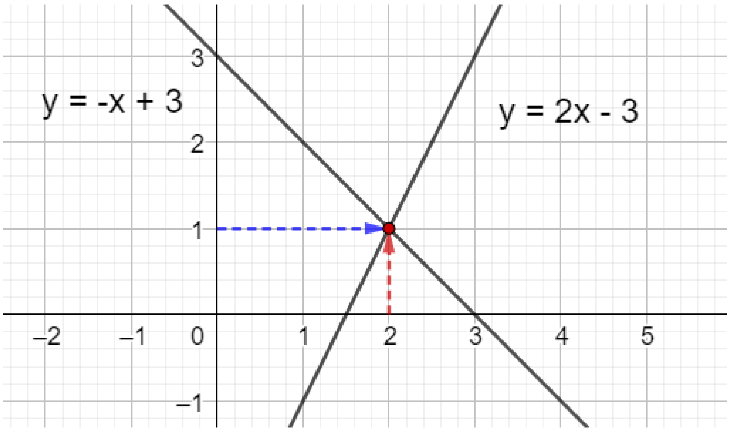
Binomi 4 – Luku 5 – Tehtävien malliratkaisut

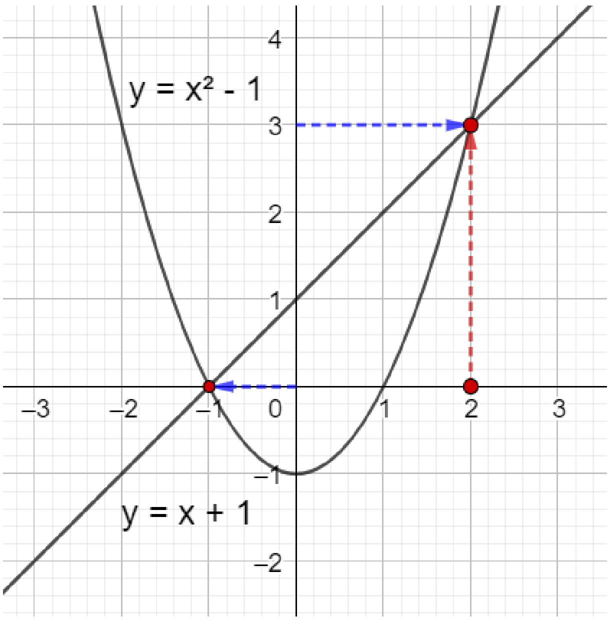
5.1

a)



Kuvan perusteella suorat leikkaavat pisteessä $(2, 1)$

b)



Kuvan perusteella paraabelilla ja suoralla on kaksi leikkauspistettä: $(-1, 0)$ ja $(2, 3)$.

Vastaus **a)** $(2, 1)$ **b)** $(-1, 0)$ ja $(2, 3)$

5.2

a)

Suora leikkaa y-akselin, kun $x = 0$. Lasketaan leikkauspisteen y-koordinaatti.

$y = 5 \cdot 0 - 4 = -4$

Suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -4)$.

Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$. Lasketaan leikkauspisteen x-koordinaatti.

$$\begin{aligned} 0 &= 5x - 4 \\ -5x &= -4 \quad | : (-5) \\ x &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Suora leikkaa x-akselin pisteessä $\left(\frac{4}{5}, 0\right)$.

b)

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} y = 5x - 4 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$.
Ratkaistaan yhtälöpari sijoitusmenetelmällä.

$$\begin{aligned} 5x - 4 &= 2x + 2 \\ 5x - 2x &= 2 + 4 \\ 3x &= 2 \quad | : 2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $5x - 4$ toiseen yhtälöön y:n paikalle.

$\begin{cases} y = 5x - 4 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$

Leikkauspisteessä $x = 2$. Lasketaan tätä vastaava y-koordinaatti sijoittamalla $x = 2$ suoran yhtälöön.

$y = 5 \cdot 2 - 4 = 6$

Tapa 2: Sijoitetaan toisen suoran yhtälöön.
$y = 2 \cdot 2 + 2 = 6$

Suorien leikkauspiste on $(2, 6)$.

Vastaus **a)** $(0, -4), \left(\frac{4}{5}, 0\right)$ **b)** $(2, 6)$

5.3

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} 6x + 3y + 10 = 0 \\ -12x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$.

Ratkaistaan yhtälöpari yhteenlaskumenetelmän avulla. Poistetaan yhtälöparista muuttuja *x*, jolloin saadaan ratkaistua muuttuja *y*.

$$\begin{cases} 6x + 3y + 10 = 0 & | \cdot 2 \\ -12x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

Kerrotaan ylempi yhtälö luvulla 2. Tällöin muuttujan *x* kertoimet saadaan toistensa vastaluvuiksi.

$$+ \begin{cases} 12x + 6y + 20 = 0 \\ -12x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 8y + 24 &= 0 \\ 8y &= -24 \quad | : 8 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

Muuttuja *x* poistuu yhteenlaskun tuloksena saadusta yhtälöstä. $-12x + 12x = 0$

Ratkaistaan muuttujan *x* arvo sijoittamalla saatu ratkaisu $y = -3$ jompaankumpaan alkuperäisistä yhtälöistä.

$$\begin{aligned} 6x + 3 \cdot (-3) + 10 &= 0 \\ 6x + 1 &= 0 \\ 6x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$6x + 3y + 10 = 0$

Muuttujan *y* arvo olisi voitu sijoittaa myös yhtälöparin toiseen yhtälöön $-12x + 2y + 4 = 0$.

