Binomi 4 – Luku 12 – Tehtävien malliratkaisut

12.1

A

Talletuskorko kasvattaa arvoa prosentuaalisesti. Muutoskertojen määrä tunnetaan (10 vuotta), joten tilannetta kuvaa eksponenttiyhtälö, jossa kantaluku on tuntematon.

Tällainen yhtälö on 2 eli $6000 \cdot x^{10} = 8000$.

B

Määrä kaksinkertaistuu joka muutoskerta, joten tilannetta kuvaa eksponentiaalinen malli. Alkuarvo ja kantaluku tunnetaan, mutta muutoskertojen määrä on tuntematon.

Tällainen yhtälö on 4 eli $0{,}2 \cdot 2^x = 1{,}5$.

C

Henkilöstön määrä vähenee joka vuosi saman verran prosentuaalisesti, joten tilannetta kuvaa eksponentiaalinen malli. Alkuarvoa ei tunnetta, joten sitä merkitään kirjaimella *a.* Loppuarvo on 25 % vähennyksen jälkeen $0{,}75a$. Muutoskertojen määrä on 5, mutta muutoksen suuruutta kuvaava kantaluku on tuntematon.

Tällainen yhtälö on 9 eli $a \cdot x^5 = 0{,}75a$.

Vastaus A – 2

B – 4

C – 9

12.2

a)

Auton arvoa alussa kuvaa kerroin 45 eli auton arvo uutena on 45 000 €.

b)

Auton arvon muutosta kuvaa mallin kantaluku 0,85 eli arvo 0,85-kertaistuu joka vuosi.
Tämä tarkoittaa, että arvo laskee $1 - 0{,}85 = 0{,}15 = 15\ \%$ vuosittain.

c)

Lasketaan funktion A arvo, kun $x = 15$.

$A(15) = 45 \cdot 0{,}85^{15} = 3{,}9309\ldots$

Auton arvo on siis $3{,}9309\ldots \cdot 1000\ € = 3930{,}9\ldots\ € \approx 3900\ €$.

Vastaus **a)** 45 000 €

b) 15 %

c) 3 900 €

12.3

a)

Kun aika on $t = 10$ vuotta, niin funktion h arvo eli kahvipaketin hinta on 3,30 €.
Muodostetaan yhtälö $h(10) = 3{,}30$ ja ratkaistaan kerroin H.

$$H \cdot 1{,}023^{10} = 3{,}30$$
$$H = 2{,}62880 \ldots \approx 2{,}63$$

Kerroin H kuvaa kahvipaketin hintaa tarkastelun alussa eli kun $t = 0$ vuotta.

b)

Kerroin $H = 2{,}63$, joten eksponentiaalinen malli on $h(t) = 2{,}63 \cdot 1{,}023^t$.
Mallissa kantaluku 1,023 on yhteen muutoskertaan liittyvä prosenttikerroin.

Vuotuinen kasvu on siis $1{,}023 - 1 = 0{,}023 = 2{,}3$ %.

c)

Lasketaan funktion h arvo, kun $t = 20$.

$$h(25) = 2{,}63 \cdot 1{,}023^{20} = 4{,}144 \ldots \approx 4{,}10 \text{ (€)}$$

Kahvipaketin hinta 20 vuoden päästä olisi 4,10 €.

d)

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö $h(t) = 2{,}00$.

$$2{,}63 \cdot 1{,}023^t = 2{,}00$$
$$t = -12{,}04 \ldots \approx -12$$

Kahvipaketin hinta oli 2,00 € noin 12 vuotta ennen tarkasteluhetkeä.

Vastaus **a)** $H = 2{,}63$, kuvaa kahvipaketin hintaa tarkastelun alussa
b) 2,3 %
c) 4,10 €
d) 12 vuotta ennen tarkasteluhetkeä

12.4

a)

Valmistuneiden määrä on tällä hetkellä 3800.

Muodostetaan malli, joka kuvaa valmistuneiden määrää kuuden vuoden kuluttua,
kun se k-kertaistuu joka vuosi.

