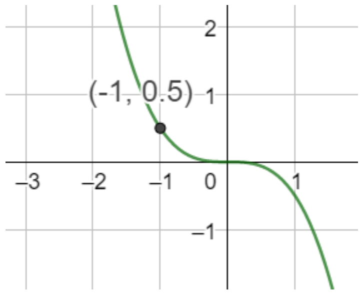
Binomi 4 – Luku 7 – Tehtävien malliratkaisut

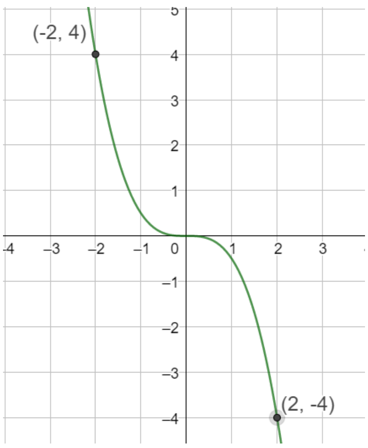
7.1

a)

Funktion kuvaajasta nähdään, että kun $x = -1, y \approx 0{,}5$. Funktio saa siis arvon 0,5 kohdassa $x = -1$ eli väite ei pidä paikkaansa.



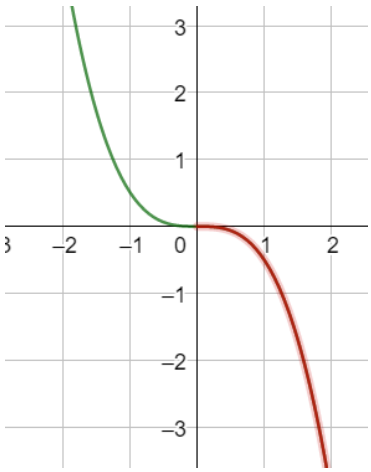
b)



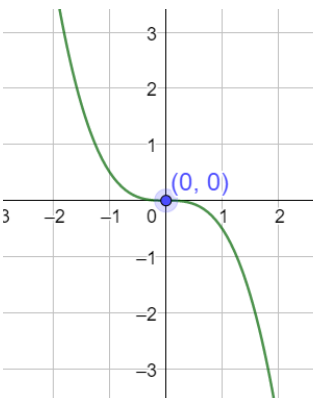
Kohdassa $x = -2$ funktio saa arvon 4 ja kohdassa $x = 2$ funktio saa arvon -4. Näin ollen väite $f(-2) = f(2)$ ei pidä paikkaansa.

c)

Funktio saa positiivisia arvoja, kun funktion kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella. Funktion kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, kun $x > 0$, joten funktio saa myös negatiivisia arvoja. Väite ei siis pidä paikkansa.



d)



Funktio näyttää saavan arvon 0 ainoastaan, kun $x = 0$, joten väite pitää paikkansa.

Vastaus **a)** ei pidä **b)** ei pidä **c)** ei pidä **d)** pitää

7.2

a)

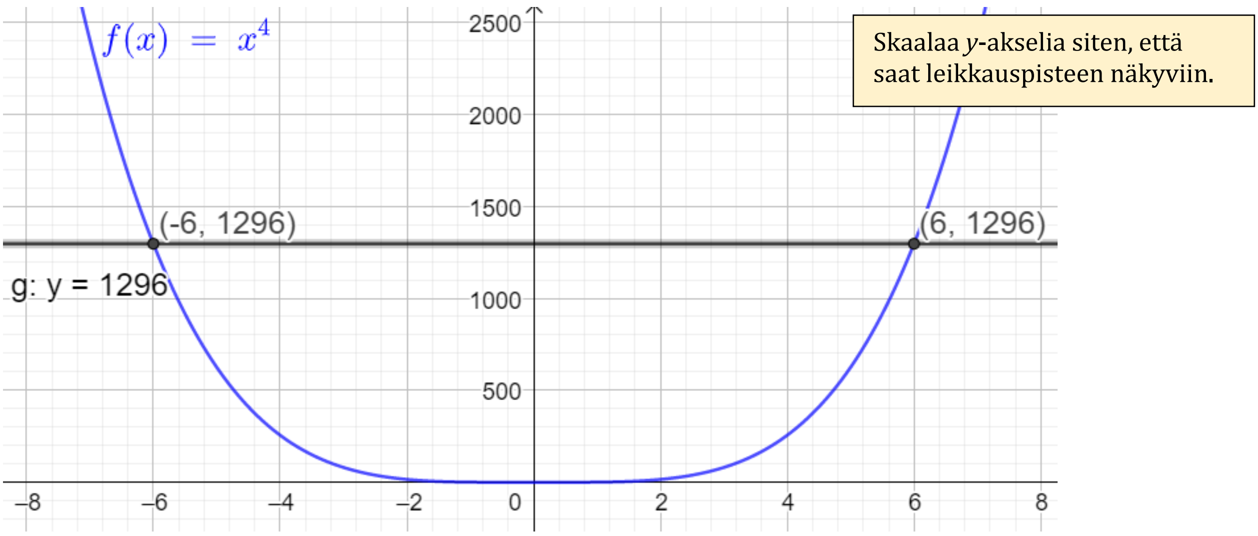
Lasketaan funktion arvo, kun $x = 3$.

$f(3) = 3^4 = 81$

b)

Piirretään funktion $f(x) = x^4$ kuvaaja.

Yhtälön $f(x) = 1296$ ratkaisu on se muuttujan x arvo, jolla funktio saa arvon 1296.
Etsitään funktion f ja suoran $y = 1296$ leikkauspiste.

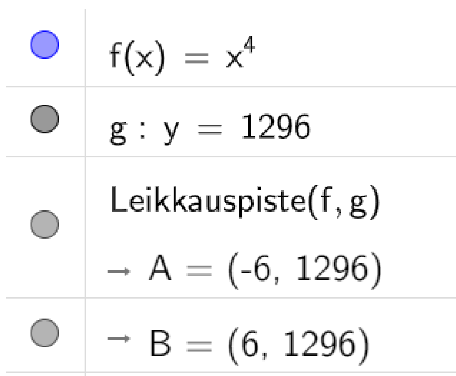


Leikkauspisteet ovat $(-6, 1296)$ ja $(6, 1296)$, joten yhtälö ratkaisu on $x \approx \pm 6$.