Leikkauspiste on siis $\left(-\frac{1}{6}, -3\right)$.

Vastaus $\left(-\frac{1}{6}, -3\right)$

5.4

a)

Kuvan perusteella suora t ja sivuaa paraabelia k, joten niillä on yksi yhteinen piste $(1, 2)$.

b)

Kuvan perusteella suoralla s ja paraabelilla k on kaksi leikkauspistettä $(-1, -4)$ ja $(3, 0)$.

c)

Kuvan perusteella suorien s ja t kulmaketoimet ovat samat eli ne ovat yhdensuuntaiset.
Näin ollen suorat eivät leikkaa toisiaan.

Vastaus **a)** $(1, 2)$ **b)** $(-1, -4)$ ja $(3,0)$ **c)** eivät leikkaa

5.5

a)
Suora leikkaa y-akselin, kun $x = 0$. Lasketaan leikkauspisteen y-koordinaatti.

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 0 - 4 = -4$$

Suora leikkaa y-akselin pisteessä (0, -4).

Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$. Lasketaan leikkauspisteen x-koordinaatti.

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}x - 4 \\ \frac{1}{2}x &= -4 \quad |\cdot 2 \\ x &= -8 \end{aligned}$$

Suora leikkaa x-akselin pisteessä $(-8, 0)$.

b)
Ratkaistaan leikkauspisteen y-koordinaatti sijoittamalla suoran yhtälöön $x = 0$.

$$\begin{aligned} 3 \cdot 0 - 2y + 6 &= 0 \\ -2y &= -6 \quad | : (-2) \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Suora leikkaa y-akselin pisteessä (0, 3).

Ratkaistaan leikkauspisteen x-koordinaatti sijoittamalla suoran yhtälöön $y = 0$.

$$\begin{aligned} 3x - 2 \cdot 0 + 6 &= 0 \\ 3x &= -6 \quad | : 3 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Suora leikkaa x-akselin pisteessä $(-2, 0)$.

Vastaus **a)** $(0, -4)$ ja $(-8, 0)$ **b)** $(-2, 0)$ ja $(0, 3)$

5.6

a)

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} y = 0 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$.
Ratkaistaan yhtälöpari sijoitusmenetelmällä.

$$\begin{aligned} 0 &= -2x + 6 \\ 2x &= 6 \quad | : 2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Koska toinen suora on $y = 0$, leikkauspisteen y-koordinaatti on 0. Leikkauspiste on siis (3, 0).

b)

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = x - 2 \end{cases}$.
Ratkaistaan yhtälöpari sijoitusmenetelmällä.

$$\begin{aligned} 3x + 4 &= x - 2 \\ 3x - x &= -2 - 4 \\ 2x &= -6 \quad | : 2 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Ratkaistaan y-koordinaatti sijoittamalla ratkaisu $x = -3$ suoran yhtälöön.

$$y = -3 - 2 = -5$$

Leikkauspiste on siis $(-3, -5)$.

Vastaus **a)** (3, 0) **b)** $(-3, -5)$

5.7

Suora s näyttää kulkevan pisteiden $(0, 3)$ ja $(1, 5)$ kautta.
Lasketaan suoran s kulmakerroin näiden pisteiden avulla.

$$k_s = \frac{5-3}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Suora t näyttää kulkevan pisteiden $(2, 4)$ ja $(0, -1)$ kautta.
Lasketaan suoran t kulmakerroin näiden pisteiden avulla.

$$k_t = \frac{-1-4}{0-2} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Kun muuttuja x suurenee yhdellä, niin y suurenee kulmakertoimen verran eli 2,5.

Koska suorien kulmakertoimet eivät ole samat, suorat leikkaavat jossain pisteessä.

Vastaus $k_s = 2$ ja $k_t = 2{,}5$, suorat leikkaavat

5.8

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} x - 5y + 22 = 0 \\ -4x + y + 64 = 0 \end{cases}$.

Ratkaistaan yhtälöpari yhteenlaskumenetelmän avulla.
Poistetaan yhtälöparista muuttuja *x*, jolloin saadaan ratkaistua muuttuja *y*.

$$\begin{cases} x - 5y + 22 = 0 \quad | \cdot 4 \\ -4x + y + 64 = 0 \end{cases}$$

Kerrotaan ylempi yhtälö luvulla -4. Tällöin muuttujan *x* kertoimet saadaan toistensa vastaluvuiksi.

$$+ \begin{cases} 4x - 20y + 88 = 0 \\ -4x + y + 64 = 0 \end{cases}$$

$$-19y + 152 = 0$$

Muuttuja *x* poistuu yhteenlaskun tuloksena saadusta yhtälöstä.
$-4x + 4x = 0$

$$\begin{aligned} -19y &= -152 \quad | : (-19) \\ y &= 8 \end{aligned}$$

Ratkaistaan muuttujan *x* arvo sijoittamalla saatu ratkaisu $y = -8$ jompaankumpaan alkuperäisistä yhtälöistä.

$$\begin{aligned} x - 5 \cdot 8 + 22 &= 0 \\ x - 40 + 22 &= 0 \\ x - 18 &= 0 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Leikkauspiste on siis $(18, 8)$.

Vastaus $(18, 8)$

5.9

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} 2x - 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$.

