 0{,}1317\ldots \approx 13\ \%$ suurempi.

Vastaus Jos kortit palautetaan pakkaan, todennäköisyys on 13 % suurempi.

11.21

Merkitään yksittäisen arvan voittotodennäköisyyttä kirjaimella *x.*
Arpojen voitot ovat riippumattomia, joten todennäköisyys voidaan laskea kertolaskusäännöllä.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} P(\text{"molemmat voittavat"}) &= 0{,}34 \\ P(\text{"1. voittaa"}) \cdot P(\text{"2. voittaa"}) &= 0{,}34 \\ x \cdot x &= 0{,}34 \\ x^2 &= 0{,}34 \\ x &= -0{,}5830\ldots \quad \text{tai} \quad x = 0{,}5830\ldots \end{aligned}$$

Todennäköisyys on aina positiivinen, joten

$P(\text{"arpa voittaa"}) = 0{,}5830\ldots \approx 0{,}58.$

Vastaus 0,58

11.22

Merkitään poikien lukumäärää kirjaimella *x*. Valinnat ovat riippumattomia, joten todennäköisyys voidaan laskea kertolaskusäännöllä.

Tyttöjä on 15 ja yhteensä opiskelijoita on $15 + x$.

$$P(\text{"1. tyttö"}) = \frac{15}{15 + x}$$

$$P(\text{"2. tyttö"}) = \frac{14}{14 + x}$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\frac{15}{15 + x} \cdot \frac{14}{14 + x} = \frac{1}{6}$$

$x = -50$ tai $x = 21$

Poikien määrä on positiivinen, joten poikia on 21.

Vastaus 21 poikaa

11.23

Tutkitaan tilannetta vastatapahtuman avulla. Tapahtuman ”ainakin yksi vasenkätinen” vastatapahtuma on ”ei yhtään vasenkätistä”.

Todennäköisyys, että henkilö on vasenkätinen, on 10 %,
$P(\text{”ei vasenkätinen”}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

Ryhmän jäsenten määrä on tuntematon, joten merkitään sitä kirjaimella *n.*

Kertolaskusäännön mukaan todennäköisyys, että n-kokoisessa ryhmässä ei ole yhtään vasenkätistä on $0,9^n$**.**

Komplementtisäännön mukaan todennäköisyys, että ryhmässä on ainakin yksi vasenkätinen, on $1 - 0{,}9^n$.

Todennäköisyyden on oltava 0,8. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *n.*

$$1 - 0{,}9^n = 0{,}8$$
$$n = 15{,}275\ \ldots$$

Jos $n = 15$, $P(\text{”ainakin 1 vasenkätinen”}) = 1 - 0,9^{15} = 0{,}7941\ldots < 0{,}8$.

Jos $n = 16$, $P(\text{”ainakin 1 vasenkätinen”}) = 1 - 0,9^{16} = 0{,}8146\ldots > 0{,}8$.

Ryhmässä on siis oltava vähintään 16 henkilöä.

Vastaus 16 henkilöä

11.24

Tutkitaan tilannetta vastatapahtuman avulla. Tapahtuman ”ainakin voittoarpa” vastatapahtuma on ”ei yhtään voittoarpaa”.

Todennäköisyys, että arpa voittaa, on 0,025.

Tällöin $P(\text{”arpa ei voita”}) = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$

Arpojen määrä on tuntematon, joten merkitään sitä kirjaimella *n.*

Kertolaskusäännön mukaan todennäköisyys, että n-määrässä arpoja ei ole yhtään voittoarpaa, on $0{,}975^n$.

Komplementtisäännön mukaan todennäköisyys, että arvoista ainakin yksi voittaa on, $1 - 0{,}975^n$.

Todennäköisyyden on oltava 50 % = 0,5. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *n.*

$$1 - 0{,}975^n = 0{,}5$$
$$n = 27{,}377\ldots$$

Jos $n = 27$, $P(\text{”ainakin 1 arpa voittaa”}) = 1 - 0{,}975^{27} = 0{,}495\ldots < 0{,}5$.

Jos $n = 28$, $P(\text{”ainakin 1 arpa voittaa”}) = 1 - 0{,}975^{28} = 0{,}507\ldots > 0{,}5$.

Arpoja on siis ostettava vähintään 28 kappaletta.

