3 Lukujonot matemaattisena mallina

3.1 Aritmeettinen ja geometrinen jono

164.

a) Lukujono on aritmeettinen jono, jonka yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= 3+(n-1)\cdot 4 \\ &= 3+4n-4 \\ &= 4n-1 \end{aligned}$$

b) Lukujono on geometrinen jono, jonka yleinen jäsen on

$$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

c) Lukujono on geometrinen lukujono, jonka yleinen jäsen on

$$-4\cdot 2^{n-1}$$

d) Ei kumpikaan.

165.

a) Aritmeettisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = -6$
- differenssi $d = -3 - (-6) = 3$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= -6 + (n-1)\cdot 3 \\ &= -6 + 3n - 3 \\ &= 3n - 9 \end{aligned}$$

Lasketaan lukujonon 20. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_{20} = 3\cdot 20 - 9 = 51$$

b) Geometrisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = -6$
- suhdeluku $q = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = -6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Lasketaan jonon 5. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_5 = -6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = -6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4} = -6 \cdot \frac{1}{16} = -\frac{6}{16} = -\frac{3}{8}$$

166.

a) Aritmeettisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$
- differenssi $d = -2 - 3 = -5$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + (n-1)\cdot(-5) \\ &= 3 - 5n + 5 \\ &= -5n + 8 \end{aligned}$$

Lasketaan lukujonon 10. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_{10} = -5\cdot 10 + 8 = -42$$

b) Aritmeettisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = \frac{1}{3}$
- differenssi $d = {}^{3)}\frac{1}{2} - {}^{2)}\frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{3} + (n-1) \cdot \frac{1}{6} \\
&= {}^{2)}\frac{1}{3} + \frac{1}{6}n - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}n + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}n + \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Lasketaan lukujonon 10. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_{10} = \frac{1}{6} \cdot 10 + \frac{1}{6} = \frac{10}{6} + \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$$

167.

a) Geometrisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 5$
- suhdeluku $q = \frac{10}{5} = 2$.

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

Lasketaan jonon 4. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$a_4 = 5 \cdot 2^{4-1} = 5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$

b) Geometrisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = \frac{1}{4}$
- suhdeluku $q = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} = \frac{12}{4} = 3$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = \frac{1}{4} \cdot 3^{n-1}$$

Lasketaan jonon 4. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_4 = \frac{1}{4} \cdot 3^{4-1} = \frac{1}{4} \cdot 3^3 = \frac{1}{4} \cdot 27 = \frac{27}{4}$$

168.

a) Jonon kolmannelle jäsenelle voidaan muodostaa lauseke ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_3 = -4 + (3-1) \cdot d = -4 + 2d$$

Kolmannen jäsenen arvo tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan differenssi *d*.

$$\begin{aligned} a_3 &= 6 \\ -4 + 2d &= 6 \\ 2d &= 10 && |:2 \\ d &= 5 \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = -4 + (n-1) \cdot 5 = -4 + 5n - 5 = 5n - 9$$

b) Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja tutkitaan, voiko luku 26 olla jonon jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= 26 \\ 5n - 9 &= 26 \\ 5n &= 35 && |:5 \\ n &= 7 \end{aligned}$$

Koska ratkaisuksi saatu n:n arvo on positiivinen kokonaisluku, luku 26 on lukujonon jäsen.

c) Muodostetaan epäyhtälö $a_n < 40$ ja ratkaistaan siitä n.

$$
\begin{aligned}
5n - 9 &< 40 \\
5n &< 49 \qquad \vert : 5 \\
n &< \frac{49}{5} = 9\frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

Suurin kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön ratkaisun on 9, joten jonon 9 ensimmäistä jäsentää ovat pienempiä kuin 40.

169.

a) Jonon viidennelle jäsenelle voidaan muodostaa lauseke ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$a_3 = 2 + (5-1) \cdot d = 2 + 4d$

Viidennen jäsenen arvo tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan differenssi *d*.

$$\begin{aligned} a_5 &= -6 \\ 2 + 4d &= -6 \\ 4d &= -8 \qquad \bigg| : 4 \\ d &= -2 \end{aligned}$$

b) Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$a_n = 2 + (n-1) \cdot (-2) = 2 + (-2n + 2) = -2n + 4$

Lasketaan jonon 500. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$a_{500} = -2 \cdot 500 + 4 = -1000 + 4 = -996$

c) Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja tutkitaan, voiko luku −38 olla jonon jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= -38 \\ -2n+4 &= -38 \\ -2n &= -42 \qquad\qquad \big| :(-2) \\ n &= 21 \end{aligned}$$

Koska ratkaisuksi saatu *n*:n arvo on positiivinen kokonaisluku, luku −38 on lukujonon jäsen.

170.

a) Jonon viidennelle jäsenelle voidaan muodostaa lauseke toisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_5 = 3 + (5-2) \cdot d = 3 + 3d$$

Viidennen jäsenen arvo tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan differenssi *d*.

$$\begin{aligned} a_5 &= 15 \\ 3 + 3d &= 15 \\ 3d &= 12 \qquad \Big| : 3 \\ d &= 4 \end{aligned}$$

Jonon toiselle jäsenelle voidaan muodostaa lauseke ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_2 = a_1 + (2-1) \cdot 4 = a_1 + 4$$

Toisen jäsenen arvo tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jonon ensimmäinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_2 &= 3 \\ a_1 + 4 &= 3 \\ a_1 &= -1 \end{aligned}$$

b) Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = -1 + (n-1) \cdot 4 = -1 + 4n - 4 = 4n - 5$$

Lasketaan, kuinka monta jonon jäsenistä on pienempää kuin luku 50. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan n.

$$\begin{aligned} a_n &< 50 \\ 4n - 5 &< 50 \\ 4n &< 55 \qquad \Big| :4 \\ n &< \frac{55}{4} = 13\frac{3}{4} \end{aligned}$$

13 ensimmäistä jäsentä on pienempää kuin 50, joten 14. jäsen on ensimmäinen jäsen, joka on suurempi kuin 50.

171.

a) Lukujonon kahden peräkkäisen jäsenen erotus on 3 eli differenssi $d = 3$.

Jonon kolmannelle jäsenelle voidaan muodostaa lauseke ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_3 = a_1 + (3-1)\cdot 3 = a_1 + 6$$

Kolmannen jäsenen arvo tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jonon ensimmäinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_3 &= 9 \\ a_1 + 6 &= 9 \\ a_1 &= 3 \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 3 + (n-1)\cdot 3 = 3 + 3n - 3 = 3n$$

b) Lukujonon kahden peräkkäisen jäsenen suhde on 3 eli suhdeluku $q = 3$.

Jonon kolmannelle jäsenelle voidaan muodostaa lauseke ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_3 = a_1 \cdot 3^{3-1} = a_1 \cdot 3^2 = a_1 \cdot 9$$

Kolmannen jäsenen arvo tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jonon ensimmäinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_3 &= 9 \\ a_1 \cdot 9 &= 9 \qquad \left| :9 \right. \\ a_1 &= 1 \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

172.

a) Geometrisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = -4$
- suhdeluku $q = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = -4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

b) Lasketaan jonon 9. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_4 = -4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{9-1} = -\frac{6\,561}{16\,384} \approx -0{,}400$$

c) Muodostetaan epäyhtälö $a_n < -0{,}001$ ja ratkaistaan *n*.

$$-4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < -0{,}001$$

$$n < 29{,}830...$$

29 ensimmäistä jonon jäsentä on pienempi kuin −0,001.

173.

a) Yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja suhdeluku q. Kahden tiedon selvittämiseksi tarvitaan kaksi yhtälöä.

Kirjoitetaan jonon kolmas ja seitsemäs jäsen ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla.

$$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} = a_1 \cdot q^2$$
$$a_7 = a_1 \cdot q^{7-1} = a_1 \cdot q^6$$

Koska $a_3 = 1$ ja $a_7 = 16$, saadaan kaksi yhtälöä, jotka molemmat pitävät paikkansa samalla lukujonolle.

Yhtälöistä voidaan muodostaa yhtälöpari.

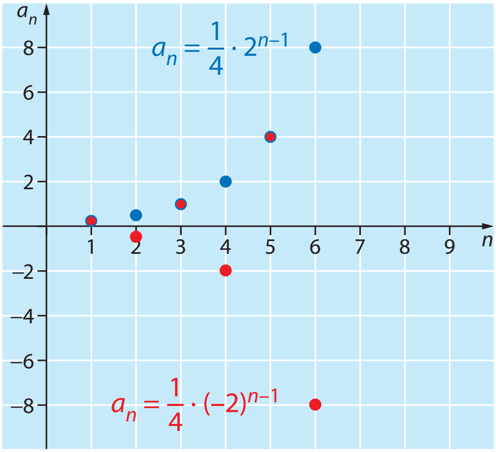
$$\begin{cases} a_3 = 1 \\ a_7 = 16 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 \cdot q^2 = 1 \\ a_1 \cdot q^6 = 16 \end{cases}$$
$$a_1 = \frac{1}{4} \text{ ja } q = 2 \quad \text{tai} \quad a_1 = \frac{1}{4} \text{ ja } q = -2$$

On siis olemassa kaksi lukujonoa, jotka toteuttavat annetut ehdot.