Kuuden vuoden kuluttua määrä on $3800 \cdot k^6$. Toisaalta määrän pitäisi olla kuuden vuoden päästä 4500. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k.*

$$\begin{aligned} 3800 \cdot k^6 &= 4500 \\ k &= 1{,}0285\ldots \end{aligned}$$

Vuotuisen kasvun tulee olla $1{,}0285\ldots - 1 = 0{,}0285\ldots \approx 2{,}9\ \%$.

b)

Merkitään kirjaimella *x* aikaa, joka vaaditaan 6000 valmistuneen saavuttamiseen.
Määrää kuvaa malli $3800 \cdot 1{,}0285\ldots^x$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$\begin{aligned} 3800 \cdot 1{,}0285\ldots^x &= 6000 \\ x &= 16{,}208\ldots \end{aligned}$$

Arvo pyöristyy lukuun 16, mutta valmistuneiden määrä ylittää 6000 vasta
17 vuoden kuluttua.

Vastaus **a)** 2,9 %

b) 17 vuoden päästä

12.5

a)

Hinta on nyt 2,80 € ja viiden vuoden päästä sen pitäisi olla 2,80 € + 0,80 € = 3,60 €.

Muodostetaan yhtälö, missä nykyinen hinta k-kertaistuu viisi kertaa ja ratkaistaan k.

$$
\begin{aligned}
2{,}80 \cdot k^5 &= 3{,}60 \\
k &= 1{,}0515\ldots \\
k &\approx 1{,}052
\end{aligned}
$$

Vuotuisen kasvun tulee olla $1{,}052 - 1{,}0 = 0{,}052 \approx 5{,}2\ \%$

b)

Kun korotus pysyy samana joka vuosi, hintaa mallintaa funktio $h(t) = 2{,}80 \cdot 1{,}0515\ldots^t$.
Ratkaistaan, millä ajan t arvolla funktio saa arvon 5.

$$
\begin{aligned}
h(t) &= 5{,}00 \\
2{,}80 \cdot 1{,}0511\ldots^t &= 5{,}00 \\
t &= 11{,}63\ldots
\end{aligned}
$$

Hinta ylittää 5 € 12 vuoden kuluttua.

Vastaus **a)** 5,2 %

b) 12 vuoden kuluttua

12.6

Vuoden 2010 arvo 20 000 € k-kertaistuu vuosittain. Vuoden 2020 alussa muutoskertoja on yhteensä 2020 – 2010 = 10. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin k.

$$
\begin{aligned}
20000 \cdot k^{10} &= 27500 \\
k &= \pm 1{,}03236\ldots
\end{aligned}
$$

Muutoskerroin on aina positiivinen, joten $k = 1{,}03236\ldots$.

Rahaston arvoa kuvaa malli $20000 \cdot 1{,}03236\ldots^{t}$. Muodostetaan yhtälö, missä arvo on 50000, ja ratkaistaan t.

$$
\begin{aligned}
20000 \cdot 1{,}03236\ldots^{t} &= 50000 \\
t &= 28{,}77\ldots
\end{aligned}
$$

Rahaston arvo ylittää 50 000 € vuoden 2010 + 29 = 2039 alussa.

Vastaus vuoden 2039 alussa

12.7

Vuonna 2004 väkiluku oli 6,4 miljardia. Jos väkilukua mallinnetaan eksponentiaalisen mallin avulla, niin väkiluku k-kertaistuu vuosittain.

Vuonna 2010 muutoskertoja on ollut 2010 – 2004 = 6. Muodostetaan eksponentiaalisen mallin ja tunnettujen väkilukujen määrän avulla yhtälö ja ratkaistaan kerroin k.

$$6{,}4 \cdot k^6 = 6{,}8$$
$$k = \pm 1{,}01016\ldots$$

Kerroin k on aina positiivinen, joten $k = 1{,}01016\ldots$.

Väkilukua (miljardia ihmistä) vuodesta 2004 alkaen kuvaa funktio $v(t) = 6{,}4 \cdot 1{,}01016\ldots^t$. Kysytyn vuoden väkiluku ylittää 10 miljardia. Muodostetaan yhtälö $v(t) = 10$ ja ratkaistaan muutoskertojen määrä t.

$$6{,}4 \cdot 1{,}01016\ldots^t = 10$$
$$t = 44{,}148\ldots$$

Väkiluku ylittää 10 miljardia vuonna 2004 + 44 = 2048.

Vastaus vuonna 2048

12.8

Näytteen aktiivisuus on aluksi 75,0 kBq. Kun aktiivisuutta mallinnetaan eksponentiaalisen mallin avulla, niin aktiivisuus k-kertaistuu päivittäin.