Ratkaistaan yhtälöpari yhteenlaskumenetelmän avulla.
Poistetaan yhtälöparista muuttuja *x,* jolloin saadaan ratkaistua muuttuja *y.*

$$\begin{cases} 2x - 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \quad | \cdot (-1) \end{cases}$$

$$+ \quad \begin{cases} 2x - 2y = 7 \\ -2x + y = -4 \end{cases}$$

$$-y = 3 \quad | : (-1)$$

$$y = -3$$

Ratkaistaan muuttujan *x* arvo sijoittamalla saatu ratkaisu $y = -3$ jompaankumpaan alkuperäisistä yhtälöistä.

$$\begin{aligned} 2x - 2 \cdot (-3) &= 7 \\ 2x + 6 &= 7 \\ 2x &= 1 \quad | : 2 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Leikkauspiste on siis $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$.

Jos piste on suoralla $y = -4x - 1$, pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön.

$$\begin{aligned} -3 &= -4 \cdot \frac{1}{2} - 1 \\ -3 &= -2 - 1 \\ -3 &= -3 \end{aligned}$$

Yhtälö on tosi, joten piste $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ on suoralla.

Vastaus $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$, piste on suoralla

5.10

a)

Suora s näyttää kulkevan pisteiden $(1, 0)$ ja $(0, 1)$ kautta.
Lasketaan suoran s kulmakerroin näiden pisteiden avulla.

$$k_s = \frac{1-0}{0-1} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Suora leikkaa y-akselin, kun $y = 1$. Suoran yhtälö on siis $y = -x + 1$.

Suora t näyttää kulkevan pisteiden $(1, 1)$ ja $(0, 3)$ kautta.
Lasketaan suoran t kulmakerroin näiden pisteiden avulla.

$$k_t = \frac{3-1}{0-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

Kun muuttuja x suurenee yhdellä, niin y pienenee kahdella.

Suora t leikkaa y-akselin, kun $y = 3$. Suoran yhtälö on siis $y = -2x + 3$.

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$.
Ratkaistaan yhtälöpari sijoitusmenetelmällä.

$$\begin{aligned} -x + 1 &= -2x + 3 \\ -x + 2x &= 3 - 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Ratkaistaan y-koordinaatti sijoittamalla ratkaisu $x = 2$ suoran yhtälöön.

$$y = -2 + 1 = -1$$

Leikkauspiste on siis $(2, -1)$, mikä kuvan perusteella pitää paikkansa.

Vastaus **a)** s: $y = -x + 1$ ja t: $y = -2x + 3$ **b)** $(2, -1)$

5.11

Suoran ja paraabelin leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} 4x - y - 7 = 0 \\ y = x^2 + 2x - 15 \end{cases}.$$

Ratkaistaan yhtälöpari sijoitusmenetelmällä paraabelin yhtälö suoran yhtälöön muuttujan y paikalle.

$$a = -1,\ b = 2,\ c = 8$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned}
4x - (x^2 + 2x - 15) - 7 &= 0 \\
4x - x^2 - 2x + 15 - 7 &= 0 \\
-x^2 + 2x + 8 &= 0 \\
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8}}{2 \cdot (-1)} \\
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{-2} \\
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{-2} \\
x &= \frac{-2 \pm 6}{-2}
\end{aligned}$$

$$x = \frac{-2 + 6}{-2} = -2 \text{ tai } x = \frac{-2 - 6}{-2} = 4$$

Leikkauspisteiden x-koordinaatit ovat siis $x = -2$ ja $x = 4$.

Lasketaan näitä vastaavat y-koordinaatit.

Kun $x = -2$, $y = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 15 = 4 - 4 - 15 = -15$

Kun $x = 4$, $y = 4^2 + 2 \cdot 4 - 15 = 16 + 8 - 15 = 9$

Leikkauspisteet ovat $(-2, -15)$ ja $(4, 9)$.

Vastaus $(-2, -15)$ ja $(4, 9)$

5.12

Suora näyttää kulkevan pisteiden $(-3, 0)$ ja $(0, 3)$ kautta. Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{3 - 0}{0 - (-3)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Suora leikkaa y-akselin, kun $y = 3$. Suoran vakiotermi on 3 ja sen yhtälö on $y = x + 3$.

Suoran ja paraabelin leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = 4x^2 \end{cases}$.

Ratkaistaan yhtälöpari sijoitusmenetelmällä. Sijoitetaan paraabelin yhtälö suoran yhtälöön muuttujan y paikalle.

$$a = 4,\ b = -1,\ c = -3$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned} 4x^2 &= x + 3 \\ 4x^2 - x - 3 &= 0 \\ x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{49}}{8} \\ x &= \frac{1 \pm 7}{8} \end{aligned}$$

$$x = \frac{1 + 7}{8} = 1 \text{ tai } x = \frac{1 - 7}{8} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

Kysytyn leikkauspisteen P x-koordinaatti on $-\frac{3}{4}$. Lasketaan tätä vastaava y-koordinaatti.

$$y = -\frac{3}{4} + 3 = \frac{9}{4}$$

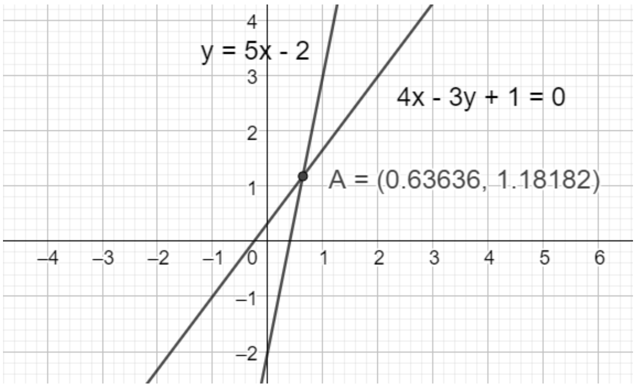
Leikkauspiste P on siis $\left(-\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right)$.

