

Binomi 5 – Luku 5 – Tehtävien malliratkaisut

5.1

a)

Järjestetään arvot suuruusjärjestykseen.

2 2 3 3 4 5 8

Moodi eli tyyppiarvo on se luku tai luvut, jota on eniten.

Aineistossa on kaksi moodia: $Mo = 2$ ja $Mo = 3$.

Mediaani on suuruusjärjestykseen lajitellun aineiston keskimäinen arvo.

2 2 3 3 4 5 8

Mediaani on $Md = 3$.

b)

Järjestetään arvot suuruusjärjestykseen.

2 2 3 3 4 5 6 7

Aineistossa on kaksi moodia: $Mo = 2$ ja $Mo = 3$.

Mediaani on suuruusjärjestykseen lajitellun aineiston keskimäinen arvo.

2 2 3 3 4 5 6 7

Lukuja on parillinen määrä (8 kpl), joten keskimäisiä arvoja on kaksi.

Lasketaan keskimäisten arvojen 3 ja 4 keskiarvo.

$$\frac{3 + 4}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$$

Mediaani on $Md = 3,5$.

Vastaus:

a) $Mo = 2$ ja $Mo = 3$, $Md = 3$

b) $Mo = 2$ ja $Mo = 3$, $Md = 3,5$

5.2

a)

Lasketaan keskiarvo jakamalla arvojen summa arvojen lukumäärällä.

$$\bar{x} = \frac{6 + 5 + 1 + 2 + 5}{5} = \frac{19}{5} = 3,8$$

Jesperin heittotulosten keskiarvo on 3,8.

b)

Frekvenssitaulukon perusteella arvoja on yhteensä $8 + 6 + 5 + 9 + 7 + 5 = 40$.

Lasketaan frekvenssien avulla arvojen summa ja jaetaan se arvojen lukumäärällä.

$$\bar{x} = \frac{8 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 9 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{40} = \frac{144}{40} = 3,6$$

Muiden osallistujien tulosten keskiarvo on 3,6.

c)

Jesperin heittotulosten keskiarvo on $3,8 > 3,6$, joten Jesper pärjäsikin keskimäärin paremmin kuin muut osallistujat.

Vastaus:

a) 3,8

b) 3,6

c) paremmin

5.3

a)

Lasketaan frekvenssien summa.

$$10 + 6 + 18 + 22 + 6 = 62$$

Ryhmä mittasi yhteensä 62 heinän pituuden.

b)

Heinien pituudet on annettu luokiteltuna aineistona.

Luokitellun aineiston keskiarvo lasketaan luokkakeskusten avulla.

Lasketaan luokkakeskukset eli luokkien keskimmäiset arvot.

Pituus (cm)	luokkakeskus	f
10-14	$\frac{9,5 + 14,5}{2} = \frac{24}{2} = 12$	10
15-19	$\frac{14,5 + 19,5}{2} = \frac{34}{2} = 17$	6
20-24	$\frac{19,5 + 24,5}{2} = \frac{44}{2} = 22$	18
25-29	27	22
30-34	32	6

Muistathan: luokkakeskus lasketaan todellisten luokkarajojen avulla.

Heinän pituus on mittaustulos. Taulukkoon merkityt luokkarajat ovat siis pyöristettyjä arvoja.

Todelliset luokkarajat ovat pyöristyssääntöjen mukaisia rajakohtia.

Arvoja on yhteensä 62.

Lasketaan frekvenssien ja luokkakeskusten avulla arvojen summa ja jaetaan se arvojen lukumäärällä.

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 12 + 6 \cdot 17 + 18 \cdot 22 + 22 \cdot 27 + 6 \cdot 32}{62} = \frac{1404}{62} = 22,64 \dots \approx 22,6$$

Heinän pituuden keskiarvo on 22,6 cm.

c)

Suurin frekvenssi on luokalla 25-29 (cm), joten tämä on moodiluokka.

Moodi on moodiluokan luokkakeskus eli $M_o = 27$ (cm).

Määritetään mediaaniluokka.

- Aineistossa on yhteensä 62 havaintoa. Puolet tästä on $62 : 2 = 31$.
- Kaksi keskimmäistä arvoa ovat suuruusjärjestyksen 31. ja 32. arvo.
- Kolmessa ensimmäisessä luokassa on yhteensä $10 + 6 + 18 = 34$ arvoa.