Kuuden päivän päästä aktiivisuus on 15,5 kBq. Muodostetaan eksponentiaalisen mallin avulla yhtälö ja ratkaistaan kerroin k.

$$
\begin{aligned}
75{,}0 \cdot k^6 &= 15{,}5 \\
k &= \pm 0{,}76892\ldots
\end{aligned}
$$

Kerroin k on aina positiivinen, joten $k = 0{,}76892\ldots$

Aktiivisuutta kuvaa funktio $A(t) = 75{,}0 \cdot 0{,}76892\ldots^t$.

Selvitetään, milloin aktiivisuus alittaa 1 kBq:n rajan. Muodostetaan yhtälö

$$
\begin{aligned}
A(t) &= 1 \\
75 \cdot 0{,}76892\ldots^t &= 1 \\
t &= 16{,}4307\ldots
\end{aligned}
$$

Pyöristetään ylöspäin, jotta alitus tapahtuu.

Aktiivisuus on pienempi kuin 1 kBq 17 vuorokauden kuluttua.

Vastaus 17 vuorokauden kuluttua

12.9

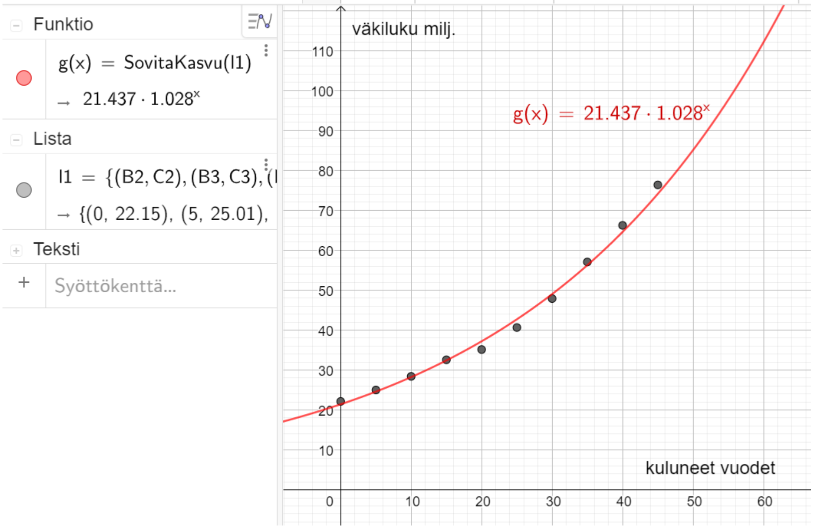
a)

Kirjoitetaan taulukkoon muuttujan x arvot. Muuttujan arvoja ovat kuluneet vuodet vuosiluvusta 1960 alkaen, joten ensimmäinen muuttujan arvo on $x = 1$.

	A	B	C
1	Vuosi	x (vuodet)	Väkiluku (milj. as)
2	1960	0	22.15
3	1965	5	25.01
4	1970	10	28.42
5	1975	15	32.57
6	1980	20	35.14
7	1985	25	40.65
8	1990	30	47.89
9	1995	35	57.05

Merkitään pisteet koordinaatistoon ja sovitetaan pistejoukkoon eksponenttifunktio.

Eksponentiaalinen malli on siis
$g(x) = 21{,}437 \cdot 1{,}028^x$ (milj.)



b)

Vuonna 2019 on kulunut 2019 – 1960 = 59 vuotta vuodesta 1960.
Lasketaan mallin avulla vuoden 2019 väkiluku.

$g(59) = 21{,}437 \cdot 1{,}028^{59} = 109{,}334 \ldots$

Verrataan mallin antamaa tulosta oikeaan väkilukuun.

$$\frac{109{,}334 \ldots}{112{,}1} = 0{,}9753 \ldots \approx 0{,}975$$

Mallin antama tulos on $1 - 0{,}975 = 0{,}025 = 2{,}5$ % pienempi

Vastaus **a)** $g(x) = 21{,}437 \cdot 1{,}028^x$ (milj.) **b)** 2,5 % pienempi

12.10

a)

Merkitään Suomen vuotuisia päästöjä nyt kirjaimella *a.* Vuonna 2030 päästöjen tulisi olla $(1-0{,}39)a = 0{,}61a$.