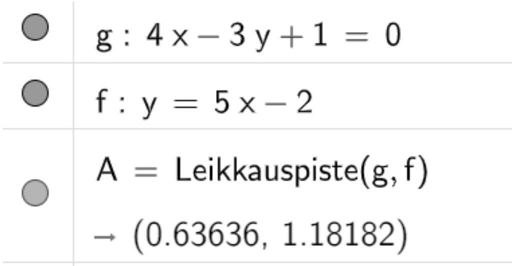
Vastaus $y = x + 3,\quad P = \left(-\frac{3}{4}, \frac{9}{4}\right)$

5.13

a)

Ratkaistaan leikkauspiste piirtämällä suorat geometriaohjelmalla ja käyttämällä leikkauspiste-toimintoa.



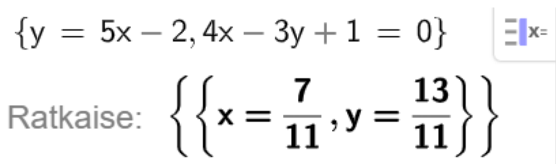


Suorien leikkauspiste yhden desimaalin tarkkuudella on (0,6; 1,2)

b)

Ratkaistaan leikkauspiste algebrallisesti CAS-laskimella ratkaisemalla yhtälöpari

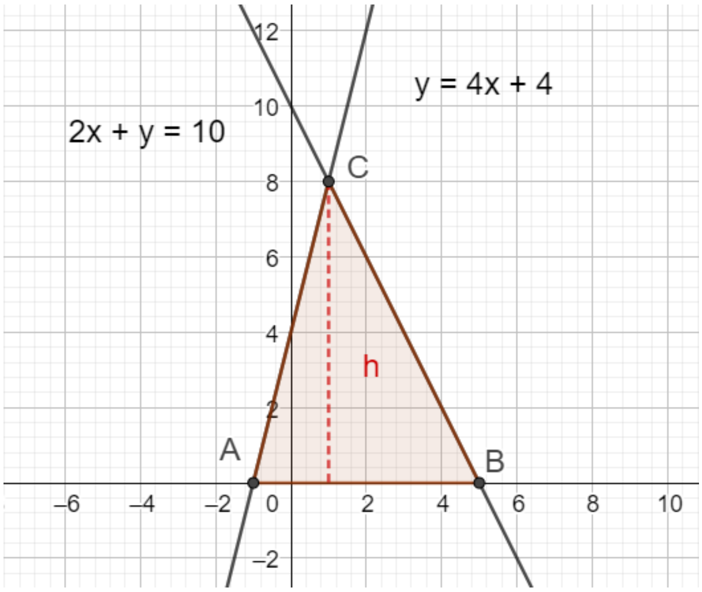
$$\begin{cases} y = 5x - 2 \\ 4x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$



Leikkauspiste on siis $\left(\frac{7}{11}, \frac{13}{11}\right)$.

Vastaus **a)** (0,6; 1,2) **b)** $\left(\frac{7}{11}, \frac{13}{11}\right)$

5.14



Piirretään suorat koordinaatistoon.
Suorat ja x-akseli rajaavat kolmion ABC.

Ratkaistaan suorien ja y-akselin leikkauspisteet A ja B. Leikkauspisteessä $x = 0$. Ratkaistaan y-koordinaatit suorien yhtälöistä.

Piste A:

$$\begin{aligned} 0 &= 4x + 4 \\ -4x &= 4 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Leikkauspiste on $A(-1, 0)$.

Piste B:

$$\begin{aligned} 2x + 0 &= 10 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Leikkauspiste on $B(5, 0)$.

Suorien leikkauspiste A saadaan ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} y = 4x + 4 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$.

$$\begin{cases} y = 4x + 4 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella

$x = 1, y = 8$ Suorien leikkauspiste on siis $A(1, 8)$.

Valitaan kolmion kannaksi jana AB, jonka pituus saadaan x-koordinaattien avulla.
Kannan pituus on $5 - (-1) = 6$.

Kolmion korkeus on pisteen C y-koordinaatti eli etäisyys x-akselista. Korkeus on $h = 8$.

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$$

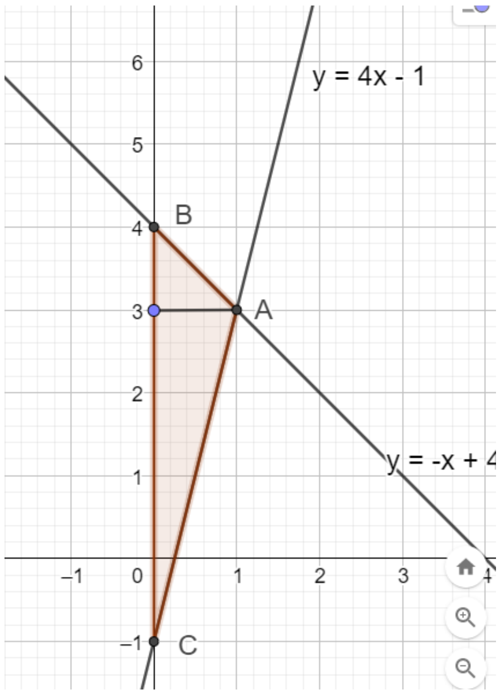
$$A = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2}$$

Vastaus 24

5.15

a)

Piirretään suorat koordinaatistoon. Suorat ja y-akseli rajaavat kolmion *ABC.*



Ratkaistaan suorien ja y-akselin leikkauspisteet B ja C. Leikkauspisteessä $x = 0$. Ratkaistaan y-koordinaatit suorien yhtälöistä.