Keskimmäiset arvot sijaitsevat kolmannessa luokassa 20-24 (cm), joten tämä on mediaaniluokka.

Mediaani on mediaaniluokan luokkakeskus eli $M_d = 22$ (cm).

Vastaus:

a) 62 heinää

b) 22,6 cm

c) $M_o = 27$ cm, $M_d = 22$ cm

5.4

a)

Järjestetään arvot suuruusjärjestykseen.

11 12 14 14 15 16

Moodi eli tyyppiarvo on se arvo, jota esiintyy eniten.

Moodi on $M_o = 14$.

Arvoja on parillinen määrä (6 kpl), joten keskimmäisiä arvoja on kaksi.

11 12 14 14 15 16

Lasketaan kahden keskimmäisen arvon keskiarvo.

$$\frac{14 + 14}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

Mediaani on $M_d = 14$.

b)

Suurin frekvenssi ($f = 6$) on arvoilla 20 ja 22, joten nämä arvot ovat moodeja.

$M_o = 20$ ja $M_o = 22$.

Arvoja on yhteensä $6 + 4 + 6 + 5 = 21$.

- Keskimäinen arvo on suuruusjärjestyksen 11. arvo ($21 = 10 + 1 + 10$).
- Kahta pienintä arvoa on yhteensä $6 + 4 = 10$ kappaletta.

Suuruusjärjestys:

20 20 20 20 20 20 21 21 21 21 22 22 22 22 22 22 23 23 23 23 23
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{6 \text{ kpl} \qquad \qquad \qquad 4 \text{ kpl} \\ \text{yhteensä } 6+4=10 \text{ kpl}}}$

Keskimmäisin arvo on 22 eli mediaani on $M_d = 22$.

Vastaus:

a) $M_o = 14$ ja $M_d = 14$

b) $M_o = 20$ ja $M_o = 22$, $M_d = 22$

5.5

Järjestetään arvot suuruusjärjestykseen.

4 7 7 7 8 8 9 9 10

a)

Moodi eli tyyppiarvo on se arvo, jota esiintyy eniten.

Moodi on $M_o = 7$.

b)

Mediaani on keskimmäisin arvo.

4 7 7 7 **(8)** 8 9 9 10

Mediaani on $M_d = 8$.

c)

Lasketaan keskiarvo jakamalla arvojen summa arvojen lukumäärällä.

$$\bar{x} = \frac{4 + 7 + 7 + 7 + 8 + 8 + 9 + 9 + 10}{9} = \frac{69}{9} = 7,66 \dots \approx 7,7$$

Vastaus:

a) $M_o = 7$

b) $M_d = 8$

c) 7,7

5.6

Lasketaan leijonien lukumäärän keskiarvo.

Arvoja on yhteensä 22. Lasketaan arvojen summa ja jaetaan summa lukumäärällä.

Summan laskemisessa voidaan hyödyntää arvojen esiintymiskertoja eli frekvenssejä.

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 17 + 11 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 7 + 15 + 3 \cdot 8 + 19 + 5 + 10 + 2 \cdot 14 + 16 + 6 + 2 \cdot 9 + 13 + 18}{22}$$
$$= \frac{255}{22} = 11,59 \dots \approx 11,6$$

Leijonalaumassa on keskimäärin 11,6 leijonaa.

5.7

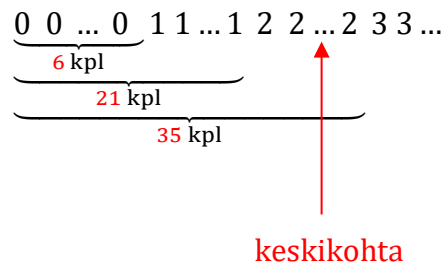
a)

Arvon 1 frekvenssi on suurin ($f = 15$) eli elokuvien lukumäärän moodi on $M_o = 1$.

Mediaania varten lasketaan taulukkoon summafrekvenssit.

Viikossa katsottujen elokuvien lukumäärä	f	sf
0	6	6
1	15	21
2	14	35
3	8	43
4	5	48
5	2	50

Suuruusjärjestys:



Arvoja on yhteensä 50. Tästä määrästä puolet on $50 : 2 = 25$. Päätellään mediaani:

- Keskimmäisiä arvoja on kaksi ja ne ovat 25. ja 26. arvo.
- Arvon 2 summafrekvenssi on 35, joten keskimmäiset arvot ovat 2 ja 2.