Vuonna 2030 on kulunut 2030 – 2016 =14 vuotta. Jokainen vuosi päästöt *k*-kertaistuvat. Muodostetaan eksponentiaalisen mallin avulla yhtälö ja ratkaistaan kerroin *k.*

$$a \cdot k^{14} = 0{,}61a$$
$$k = \pm 0{,}9653\ldots$$

Kerroin on aina positiivinen. Päästöjä tulee vähentää vuosittain
$1 - 0{,}9653\ldots = 0{,}0347\ldots \approx 3{,}5\ \%$.

b)

Päästöjen määrää kuvaa eksponentiaalinen malli $a \cdot 0{,}9653\ldots^{t}$.
Kun päästöjä on vähennetty 60 %, jäljellä on 0,4*a.* Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *t.*

$$a \cdot 0{,}9653\ldots^{t} = 0{,}4a$$
$$t = 25{,}945\ldots$$

Päästöjä on vähennetty 60 % vuonna 2016 + 26 = 2042.

Vastaus **a)** 3,5 %

b) vuonna 2042

12.11

a)

Muodostetaan yhtälö $q(2) = 77{,}44$ % ja ratkaistaan *a*.

$$
\begin{aligned}
a \cdot 0{,}88^2 &= 77{,}44 \\
a &= 100
\end{aligned}
$$

Kertoimen $a = 100$ (%) arvo merkitsee akun varaustilaa tarkastelun alussa.

b)

Akun varaustila 0,88-kertaistuu joka tunti. Näin ollen varaus pienenee
$1 - 0{,}88 = 0{,}12 = 12$ %.

c)

Akun varaustasoa mallintaa siis funktio $q(t) = 100 \cdot 0{,}88^t$.
Vuorokauden kuluttua on kulunut 24 tuntia. Lasketaan $g(24)$.

$$q(24) = 100 \cdot 0{,}88^{24} = 4{,}6514 \ldots \approx 4{,}7 \text{ (\%)}$$

Varaustila kahden tunnin päästä on 4,7 %.

d)

Muodostetaan yhtälö $q(t) = 1$ ja ratkaistaan *t*.

$$
\begin{aligned}
100 \cdot 0{,}88^t &= 1 \\
t &= 36{,}024 \ldots
\end{aligned}
$$

Akun varaus on 1 % noin 36 tunnin kuluttua.

Vastaus **a)** $a = 100$ (%) arvo merkitsee akun varaustilaa tarkastelun alussa
b) 12 %
c) 4,7 %
d) 36 tunnin kuluttua

12.12

a)

Investointimenot ovat tarkastelun alussa 621 miljoonaa euroa.

Muodostetaan malli, joka kuvaa investointimenoja 2021 – 2017 = 4 vuoden kuluttua, kun ne k-kertaistuvat joka vuosi.

Neljän vuoden kuluttua menot ovat $621 \cdot k^4$ (milj. €). Toisaalta määrän pitäisi olla neljän vuoden päästä 881 (milj. €). Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k.*

$$621 \cdot k^4 = 881$$
$$k = \pm 1{,}09137\ldots$$

Kerroin on aina positiivinen.

Vuotuisen kasvun tulee olla $1{,}09137\ldots - 1 = 0{,}09137\ldots \approx 9{,}1\ \%$.

b)

Merkitään kirjaimella *x* aikaa, joka vaaditaan 2 miljardin (2000 milj. €) euron rajan saavuttamiseen. Määrää kuvaa malli $621 \cdot 1{,}09137\ldots^x$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *x.*

$$621 \cdot 1{,}09137\ldots^x = 2000$$
$$x = 13{,}3766\ldots$$

Arvo pyöristyy lukuun 13, mutta menojen määrä ylittää 2 miljardia vasta 14 vuoden kuluttua eli vuonna 2017 + 14 = 2031

Vastaus **a)** 9,1 %

b) vuoden 2031

12.13

a)

Velkaa oli 77 biljoonaa €. vuonna 2000.

Muodostetaan malli, joka kuvaa velan määrää 2007 – 2000 = 7 vuoden kuluttua, kun se k-kertaistuu joka vuosi.