Lukujonon yleinen jäsen on:

$$a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1} \quad \text{tai} \quad a_n = \frac{1}{4} \cdot (-2)^{n-1}$$

b) Piirretään lukujonot samaan koordinaatistoon.



Kuvaajien perusteella lukujonon $a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1}$ arvot ovat aina positiivisia.

c) Kun jonon jäsenet ovat suurempia kuin 500 000, nämä toteuttavat ehdon $a_n > 500\,000$.

$$\frac{1}{4} \cdot 2^{n-1} > 500\,000$$

$$n > 21{,}9315...$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n > 21{,}9315...$ on luku 22.

Lukujonon 22. jäsenestä alkaen jäsenet ovat siis suurempia kuin 500 000.

174.

a) Yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja suhdeluku q.

Kirjoitetaan jonon kolmas jäsen ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla.

$$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} = a_1 \cdot q^2$$

Kolmannen jäsenen arvo tunnetaan, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jonon ensimmäinen jäsen.

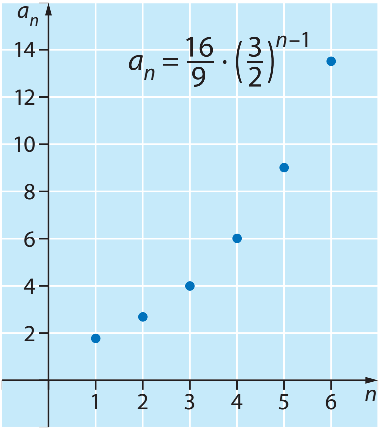
$$\begin{aligned} a_3 &= 4 \\ a_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 &= 4 \\ a_1 &= \frac{16}{9} \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = \frac{16}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

b) $a_9 = \frac{16}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{9-1} = \frac{729}{16}$

c)



d) Kun jonon jäsenet ovat suurempia kuin 2000, nämä toteuttavat ehdon $a_n > 2\,000$.

$$\frac{16}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} > 2\,000$$

$$n > 18{,}327...$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n > 18{,}327...$ on luku 19.

Lukujonon 19. jäsenestä alkaen jäsenet ovat siis suurempia kuin 2000.

175.

a) Yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja differenssi d. Kahden tiedon selvittämiseksi tarvitaan kaksi yhtälöä.

Kirjoitetaan viides ja 132. jäsen ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_5 = a_1 + (5-1)\cdot d = a_1 + 4d$$
$$a_{132} = a_1 + (132-1)\cdot d = a_1 + 131d$$

Koska $a_5 = 45$ ja $a_{132} = 1061$, saadaan kaksi yhtälöä, jotka molemmat pitää paikkansa samalla lukujonolle.

Yhtälöstä voidaan muodostaa yhtälöpari.

$$\begin{cases} a_5 = 45 \\ a_{132} = 1061 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 + 4d = 45 \\ a_1 + 131d = 1061 \end{cases}$$

$a_1 = 13$ ja $d = 8$

Lukujonon yleinen jäsen on:

$$a_n = 13 + (n-1)\cdot 8 = 13 + 8n - 8 = 8n + 5$$

b) $a_{534} = 8\cdot 534 + 5 = 4277$

c) Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja tutkitaan, voiko luku 6933 olla jonon jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= 6933 \\ 8n+5 &= 6933 \\ n &= 866 \end{aligned}$$

Koska vastaukseksi tuli positiivinen kokonaisluku, luku 6 933 on jonon jäsen.

d) Kun jonon jäsenet ovat pienempiä kuin 75 000, nämä toteuttavat ehdon $a_n < 75\,000$.

$$\begin{aligned} 8n+5 &< 75\,000 \\ n &< 9374{,}375 \end{aligned}$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n < 9\,374{,}375$ on luku 9374.

Lukujonon 9374 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 75 000.

176.

a) Yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja differenssi *d*. Kahden tiedon selvittämiseksi tarvitaan kaksi yhtälöä.

Kirjoitetaan toinen ja viides jäsen ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_5 = a_1 + (5-1)\cdot d = a_1 + 4d$$
$$a_2 = a_1 + (2-1)\cdot d = a_1 + d$$

Koska $a_5 = 16$ ja $a_2 = 2$, saadaan kaksi yhtälöä, jotka molemmat pitää paikkansa samalla lukujonolle.

Yhtälöstä voidaan muodostaa yhtälöpari.

$$\begin{cases} a_5 = 16 \\ a_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 16 \\ a_1 + d = 2 \end{cases}$$

$$a_1 = -\frac{8}{3} \quad \text{ja} \quad d = \frac{14}{3}$$

Lukujonon yleinen jäsen on

$$a_n = -\frac{8}{3} + (n-1)\cdot\frac{14}{3} = \frac{14}{3}n - \frac{22}{3}.$$

b) Yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen b_1 ja suhdeluku q. Kahden tiedon selvittämiseksi tarvitaan kaksi yhtälöä.

Kirjoitetaan jonon toinen ja viides jäsen ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla.

$$b_2 = b_1 \cdot q^{2-1} = b_1 \cdot q$$
$$b_5 = b_1 \cdot q^{5-1} = b_1 \cdot q^4$$

Koska $b_2 = 2$ ja $b_5 = 16$, saadaan kaksi yhtälöä, jotka molemmat pitävät paikkansa samalla lukujonolle.

Yhtälöistä voidaan muodostaa yhtälöpari.

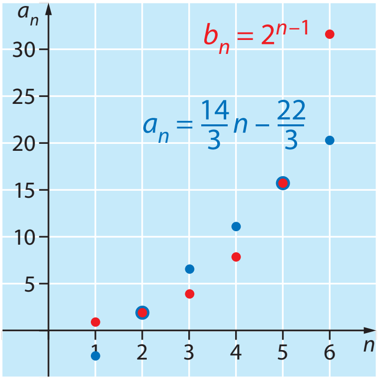
$$\begin{cases} b_2 = 2 \\ b_5 = 16 \end{cases}$$
$$\begin{cases} b_1 \cdot q = 2 \\ b_1 \cdot q^4 = 16 \end{cases}$$

$$b_1 = 1 \quad \text{ja} \quad q = 2$$

Lukujonon yleinen jäsen on:

$$b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

c)



177.

a) Jono on aritmeettinen jono, koska seuraavaan kerrokseen tulee aina 4 juomalasia enemmän kuin edelliseen kerrokseen.

Jonon differenssi on siis $d = 4$ ja ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1$.

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$a_n = 1 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 3$ (kpl)

b) Sijoitetaan n = 23 jonon yleiseen jäseneen.

$a_n = 4 \cdot 23 - 3 = 89$

Pyramidin 23. kerroksessa on 89 juomalasia.

c) Tutkitaan onko luku 50 jonon jäsen.

$$
\begin{aligned}
a_n &= 50 \\
4n - 3 &= 50 \\
n &= 13,25
\end{aligned}
$$

Koska ratkaisuksi ei tullut positiivinen kokonaisluku, luku 50 ei ole jonon jäsen. Rakennelman kerroksessa ei voi olla 50 lasia.

178.

a) Jonon ensimmäinen jäsen on kirjastojen määrä vuonna 2001 eli
$a_1 = 989$.

Koska kirjastojen määrä vähenee vuosittain 16, jonon differenssi $d = -16$.

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$a_n = 989 + (n-1)\cdot(-16) = -16n + 1\,005$

b) Koska vuoden 2001 kirjastojen määrä on lukujonon ensimmäinen jäsen, jäsenen järjestysluku saadaan, kun vuosiluvusta vähennetään 2000.

$2015 - 2000 = 15$

Tällöin vuoden 2015 kirjastojen määrä on jonon 15. jäsen.

$a_{14} = -16\cdot 15 + 1\,005 = 765$

c) Ratkaistaan ensin, kuinka mones lukujonon jäsen on arvoltaan yli 850.

$$\begin{aligned} a_n &> 850 \\ -16n + 1005 &> 850 \\ n &< 9{,}6875 \end{aligned}$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon, on 9. Jonon 9 jäsen on vuoden $2000 + 9 = 2009$ kirjastojen määrä.