Piste *C:* $\quad y = 4 \cdot 0 - 1 = -1$

Leikkauspiste on $C(0, -1)$

Piste *B:* $\quad y = -0 + 4 = 4$

Leikkauspiste on $B(0,4)$

Suorien leikkauspiste A saadaan ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} y = 4x - 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$.

$$\begin{cases} y = 4x - 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella

$x = 1, y = 3$ Suorien leikkauspiste on siis $A(1, 3)$.

b)

Valitaan kolmion kannaksi jana *BC,* jonka pituus on $4 - (-1) = 5$.

Kolmion korkeus on pisteen A etäisyys y-akselista, joka on pisteen x-koordinaatti eli 1.

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{5 \cdot 1}{2} = \frac{5}{2}$$

$A = \dfrac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2}$

Vastaus a) $(0, -1)$, $(0, 4)$ ja $(1, 3)$ **b)** $\frac{5}{2}$

5.16

Lasketaan toteuttavatko pisteen $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ koordinaatit molemmat suorien yhtälöt.

$$y = -5x - 1$$
$$\frac{3}{2} = -5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1$$
$$\frac{3}{2} = \frac{5}{2} - \frac{2}{2}$$
$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Yhtälö on tosi.

$$\begin{aligned} -10x + 2y &= 8 \\ -10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \frac{3}{2} &= 8 \\ \frac{10}{2} + \frac{6}{2} &= 8 \\ 5 + 3 &= 8 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

Yhtälö on tosi.

Koska pisteen koordinaatit toteuttavat molemmat yhtälöt, piste on niiden leikkauspiste ja suorat siis leikkaavat.

Vastaus leikkaavat

5.17

a)

Suorat eivät leikkaa, jos ne ovat yhdensuuntaiset eli niillä on sama kulmakerroin.

Suoran $y = 5x + 1$ kulmakerroin on 5, joten se ei leikkaa suoran $y = ax - 4$, kun $a = 5$.

b)

Suoran $y = x + 3$ kulmakerroin on 1 ja se ei leikkaa suoran $4ax - 2y + 8 = 0$ kanssa, kun niillä on samat kulmakertoimet. Esitetään toinen suora ratkaistussa muodossa.

$$
\begin{aligned}
4ax - 2y + 8 &= 0 \quad | : 2 \\
2ax - y + 4 &= 0 \\
2ax + 4 &= y \\
y &= 2ax + 4
\end{aligned}
$$

Ratkaistaan millä muuttujan a arvolla suoran kulmakerroin on 1.

$$
\begin{aligned}
2a &= 1 \quad | : 2 \\
a &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Vastaus **a)** $a = 5$ **b)** $a = \frac{1}{2}$

5.18

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$.

Ratkaistaan yhtälöpari yhteenlaskumenetelmän avulla. Poistetaan yhtälöparista muuttuja *x*, jolloin saadaan ratkaistua muuttuja *y*.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 11 & | \cdot (-3) \\ 3x - 2y = 11 & | \cdot 2 \end{cases}$$

Kerrotaan ylempi yhtälö luvulla -3 ja alempi luvulla 2. Tällöin muuttujan x kertoimet saadaan toistensa vastaluvuiksi.

$$+ \begin{cases} -6x + 15y = -33 \\ 6x - 4y = 22 \end{cases}$$

$$11y = -11$$

$$y = -1$$

Ratkaistaan muuttujan *x* arvo sijoittamalla saatu ratkaisu $y = -1$ jompaankumpaan alkuperäisistä yhtälöistä.

$$\begin{aligned} 2x - 5 \cdot (-1) &= 11 \\ 2x + 5 &= 11 \\ 2x &= 6 \quad | : 2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Leikkauspiste on siis $(3, -1)$.

Vastaus $(3, -1)$

5.19

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ -4x - 8y + 12 = 0 \end{cases}$.

Ratkaistaan yhtälöpari yhteenlaskumenetelmän avulla. Poistetaan yhtälöparista muuttuja *x*, jolloin saadaan ratkaistua muuttuja *y*.

$$\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 & | \cdot (-4) \\ -4x - 8y + 12 = 0 \end{cases}$$

Kerrotaan ylempi yhtälö luvulla −4. Tällöin muuttujan *x* kertoimet saadaan toistensa vastaluvuiksi.

$$+ \begin{cases} -12x + 8y + 20 = 0 \\ -4x - 8y + 12 = 0 \end{cases}$$

$$-16x + 32 = 0$$

$$-16x = -32 \quad | : (-16)$$

$$x = 2$$

Ratkaistaan muuttujan *y* arvo sijoittamalla saatu ratkaisu $x = 2$ jompaankumpaan alkuperäisistä yhtälöistä.

$$3 \cdot (2) - 2y - 5 = 0$$
$$6 - 2y = 5$$
$$-2y = -1 \quad | : (-2)$$
$$y = \frac{1}{2}$$

Leikkauspiste on siis $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Tutkitaan toteuttavatko leikkauspisteen koordinaatit suoran $y = -\frac{5}{6}x + \frac{13}{6}$ yhtälön.

$$\frac{1}{2} = -\frac{5}{6} \cdot 2 + \frac{13}{6}$$
$$\frac{1}{2} = -\frac{10}{6} + \frac{13}{6}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Yhtälö on tosi, joten leikkauspiste on myös suoran $y = -\frac{5}{6}x + \frac{13}{6}$ piste.