Seitsemän vuoden kuluttua määrä on $77 \cdot k^7$ (bilj. €). Toisaalta määrän pitäisi olla seitsemän vuoden päästä 124 (bilj. €). Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k.*

$$77 \cdot k^7 = 124$$
$$k = 1{,}07044 \ldots$$

Velka kasvaa vuosittain $1{,}07044 \ldots - 1 = 0{,}07044 \ldots \approx 7{,}0$ %.

b)

Velan määrää (bilj. €) mallintaa funktio $v(t) = 77 \cdot 1{,}07044 \ldots^t$. Lasketaan velan määrä vuonna 2018, jota kuvaa muuttujan t arvo $t = 2018 - 2000 = 18$.

$$v(18) = 77 \cdot 1{,}07044 \ldots^{18} = 262{,}187 \ldots \approx 262 \text{ (bilj. €)}$$

c)

Velka ei ole kasvanut eksponentiaalisena, koska se on oikeasti pienempi mitä vuosien eksponentiaalisen mallin antama arvo on.

Vastaus **a)** 7,0 %

b) 262 biljoonaa €

c) ei ole

12.14

Vuoden 1980 väkiluku 476 miljoonaa k-kertaistuu vuosittain. Vuoden 1997 alussa muutoskertoja on yhteensä 1997 – 1980 = 17. Väkiluku vuonna 1997 oli 758 miljoonaa. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin *k.*

$$476 \cdot k^{17} = 758$$
$$k = 1{,}02775\,\ldots$$

Väkilukua kuvaa eksponentiaalinen malli $476 \cdot 1{,}02775\,\ldots^{t}$. Muodostetaan yhtälö, missä arvo on 2 miljardia eli 2000 miljoonaa ja ratkaistaan *t.*

$$476 \cdot 1{,}02775\,\ldots^{t} = 2000$$
$$t = 52{,}450\,\ldots$$

Väkiluku ylittää kahden miljardin rajan vuonna 1980 + 52 = 2032.

Vastaus vuonna 2032

12.15

Merkitään liikevaihtoa tarkastelun alussa kirjaimella *a.*
Yhdeksän vuoden päästä arvo on kasvanut 150 % eli $(1 + 1{,}5)a = 2{,}5a$.

Muodostetaan eksponentiaalisen mallina avulla yhtälö ja ratkaistaan vuosittainen muutoskerroin *k.*

$$a \cdot k^9 = 2{,}5a$$
$$k = 1{,}1071\ldots$$

Liikevaihtoa kuvaa eksponentiaalinen malli $a \cdot 1{,}1071\ldots^t$.
Kun liikevaihto 10-kertaistuu, se on $10a$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan aika *t.*

$$a \cdot 1{,}1071^t = 10a$$
$$t = 22{,}631\ldots \approx 23$$

Liikevaihto 10-kertaistuu 23 vuodessa.

Vastaus 23 vuodessa

12.16

Merkitään maailman hiilidioksidipäästöjä vuonna 1990 kirjaimella *a.* Päästöjen määrä on kasvanut 2008 – 1990 = 18 vuodessa 39 % eli ne ovat $(1 + 0{,}39)a = 1{,}39a$.

Muodostetaan eksponentiaalisen mallin avulla yhtälö ja ratkaistaan vuosittainen muutoskerroin *k.*

$$a \cdot k^{18} = 1{,}39a$$
$$k = \pm 1{,}01846\ldots$$

Kerroin on aina positiivinen. Päästöjä vuodesta 1990 alkaen kuvaa eksponentiaalinen malli $a \cdot 1{,}01846\ldots^t$, missä t on aika vuosina.

Kun päästöt ovat kasvaneet 100 %, ne ovat kaksinkertaistuneet eli $(1 + 1)a = 2a$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan aika *t.*

$$a \cdot 1{,}01846\ldots^t = 2a$$
$$t = 37{,}894\ldots \approx 38$$

Päästöt ovat kasvaneet 100 % vuonna 1990 + 38 = 2028.

Vastaus vuonna 2028

12.17

Merkitään uraanin määrää alussa kirjaimella a. Kun sitä on hajonnut puolet, jäljellä on $0{,}5a$. Koska aineesta hajoaa puolet 700 miljoonassa vuodessa, muutoskertoja on 700, kun muutosten väli on miljoona vuotta.

Muodostetaan eksponentiaalisen mallin avulla yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin k.

$$a \cdot k^{700} = 0{,}5a$$
$$k = \pm 0{,}99901\ldots$$

Kerroin on aina positiivinen, joten jäljellä olevan aineen määrää kuvaa malli $a \cdot 0{,}99901\ldots^t$, missä t on aika miljoonina vuosina.