Elokuvien lukumäärän mediaani on siis $M_d = 2$.

b)

Lasketaan frekvenssien avulla arvojen summa ja jaetaan se arvojen lukumäärällä.

$$\bar{x} = \frac{6 \cdot 0 + 15 \cdot 1 + 14 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{50} = \frac{97}{50} = 1,94 \approx 1,9$$

Elokuvien lukumäärän keskiarvo on 1,9.

Vastaus:

a) $M_o = 1$ elokuva ja $M_d = 2$ elokuvaa

b) 1,9 elokuvaa

5.8

a)

Lasketaan luokkien luokkakeskukset.

Kirjaimien lukumäärä sanassa	Luokkakeskus
1-5	$\frac{1 + 5}{2} = 3$
6-10	$\frac{6 + 10}{2} = 8$
11-15	$\frac{11 + 15}{2} = 13$
16-20	$\frac{16 + 20}{2} = 18$

Kirjaimien lukumäärä saa vain kokonaislukuarvoja.

Taulukkoon merkityt luokkarajat ovat siis myös todellisia luokkarajoja.

b)

Luetaan frekvenssitaulukkoa:

Kirjaimien lukumäärä sanassa	Luokkakeskus	f
1-5	3	84
6-10	8	234
11-15	13	43
16-20	18	7

Luokan 6–10 frekvenssi on suurin, joten tämä on moodiluokka.

Moodi on moodiluokan luokkakeskus eli $M_o = 8$ (kirjainta).

Aineistossa on yhteensä $84 + 234 + 43 + 7 = 368$ arvoa.

- Tästä puolet on $368 : 2 = 184$.
- Keskimmäisiä arvoja on kaksi ja ne ovat 184. ja 185. arvo.
- Kahdessa ensimmäisessä luokassa on yhteensä $84 + 234 = 318$ arvoa.

Keskimmäiset arvot ovat siis luokassa 6–10, joten tämä on mediaaniluokka.

Mediaani on mediaaniluokan luokkakeskus eli $M_d = 8$ (kirjainta).

c)

Lasketaan kirjainten lukumäärän keskiarvo.

Luokitellun aineiston keskiarvo lasketaan luokkakeskusten ja frekvenssien avulla.

Kirjaimien lukumäärä sanassa	Luokkakeskus	f
1-5	3	84
6-10	8	234
11-15	13	43
16-20	18	7

Arvoja on yhteensä 368.

$$\bar{x} = \frac{84 \cdot 3 + 234 \cdot 8 + 43 \cdot 13 + 7 \cdot 18}{368} = \frac{2809}{368} = 7,63 \dots \approx 7,6$$

Sanoissa oli keskimäärin 7,6 kirjainta.

Vastaus:

a) Luokkakeskukset ovat 3, 6, 13 ja 18.

b) $M_o = 8$ kirjainta ja $M_d = 8$ kirjainta

c) keskimäärin 7,6 kirjainta

5.9

Helmer on jo saanut neljä arvosanaa: 8, 5, 7 ja 8.

Viides arvosana on parhaimmillaan **10**.

Viides arvosana on vähintään **4**.

Opintojakson arvosana on saatujen arvosanojen keskiarvo.

a)

Lasketaan keskiarvo, kun viides arvosana on paras mahdollinen.

$$\bar{x} = \frac{8 + 5 + 7 + 8 + \mathbf{10}}{5} = \frac{38}{5} = 7,6 \approx 8$$

Opintojakson arvosana on parhaimmillaan 8.

b)

Lasketaan keskiarvo, kun viides arvosana on 4.

$$\bar{x} = \frac{8 + 5 + 7 + 8 + \mathbf{4}}{5} = \frac{32}{5} = 6,4 \approx 6$$

Opintojakson arvosana on vähintään 6.

Vastaus:

a) parhaimmillaan 8

b) vähintään 6

5.10

Keskimääräinen liikevoitto oli 12 miljoonaa eli liikevoittojen keskiarvo on 12 miljoonaa.

Muodostetaan keskiarvon avulla yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{12 + 11 + 11 + 10 + x}{5} = 12$$

$$\frac{44 + x}{5} = 12 \quad \parallel \cdot 5$$

$$44 + x = 60 \quad \parallel -44$$

$$x = 16$$

Vuoden 2021 liikevoitto on 16 miljoonaa euroa.