Vastaus **a)** $f(3) = 81$

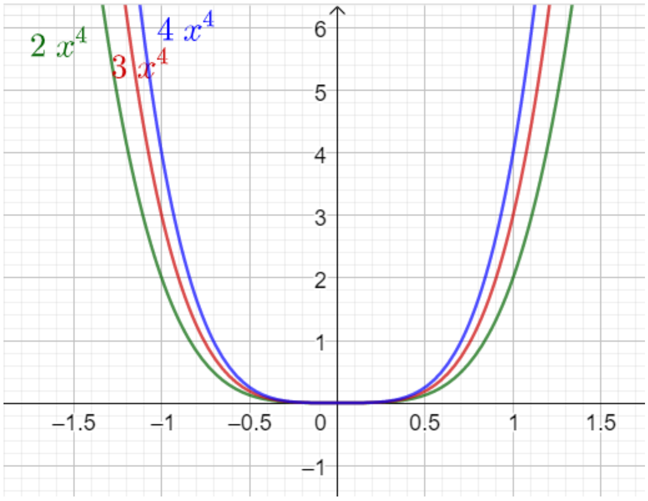
b) $x \approx \pm 6$

Vaiheet Geogebralla:



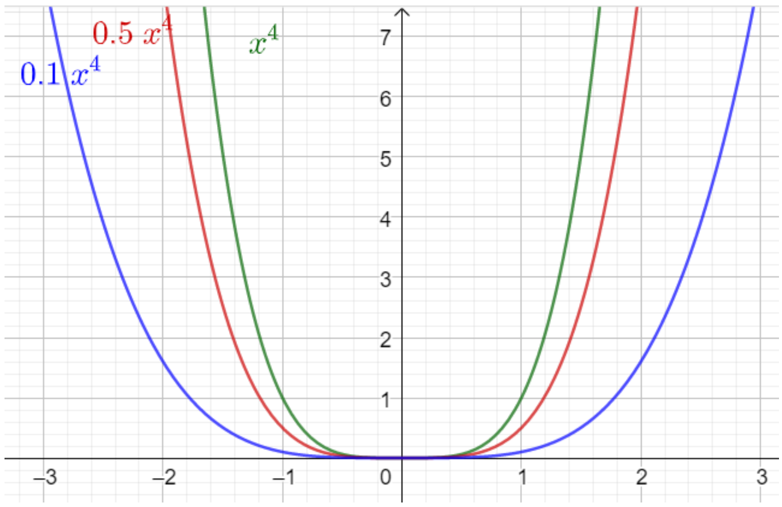
7.3

a)



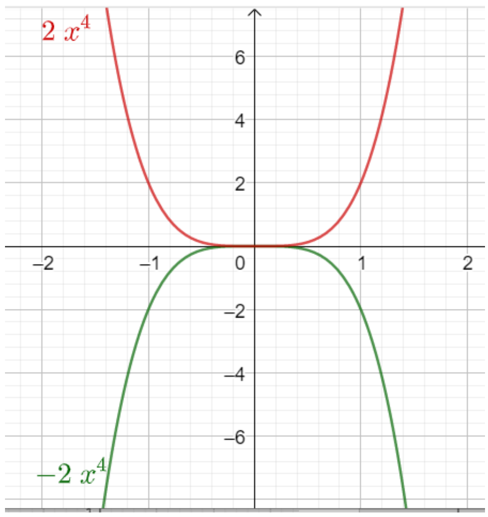
Kun vakion a arvo kasvaa, funktion kuvaaja ”kapenee” eli funktion arvot muuttuvat nopeammin.

b)



Kun vakion a arvo pienenee ja lähenee arvoa 0, funktion kuvaaja ”levenee” eli funktion arvot muuttuvat hitaammin.

c)



Kun $a = 2$ ja $a = -2$, kuvaajat ovat toistensa peilikuvia x-akselin suhteen, eli funktioiden arvot ovat toistensa vastalukuja.

7.4

1) Funktio $f(x) = x^3$ on pariton potenssifunktio, joka saa negatiivisia arvoja, kun $x < 0$ ja positiivisia arvoja, kun $x > 0$. Tällainen kuvaaja on B.

2) Funktio $f(x) = -x^3$ on pariton potenssifunktio, jonka arvot ovat funktion x^3 vastalukuja. Funktio saa siis negatiivisia arvoja, kun $x > 0$ ja positiivisia, kun $x < 0$.
Tällainen kuvaaja on D.

3) Funktio $f(x) = x^4$ on parillinen potenssifunktio, joten $f(x) \geq 0$. Tällainen kuvaaja on C.

4) Funktio $f(x) = -x^4$ on parillinen potenssifunktio, jonka arvot ovat funktion x^4 vastalukuja. Näin ollen $f(x) \leq 0$. Tällainen kuvaaja on A.

Vastaus 1 – B, 2 – D, 3 – C, 4 – A

7.5

a)

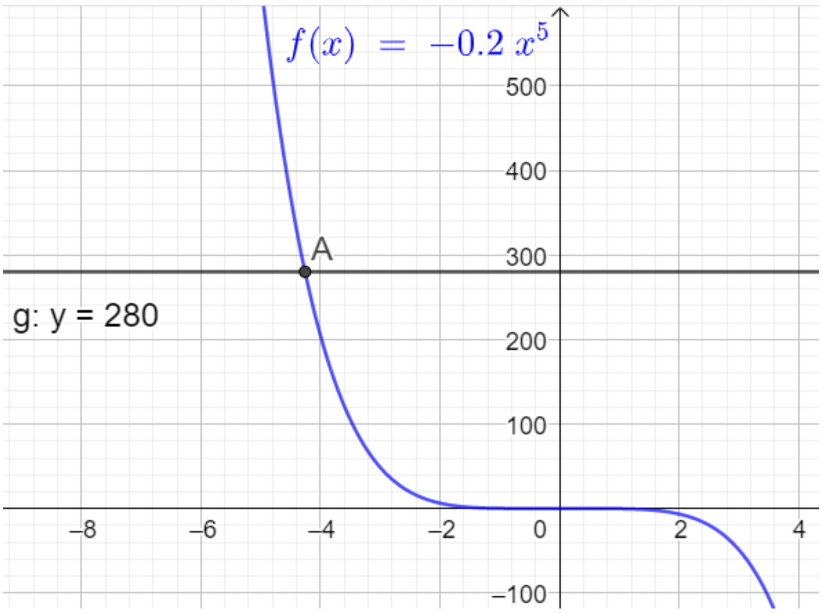
Lasketaan funktion arvo, kun $x = 6$.

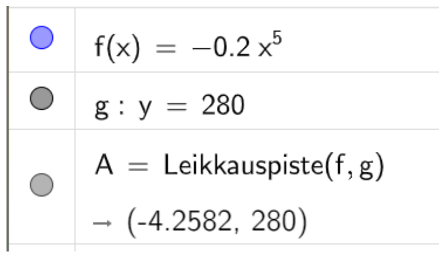
$f(6) = -0{,}2 \cdot 6^5 = -1555{,}2$

b)

Piirretään funktion $f(x) = -0{,}2x^5$ kuvaaja.

Yhtälön $f(x) = 280$ ratkaisu on se muuttujan x arvo, jolla funktio saa arvon 280.
Etsitään funktion f ja suoran $y = 280$ leikkauspiste.





Skaalaa y-akselia siten, että saat leikkauspisteen näkyviin.

Leikkauspiste on $(-4{,}2582;\ 280)$ joten yhtälö ratkaisu on $x \approx -4{,}26$.