Kun ainetta on hajonnut 1 %, sitä on jäljellä $(1 - 0{,}01)a = 0{,}99a$.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan t.

$$a \cdot 0{,}99901\ldots^t = 0{,}99a$$
$$t = 10{,}1468\ldots \approx 10{,}1 \text{ (milj. vuotta)}$$

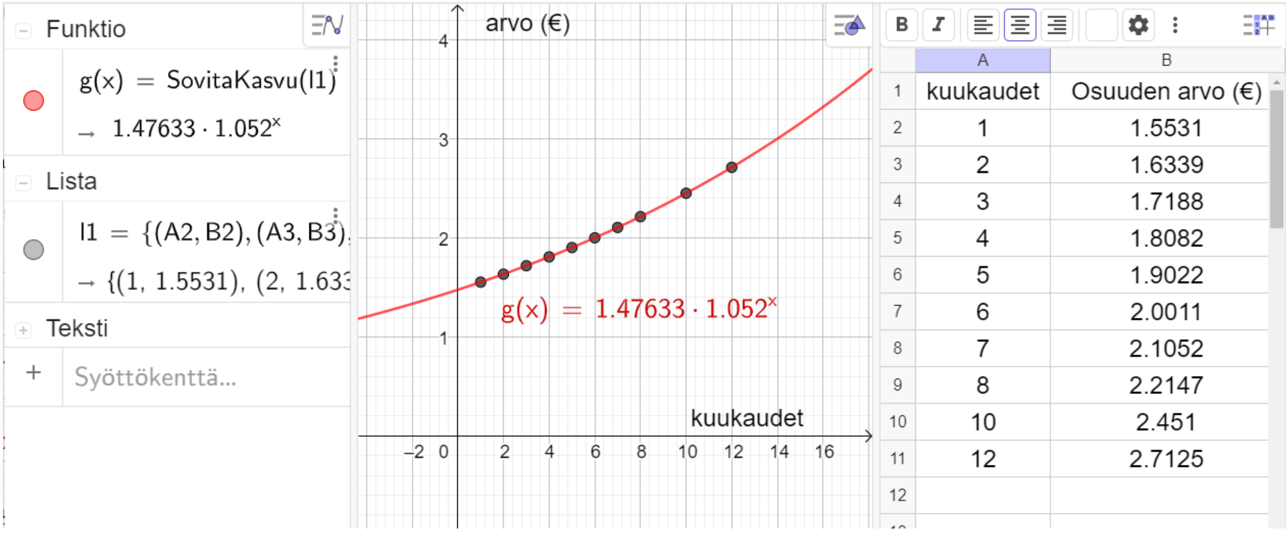
Ainetta hajoaa 1 % 10,1 miljoonassa vuodessa.

Vastaus 10,1 miljoonassa vuodessa

12.18

a)

Taulukossa muuttujan x arvot ovat kuluneet kuukaudet.
Merkitään pisteet koordinaatistoon ja sovitetaan pistejoukkoon eksponenttifunktio.



Arvoa kuvaa eksponentiaalinen malli $A(x) = 1{,}4763 \cdot 1{,}052^x$ (€).

b)

Kolmen vuoden kuluttua on kulunut $3 \cdot 12 = 36$ kuukautta.
Lasketaan mallin antama arvo $A(36)$.

$$A(36) = 1{,}4763 \cdot 1{,}0520^{36} = 9{,}15674 \ldots \text{ (€)}$$

Verrataan saatua arvoa oikeaan arvoon.

$$\frac{9{,}15674 \ldots}{8{,}9430} = 1{,}02390 \ldots \approx 1{,}0239$$

Mallin antama arvo on $1{,}0239 - 1 = 0{,}0239 = 2{,}39$ %suurempi.