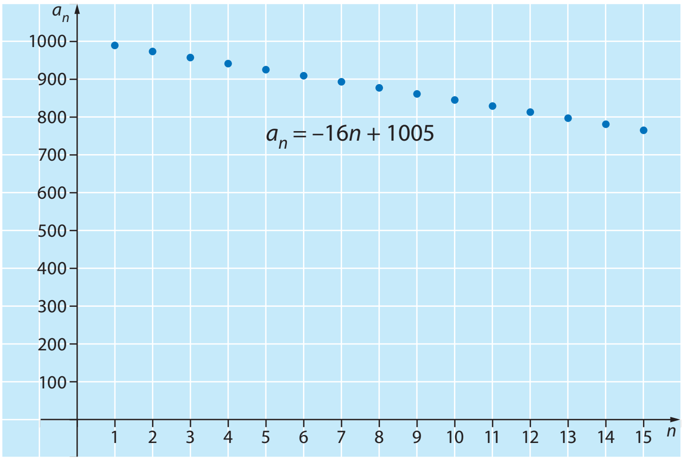
Ratkaistaan vielä, monesko lukujonon jäsen on pienempi kuin 950.

$$\begin{aligned} a_n &< 950 \\ -16n + 1005 &< 950 \\ n &> 3{,}4375 \end{aligned}$$

Ensimmäinen jäsen, joka toteuttaa ehdon on 4. Jonon 4 jäsen on vuoden $2000 + 4 = 2004$ kirjastojen määrä.

Kirjastojen määrä on 850–950 kpl vuosina 2004–2009.

d) Lukujonon kuvaajasta tulee näkyä jonon 15 ensimmäistä jäsentä.



179.

a) Koska aritmeettinen jono kuvataan ensimmäisen bussin lähdöstä, jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 0$.

Koska bussit kulkevat 13 minuutin välein, jonon differenssi $d = 13$ (min).

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$a_n = 0 + (n-1) \cdot 13 = 13n - 13$ (min)

b) Sijoitetaan jonon yleiseen jäseneen n =20.

$a_{20} = 13 \cdot 20 - 13 = 247$ min

Jäsenen järjestysluku saadaan, kun kello 6.00 lisätään saatu minuuttimäärä.

$6.00 + 4.07\,(= 247 \text{ min}) = 10.07$

Kello 10.07 lähtee päivän 20. bussi.

c) Lasketaan monta minuuttia kello 22.02 on kello 6.00:sta.

$22.02 - 6.00 = 16.02 \text{ h} = 962 \text{ min}$

Lasketaan, kuinka mones jonon jäsen on 962 on.

$$13n - 13 = 962$$
$$n = 75$$

Päivän aikana tapahtuu 75 lähtöä.

180.

a) Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1500 - 80 = 1420$. Koska Artturi lyhentää lainaa 80 €:n maksuerissä, jonon differenssi on $d = -80$ (€).

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 1420 + (n-1) \cdot (-80) = -80n + 1500 \text{ (€)}$$

b) Lainan määrä 13 maksuerän jälkeen saadaan sijoittamalla $n = 13$ jonon yleiseen jäseneen.

$$a_{13} = -80 \cdot 13 + 1500 = 460 \text{ (€)}$$

13 maksuerän jälkeen lainaa on jäljellä 460 €.

c) Lainan maksuerien määrä saadaan laskemalla, millä n:n arvolla $a_n = 0$.

$$-80n + 1500 = 0$$
$$n = 18,75$$

19 maksuerällä Artturi takaisin maksaa lainan.

d) Lasketaan, kuinka paljon lainaa on jäljellä 18. maksuerän jälkeen sijoittamalla $n = 18$ jonon yleiseen jäseneen.

$$a_{18} = -80 \cdot 18 + 1500 = 60 \text{ (€)}$$

Viimeinen maksuerä on 60 €.

181.

a) Koska vapaa-ajan matkojen määrä lisääntyy vuosittain aina yhtä monta prosenttia, voidaan matkojen määriä kuvata geometrisen jonon avulla.

Lukujonon ensimmäinen jäsen on matkojen määrä vuonna 2015 eli
$a_1 = 8\,137\,000$.

Matkojen määrä lisääntyy joka vuosi 2,6 %, joten prosenttikerroin eli jonon suhdeluku on

$100\,\% + 2{,}6\,\% = 102{,}6\,\% = 1{,}026$.

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen.

$a_n = 8\,137\,000 \cdot 1{,}026^{n-1}$

b) Lasketaan ensin kuinka mones jonon jäsen on vuoden 2020 ulkomaanmatkojen määrä.

$2020 - 2014 = 6$

Lasketaan jonon 6. jäsen.

$a_6 = 8\,137\,000 \cdot 1{,}026^{6-1} = 9\,251\,264{,}967... \approx 9\,251\,000$

c) Ratkaistaan epäyhtälö $a_n > 10\,000\,000$.

$$8\,137\,000 \cdot 1{,}026^{n-1} > 10\,000\,000$$
$$n > 9{,}03200...$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka täyttää ehdon on 10.

Lasketaan minä vuonna suomalaisten ulkomaanmatkojen määrä on jonon 10. jäsen.

$$2014 + 10 = 2024$$

182.

a) Koska pääoma kasvaa joka vuosi 2,5 %, joten prosenttikerroin eli jonon suhdeluku on

$100\,\% + 2,5\,\% = 102,5\,\% = 1,025$

Lukujonon ensimmäinen jäsen on vuoden kuluttua oleva pääoma, joka on

$a_1 = 8000 \cdot 1,025 = 8200$.

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen.

$a_n = 8200 \cdot 1,025^{n-1} = 8200 \cdot 1,025^{-1} \cdot 1,025^n = 8000 \cdot 1,025^n$ (€)

b) Sijoitetaan jonon yleiseen jäseneen $n = 10$.

$a_{10} = 8000 \cdot 1,025^{10} = 10\,240,676... \approx 10\,241$ €

c) Ratkaistaan epäyhtälö $a_n > 12\,000$.

$$8000 \cdot 1,025^n > 12\,000$$
$$n > 16,420...$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka täyttää ehdon on 17.
Sijoitustilillä on yli 12 000 € 17 vuoden kuluttua.

183.

a) Aritmeettisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$
- differenssi $d = 6 - 2 = 4$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$
\begin{aligned}
a_n &= 2 + (n-1)\cdot 4 \\
&= 2 + 4n - 4 \\
&= 4n - 2
\end{aligned}
$$

Lasketaan lukujonon 4. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_4 = 4\cdot 4 - 2 = 14$$

b) Geometrisen jonon yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan:

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$
- suhdeluku $q = \frac{6}{2} = 3$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = 2\cdot 3^{n-1}$$

Lasketaan jonon 4. jäsen sijoittamalla järjestysluku yleisen jäsenen lausekkeeseen.

$$a_4 = 2\cdot 3^{4-1} = 2\cdot 3^3 = 2\cdot 27 = 54$$

184.

a) Kahden tiedon selvittämiseksi tarvitaan kaksi yhtälöä.

Kirjoitetaan kolmas ja kuudes jäsen ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_6 = a_1 + (6-1)\cdot d = a_1 + 5d$$
$$a_3 = a_1 + (3-1)\cdot d = a_1 + 2d$$

Koska $a_6 = 5$ ja $a_3 = -1$, saadaan kaksi yhtälöä, jotka molemmat pitää paikkansa samalla lukujonolle.

Yhtälöstä voidaan muodostaa yhtälöpari.

$$\begin{cases} a_6 = 5 \\ a_3 = -1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 + 5d = 5 \\ a_1 + 2d = -1 \end{cases}$$
$$a_1 = -5 \text{ ja } d = 2$$

b) Lukujonon yleinen jäsen on

$$a_n = -5 + (n-1)\cdot 2 = -5 + 2n - 2 = 2n - 7\,.$$

c) $a_{65} = 2\cdot 65 - 7 = 123$

d) Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja tutkitaan, voiko luku 103 olla jonon jäsen.

$$
\begin{aligned}
a_n &= 103 \\
2n-7 &= 103 \\
2n &= 110 \qquad \Big| :2 \\
n &= 55
\end{aligned}
$$

Koska vastaukseksi tuli positiivinen kokonaisluku, luku 103 on jonon jäsen.

e) Kun jonon jäsenet ovat pienempiä kuin 80, nämä toteuttavat ehdon $a_n < 80$.

$$
\begin{aligned}
2n-7 &< 80 \\
2n &< 87 \qquad \Big| :2 \\
n &< \frac{87}{2} = 43\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on luku 43. Lukujonon 43 ensimmäistä jäsentä ovat pienempiä kuin 80.

185.

a) Yleisen jäsenen muodostamiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja suhdeluku q. Kahden tiedon selvittämiseksi tarvitaan kaksi yhtälöä.