Vastaus:

16 milj. €

5.11

Kukkarossa alussa olevien kolikoiden yhteenlaskettu massa on $8,50 + 7,50 + 7,80 = 23,8$ (grammaa).

Tapa 1.

Merkitään kukkaraan lisätyn kolikon massaa kirjaimella x (g).

Kukkaroon lisättiin kaksi kolikkoa, joten lisättyjen kolikoiden massa on $2x$ (g).

Kukkarossa nyt olevien kolikoiden

- yhteenlaskettu massa on $23,8 + 2x$ (grammaa)
- lukumäärä on 5.

Kukkarossa nyt olevien kolikoiden keskimääräinen massa on 7,76 g.

Muodostetaan keskiarvon avulla yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{23,8 + 2x}{5} = 7,76 \quad || \cdot 5$$

$$23,8 + 2x = 38,8 \quad || -23,8$$

$$2x = 15 \quad || : 2$$

$$x = 7,50$$

Kukkaroon lisätyn kolikon massa on 7,50 grammaa, joten kyseessä on euron kolikko.

Kukkarossa on tällöin yhteensä rahaa $2 \text{ €} + 1 \text{ €} + 0,50 \text{ €} + 1 \text{ €} + 1 \text{ €} = 5,50 \text{ €}$.

Tapa 2.

Tutkitaan kokeilemalla, minkä kolikon lisääminen johtaa siihen, että rahojen keskimääräinen massa on 7,76 grammaa.

1) Kukkaroon lisätään kaksi kahden euron kolikkoa.

- Kukkaroon lisättyjen kolikoiden yhteenlaskettu massa on $8,50 + 8,50 = 17$ (g).
- Kukkarossa nyt olevien kolikoiden yhteenlaskettu massa on $23,8 + 17 = 40,8$ (g).
- Kolikoiden keskimääräinen massa on tällöin $40,8 / 5 = 8,16$ (g) eli liikaa.

Kukkaroon ei lisätty kahden euron kolikkoa.

2) Kukkaroon lisätään kaksi euron kolikkoa.

- Kukkaroon lisättyjen kolikoiden yhteenlaskettu massa on $7,50 + 7,50 = 15$ (g).
- Kukkarossa nyt olevien kolikoiden yhteenlaskettu massa on $23,8 + 15 = 38,8$ (g).
- Kolikoiden keskimääräinen massa on tällöin $38,8 / 5 = 7,76$ (g) eli oikein.

Kukkaroon lisättiin kaksi euron kolikkoa.

Kukkarossa on tällöin yhteensä rahaa $2 \text{ €} + 1 \text{ €} + 0,50 \text{ €} + 1 \text{ €} + 1 \text{ €} = 5,50 \text{ €}$.

5.12

a)

Järjestetään arvot suuruusjärjestykseen.

0 0 1 2 2 2 3 4 4 5 5 5

Moodi eli tyyppiarvo on se arvo, jota esiintyy eniten.

Moodeja on kaksi: $M_o = 2$ (tölkkiä) ja $M_o = 5$ (tölkkiä).

Arvoja on parillinen määrä (12 kpl), joten keskimmäisiä arvoja on kaksi.

0 0 1 2 2 2 3 4 4 5 5 5

Lasketaan kahden keskimmäisen arvon keskiarvo.

$$\frac{2 + 3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Mediaani on $M_d = 2,5$ (tölkkiä).

b)

Lasketaan vastausten keskiarvo jakamalla arvojen summa arvojen lukumäärällä.

$$\bar{x} = \frac{0 + 3 + 2 + 2 + 4 + 5 + 4 + 1 + 0 + 5 + 5 + 2}{12} = \frac{33}{12} = 2,75 \text{ (tölkkiä/opiskelija)}$$

Vastausten perusteella keskimääräinen kulutus viikossa on $2,75 > 2$, joten tämän perusteella automaatin hankkiminen on kannattavaa.

Vastaus:

a) $M_o = 2$ ja $M_o = 5$, $M_d = 2,5$

b) kyllä

5.13

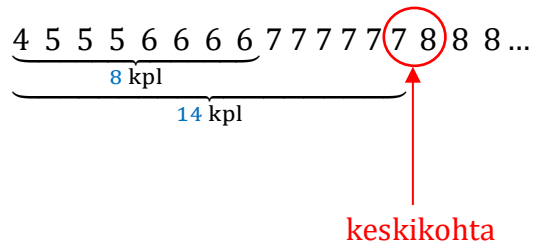
Arvosanojen 7 ja 9 kohdalla on korkeimmat pylväät eli näitä arvoja esiintyy eniten.