Vastaus On

5.20

Määritetään suoran s_2 yhtälö. Lasketaan ensin suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{5-(-1)}{2-(-1)} = \frac{6}{3} = 2$$

Suoran yhtälö saadaan kulmakertoimen ja suoran pisteen $(2, 5)$ avulla.

$$\begin{aligned} y-5 &= 2(x-2) \\ y-5 &= 2x-4 \\ y &= 2x+1 \end{aligned}$$

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} y = 2x+1 \\ 2x+5y = 7 \end{cases}$.
Ratkaistaan yhtälöpari sijoitusmenetelmällä.

$$\begin{aligned} 2x+5(2x+1) &= 7 \\ 2x+10x+5 &= 7 \\ 12x &= 2 \quad |:12 \\ x &= \frac{2}{12} \\ x &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ratkaistaan y-koordinaatti sijoittamalla ratkaisu $x = \frac{1}{6}$ suoran yhtälöön.

$$y = 2 \cdot \frac{1}{6} + 1 = \frac{2}{6} + \frac{6}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Leikkauspiste on siis $\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right)$.

Vastaus $\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{3}\right)$

5.21

Suoran ja paraabelin leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} 5x + y + 3 = 0 \\ y = x^2 + x - 3 \end{cases}.$$

Ratkaistaan yhtälöpari sijoitusmenetelmällä paraabelin yhtälö suoran yhtälöön muuttujan y paikalle.

$$\begin{aligned} 5x + (x^2 + x - 3) + 3 &= 0 \\ 5x + x^2 + x - 3 + 3 &= 0 \\ x^2 + 6x &= 0 \\ x(x + 6) &= 0 \end{aligned}$$

Tulon nollasääntö:
Tulo on nolla kun jompikumpi tekijöistä on nolla.

$$x + 6 = 0 \text{ tai } x = 0$$
$$x = -6$$

Leikkauspisteiden x-koordinaatit ovat siis $x = 0$ ja $x = -6$.

Lasketaan näitä vastaavat y-koordinaatit

Kun $x = 0$, $y = 0^2 + 0 - 3 = -3$

Kun $x = 6$, $y = (-6)^2 + (-6) - 3 = 36 - 6 - 3 = 27$

Leikkauspisteet ovat $(-6, 27)$ ja $(0, -3)$.

Vastaus $(-6, 27)$ ja $(0, -3)$

5.22

a) Suora näyttää kulkevan pisteen $(1, 0)$ kautta ja leikkaavan y-akselin pisteessä $(0, -1)$. Lasketaan suoran kulmakerroin pisteiden avulla.

$$k = \frac{-1-0}{0-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Suoran vakiotermi on y-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti, joten suoran yhtälö on $y = x - 1$.

b) Suoran ja paraabelin leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöpari
$$\begin{cases} y = x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{7}{4} \\ y = x - 1 \end{cases}.$$

Ratkaistaan yhtälöpari sijoitusmenetelmällä paraabelin yhtälö suoran yhtälöön muuttujan y paikalle.

$$x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{7}{4} = x - 1$$
$$x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} = 0$$
$$x = \frac{-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{48}{16}}}{2}$$
$$x = \frac{-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}}}{2}$$
$$x = \frac{-\frac{1}{4} \pm \frac{7}{4}}{2}$$
$$x = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{7}{4}}{2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{7}{4}}{2} = -1$$

Leikkauspisteiden x-koordinaatit ovat siis $x = \frac{3}{4}$ ja $x = -1$.

Lasketaan näitä vastaavat y-koordinaatit

Kun $x = -1$, $y = -1 - 1 = -2$
Kun $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$

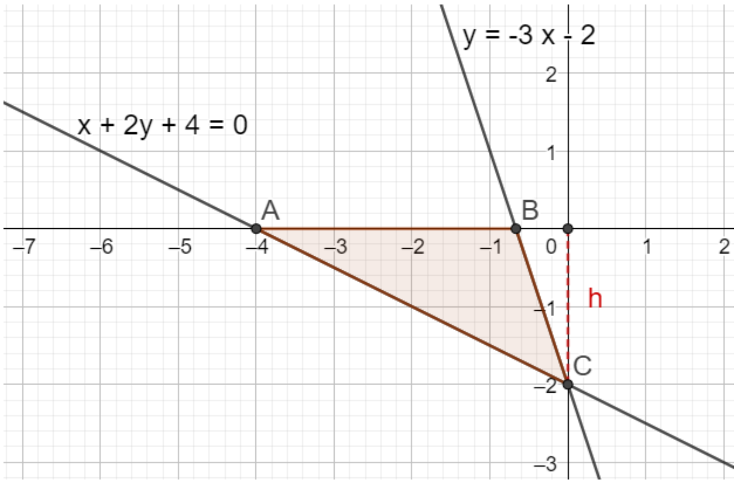
Leikkauspisteet ovat $(-1, -2)$ ja $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$.

Vastaus **a)** $y = x - 1$ **b)** $(-1, -2)$ ja $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

5.23

a)

Piirretään suorat koordinaatistoon.
Suorat ja x-akseli rajaavat kolmion ACB.



Ratkaistaan suorien ja x-akselin leikkauspisteet A ja B. Leikkauspisteessä $x = 0$. Ratkaistaan y-koordinaatit suorien yhtälöistä.

Piste A:

$$\begin{aligned} 0 + 2y + 4 &= 0 \\ 2y &= -4 \quad | : 2 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Leikkauspiste on $A(-2, 0)$.

Piste B:

$$\begin{aligned} 0 &= -3x - 2 \\ 3x &= -2 \quad | : 3 \\ x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Leikkauspiste on $B\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$.