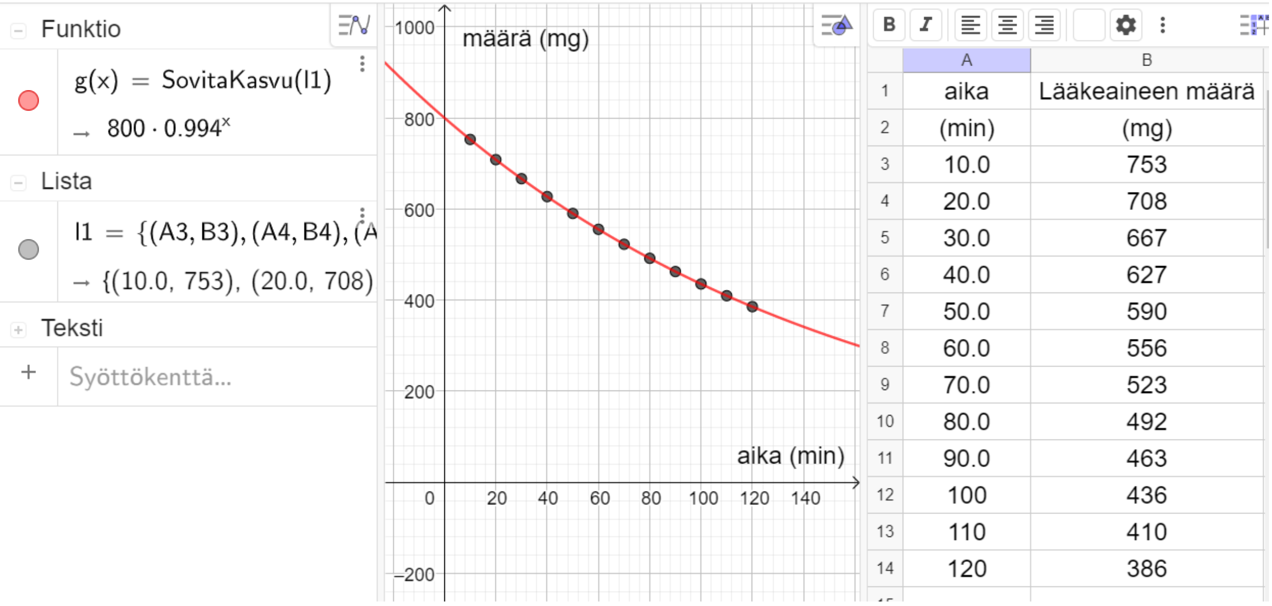
Vastaus **a)** $A(x) = 1{,}4763 \cdot 1{,}052^x$

b) 2,39 % liian suuri arvo

12.19

a)

Taulukossa muuttujan x arvot ovat kuluneet minuutit.
Merkitään pisteet koordinaatistoon ja sovitetaan pistejoukkoon eksponenttifunktio.



Ibuprofeenin määrää mallintaa funktio $f(x) = 800 \cdot 0{,}994^x$(mg),
missä x on kulunut aika minuutteina.

b)

Mallissa $f(x) = 800 \cdot 0{,}994^x$ lääkkeen määrää alussa kuvaa kerroin 800
eli lääkettä annettiin 800 mg.

c)

Mallissa lääkemäärä 0,994-kertaistuu joka minuutti, joten lääkettä hajoaa
$1 - 0{,}994 = 0{,}006 = 0{,}6\ \%$ minuutissa.

d)

Kun lääkkeen määrä on puoliintunut, sitä on jäljellä $\frac{1}{2} \cdot 800 = 400$ (mg).
Muodostetaan yhtälö $f(x) = 400$ ja ratkaistaan aika t.

$$800 \cdot 0{,}994^x = 400$$
$$x = 115 \text{ (min)}$$

e)

Vuorokaudessa on minuutteja $24 \cdot 60 = 1440$. Lääkkeen määrä $0{,}994^{1440}$-kertaistuu vuorokaudessa. Lääkkeestä hajoaa siis

$1 - 0{,}994^{1440} = 0{,}99982\ldots \approx 99{,}98\ \%$

f)

Muodostetaan yhtälö $f(x) = 1$ ja ratkaistaan kulunut aika *x*.

$800 \cdot 0{,}994^{x} = 1$
$x = 1110\ (\text{min})$

Lääkkeen määrä on 1 mg 1110 minuutissa eli se alittaa rajan 1111 minuutin kuluttua (18 tunnissa ja 31 minuutissa).

Vastaus **a)** $f(x) = 800 \cdot 0{,}994^{x}$

b) 800 mg

c) 0,6 %

d) 115 min

e) 99,98 %

f) 18 h 31 min

12.20

a)

Jodin määrä alussa on I_0. Määrä on puolittunut kahdeksan vuorokauden kuluttua, joten silloin määrä on $0{,}5 \cdot I_0$.