Moodeja on kaksi: $Mo = 7$ ja $Mo = 9$.

Luetaan arvot ja niiden frekvenssit pylväskaaviosta. Kirjataan tiedot taulukkoon. Mediaania varten lasketaan taulukkoon myös summafrekvenssit.

Arvosana	f	sf
4	1	1
5	3	4
6	4	8
7	6	14
8	5	19
9	6	25
10	3	28

Suuruusjärjestys:



Havaintoja on yhteensä 28. Päätellään mediaani:

- Puolet tästä määrästä on $28 : 2 = 14$.
- Keskimmäisiä arvoja on kaksi ja ne ovat 14. ja 15. arvo.
- Arvosanan 7 summafrekvenssi on 14, joten 14. arvosana on 7.
- 15. arvosana on silloin 8.

Keskimmäiset arvot ovat 7 ja 8. Lasketaan keskiarvo:

$$\frac{7 + 8}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$$

Arvosanojen mediaani on $Md = 7,5$.

Lasketaan keskiarvo. Arvosanoja on yhteensä 28.

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 + 3 \cdot 10}{28} = \frac{209}{28} = 7,46 \dots \approx 7,5$$

Arvosanojen keskiarvo on 7,5.

Vastaus:

$Mo = 7$ ja $Mo = 9$

$Md = 7,5$

$\bar{x} = 7,5$

5.14

Frekvenssitaulukosta nähdään, että arvon 2 frekvenssi on suurin. Yrityssaneerausten lukumäärän moodi on siis $M_o = 2$.

Päätellään mediaani:

Tapa 1.

Järjestetään arvot suuruusjärjestykseen.

0 0 0 0 1 1 1 2 (2 2) 2 2 3 3 3 3 4 7

Keskimmäiset arvot ovat 2 ja 2, joten mediaani on $M_d = 2$ (yrityssaneerausta).

Tapa 2.

Havaintoja on yhteensä 18.

- Tästä määrästä puolet on $18 : 2 = 9$.
- Arvon 2 summafrekvenssi on $sf = 12$, ja se ylittää ensimmäisenä puolivälin eli arvon 9.

Yrityssaneerausten lukumäärän mediaani on siis $M_d = 2$.

Lasketaan keskiarvo. Arvoja on yhteensä 18. Summan laskemisessa kannattaa hyödyntää arvojen frekvenssejä.

$$\bar{x} = \frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 7}{18} = \frac{36}{18} = 2$$

Yrityssaneerausten keskiarvo on 2.

Huomautus:

Tässä on esimerkki aineistosta, jossa moodi, mediaani ja keskiarvo ovat kaikki keskenään yhtä suuria.

Vastaus:

$M_o = 2, M_d = 2, \bar{x} = 2$

5.15

Luvun -1 vastaluku on 1 .

Luvun 5 käänteisluku on $\frac{1}{5} = 0,2$.

Lasketaan lukujen 1 ja $0,2$ keskiarvo.

$$\frac{1 + 0,2}{2} = \frac{1,2}{2} = 0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Vastaus:

$$\frac{3}{5}$$

5.16

Mandariinit painavat yhteensä 250 g.

Yksi omena painaa keskimäärin 150 grammaa.

Seitsemän omenaa painavat yhteensä $7 \cdot 150 \text{ g} = 1050 \text{ g}$.

Lasketaan kaikkien hedelmien massat yhteen ja jaetaan summa hedelmien kokonaismäärällä.

$$\frac{250 + 1050}{10} = \frac{1300}{10} = 130$$

Hedelmien keskimääräinen massa on 130 grammaa.