Suorien leikkauspiste saadaan C saadaan ratkaisemalla yhtälöpari $\begin{cases} y = -3x - 2 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} y = -3x - 2 \\ x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella

$x = 0, y = -2$ Suorien leikkauspiste on siis $C(0, -2)$.

Valitaan kolmion kannaksi jana AB, jonka pituus on $-\frac{2}{3} - (-4) = -\frac{2}{3} + \frac{12}{3} = \frac{10}{3}$.

Kolmion korkeus on pisteen C etäisyys y-akselista eli $h = 0 - (-2) = 2$.

Lasketaan kolmion pinta-ala.

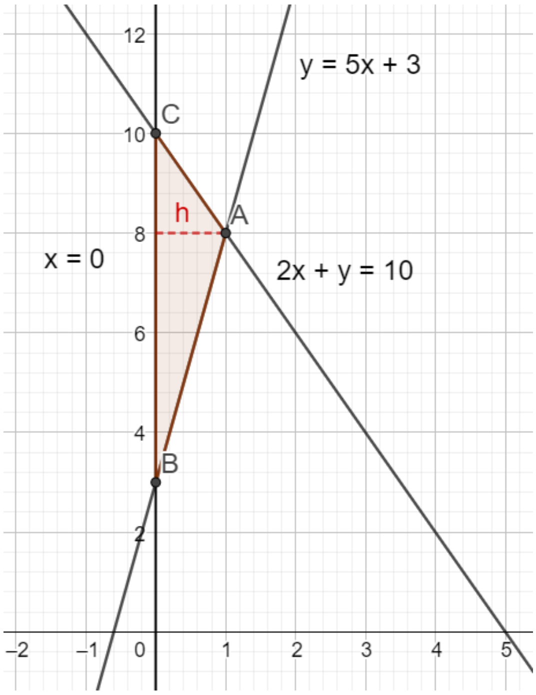
$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot 2 = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

Vastaus $\frac{10}{3}$

5.24

a)

Piirretään suorat koordinaatistoon. Suora $x = 0$ on y-akseli. Suorat rajaavat kolmion *BAC.*



Ratkaistaan suorien ja y-akselin leikkauspisteet B ja *C.* Leikkauspisteessä $x = 0$. Ratkaistaan y-koordinaatit suorien yhtälöistä.

Piste *C:*

$$2 \cdot 0 + y = 10$$
$$y = 10$$

Leikkauspiste on $C(10, 0)$.

Piste *B:* $y = 5 \cdot 0 + 3 = 3$

Leikkauspiste on $B(3, 0)$.

Suorien leikkauspiste A saadaan ratkaisemalla yhtälöpari.

$$\begin{cases} y = 5x + 3 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella

$x = 1, y = 8$ Suorien leikkauspiste on siis $A(1, 8)$.

b)

Valitaan kolmion kannaksi jana *BC,* jonka pituus on $10 - 3 = 7$.

Kolmion korkeus on pisteen A etäisyys y-akselista, joka on $h = 1 - 0 = 1$.

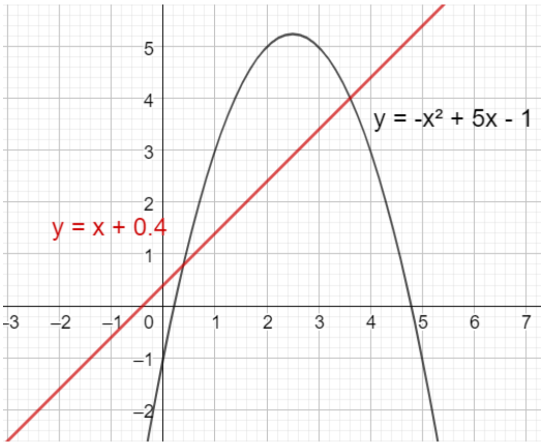
Lasketaan kolmion korkeus.

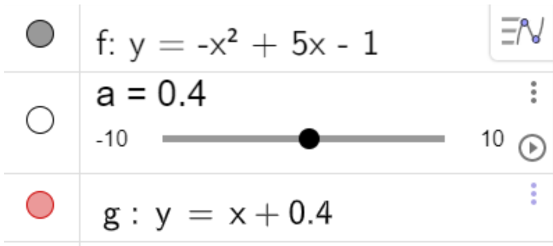
$$A = \frac{7 \cdot 1}{2} = \frac{7}{2}$$

Vastaus a) (0, 3), (0, 10) ja (1, 8) **b)** $\frac{7}{2}$

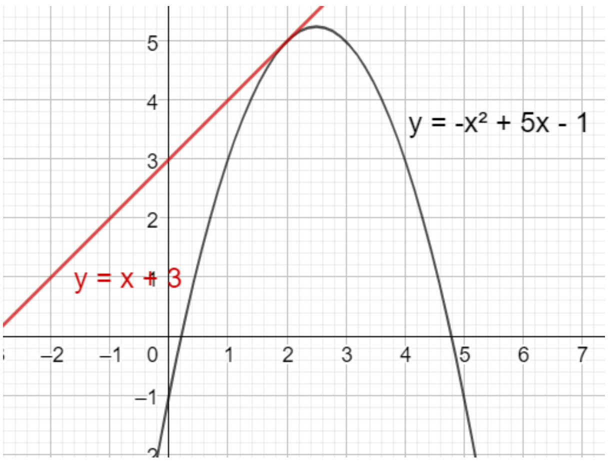
5.25

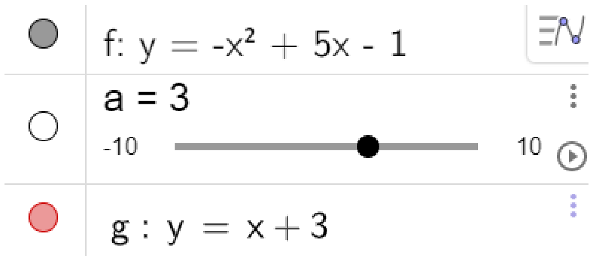
Piirretään suorat $y = x + a$ ja $y = -x^2 + 5x - 1$ geometriaohjelmalla samaan koordinaatistoon ja luodaan liukusäädin vakiolle *a.*