Sijoitetaan malliin arvo $t = 8$ ja muodostetaan yhtälö.
Ratkaistaan yhtälöstä prosenttikerroin *k.*

$$I_0 \cdot k^8 = 0{,}5I_0$$
$$k = \pm 0{,}9170 \ldots$$

Prosenttikerroin on positiivinen luku, joten $k \approx 0{,}917$.

Malli on siis $I(t) = I_0 \cdot 0{,}917^t$, missä t on aika vuorokausina.

b)

Koska aikayksikkö on mallissa vuorokausi, aktiivisuus 0,917-kertaistuu vuorokaudessa.

Näin ollen aktiivisuus pienenee $1 - 0{,}917 = 0{,}083 = 8{,}3\ \%$ vuorokaudessa.

c)

Sijoitetaan malliin $I_0 = 600$ (MBq)ja muodostetaan yhtälö $I(t) = 100$ (MBq).
Ratkaistaan yhtälöstä aika *t.*

$$600 \cdot 0{,}917^t = 100$$
$$t = 20{,}7 \approx 21$$

Aktiivisuus alittaa rajan 21 vuorokauden kuluttua.

Vastaus **a)** $I(t) = I_0 \cdot 0{,}917^t$

b) 8,3 %

c) 21 vuorokauden kuluttua

12.21

Muodostetaan Saksan ja Algerian väkilukuja (miljoonaa asukasta) kuvaavat mallit, kun t on vuodesta 2019 kuluneet vuodet.

Saksan väkiluku on tarkasteluhetkellä 83,02 (milj. as.) ja se kasvaa vuosittain 0,3 %. Kasvua kuvaava prosenttikerroin on $1 + 0{,}003 = 1{,}003$.

Saksan väkilukua kuvaava eksponentiaalinen malli on $s(t) = 83{,}02 \cdot 1{,}003^t$ (milj. as.).

Algerian väkiluku on tarkasteluhetkellä 43,05 (milj. as.) ja se kasvaa 2,0 % vuosittain. Kasvua kuvaava prosenttikerroin on $1 + 0{,}02 = 1{,}02$.

Algerian väkilukua kuvaava malli on $a(t) = 43{,}05 \cdot 1{,}02^t$ (milj. as.).

Merkitään funktion yhtä suuriksi ja ratkaistaan, millä muuttujan t arvolla väkiluvut ovat yhtä suuret.

$$\begin{aligned} a(t) &= s(t) \\ 43{,}05 \cdot 1{,}02^t &= 83{,}02 \cdot 1{,}003^t \\ t &= 39{,}1 \ldots \end{aligned}$$

Väkiluvut ovat yhtä suuret vuonna 2019 + 39 = 2059.

Vastaus vuonna 2058

12.22

a)

Lämpötila alussa oli 100 °C, joten lämpötilaero oli 100 °C – 20 °C = 80 °C.
Neljän minuutin kuluttua lämpötilaero oli 30 °C – 20 °C = 10 °C.

Muodostetaan eksponentiaalisen mallin avulla yhtälö.
Ratkaistaan yhtälöstä prosenttikerroin *k*.

$$80 \cdot k^4 = 10$$
$$k = \pm 0{,}59460 \ldots$$

Prosenttikerroin on positiivinen luku, joten $k \approx 0{,}5946$.

Lämpötilaeroa kuvaa malli $T(t) = 80 \cdot 0{,}5946^t$, missä t on aika minuutteina.

b)

Lasketaan lämpötilaero viiden minuutin kuluttua eli $T(5)$.

$$T(5) = 80 \cdot 0{,}5946^5 = 5{,}9458 \ldots \ (°\text{C})$$

Teeveden lämpötila on siis $20\ °\text{C} + 5{,}9458 \ldots °\text{C} = 25{,}9458 \ldots °\text{C} \approx 25{,}9\ °\text{C}$.

c)

Kun teeveden lämpötila on 20,1 °C, lämpötilaero on 20,1 °C – 20 °C = 0,1 °C.
Muodostetaan yhtälö $T(t) = 0{,}1$ ja ratkaistaan aika *t*.

$$80 \cdot 0{,}5946^t = 0{,}1$$
$$t = 12{,}858 \ldots \approx 13 \text{ (min)}$$

Vastaus **a)** $T(t) = 80 \cdot 0{,}5946^t$

b) 25,9 °C

c) 13 minuutin kuluttua