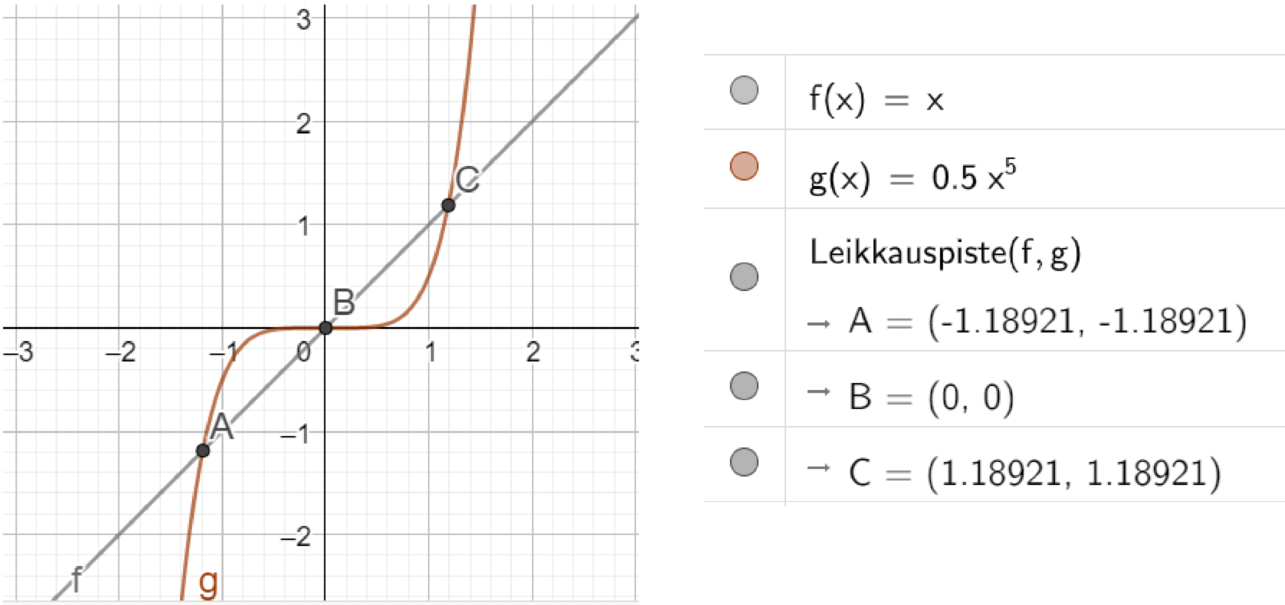
Vastaus **a)** $f(6) = -1555{,}2$

b) $x = -4{,}26$

7.6

a)

Piirretään funktioiden $f(x) = x$ ja $g(x) = 0{,}5x^5$ kuvaajat ja selvitetään niiden leikkauspisteet.



Muut leikkauspisteet ovat $(-1{,}19;\ -1{,}19)$ ja $(1{,}19;\ 1{,}19)$.

b)

Edellisen kohdan perusteella funktioilla $f(x) = x$ ja $h(x) = 0{,}1x^5$ on leikkauspiste origossa eli leikkauspiste on $(0,\ 0)$. Lisäksi a-kohdassa havaitaan, että kahden muun leikkauspisteen x- ja y-koordinaatit ovat toistensa vastalukuja.

Koska yksi leikkauspiste on $(1{,}78;\ 1{,}78)$, havainnon perusteella kolmas leikkauspiste on $(-1{,}78;\ -1{,}78)$.

Vastaus **a)** $(-1{,}19;\ -1{,}19)$ ja $(1{,}19;\ 1{,}19)$

b) $(-1{,}78;\ -1{,}78)$ ja $(0,\ 0)$

7.7

a)

Lasketaan bakteerin tilavuus funktion $V(x)$avulla. Kun säde on 1,12 µm, $x = 1{,}12$.

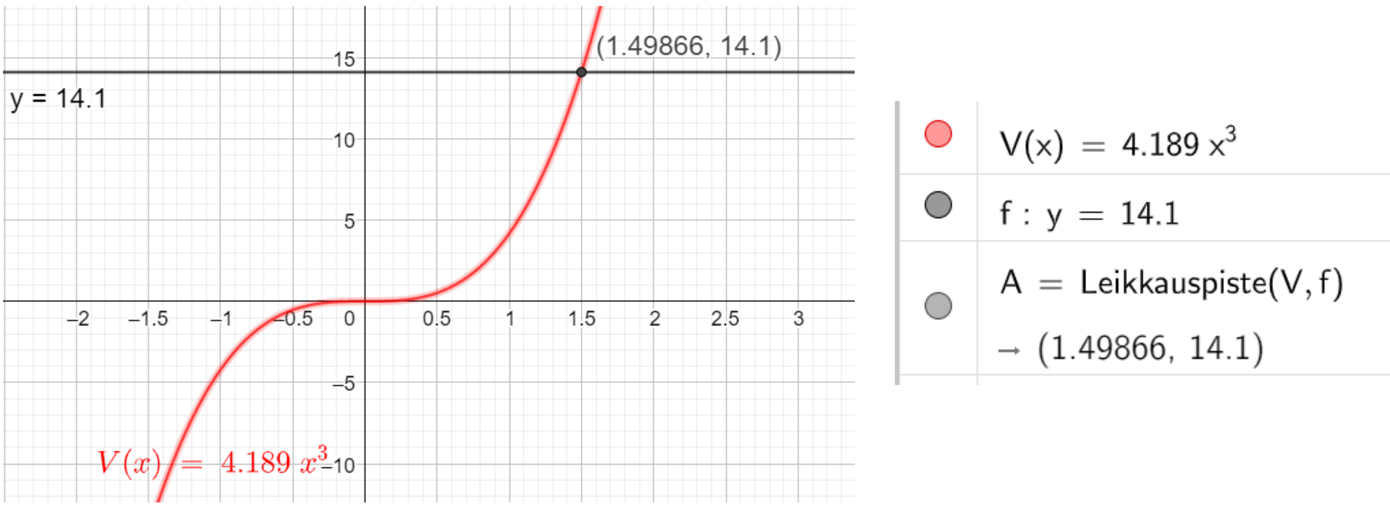
$V(1{,}12) = 4{,}189 \cdot 1{,}12^3 \approx 5{,}885\ldots \approx 5{,}89$ (µm^3)

Bakteerin tilavuus on 5,89 µm^3.

b)

Piirretään funktion $V(x) = 4{,}189x^3$ kuvaaja.

Bakteerin säde on se muuttujan x arvo, jolla funktio saa arvon 14,1.
Etsitään funktion f ja suoran $y = 14{,}1$ leikkauspiste.



Leikkauspiste on (1,4986...; 14,1), joten bakteerin säde on $1{,}4986\ldots \approx 1{,}50$ µm.

Vastaus **a)** 5,89 µm^3

b) 1,50 µm

7.8

a)

Lasketaan matkan pituus funktion f avulla. Kun aikaa on kulunut 3,0 sekuntia, $x = 3{,}0$.

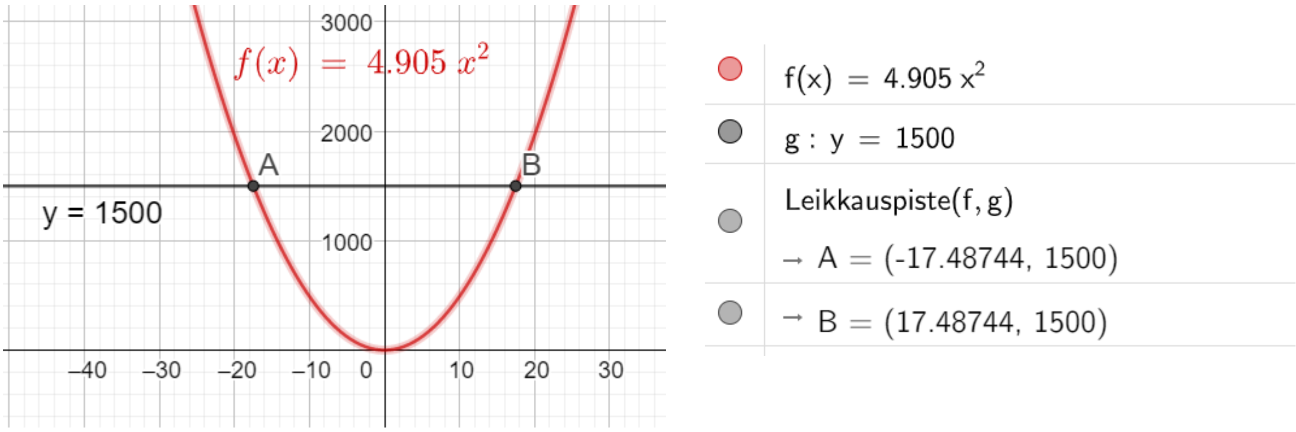
$f(3{,}0) = 4{,}905 \cdot 3{,}0^2 = 44{,}145 \approx 44$ (m)

Esine on pudonnut 44 m.

b)

Piirretään funktion $f(x) = 4{,}905x^2$ kuvaaja.