Kirjoitetaan jonon kolmas ja kuudes jäsen ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla.

$$a_3 = a_1 \cdot q^{3-1} = a_1 \cdot q^2$$
$$a_7 = a_1 \cdot q^{6-1} = a_1 \cdot q^5$$

Koska $a_3 = \frac{1}{3}$ ja $a_6 = \frac{64}{375}$, saadaan kaksi yhtälöä, jotka molemmat pitävät paikkansa samalla lukujonolle. Yhtälöistä voidaan muodostaa yhtälöpari.

$$\begin{cases} a_3 = \dfrac{1}{3} \\ a_6 = \dfrac{64}{375} \end{cases}$$

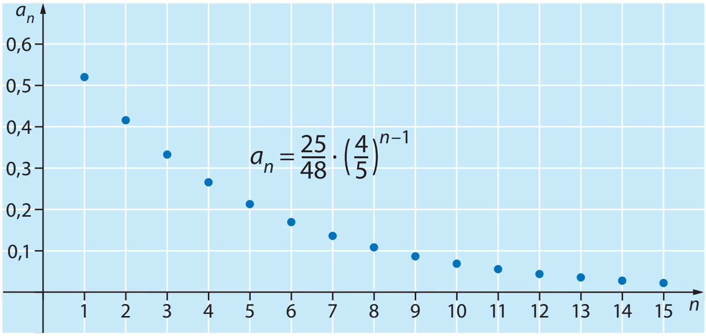
$$\begin{cases} a_1 \cdot q^2 = \dfrac{1}{3} \\ a_1 \cdot q^5 = \dfrac{64}{375} \end{cases}$$

$$q = \frac{4}{5} \quad \text{ja} \quad a_1 = \frac{25}{48}$$

Lukujonon yleinen jäsen on:

$$a_n = \frac{25}{48} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

b)



c) $a_{10} = \frac{25}{48} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{10-1} = 0,0699050... \approx 0,070$

d) Kun jonon jäsenet ovat pienempiä kuin 0,0001, nämä toteuttavat ehdon $a_n < 0,0001$.

$$\frac{25}{48} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} < 0,0001$$

$$n > 39,352...$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on luku 40. Lukujonon 40. jäsenestä alkaen jäsenet ovat siis pienempiä kuin 0,0001.

186.

a) Koska asuntokanta on kasvanut joka vuosi saman verran, lukujono on aritmeettinen, jonka differenssi on $d = 30\,000$.

Lukujonon ensimmäinen jäsen on asuntokanta 1990. Vuoden 2013 asuntokanta on jonon $2013 - 1989 = 24$. jäsen.

Kirjoitetaan jonon 24. jäsen ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

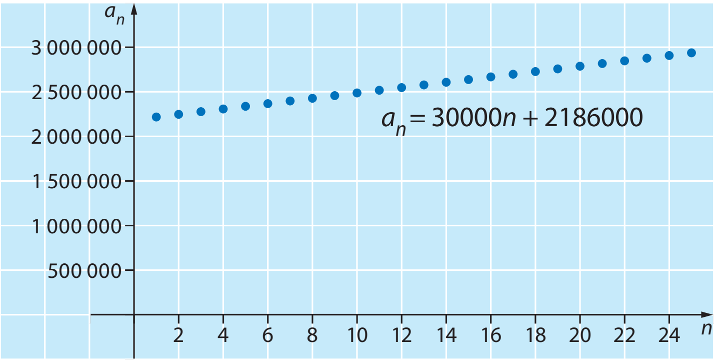
$$a_{24} = a_1 + (24-1)\cdot 30\,000 = a_1 + 690\,000$$

Koska tiedetään vuoden 2013 asuntokanta, muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a_1.

$$\begin{aligned} a_{24} &= 2\,906\,000 \\ a_1 + 690\,000 &= 2\,906\,000 \\ a_1 &= 2\,216\,000 \end{aligned}$$

b) Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n = 2\,216\,000 \cdot (n-1) \cdot 30\,000 = 30\,000n + 2\,186\,000$$



Tarkasteltava aikaväli on 1990–2013, jossa on 24 jäsentä.

c) Ratkaistaan epäyhtälö $a_n > 3\,200\,000$.

$$30\,000n + 2\,186\,000 > 3\,200\,000$$

$$n > 33{,}8$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on luku 34. Lasketaan, mikä vuosi tuolloin on.

$$1989 + 34 = 2023$$

187.

a) Koska työttömien määrää pyritään vähentämään vuosittain aina yhtä monta prosenttia, voidaan työttömien määriä kuvata geometrisen jonon avulla.

Työttömien määrä vähenee joka vuosi 6,5 %, joten prosenttikerroin eli jonon suhdeluku on

$100\,\% - 6{,}5\,\% = 93{,}5\,\% = 0{,}935$

Lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 252\,000$

Muodostetaan lukujonon yleinen jäsen.

$a_n = 252\,000 \cdot 0{,}935^{n-1}$

b) Lasketaan, kuinka mones jonon jäsen 2025 vuoden työttömien määrä on

$2025 - 2014 = 11$

Lasketaan jonon 11. jäsen.

$a_{11} = 252\,000 \cdot 0{,}935^{11-1} = 128\,681{,}658... \approx 129\,000$

Vuonna 2025 työttömien määrä on 129 000

c) Puolet vuoden 2015 työttömien määrästä on $\dfrac{252\,000}{2} = 126\,000$.

Ratkaistaan epäyhtälö $a_n < 126\,000$.

$$252\,000 \cdot 0{,}935^{n-1} < 126\,000$$
$$n < 11{,}3133...$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on luku 12.

Lasketaan, mikä vuosi tuolloin on.

$$2014 + 12 = 2026$$

3.2 Aritmeettinen summa

188.

a) Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 2$.

Jonon differenssi on $d = 6 - 2 = 4$.

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$a_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 2 + 4n - 4 = 4n - 2$

b) $a_{20} = 4 \cdot 20 - 2 = 78$

c) Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{20} = 20 \cdot \frac{2+78}{2} = 20 \cdot \frac{80}{2} = 20 \cdot 40 = 800$$

189.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava a_1
- viimeinen yhteenlaskettava a_{100}
- yhteenlaskettavien määrä 100.

Muodostetaan ensin lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n = 3 + (n-1)\cdot 5 = 3 + 5n - 5 = 5n - 2$$

Viimeinen yhteenlaskettava voidaan selvittää yleisen jäsenen avulla.

$$a_{100} = 5\cdot 100 - 2 = 498$$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{100} = 100\cdot\frac{3+498}{2} = 100\cdot\frac{501}{2} = \frac{50\,100}{2} = 25\,050$$

b) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 1$
- viimeinen yhteenlaskettava $a_n = 797$
- yhteenlaskettavien määrä *n*.

Yhteenlaskettavien määrä saadaan selville, kun ratkaistaan viimeisen yhteenlaskettavan järjestysnumero.

Muodostetaan ensin lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 4 = 1 + 4n - 4 = 4n - 3$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö $a_n = 797$ ja ratkaistaan siitä *n*.

$$\begin{aligned} 4n - 3 &= 797 \\ 4n &= 800 && \Big| :4 \\ n &= 200 \end{aligned}$$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{200} = 200 \cdot \frac{1 + 797}{2} = 200 \cdot 399 = 79\,800$$

190.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 120$
- viimeinen yhteenlaskettava $a_n = 300$
- yhteenlaskettavien määrä n.

Yhteenlaskettavien määrä saadaan selville, kun ratkaistaan viimeisen yhteenlaskettavan järjestysnumero.

Muodostetaan ensin lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n = 120 + (n-1)\cdot 20 = 120 + 20n - 20 = 20n + 100$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö $a_n = 300$ ja ratkaistaan siitä n.

$$\begin{aligned} 20n + 100 &= 300 \\ 20n &= 200 \qquad \qquad \qquad \mid :20 \\ n &= 10 \end{aligned}$$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{10} = 10\cdot\frac{120+300}{2} = 10\cdot 210 = 2\,100$$

b) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -2$
- viimeinen yhteenlaskettava $a_n = -236$
- yhteenlaskettavien määrä n.

Yhteenlaskettavien määrä saadaan selville, kun ratkaistaan viimeisen yhteenlaskettavan järjestysnumero.