Vastaus 28 kappaletta

11.25

Suoraan verrannollisten suureiden suhteet ovat aina samat.
Merkitään silmäluvun 1 todennäköisyyttä kirjaimella *a.*

Silmäluku	Todennäköisyys
1	a
2	$2a$
3	$3a$
4	$4a$
5	$5a$
6	$6a$

Kaikkien mahdollisten alkeistapausten todennäköisyyksien summa on oltava 1.
Muodostetaan yhtälö.

$$\begin{aligned} a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a &= 1 \\ 21a &= 1 \\ a &= \frac{1}{21} \end{aligned}$$

Näin ollen silmälukujen todennäköisyydet ovat

Silmäluku	Todennäköisyys
1	$\frac{1}{21}$
2	$2 \cdot \frac{1}{21} = \frac{2}{21}$
3	$3 \cdot \frac{1}{21} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$
4	$4 \cdot \frac{1}{21} = \frac{4}{21}$
5	$5 \cdot \frac{1}{21} = \frac{5}{21}$
6	$6 \cdot \frac{1}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

Koska nopanheitossa tapahtumat ovat riippumattomat, voidaan tapahtuman ”kahdella heitolla kaksi kuutosta” todennäköisyys laskea kertolaskusäännöllä.

$$\begin{aligned} &P(\text{”kahdella heitolla 2 kuutosta”}) \\ &= P(\text{”1. heitto on 6”}) \cdot P(\text{”2. heitto on 6”}) \\ &= \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{49} = 0{,}0816\ldots \approx 8{,}2\ \% \end{aligned}$$

Vastaus

Silmäluku	Todennäköisyys
1	$\frac{1}{21}$
2	$\frac{2}{21}$
3	$\frac{1}{7}$
4	$\frac{4}{21}$
5	$\frac{5}{21}$
6	$\frac{2}{7}$

Todennäköisyys saada kaksi kuutosta on $\frac{4}{49} \approx 8{,}2\ \%$.

11.26

Tapahtuman ”ainakin kahdella on sama syntymäpäivä” vastatapahtuma on ”yhdelläkään ei ole samaa syntymäpäivää. Jotta
P(”ainakin kahdella sama syntymäpäivä”) $> 0{,}6$,
niin vastatapahtuman todennäköisyys pitää olla pienempi kuin 0,4.

Vastatapahtuman todennäköisyys voidaan muodostaa seuraavasti.

Ensimmäinen jäsen voi olla syntynyt mikä päivä tahansa eli $\frac{365}{365} = 1$.

Toinen jäsen ei saa olla syntynyt samana päivänä, joten suotuisia päiviä on jäljellä 364 ja todennäköisyys on $\frac{364}{365}$.

Kolmas jäsen ei saa olla syntynyt samana päivänä kuin aiemmat, joten päiviä on jäljellä 363 ja todennäköisyys on $\frac{363}{365}$.

Todennäköisyys voidaan laskea kertolaskusäännöllä. Tutkitaan tilannetta taulukkolaskentaohjelmalla.

Tapahtuman ”ei samaa syntymäpäivää” todennäköisyys on ensimmäisen kerran pienempi kuin 0,4, kun ryhmän koko on 27.

Näin ollen
P(”ainakin kahdella sama syntymäpäivä”) $> 0{,}6$, kun ryhmän koko on vähintään 27.

	A	B	C
1	Ryhmän jäsen	P(synt.päivä eri kuin aiemmilla)	P("ei samaa synt.päivää)
2	1	1	1
3	2	0.99726	0.99726
4	3	0.99452	0.9918
5	4	0.99178	0.98364
6	5	0.98904	0.97286
7	[illegible]	0.9863	[illegible]
8	[illegible]	0.98356	[illegible]
9	[illegible]	0.98082	[illegible]
10	[illegible]	0.97808	[illegible]
11	[illegible]	0.97534	[illegible]
12	[illegible]	0.9726	[illegible]
13	12	0.96986	0.83298
14	13	0.96712	0.80559
15	14	0.96438	0.7769
16	15	0.96164	0.7471
17	16	[illegible]	0.7164
18	17	[illegible]	0.68499
19	18	0.95342	0.65309
20	19	0.95068	0.62088
21	20	0.94795	0.58856
22	21	0.94521	0.55631
23	22	0.94247	0.5243
24	23	0.93973	0.4927
25	24	0.93699	0.46166
26	25	0.93425	0.4313
27	26	0.93151	0.40176
28	27	0.92877	0.37314

Luo soluun B3 kaava (365-A3)/365, joka laskee todennäköisyyden, että kyseisellä jäsenellä on eri syntymäpäivä, kuin aiemmilla

Luo soluun C3 kaava C2*B3, joka laskee todennäköisyyden, ettei ryhmässä ole samaa syntymäpäivää

Kopio kaavoja riittävästi alaspäin

Vastaus vähintään 27