Kun kuumailmapallo on 1,5 km korkeudessa, sieltä pudotettavan esineen putoamismatka maahan on 1500 m. Tähän kulunut aika on se muuttujan x arvo, jolla funktio f saa arvon 1500. Etsitään funktion f ja suoran $y = 1500$ leikkauspisteet.



Koska aika on positiivinen luku, pisteen B x-koordinaatti käy ratkaisuksi.

Aikaa kuluu siis $x = 17{,}487\ldots$ s ≈ 17 s.

Vastaus **a)** 44 m

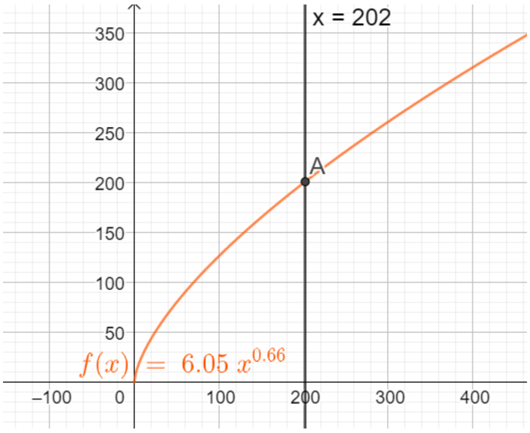
b) 17 s

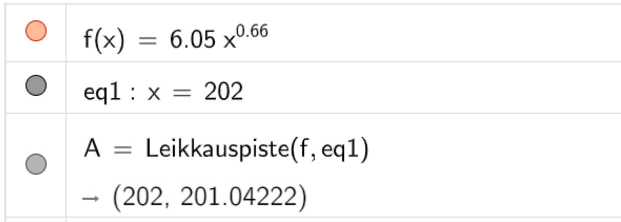
7.9

a)

Kun pinta-ala on 20200 km^2, $x = 202$ (100 km^2). Alligaattorien määrä (1000 kpl) on funktion $f(x) = 6{,}05x^{0{,}66}$ arvo kyseisessä kohdassa.

Piirretään funktion $f(x) = 6{,}05x^{0{,}66}$ kuvaaja ja etsitään funktion f ja suoran $x = 202$ leikkauspiste.





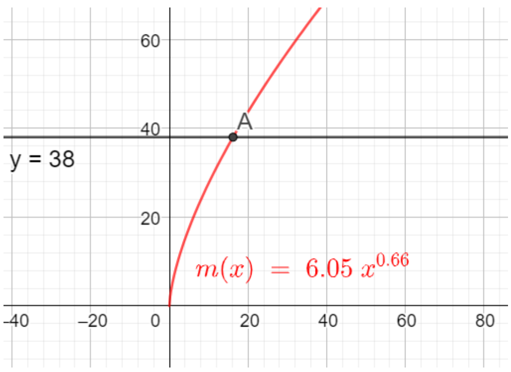
Leikkauspiste on (202; 201,042…), joten alligaattorien määrä on

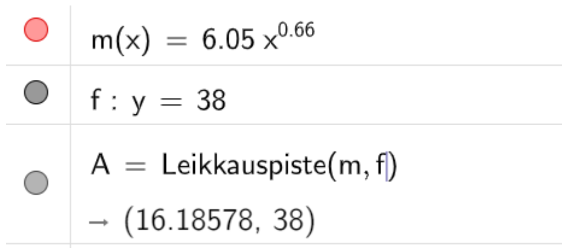
$201{,}042\ldots \cdot 1000 \approx 201000.$

b)

Kysytty pinta-ala (100 m^2) on se muuttujan *x* arvo, jolla funktio *f* saa arvon 38, koska funktion arvo on alligaattorien määrä (1000 kpl).

Etsitään funktion f ja suoran $y = 38$ leikkauspiste.





Leikkauspiste on (16,185…; 38), joten pinta-ala on

$16{,}185\ldots \cdot 100\ \text{km}^2 \approx 1620\ \text{km}^2$

Vastaus **a)** 201 000 **b)** 1620 km^2

7.10

a)

Kun bakteerien määrä 1,2-kertaistuu, $x = 1{,}2$. Lasketetaan funktion arvo, kun $x = 1{,}2$.

$f(1{,}2) = 200 \cdot 1{,}2^7 = 716{,}636\ldots \approx 720$

Bakteereita on viikon päästä 720 kappaletta.

b)

Bakteerien määrä kasvaa 5 %. Muodostetaan kasvua kuvaava prosenttikerroin.

$100\ \% + 5\ \% = 105\ \% = 1{,}05$

Bakteerien määrä 1,05-kertaistuu joka päivä eli kerroin on 1,05.

Lasketaan funktion *f* arvo, kun $x = 1{,}05$.

$f(1{,}05) = 200 \cdot 1{,}05^7 = 281{,}420\ldots \approx 280$

Bakteereita on viikon päästä 280 kappaletta.

c)

Merkitään bakteerien määrää kasvatuksen alkaessa kirjaimella *a.*

Bakteerien määrä 1,05-kertaistuu päivittäin, joten viikon päästä bakteerien määrä on $1{,}05^7 \cdot a$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *a.*

$$\begin{aligned} 1{,}05^7 a &= 200 \cdot 1{,}05^7 \quad | : (1{,}05^7) \\ a &= 200 \end{aligned}$$

Bakteereita oli kasvatuksen alussa 200 kappaletta.