Vastaus:

130 g

5.17

a)

Lasketaan vuosien 2015–2019 liikevoittojen keskiarvo.

$$\frac{2,12 + 2,45 + 2,80 + 2,78 + 2,61}{5} = \frac{12,76}{5} = 2,552 \approx 2,55$$

Keskimääräinen vuotuinen liikevoitto aikavälillä 2015–2019 oli 2,55 miljoonaa euroa.

b)

Lasketaan vuosien 2015–2021 liikevoittojen keskiarvo.

$$\begin{aligned} \frac{2,12 + 2,45 + 2,80 + 2,78 + 2,61 + 2,95 + 3,02}{7} &= \frac{12,76 + 2,95 + 3,02}{7} \\ &= \frac{18,73}{7} = 2,675 \dots \end{aligned}$$

Keskimääräinen vuotuinen liikevoitto aikavälillä 2015–2021 oli 2,67... miljoonaa euroa.

Lasketaan, kuinka monta prosenttia keskiarvo suureni aikaisempaan verrattuna.

$$\frac{2,675 \dots - 2,552}{2,552} = \frac{0,123 \dots}{2,552} = 0,0484 \dots \approx 4,8 \%$$

Älä pyöristä välituloksia liikaa.
Laske mielellään tarkoilla arvoilla,
ja pyöristä lopuksi vastaus.

Vastaus:

a) 2,55 milj, €

b) 4,8 %

5.18**a)**

Merkitään 4. ja 5. kierroksen heittotulosta kirjaimella x .

Muodostetaan keskiarvon avulla yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{4 + 6 + 5 + x + x}{5} = 3,8$$

$$\frac{15 + 2x}{5} = 3,8 \quad \parallel \cdot 5$$

$$15 + 2x = 19 \quad \parallel -15$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Kahdella viimeisellä kierroksella heiton tulos on 2.

b)

Merkitään 4. kierroksen heittotulosta kirjaimella x .

5. kierroksen heittotulos on yhden suurempi kuin edellinen eli $x + 1$.

Muodostetaan keskiarvon avulla yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{4 + 6 + 5 + x + (x + 1)}{5} = 4,4$$

$$\frac{16 + 2x}{5} = 4,4 \quad \parallel \cdot 5$$

$$16 + 2x = 22 \quad \parallel -16$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Neljännän kierroksen heittotulos on 3.

Viidennen kierroksen heittotulos on tällöin 4.

Vastaus:**a)** 2**b)** 3 ja 4

5.19

Yrityksen 8 työntekijän keskimääräinen palkka on 3270 €/kk.

Näiden työntekijöiden palkkojen summa on $8 \cdot 3270 \text{ €/kk} = 26\,160 \text{ €/kk}$.

Merkitään uuden työntekijän palkkaa kirjaimella x (€/kk).

- Kaikkien työntekijöiden palkkojen summa on $26\,160 + x$ (€/kk).
- Työntekijöitä on yhteensä 9.

Keskimääräinen kuukausipalkka nousee 80 €. Uusi arvo on $3270 \text{ €} + 80 \text{ €} = 3350 \text{ €}$.

Muodostetaan keskiarvon avulla yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{26\,160 + x}{9} = 3350 \quad \parallel \cdot 9$$

$$26\,160 + x = 30\,150 \quad \parallel -26\,160$$

$$x = 3990$$

Uuden työntekijän kuukausipalkka on 3990 €.

5.20

Merkitään kysyttyä lukua kirjaimella x .

Luvun neliö on x^2 .

Lukujen x ja x^2 keskiarvo on 10.

Muodostetaan keskiarvon avulla yhtälö ja ratkaistaan x .

$$\frac{x + x^2}{2} = 10 \quad \parallel \cdot 2$$

$$x + x^2 = 20$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-1 \pm 9}{2}$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 1 \\ c &= -20 \end{aligned}$$

Toisen asteen yhtälön
ratkaisukaava:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ratkaisuksi saadaan:

$$x = \frac{-1+9}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-9}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

Kysytty luku on siis 4 tai -5.

5.21

a)

Moodi on se arvo, jota esiintyy eniten eli se arvo, jonka kohdalla on korkein pylväs.

Fysiikka: Mo = 5

Kemia: Mo = 9

Biologia: Mo = 10

Maantiede: Mo = 7

Suurin moodi on biologiassa.

b)

Fysiikka: Mo = 5

Kemia: Mo = 9

Biologia: Mo = 10

Maantiede: Mo = 7

Pienin mediaani on fysiikassa.

c)

Mediaani on suuruusjärjestyksessä olevista arvoista keskimmäisin.

Tapa 1.

Mediaanin suuruusluokka voidaan päätellä jakauman muodosta.