Muodostetaan ensin lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n = -2 + (n-1)\cdot(-6) = -2 - 6n + 6 = -6n + 4$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö $a_n = -236$ ja ratkaistaan siitä n.

$$\begin{aligned} -6n + 4 &= -236 \\ -6n &= -240 \qquad \qquad \big| :(-6) \\ n &= 40 \end{aligned}$$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{40} = 40 \cdot \frac{-2 + (-236)}{2} = 40 \cdot (-119) = -4760$$

191.

a) Muodostetaan yhtälö summakaavan avulla ja lasketaan siitä *n*.

$$
\begin{aligned}
S_n &= 500 \\
n\cdot\frac{6+44}{2} &= 500 \\
n\cdot 25 &= 500 \qquad \Big| :25 \\
n &= 20
\end{aligned}
$$

b) Muodostetaan jonon 20. jäsen jonon ensimmäisen jäsenen ja differenssin d avulla.

$$a_{20} = a_1 + (20-1)\cdot d = a_1 + 19d$$

Kun tiedetään jonon 20. jäsenen arvo, muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä d.

$$
\begin{aligned}
a_{20} &= 44 \\
a_1 + 19d &= 44 \\
6 + 19d &= 44 \\
19d &= 38 \qquad \Big| :19 \\
d &= 2
\end{aligned}
$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 6 + (n-1)\cdot 2 = 6 + 2n - 2 = 2n + 4$$

192.

a) Jonon ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 2 \cdot 1 + 5 = 2 + 5 = 7$.

b) Jonon viimeinen yhteenlaskettava on $a_{20} = 2 \cdot 20 + 5 = 40 + 5 = 45$.

c) Summassa on 20 yhteenlaskettavaa.

d) Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{20} = 20 \cdot \frac{7+45}{2} = 20 \cdot \frac{52}{2} = 20 \cdot 26 = 520$$

193.

a) Summassa lasketaan yhteen 10 ensimmäistä lukujonon jäsentä. Selvitetään yleisen jäsenen $a_n = 8n - 2$ avulla ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava.

- Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 8 \cdot 1 - 2 = 6$.
- Viimeinen yhteenlaskettava on $a_{10} = 8 \cdot 10 - 2 = 78$.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{6 + 78}{2} = 10 \cdot 42 = 420$$

b) Lasketaan yleisen jäsenen $a_n = 2n + 4$ avulla ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava.

- Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_6 = 2 \cdot 6 + 4 = 16$.
- Viimeinen yhteenlaskettava on $a_{35} = 2 \cdot 35 + 4 = 74$.

Summassa on 30 yhteenlaskettavaa.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{30} = 30 \cdot \frac{16 + 74}{2} = 30 \cdot 45 = 1\,350$$

194.

a) Lasketaan yleisen jäsenen $a_n = n + 1$ avulla ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava.

- Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_2 = 2 + 1 = 3$.
- Viimeinen yhteenlaskettava on $a_{14} = 14 + 1 = 15$.

Summassa on 13 yhteenlaskettavaa.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{13} = 13 \cdot \frac{3 + 15}{2} = 13 \cdot 9 = 117$$

b) Lasketaan yleisen jäsenen $a_n = 2 - 2n$ avulla ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava.

- Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_4 = 2 - 2 \cdot 4 = -6$.
- Viimeinen yhteenlaskettava on $a_{28} = 2 - 2 \cdot 28 = 2 - 56 = -54$.

Summassa on 25 yhteenlaskettavaa.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{25} = 25 \cdot \frac{-6 + (-54)}{2} = 25 \cdot (-30) = -750$$

195.

a) Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 45 + (n-1) \cdot 47 = 45 + 47n - 47 = 47n - 2$$

b) Summassa lasketaan jonon 500 ensimmäisen luvun summa.

Ensimmäinen jäsen on annettu $a_1 = 45$, ratkaistaan viimeinen yhteenlaskettava jonon yleisen jäsenen avulla.

$$a_{500} = 47 \cdot 500 - 2 = 23\,498$$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{500} = 500 \cdot \frac{45 + 23\,498}{2} = 5\,885\,750$$

c) Lasketaan yleisen jäsenen $a_n = 47n - 2$ avulla ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava.

- Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_{25} = 47 \cdot 25 - 2 = 1173$
- Viimeinen yhteenlaskettava on $a_{71} = 47 \cdot 71 - 2 = 3335$

Summassa on 47 yhteenlaskettavaa.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{47} = 47 \cdot \frac{1173 + 3\,335}{2} = 105\,938$$

d) Lasketaan yleisen jäsenen $a_n = 47n - 2$ avulla ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava.

- Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_{12} = 47 \cdot 12 - 2 = 562$.
- Viimeinen yhteenlaskettava on $a_{103} = 47 \cdot 103 - 2 = 4839$.

Summassa on 92 yhteenlaskettavaa.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{92} = 92 \cdot \frac{562 + 4839}{2} = 248\,446$$

196.

Muodostetaan jonon kolmas ja yhdeksäs jäsen jonon ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_3 = a_1 + (3-1)\cdot d = a_1 + 2d$$
$$a_9 = a_1 + (9-1)\cdot d = a_1 + 8d$$

Kun tiedetään $a_3 = 15$ ja $a_9 = 69$, muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan siitä jonon ensimmäinen jäsen ja differenssi.

$$\begin{cases} a_3 = 15 \\ a_9 = 69 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 + 2d = 15 \\ a_1 + 8d = 69 \end{cases}$$

$$a_1 = -3 \quad \text{ja} \quad d = 9$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = -3 + (n-1)\cdot 9 = 9n - 12$$

Lasketaan jonon yleisen jäsenen avulla viimeisen yhteenlaskettavan arvo.

$$a_{450} = 9\cdot 450 - 12 = 4038$$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{450} = 450\cdot\frac{-3+4038}{2} = 907\,875$$

197.

a) Muodostetaan ensin jonon yleinen jäsen.

- Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 5$.
- Differenssi on $d = 12 - 5 = 7$.

Yleinen jäsen $a_n = 5 + (n-1) \cdot 7 = 7n - 2$.

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen *n* kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{5 + (7n-2)}{2} = \frac{n(7n+3)}{2}$$

Ratkaistaan epäyhtälön avulla, milloin summa ylittää arvon 200 000.

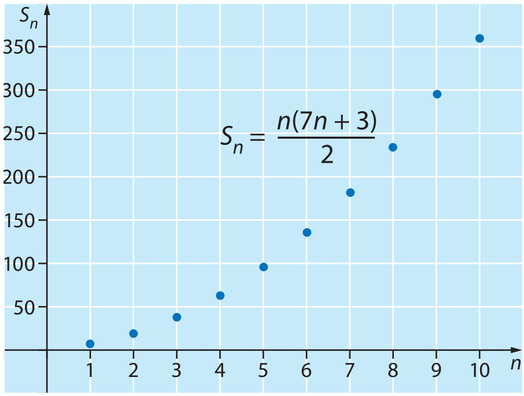
$$\begin{aligned} S_n &> 200\,000 \\ \frac{n(7n+3)}{2} &> 200\,000 \\ n < -239{,}26\ldots \text{ tai } n &> 238{,}83\ldots \end{aligned}$$

Järjestysnumero *n* on positiivinen kokonaisluku.

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälö, on 239.

b) Summista muodostuvan lukujonon yleinen jäsen on $S_n = \dfrac{n(7n+3)}{2}$.

Piirretään kuvaaja tämän lukujonon kymmenestä ensimmäisestä jäsenestä.



198.

a) Muodostetaan ensin jonon yleinen jäsen.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = -32$
- Differenssi $d = -14 - (-32) = 18$

Yleinen jäsen $a_n = -32 + (n-1)\cdot 18 = 18n - 50$.

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen *n* kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = n\cdot\frac{a_1 + a_n}{2} = n\cdot\frac{-32 + (18n-50)}{2} = \frac{n(18n-82)}{2} = n(9n-41) = 9n^2 - 41n$$

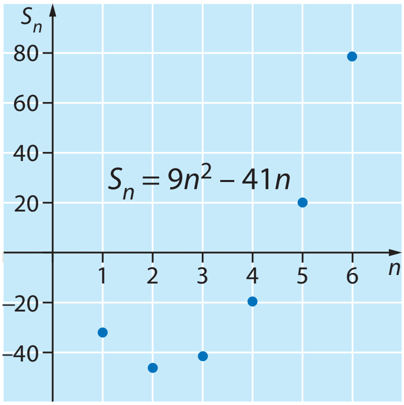
Ratkaistaan epäyhtälön avulla, milloin summa arvon on alle 300 000.

$$\begin{aligned} S_n &< 300\,000 \\ 9n^2 - 41n &< 300\,000 \\ n > -180{,}31\ldots \text{ tai } n &< 184{,}86\ldots \end{aligned}$$

Järjestysnumero *n* on positiivinen kokonaisluku. Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälö, on 184.

b) Summista muodostuvan lukujonon yleinen jäsen on $S_n = 9n^2 - 41n$.

Piirretään kuvaaja tämän lukujonon kuudesta ensimmäisestä jäsenestä.



199.

a) Muodostetaan jonon viides jäsen jonon ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_5 = \frac{3}{4} + (5-1)\cdot d = \frac{3}{4} + 4d$$

Kun tiedetään jonon 5. jäsenen arvo, muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *d*.

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{41}{12} \\ \frac{3}{4} + 4d &= \frac{41}{12} \\ d &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = \frac{3}{4} + (n-1)\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}n + \frac{1}{12}$$

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen n kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = n\cdot\frac{a_1 + a_n}{2} = n\cdot\frac{\frac{3}{4} + \left(\frac{2}{3}n + \frac{1}{12}\right)}{2} = \frac{4n^2 + 5n}{12}$$

Ratkaistaan epäyhtälön avulla, milloin summa arvon on alle 700.

$$S_n < 700$$

$$\frac{4n^2 + 5n}{12} < 700$$

$$n > -46,45... \text{ tai } n < 45,20...$$

Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku. Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälö, on 45.

b) Viimeinen yhteenlaskettava on

$$a_{45} = \frac{2}{3} \cdot 45 + \frac{1}{12} = \frac{361}{12}$$

200.