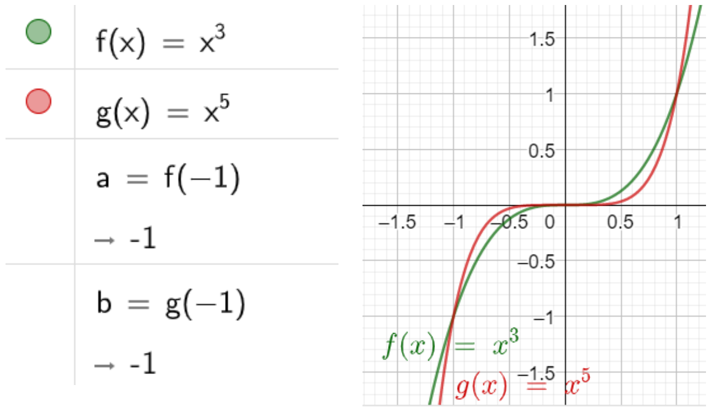
Vastaus **a)** 720 kappaletta

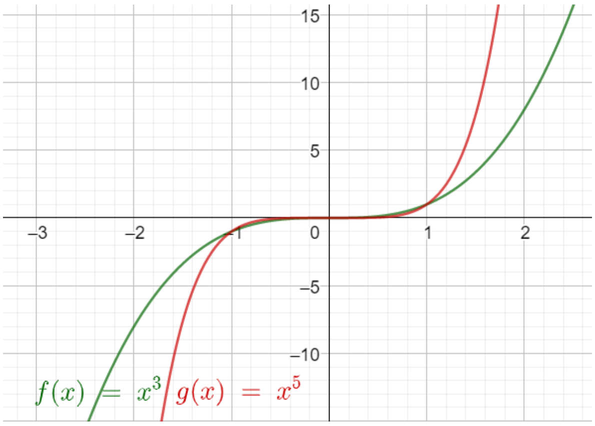
b) kerroin 1,05, 280 kappaletta

c) 200 kappaletta

7.11

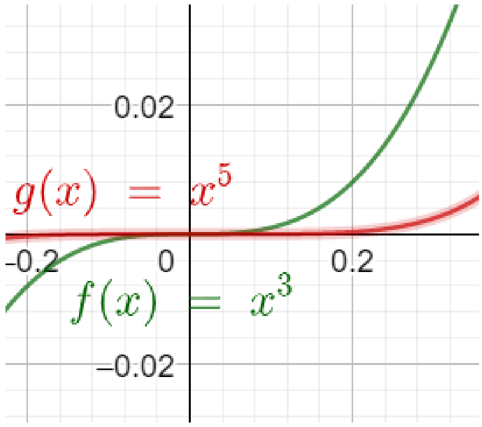
a) Piirretään funktioiden kuvaajat. Kuvaajista nähdään, että funktio saavat saman arvon, kun $x = -1$. Näin ollen väite $f(-1) = g(-1)$ on totta.





b) Kun $f(x) > g(x)$, funktion f arvo on suurempi kuin funktion g arvo. Tällöin funktion f kuvaaja kulkee funktion g kuvaajan yläpuolella.

Kun $x = -2$, funktion f kuvaaja on funktion g yläpuolella. Näin ollen väite $f(-2) > f(-2)$ on totta.

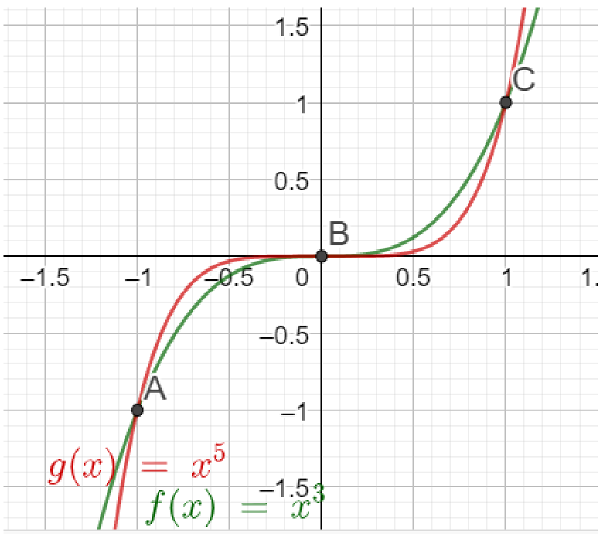


c) Kun $x = 0{,}2$, funktion f kuvaaja on funktion g yläpuolella. Näin ollen $f(0{,}2) > g(0{,}2)$ eli väite ei ole totta.

d) Koska $g(x) = x^5$, muuttujan eksponentti on 5, joka on pariton luku. Näin ollen funktio g on pariton potenssifunktio ja väite on totta.

e) Funktiot saavat samat arvot leikkauspisteissä.

Koska funktioilla on enemmän kuin 1 leikkauspiste, funktio saavat saman arvon useammassa kohdassa. Väite ei siis ole totta.



Vastaus

a) on
b) on
c) ei ole
d) on
e) ei ole

7.12

a)

Pitää siis osoittaa, että väite $f(x) = f(-x)$ ei päde jollain muuttujan x arvolla.

Lasketaan funktion $f(x) = x^5$ arvo, kun $x = 2$ ja $x = -2$.

$f(2) = 2^5 = 32$ $\qquad$ $f(-2) = (-2)^5 = -32$

Näin ollen $f(2) \neq f(-2)$ eli funktio $f(x) = x^5$ ei ole parillinen.

b)

Pitää siis osoittaa, että väite $f(x) = -f(-x)$ ei päde jollain muuttujan x arvolla.

Lasketaan funktion $f(x) = x^4$ arvo, kun $x = 2$ ja $x = -2$.

$f(2) = 2^4 = 16$ $\qquad$ $f(-2) = (-2)^4 = 16$

Näin ollen $f(2) \neq -f(-2)$ eli funktio $f(x) = x^4$ ei ole pariton.

7.13

Piirretään pistejoukot Geogebraan taulukkolaskenta-sovelluksen avulla.

Punaiset pisteet ovat funktion $f(x)$ kuvaajan pisteitä.
Siniset pisteet ovat funktion $g(x)$ kuvaajan pisteitä.
Mustat pisteet ovat funktion $h(x)$ kuvaajan pisteitä.

Punaisten pisteiden y-koordinaatit ovat sekä positiivisia että negatiivisia, ja niiden kautta kulkeva kuvaaja muistuttaa parittoman potenssifunktion kuvaajaa.

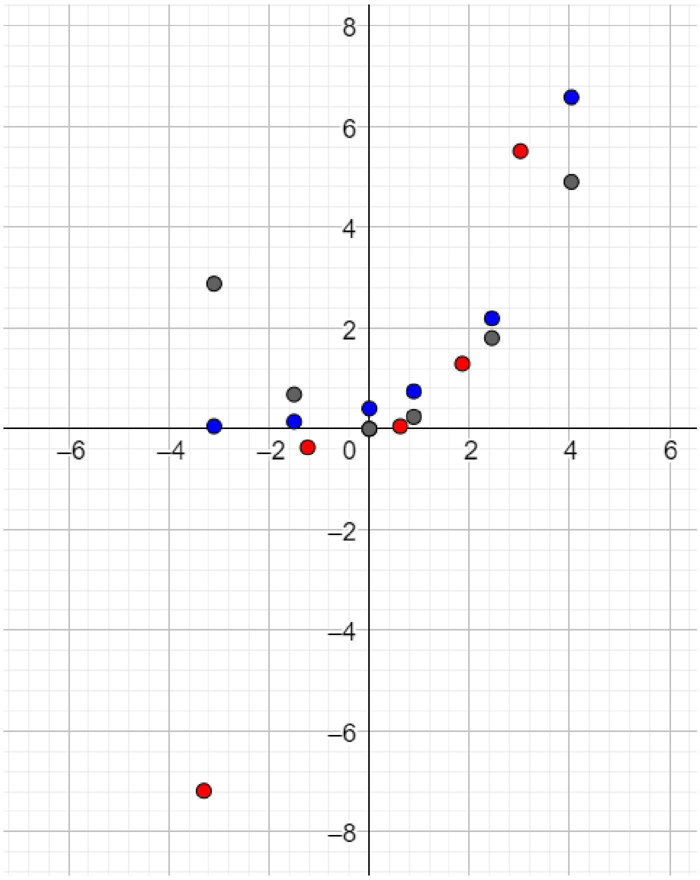
Näin ollen $f(x) = bx^3$.

Mustien pisteiden y-koordinaatit eivät ole negatiivisia, ja pisteiden kautta kulkeva kuvaaja muistuttaa paraabelia.