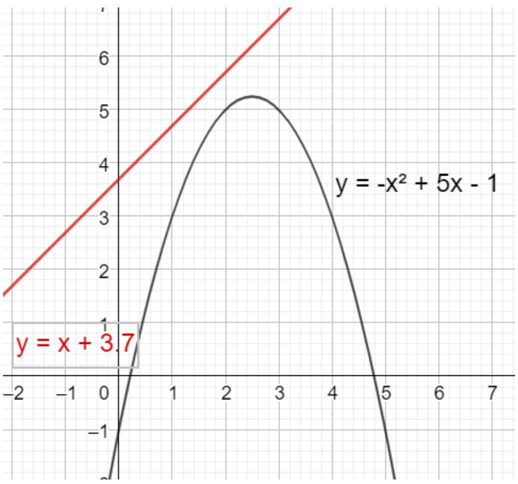


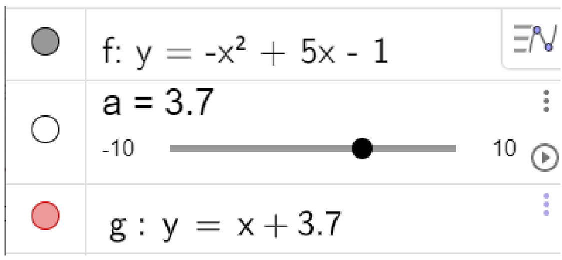


Havaitaan, että suora ei leikkaa paraabelin kanssa, kun $a > 3$.







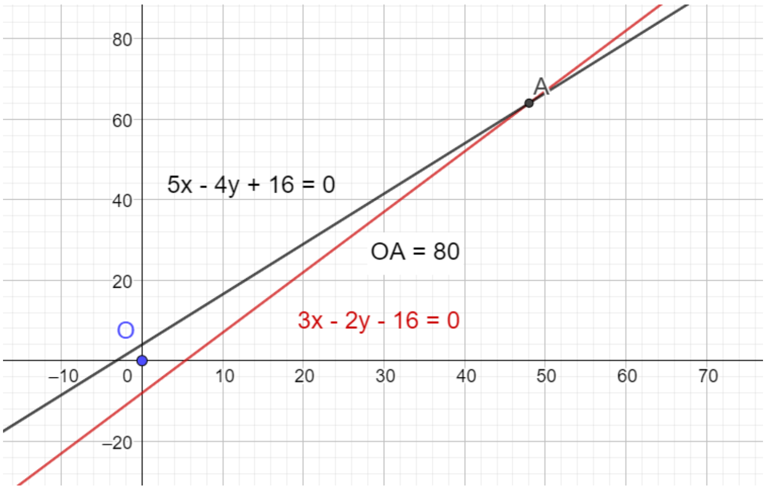


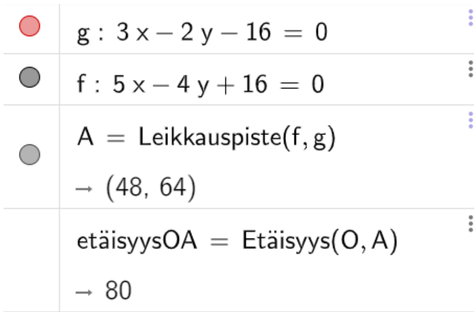
Vastaus $a > 3$

5.26

a)

Ratkaistaan leikkauspiste piirtämällä suorat geometriaohjelmalla ja käyttämällä leikkauspiste-toimintoa. Mitataan pisteen etäisyys origosta $O(0,0)$.





Leikkauspisteen etäisyys origosta on 80.

b)

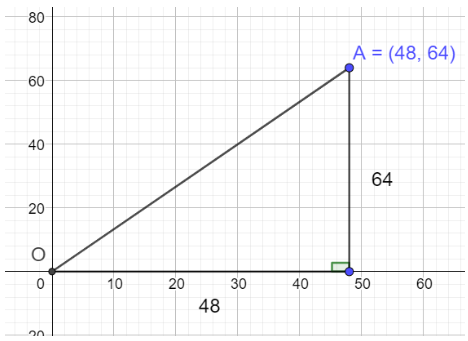
Ratkaistaan leikkauspiste algebrallisesti CAS-laskimella ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} 3x - 2y - 16 = 0 \\ 5x - 4y + 16 = 0 \end{cases}$$

1 $\{3x - 2y - 16 = 0, 5x - 4y + 16 = 0\}$

Ratkaise: $\{\{x = 48, y = 64\}\}$

Leikkauspiste on siis $(48, 64)$.



Ratkaistaan pisteen etäisyys origosta Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 48^2 + 64^2$$
$$x = \pm 80$$

Pituus on aina positiivinen, joten leikkauspisteen etäisyys origosta on 80.

Vastaus **a)** 80 **b)** 80