Muodostetaan yhtälö kolmen ensimmäisen luvun summa summakaavalla ja ratkaistaan siitä jonon kolmas jäsen a_3.

$$\begin{aligned} S_3 &= 906 \\ n \cdot \frac{a_1 + a_3}{2} &= 906 \\ 3 \cdot \frac{240 + a_3}{2} &= 906 \\ a_3 &= 364 \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon kolmas jäsen jonon ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_5 = 240 + (3-1) \cdot d = 240 + 2d$$

Kun tiedetään jonon 3. jäsenen arvo, muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *d*.

$$\begin{aligned} a_3 &= 364 \\ 240 + 2d &= 364 \\ d &= 62 \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 240 + (n-1) \cdot 62 = 62n + 178$$

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen *n* kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{240 + (62n + 178)}{2} = 31n^2 + 209n$$

Ratkaistaan epäyhtälön avulla, milloin summa ylittää arvon 15 000.

$$S_n > 15\,000$$

$$31n^2 + 209n > 15\,000$$

$$n < -25{,}624... \text{ tai } n > 18{,}882...$$

Järjestysnumero *n* on positiivinen kokonaisluku. Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälö, on 19.

201.

a) Kukan taimien määrät eri riveillä muodostavat aritmeettisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$
- Jonon differenssi $d = 2$
- Jonon yleinen jäsen $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$

Kun lasketaan yhteen riveillä olevat taimet, summa voi korkeintaan olla 430. Muodostetaan yhtälö $S_n = 430$ ja ratkaistaan siitä *n*.

$$n \cdot \frac{1 + (2n-1)}{2} = 430$$

$$n = -20,73... \text{ tai } n = 20,73...$$

Rivien määrä on positiivinen kokonaisluku.

- Jos $n = 20$, $S_{20} = 20 \cdot \dfrac{1 + (2 \cdot 20 - 1)}{2} = 400$.
- Jos $n = 21$, $S_{21} = 21 \cdot \dfrac{1 + (2 \cdot 21 - 1)}{2} = 441 > 430$.

Kukantaimet riittävät 20 riviin.

b) 20 rivissä on 400 kukantainta, joten $430 - 400 = 30$ tainta jää käyttämättä.

202.

Amandan säästöön laitetut rahamäärät eri kuukausina muodostavat aritmeettisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 10$
- Jonon differenssi $d = 15 - 10 = 5$
- Jonon yleinen jäsen $a_n = 10 + (n-1) \cdot 5 = 5n + 5$

Kun lasketaan yhteen säästöön laitetut rahamäärät, summa on vähintään 640.

Muodostetaan epäyhtälö $S_n > 640$ ja ratkaistaan siitä n.

$$n \cdot \frac{10 + (5n+5)}{2} > 640$$

$$n < -17{,}57... \text{ tai } n > 14{,}57...$$

Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku. Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälö, on 15.

b) 15 kuukaudessa Amanda säästää $S_{15} = 15 \cdot \dfrac{10 + (5 \cdot 15 + 5)}{2} = 675\ (€)$,

joten säästöistä jää käyttämättä $675\ € - 640\ € = 35\ €$.

203.

a) Lääkeannoksen määrät eri päivinä muodostavat aritmeettisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 145$
- Jonon differenssi $d = -5$
- Jonon yleinen jäsen $a_n = 145 + (n-1)\cdot(-5) = -5n + 150$

Lääkekuurin viimeinen annos on 5 mg, eli jonon jäsenen *n* arvo on 5.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *n*.

$$\begin{aligned} a_n &= 5 \\ -5n + 150 &= 5 \\ n &= 29 \end{aligned}$$

Lääkekuuri kestää 29 päivää.

b) Lasketaan summakaavalla, kuinka paljon Eemeli syö kuurin aikana lääkettä.

$$S_{29} = 29 \cdot \frac{145 + 5}{2} = 2\,175 \text{ mg}$$

204.

a) Topiaksen pyöräilymatkat eri viikoilla muodostavat aritmeettisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 65$
- Jonon differenssi $d = 5,0$
- Jonon yleinen jäsen $a_n = 65 + (n-1) \cdot 5 = 5n + 60$

Kun lasketaan yhteen viikkojen pyöräilymatkat, summa pitää olla vähintään 1157.

Muodostetaan epäyhtälö $S_n > 1157$ ja ratkaistaan siitä *n*.

$$n \cdot \frac{65 + (5n + 60)}{2} > 1157$$

$$n < -37,38... \text{ tai } n > 12,80...$$

Järjestysnumero *n* on positiivinen kokonaisluku. Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälö, on 13.

Topias pyöräili 13 viikkoa.

b) Lasketaan summa 12. ensimmäisestä jonon jäsenestä.

$$S_{12} = 12 \cdot \frac{65 + (5 \cdot 12 + 60)}{2} = 1110$$

Viimeisellä viikolla Topias pyöräilee $1157 \text{ km} - 1110 \text{ km} = 47 \text{ km}$.

205.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = \frac{1}{2}$
- viimeinen yhteenlaskettava $a_n = 6$
- yhteenlaskettavien määrä n.

Yhteenlaskettavien määrä saadaan selville, kun ratkaistaan viimeisen yhteenlaskettavan järjestysnumero.

Muodostetaan ensin lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n = \frac{1}{2} + (n-1)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö $a_n = 6$ ja ratkaistaan siitä n.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}n &= 6 \qquad |\cdot 2 \\ n &= 12 \end{aligned}$$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{12} = 12\cdot\frac{\frac{1}{2}+6}{2} = \frac{6+72}{2} = 39$$

b) Lasketaan yleisen jäsenen $a_n = 2n + 3$ avulla ensimmäinen ja viimeinen yhteenlaskettava.

- Ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_4 = 2 \cdot 4 + 3 = 11$.
- Viimeinen yhteenlaskettava on $a_{13} = 2 \cdot 13 + 3 = 29$.

Summassa on 10 yhteenlaskettavaa.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{11 + 29}{2} = 10 \cdot 20 = 200$$

206.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 42$
- viimeinen yhteenlaskettava a_{100}
- yhteenlaskettavien määrä 100.

Muodostetaan ensin lukujonon yleinen jäsen.

$$a_n = 42 + (n-1)\cdot(-4) = 42 - 4n + 4 = -4n + 46$$

Viimeinen yhteenlaskettava voidaan selvittää yleisen jäsenen avulla.

$$a_{100} = -4\cdot 100 + 46 = -354$$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{100} = 100\cdot\frac{42+(-354)}{2} = 100\cdot\frac{-312}{2} = \frac{-31\,200}{2} = -15\,600$$

b) Lasketaan kuinka monen jäsenen arvo on enemmän kuin 0.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan siitä n.

$$
\begin{aligned}
a_n &> 0 \\
-4n + 46 &> 0 \\
-4n &> -46 \quad \Big| : (-4) \\
n &< \frac{46}{4} = 11\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Ensimmäinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on 11.

Lasketaan 11 ensimmäisen jäsenen summa summakaavalla.

$$S_{12} = 11 \cdot \frac{42 + (-4 \cdot 11 + 46)}{2} = 11 \cdot \frac{44}{2} = 11 \cdot 22 = 242$$

207.

a) Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 20 \cdot 1 - 15 = 5$.

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen n kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{5 + (20n - 15)}{2} = 10n^2 - 5n$$

Ratkaistaan epäyhtälön avulla, milloin summa ylittä arvon 100 000.

$$\begin{aligned} S_n &> 100\,000 \\ 10n^2 - 5n &> 100\,000 \\ n < -99{,}750\ldots \text{ tai } n &> 100{,}250\ldots \end{aligned}$$

Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku.

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälö, on 101.

b) Viimeinen yhteenlaskettava on

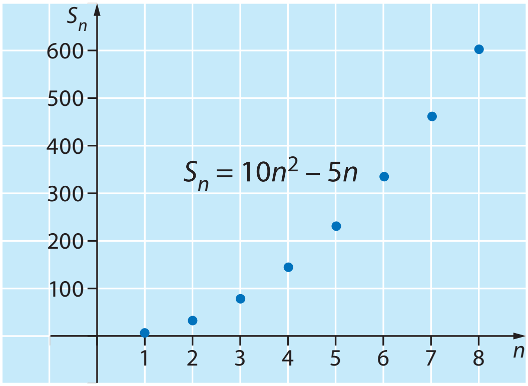
$a_{101} = 20 \cdot 101 - 15 = 2005$.

c) Lauseke summalle, kun lasketaan yhteen n kappaletta jonon jäseniä

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{5 + (20n - 15)}{2} = 10n^2 - 5n$$

d) Summista muodostuvan lukujonon yleinen jäsen on $S_n = 10n^2 - 5n$.