Näin ollen $h(x) = ax^2$.

Sinisten pisteiden y-koordinaatit eivät ole negatiivisia ja ne näyttävät kasvavan eksponentiaalisesti.

Näin ollen $g(x) = cd^x$.



Vastaus **a)** $f(x) = bx^3, g(x) = cd^x$ ja $h(x) = ax^2$

7.14

a)

Kun hyönteisen massa on 150 mg, $x = 150$.

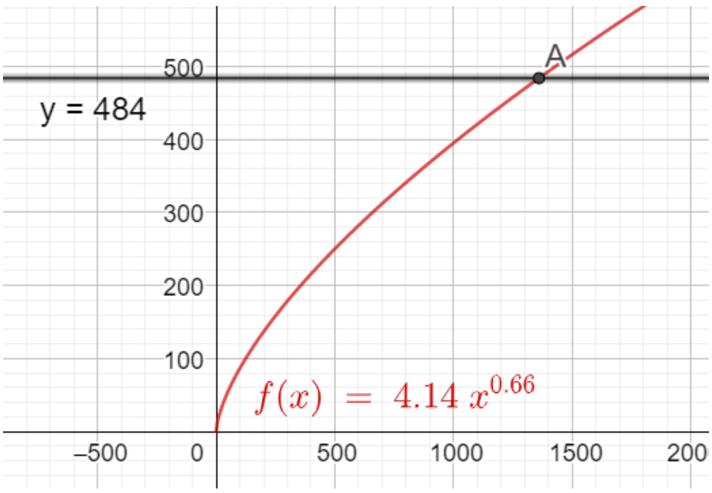
Kuluneen happikaasun tilavuus (mm^3) saadaan laskemalla funktion $f(x) = 4{,}14x^{0{,}660}$ arvo kohdassa $x = 150$.

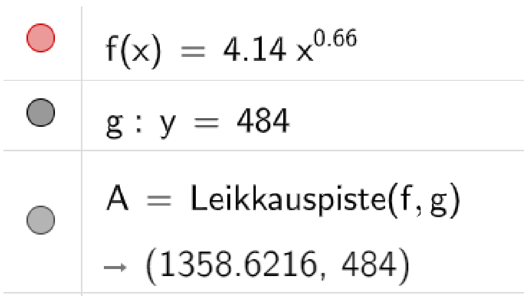
$f(150) = 4{,}14 \cdot 150^{0{,}660} = 113{,}036\ldots \approx 113$ (mm^3)

b)

Piirretään funktion $f(x) = 4{,}14x^{0{,}660}$ kuvaaja.

Hyönteisen massa on se muuttujan x arvo, jolla funktio f saa arvon 484.
Määritetään funktion f ja suoran $y = 484$ leikkauspiste.





Leikkauspiste on (1358,6216; 484), joten hyönteisen massa on 1358,6216 mg ≈ 1360 mg.

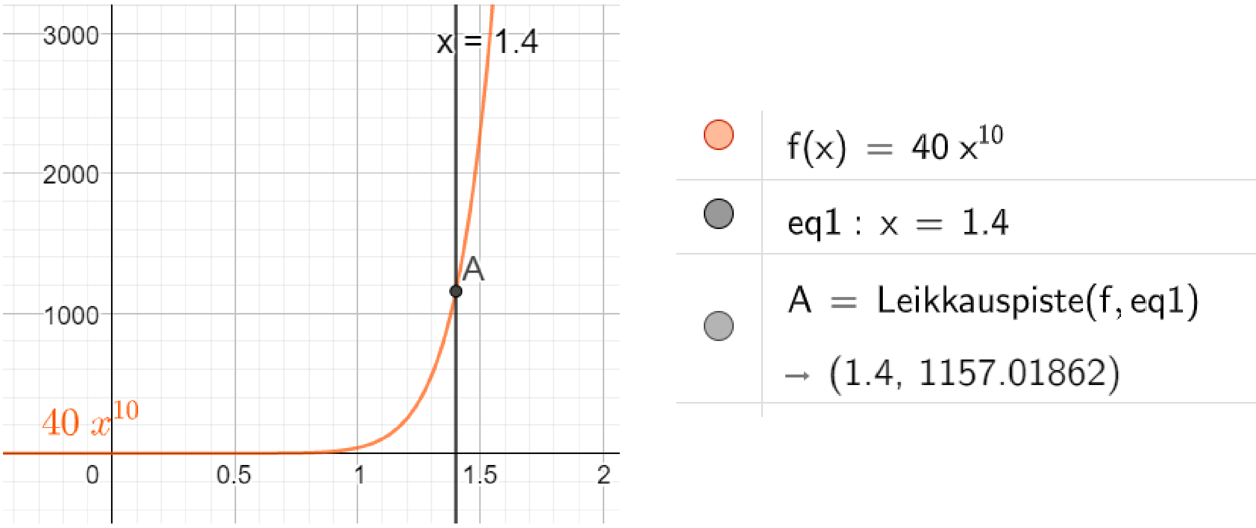
Vastaus **a)** 113 mm^3

b) 1360 mg

7.15

a) Piirretään funktio $f(x) = 40x^{10}$.

Kun R-luku on 1,4, muuttuja $x = 1{,}4$. Viruksen saaneiden määrä on funktion f arvo kohdassa $x = 1{,}4$. Selvitetään funktion f ja suoran $x = 1{,}4$ leikkauspiste.

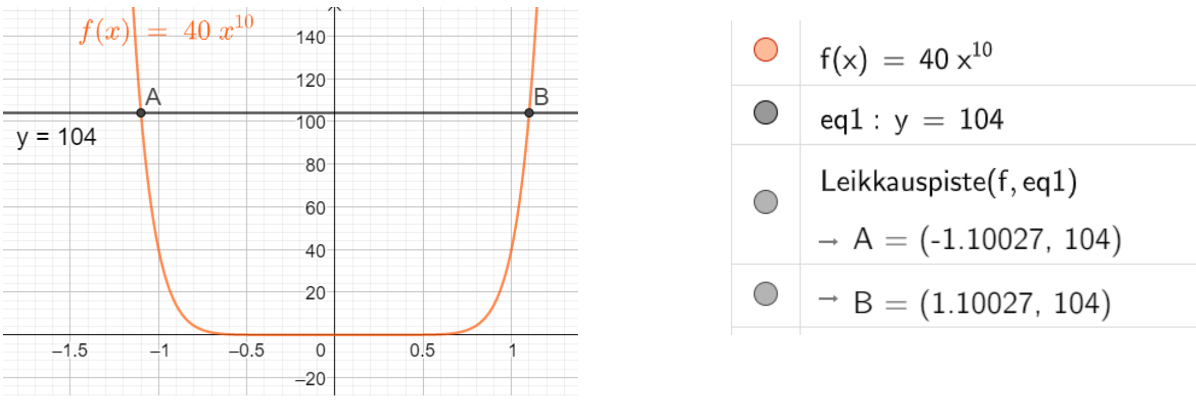


Leikkauspiste on (1,4; 1157,018...), joten viruksen saaneita on 10 päivän päästä

$1157{,}018 \approx 1160$.

b)

R-luku on se muuttujan x arvo, jolla funktion $f(x) = 40x^{10}$ arvo on 104.
Etsitään funktion f ja suoran $y = 104$ leikkauspiste.