- Maantieteessä arvosanjakauma on symmetrinen, joten mediaani on vaihteluvälin keskikohdassa. Mediaani on siis $Md = 7$.
- Myös biologian arvosanjakauma on melko symmetrinen. Isompia arvosanoja on hieman enemmän kuin pieniä, joten mediaani on vähän suurempi kuin 7.
- Fysiikassa pienillä arvoilla on suuret frekvenssit, joten mediaani on pienempi.
- Kemiassa suurilla arvoilla on suuret frekvenssit, joten mediaani on suurempi.

Suurin mediaani on siis kemiassa.

Tapa 2.

Määritetään arvosanojen mediaanit eri oppiaineissa frekvenssejä laskemalla.

Kyseessä on sama ryhmä, joten arvosanoja on joka jakaumassa yhtä monta.

Lasketaan lukumäärä esimerkiksi biologian jakaumasta: frekvenssien summa on

$$6 + 6 + 2 + 1 + 2 + 5 + 8 = 30.$$

Tästä määrästä puolet on $30 : 2 = 15$.

Keskimmäisiä arvoja on kaksi ja ne ovat 15. ja 16. arvo.

Fysiikka:

- Arvosanoja 4 ja 5 on yhteensä $5 + 9 = 14$.
- 15. ja 16. arvo ovat molemmat 6.
- $Md = 6$.

Kemia:

- Arvosanoja 4, 5, 6, 7 ja 8 on yhteensä $1 + 2 + 2 + 3 + 5 = 13$.
- 15. ja 16. arvo ovat molemmat 9.
- $Md = 9$.

Biologia:

- Arvosanoja 4, 5 ja 6 on yhteensä $6 + 6 + 2 = 14$.
- 15. arvo on 7
- 16. arvo on 8.
- $Md = 7,5$.

Maantiede:

- Arvosanoja 4, 5 ja 6 on yhteensä $1 + 3 + 6 = 10$.
- Arvosanoja 7 on yhteensä 10.
- 15. ja 16. arvo ovat molemmat 7.
- $Md = 7$.

Kootaan tiedot:

Fysiikka: $Md = 6$

Kemia: $Md = 9$

Biologia: $Md = 7,5$

Maantiede: $Mo = 7$

Suurin mediaani on kemiassa.

c)

Tapa 1.

Päätellään mediaanien suuruusluokka jakaumien muodosta.

- Maantieteessä arvosanjakauma on symmetrinen, joten mediaani on vaihteluvälin keskikohdassa. Mediaani on siis $Md = 7$.
- Myös biologian arvosanjakauma on melko symmetrinen. Isompia arvosanoja on hieman enemmän kuin pieniä, joten mediaani on vähän suurempi kuin 7.
- Kemiassa suurilla arvoilla on suuret frekvenssit, joten mediaani on suurempi.
- Fysiikassa pienillä arvoilla on suuret frekvenssit, joten mediaani on pienempi.

Pienin mediaani on siis kemiassa.

Tapa 2.

Fysiikka: $Md = 6$

Kemia: $Md = 9$

Biologia: $Md = 7,5$

Maantiede: $Mo = 7$

Pienin mediaani on fysiikassa.

5.22

a)

Moodi on se arvo, jota esiintyy eniten eli se arvo, jonka kohdalla on korkein pylväs.

Jakauma A: $M_o = 2$

Jakauma B: $M_o = 4$

Muuttujan B moodi on suurempi ($4 > 2$).

Molemmissa jakaumissa esiintyy arvoja 1–5, ja arvoja on saman verran (yhteensä $5 + 6 + 3 + 2 + 1 = 17$).

Jakaumassa A on enemmän pieniä arvoja, kun taas jakaumassa B on enemmän suuria arvoja.

Tämän perusteella muuttujan B keskiarvo on suurempi.

b)

Moodi on se arvo, jota esiintyy eniten eli se arvo, jonka kohdalla on korkein pylväs.

Jakauma A: $M_o = 2$

Jakauma B: $M_o = 5$

Muuttujan B moodi on suurempi ($5 > 2$).

Jakaumien A ja B muoto on täsmälleen sama eli frekvenssit ovat muuttujien arvoilla samat.

Jakaumassa A esiintyy arvoja 1–5.

Jakaumassa B esiintyy arvoja 4–8.

Koska muuttujan B arvot ovat suuremmat, on muuttujan B keskiarvo suurempi.