Piirretään kuvaaja tämän lukujonon kahdeksasta ensimmäisestä jäsenestä.



208.

a) Kaarlon luetut sivut eri päivinä muodostavat aritmeettisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 15$
- Jonon differenssi $d = 4$
- Jonon yleinen jäsen $a_n = 15 + (n-1)\cdot 4 = 4n + 11$

Kun lasketaan yhteen Kaarlon lukemat sivut, summa on vähintään 452.

Muodostetaan epäyhtälö $S_n > 452$ ja ratkaistaan siitä *n*.

$$n \cdot \frac{15 + (4n + 11)}{2} > 452$$

$$n < -18{,}63... \text{ tai } n > 12{,}13...$$

Järjestysnumero *n* on positiivinen kokonaisluku. Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälö, on 13. Kaarlo on lukenut kirjan 13 päivän kuluttua.

b) 12 päivässä Kaarlo on lukenut

$$S_{12} = 12 \cdot \frac{15 + (4 \cdot 12 + 11)}{2} = 444$$

Joten viimeisenä päivänä Kaarlo luki $452 - 444 = 8$ sivua.

209.

Tikapuiden askelmien leveydet muodostavat aritmeettisen jonon.

Muodostetaan jonon viides ja yhdeksäs jäsen jonon ensimmäisen jäsenen ja differenssi avulla.

$$a_5 = a_1 + (5-1)\cdot d = a_1 + 4d$$
$$a_9 = a_1 + (9-1)\cdot d = a_1 + 8d$$

Kun tiedetään jonon viidennen ja yhdeksännen jäsenen arvot, muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan siitä a_1 ja d.

$$\begin{cases} a_5 = a_1 + 4d \\ a_9 = a_1 + 8d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 53 \\ a_1 + 8d = 41 \end{cases}$$

$a_1 = 65$ ja $d = -3$

Jonon yleinen jäsen on $a_n = 65 + (n-1)\cdot(-3) = -3n + 68$

Kun lasketaan yhteen askelmien leveydet, summa on 611.

Muodostetaan yhtälö $S_n = 611$ ja ratkaistaan siitä n.

$$n\cdot\frac{65+(-3n+68)}{2} = 611$$

$n = 31{,}333...$ tai $n = 13$

Koska vastaukseksi kelpaa vain positiivinen kokonaisluku, joten tikapuissa on 13 askelmaa.

3.3 Geometrinen summa

210.

a) $a_{10} = 3 \cdot 2^{10-1} = 1\,536$

b) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 3 \cdot 2^{1-1} = 3$
- suhdeluku $q = 2$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 10$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{10} = 3 \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = 3\,069$$

211.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -2$
- suhdeluku $q = \dfrac{8}{-2} = -4$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 12$

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{12} = -2 \cdot \frac{1-(-4)^{12}}{1-(-4)} = 6\,710\,886 \approx 6,71 \cdot 10^6$$

b) Lasketaan summa summakaavalla. Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_6 = 7 \cdot 3^{6-1} = 1\,701$
- suhdeluku $q = 3$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 15 - 5 = 10$.

Lasketaan summan arvo.

$$S_{10} = 1\,701 \cdot \frac{1-3^{10}}{1-3} = 50\,220\,324 \approx 5,02 \cdot 10^7$$

212.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = \frac{2}{3}$
- suhdeluku $q = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 10$.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{10} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = 682$$

b) Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot 2^{n-1}$$

Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_5 = \frac{2}{3} \cdot 2^{5-1} = \frac{32}{3}$
- suhdeluku $q = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 14 - 4 = 10$.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{10} = \frac{32}{3} \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 10\,912$$

213.

Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -5$
- suhdeluku q
- yhteenlaskettavien määrä $n = 13$.

Ratkaistaan jonon 13. jäsenen avulla suhdeluku.

Muodostetaan ensin geometrisen jonon yleinen jäsen.

$a_n = -5 \cdot q^{n-1}$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja ratkaistaan q.

$$\begin{aligned} a_{13} &= -20\,480 \\ -5 \cdot q^{13-1} &= -20\,480 \\ q &= 2 \text{ tai } q = -2 \end{aligned}$$

Kahdelle erilaiselle geometriselle jonolle $a_{13} = -20\,480$.

Lasketaan kummassakin tapauksessa summan arvo.

$q = 2$	$q = -2$
$S_{13} = -5 \cdot \dfrac{1-2^{13}}{1-2} = -40\,955$	$S_{13} = -5 \cdot \dfrac{1-(-2)^{13}}{1-(-2)} = -13\,655$

214.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -2$
- suhdeluku $q = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$
- yhteenlaskettavien määrä n

Muodostetaan geometrisen jonon yleinen jäsen.

$$a_n = -2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja ratkaistaan n.

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{19\,683}{256} \\ -2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} &= -\frac{19\,683}{256} \\ n &= 10 \end{aligned}$$

b) $S_{10} = -2 \cdot \dfrac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{10}}{1-\frac{3}{2}} = -\dfrac{58\,025}{256}$

215.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 8$
- suhdeluku $q = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
- yhteenlaskettavien määrä n

Muodostetaan geometrisen jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja ratkaistaan n.

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{128} \\ 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= -\frac{1}{128} \\ n &= 11 \end{aligned}$$

Lasketaan summa summakaavan avulla.

$$S_{11} = 8 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2\,047}{128}$$

b) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -7$
- suhdeluku $q = \dfrac{-21}{-7} = 3$
- yhteenlaskettavien määrä n

Muodostetaan geometrisen jonon yleinen jäsen.

$$a_n = -7 \cdot 3^{n-1}$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja ratkaistaan *n*.

$$\begin{aligned} a_n &= -5103 \\ -7 \cdot 3^{n-1} &= -5103 \\ n &= 7 \end{aligned}$$

Lasketaan summa summakaavan avulla.

$$S_7 = -7 \cdot \frac{1-3^7}{1-3} = -7651$$

216.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava a_1
- suhdeluku $q = 2$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 10$.

Ratkaistaan jonon ensimmäinen jäsen summakaavan avulla.

$$S_{10} = 5\,115$$

$$a_1 \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = 5\,115$$

$$a_1 = 5$$

b) Jonon yleinen jäsen on $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$.

Viimeinen yhteenlaskettava on

$$a_{10} = 5 \cdot 2^{10-1} = 2\,560$$

217.

a) Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Lasketaan, kuinka monta jäsentä jonossa on.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3}{8192} \\ 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= \frac{3}{8192} \\ n &= 15 \end{aligned}$$

Parittomien summassa yhteenlaskettavia on $n = \underbrace{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15}_{8 \text{ kpl}}$.

Parillisen summassa yhteenlaskettavia on $n = \underbrace{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}_{7 \text{ kpl}}$.

Parittomien summassa yhteenlaskettavia on enemmän.

b) Parittomien jäsenet saadaan yhtälöstä $x = 2n - 1$, kun $n = 1, 2, ..., 8$.

Lasketaan parittomien jäsenten summa.

Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 6$
- suhdeluku $q = \frac{1}{2}$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 8$

$$S_8 = 6 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}}{1-\frac{1}{2}} = 6 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot 8-1-1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{49\,149}{4\,096}$$

Parilliset jäsenet saadaan yhtälöstä $y = 2n$, kun $n = 1, 2, ..., 7$.

Lasketaan parillisten jäsenten summa. Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 3$
- suhdeluku $q = \frac{1}{2}$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 7$

$$S_7 = 3 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{y-1}}{1-\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot 7-1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{24\,573}{4\,096}$$

Parittomien jäsenien summan arvo on suurempi.

218.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$
- suhdeluku $q = \frac{10}{2} = 5$
- yhteenlaskettavien määrä n .

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen n kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 2 \cdot \frac{1-5^n}{1-5} = \frac{5^n - 1}{2}$$

Ratkaistaan epäyhtälö $S_n > 10^{12}$.

$$\frac{5^n - 1}{2} > 10^{12}$$

$$n > 17{,}598...$$

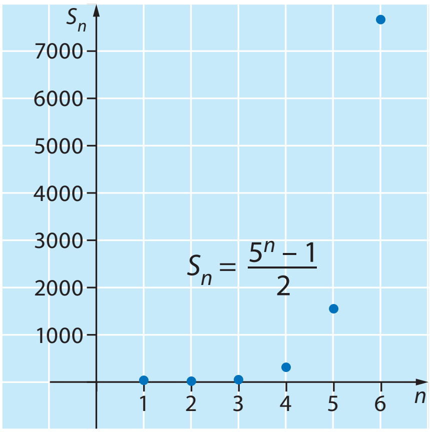
Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku.