R-luku kuvaa kertaistumista, joten se on positiivinen luku. R-luvuksi käy siis leikkauspisteiden x-koordinaateista positiivinen, eli $1{,}1002\ldots \approx 1{,}1$.

c)

R-luku kuvaa, kuinka moninkertaiseksi tartunnan saaneiden määrä kasvaa joka päivä.

Helmikuun alussa on kulunut 0 päivää, jolloin tartunnan saaneita oli 340.

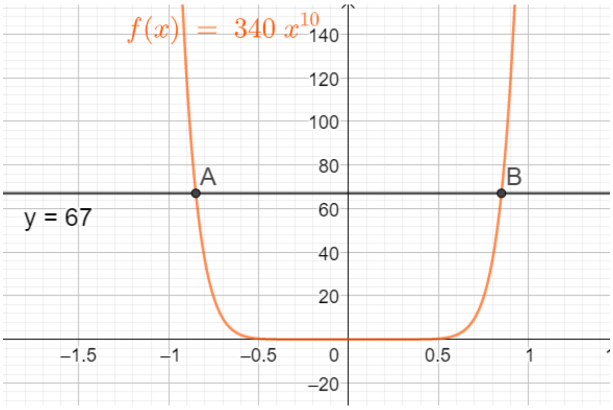
Jos R-luku on *x*., seuraavana päivänä tartunnan saaneita on $340x$. Seuraavien päivien tartuntojen saaneiden määrä saadaan kertomalla aina edellisen päivän määrää R-luvulla eli muuttujalla *x*.

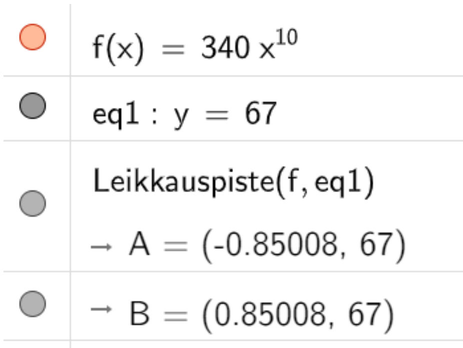
Päiviä kulunut	Tartunnan saaneet
0	340
1	$340x$
2	$340x^2$
3	$340x^3$
10	$340x^{10}$

Tartunnan saaneiden määrää kuvaa siis funktio c, kun muuttuja *x* on R-luku.

Piirretään funktion *P* kuvaaja.

R-luku on se muuttujan x arvo, jolla funktion $P(x) = 340x^{10}$ arvo on 67.
Etsitään funktion f ja suoran $y = 67$ leikkauspiste.





R-luku kuvaa kertaistumista, joten se on positiivinen luku. R-luvuksi käy siis leikkauspisteiden *x*-koordinaateista positiivinen, eli 0,85008… ≈ 0,85.

Vastaus **a)** 1160 **b)** 1,1 **c)** $P(x) = 340x^{10}$, R-luku 0,85

7.16

a)

Lasketaan enimmäisnopeudet, kun askelväli on $x = 0{,}60$ (m) ja $x = 0{,}75$ (m).

$v(0{,}6) = 1{,}24 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}4464$ (m/s)

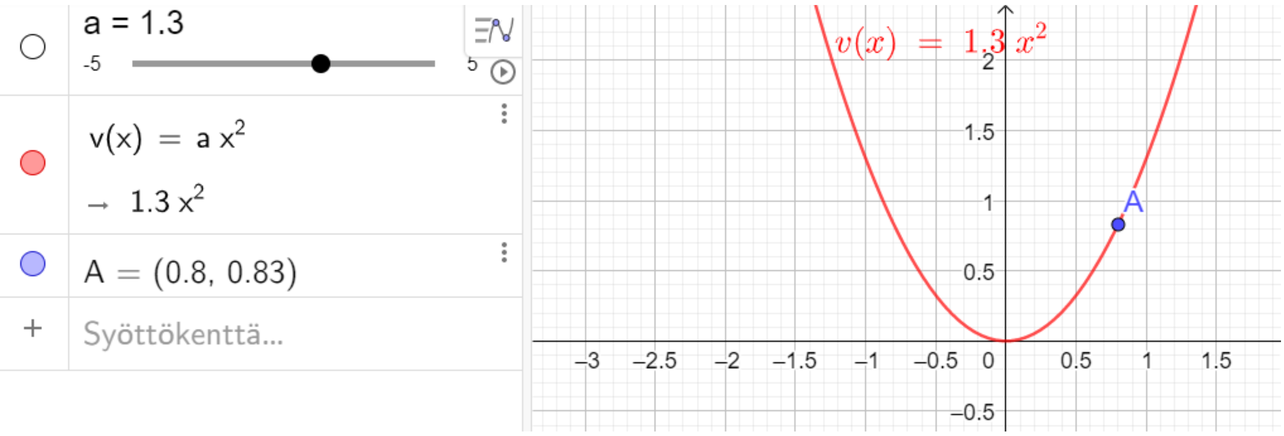
$v(0{,}75) = 1{,}24 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}6975$ (m/s)

Askelnopeus kasvaa $0{,}6975 \text{ m/s} - 0{,}4464 \text{ m/s} = 0{,}2511 \text{ m/s} \approx 0{,}25 \text{ m/s}$.

b)

Piirretään funktio $v(x) = ax^2$ ja liukusäädin vakiolle a.

Kun juoksunopeus on 0,83 m/s ja askelväli 0,80 m, funktion v kuvaajan tulee kulkea pisteen $A(0{,}80;\ 0{,}83)$ kautta. Piirretään piste A ja tutkitaan liukusäätimen avulla, milloin funktion kuvaaja kulkee pisteen A kautta.



Kun $a = 1{,}3$, askelvälillä 0,80 m juoksunopeus on 0,83 m/s.

Vastaus **a)** 0,25 m/s

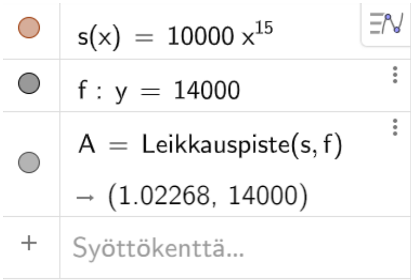
b) 1,3

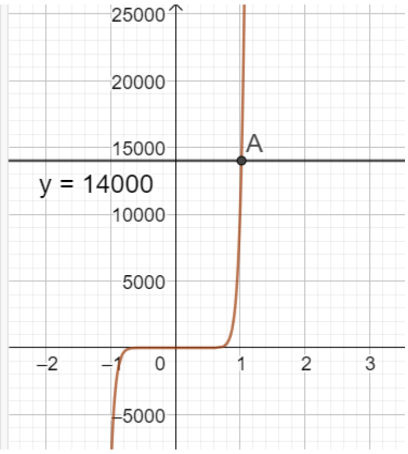
7.17

a)

Ratkaistaan, millä muuttujan x arvolla funktio $s(x) = 10000x^{15}$ saa arvon 14000.

Piirretään funktion s kuvaaja ja selvitetään sen leikkauspiste suoran $y = 14000$ kanssa.





Leikkauspisteestä saadaan $x = 1{,}0226\ldots \approx 1{,}023$.

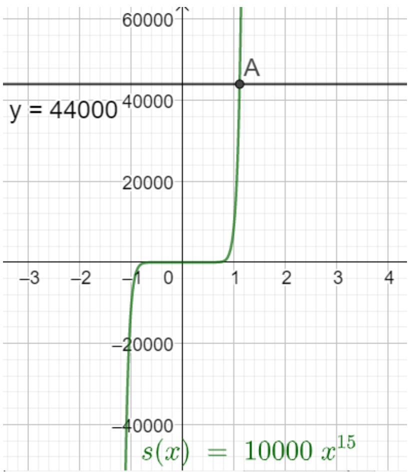
Koska sijoituksen arvo 1,023-kertaistuu vuosittainen, keskimääräinen vuosituottoprosentti on

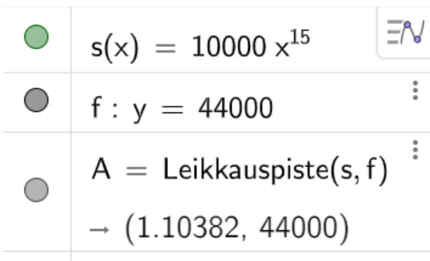
$1{,}023 - 1 = 0{,}023 = 2{,}3\ \%$.

b)

Jos kertasijoitus on 10 000 € ja arvo 4,4-kertaistuu, niin 15 vuoden päästä osakkeiden arvo on $4{,}4 \cdot 10000\ € = 44000\ €$.

Muuttujan x arvo on se arvo, jolla funktio s saa arvon 44 000. Selvitetään funktion s suoran $y = 44000$ leikkauspiste.





Leikkauspiste on (1,10382...; 44000), joten $x = 1{,}10382\ldots \approx 1{,}104$.

Keskimääräinen vuosituotto on siis $1{,}104 - 1 = 0{,}104 = 10{,}4\ \%$.

Vastaus **a)** $x = 1{,}023,\ \ 2{,}3\ \%$

b) $x = 1{,}104,\ \ 10{,}4\ \%$

7.18

a) Nikkelin määrä pienenee joka tunti 1,26 %.
Muodostetaan pienenemistä kuvaava prosenttikerroin.

$100\% - 1{,}26\% = 98{,}74\ \% \approx 0{,}9874$

Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 0{,}9874$.

$f(0{,}9874) = 16{,}0 \cdot 0{,}9874^{24} = 11{,}801\ldots \approx 11{,}8\ \text{(g)}$

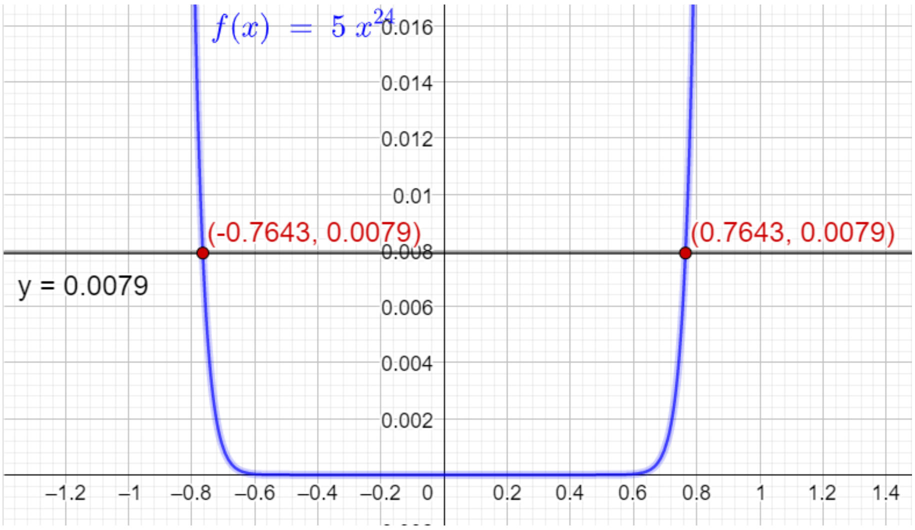
Nikkelin määrä on vuorokauden kuluttua 11,8 g.

b)

Koska mittauksen alkaessa ainetta on 5,0 g, $A = 5{,}0$.
Aineen määrää 24 tunnin päästä kuvaa siis funktio $f(x) = 5{,}0x^{24}$.

Selvitetään, millä muuttujan x arvolla funktio f saa arvon 7,9 mg $= 0{,}0079$ g.

Etsitään kuvaajasta funktion f ja suoran $y = 0{,}0079$ leikkauspiste.



Leikkauspisteet ovat $(-0{,}7643\ \ldots;\ 0{,}0079)$ ja $(0{,}7643\ldots;\ 0{,}0079)$.
Koska x kuvaa moninkertaistumista, vain positiivinen arvo käy.

Näin ollen $x = 0{,}7643\ldots \approx 0{,}76$.

Kun aineen määrä 0,76-kertaistuu tunnissa, sitä hajoaa $1 - 0{,}76 = 0{,}24 = 24\ \%$.

Vastaus **a)** 11,8 g **b)** 24 %

7.19

a)

Koiran kehon massa on 10 kg ja aivojen massa 56 g = 0,056 kg.

Sijoitetaan arvot kaavaan ja lasketaan koiran EQ-luku.

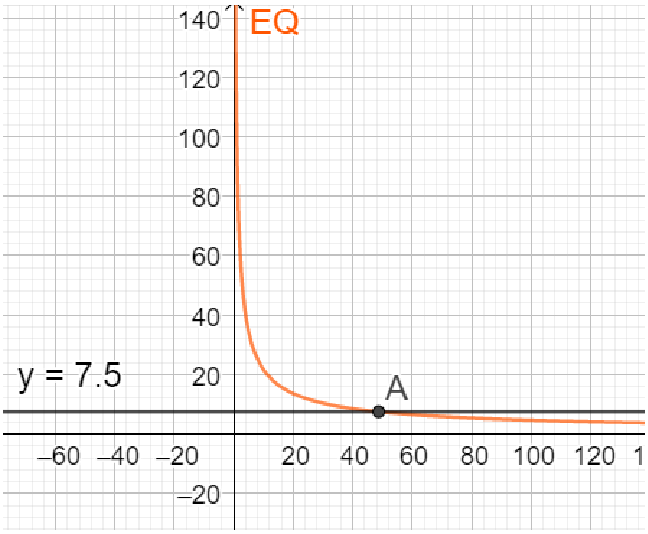
$$EQ_{\text{koira}} = \frac{0{,}056}{0{,}012 \cdot 10^{\frac{2}{3}}} = 1{,}005 \approx 1{,}0$$

b)

Merkitään ihmisen kehon massaa kirjaimella *x.* Sijoitetaan kaavaan ihmisaivojen massa 1,35 kg. Tällöin EQ-luvun riippuvuutta kehon massasta *x* (kg) kuvaa funktio

$EQ_{\text{ihminen}}(x) = \frac{1{,}35}{0{,}012x^{\frac{2}{3}}}$, missä $x > 0$ (kehon massa ei voi olla negatiivinen).

Piirretään funktion kuvaaja ja tutkitaan, millä muuttujan *x* arvolla funktio saa arvon 7,5 (EQ-luku).



$\mathrm{EQ}(x) = \frac{1.35}{0.012\, x^{\frac{2}{3}}}, \quad (x > 0)$

$f: y = 7.5$

A = Leikkauspiste(EQ, f)

→ (58.09475, 7.5)

Leikkauspiste on (58,09475…; 7,5), joten kaavassa käytetty kehon massa on

$x = 58{,}094\ldots \text{kg} \approx 58$ kg.

Vastaus **a)** 1,0 **b)** 58 kg