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön, on 18.

Tarvitaan siis vähintään 18 jäsentä.

b) Summista muodostuvan lukujonon yleinen jäsen on $S_n = \dfrac{5^n - 1}{2}$.

Piirretään kuvaaja tämän lukujonon kuudesta ensimmäisestä jäsenestä.



219.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 80$
- suhdeluku $q = \frac{64}{80} = \frac{4}{5}$
- yhteenlaskettavien määrä n.

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen *n* kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 80 \cdot \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\frac{4}{5}} = 400 \cdot \left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$$

Ratkaistaan epäyhtälö $S_n < 350$.

$$400\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right) < 350$$

$$n < 9{,}318...$$

Järjestysnumero *n* on positiivinen kokonaisluku.

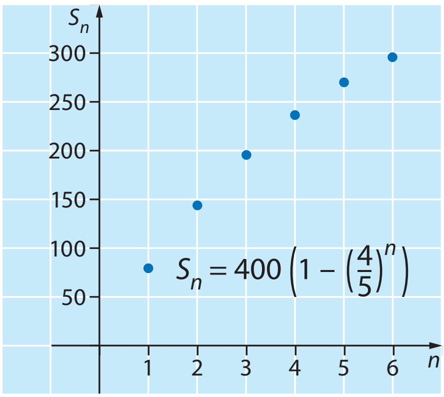
Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön, on 9.

Summassa voi korkeintaan olla 9 jäsentä.

b) Summista muodostuvan lukujonon yleinen jäsen on

$$S_n = 400 \cdot \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right).$$

Piirretään kuvaaja tämän lukujonon kuudesta ensimmäisestä jäsenestä.



220.

a) Muodostetaan kuuden ensimmäisen jäsenen summa ja ratkaistaan siitä jonon ensimmäinen jäsen.

$$S_6 = \frac{14\,896}{625}$$

$$a_1 \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^6}{1-\frac{3}{5}} = \frac{14\,896}{625}$$

$$a_1 = 10$$

b) Summan laskemiseen tarvitaan

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 10$
- suhdeluku $q = \frac{3}{5}$
- yhteenlaskettavien määrä n.

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen n kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 10 \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}} = 25 \cdot \left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$$

Ratkaistaan epäyhtälö $S_n < 20$.

$$25\left(1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right) < 20$$

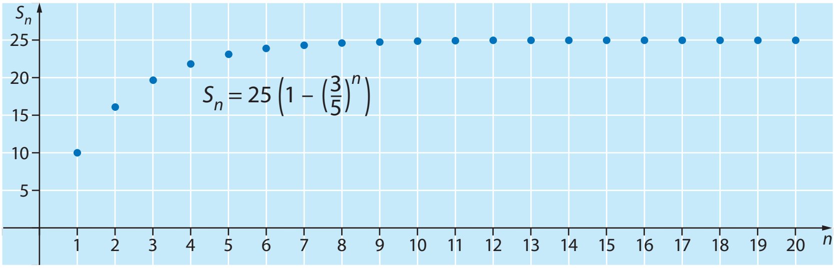
$$n < 3{,}150...$$

Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku.

Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön, on 3.

Summassa voi korkeintaan olla 3 jäsentä.

c)



Summan arvot lähestyvät lukua 25.

221.

a) Eri päivien kutomisajat muodostavat geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 20$
- Jonon suhdeluku $q = 1{,}1$

Kahdessa viikossa on 14 päivää. Kahden viikon kutomisajan saadaan, kun lasketaan geometrisen jonon neljäntoista ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{14} = 20 \cdot \frac{1 - 1{,}1^{14}}{1 - 1{,}1} = 559{,}499... \approx 559{,}5 \text{ min} = 9 \text{ h } 19 \text{ min}$$

b) Jonon neljäntoista ensimmäisen jäsenen summan tulisi olla $18 \text{ h} = 1\,080 \text{ (min)}$.

Ensimmäisen päivän kutomisaika on a_1.

Muodostetaan summan avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä a_1.

$$\begin{aligned} S_{14} &= 1080 \\ a_1 \cdot \frac{1 - 1{,}1^{14}}{1 - 1{,}1} &= 1080 \\ a_1 &= 38{,}6059... \\ a_1 &\approx 39 \text{ min} \end{aligned}$$

222.

a)

Talletuskerta	Tilillä rahaa talletuksen tekemisen jälkeen (€)
1.	850
2.	$850\cdot 1,019+850$
3.	$850\cdot 1,019^2+850\cdot 1,019+850$

b) Lasketaan jonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa summakaavan avulla.

$$S_{10}=850\cdot\frac{1-1,019^{10}}{1-1,019}=9\,264,824...\approx 9\,264,82\ €$$

c) Ratkaistaan epäyhtälö $S_n>13\,000$.

$$850\cdot\frac{1-1,019^{n}}{1-1,019}>13\,000$$

$$n>13,553...$$

Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku. Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön, on 14.

223.

a) Eri viikkojen opiskeluajat muodostavat geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1,5\,\text{h} = 90\ (\text{min})$
- Jonon suhdeluku $q = 1,05$

Kahdentoista viikon opiskeluaika saadaan, kun lasketaan geometrisen jonon kahdentoista ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{12} = 90 \cdot \frac{1-1,05^{12}}{1-1,05} = 1\,432,541...\ \text{min} \approx 23\ \text{h}\ 53\ \text{min}$$

b) Eri päivien opiskeluajat muodostavat geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 15$
- Jonon suhdeluku $q = 1,03$

Kahdessatoista viikossa on 84 päivää. Kahdentoista viikon opiskeluaika saadaan, kun lasketaan geometrisen jonon 84. ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{84} = 15 \cdot \frac{1-1,03^{84}}{1-1,03} = 5\,488,208\,\text{min} = 91\ \text{h}\ 28\ \text{min}$$

Anna on opiskellut enemmän.

224.

a) Suomen kasvihuonepäästöjen määrä eri vuosina (vuodesta 2006) muodostavat geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 80$ (milj. tonnia)
- Suhdeluku $q = 0,975$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 80 \cdot 0,975^{n-1}$$

Ratkaistaan epäyhtälö $a_n < 71$.

$$80 \cdot 0,975^{n-1} < 71$$
$$n > 5,713...$$

Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku. Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön, on 6.

Lasketaan mikä vuosi tuolloin on.

$$2005 + 6 = 2011$$

b) Lasketaan, kuinka paljon Suomen kasvihuonepäästöjen määrät olivat yhteensä summakaavan avulla.

$$S_6 = 80 \cdot \frac{1-0,975^6}{1-0,975} = 450,9814\ldots \text{ (milj. tonnia)}$$

Jos Suomi ei olisi vähentänyt kasvihuonepäästöjen määrää, ne olisivat olleet $80 \cdot 6 = 480$ milj. tonnia.

Suomi siis on vähentänyt kasvihuonepäästöjen määrää kuudessa vuodessa $480 - 450,9814\ldots = 29,0185\ldots \approx 29$ miljoonaa tonnia hiilidioksidiekvivalenttia.

225.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 3$
- suhdeluku $q = \frac{3}{6} = 2$
- yhteenlaskettavien määrä n

Muodostetaan geometrisen jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

Muodostetaan yleisen jäsenen avulla yhtälö ja ratkaistaan *n*.

$$\begin{aligned} a_n &= 3072 \\ 3 \cdot 2^{n-1} &= 3072 \\ n &= 11 \end{aligned}$$

Lasketaan summa summakaavan avulla.

$$S_{11} = 3 \cdot \frac{1-2^{11}}{1-2} = 6141$$

226.

Muodostetaan geometrisen jonon 9. jäsen jonon ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla.

$$a_9 = \frac{3}{5} \cdot q^{9-1} = \frac{3}{5} \cdot q^8$$

Kun tiedetään jonon 9. jäsenen arvo, muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan suhdeluku q.

$$a_9 = \frac{3}{327\,680}$$

$$\frac{3}{5} \cdot q^8 = \frac{3}{327\,680}$$

$$q = \frac{1}{4} \quad \text{tai} \quad q = -\frac{1}{4}$$

Kahdelle erilaiselle geometriselle jonolle on $a_9 = \dfrac{3}{327\,680}$.

Lasketaan kummassakin tapauksessa summan arvo.

$$q = \frac{1}{4}$$

$$S_9 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^9}{1 - \frac{1}{4}} = 0,799... \approx 0,80$$

$$q = -\frac{1}{4}$$

$$S_9 = \frac{3}{5} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^9}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = 0,480... \approx 0,48$$

227.

a) Summan laskemiseen tarvitaan

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$
- suhdeluku $q = \frac{\frac{9}{2}}{3} = \frac{3}{2}$
- yhteenlaskettavien määrä n.

Muodostetaan lauseke summalle, kun lasketaan yhteen n kappaletta jonon jäseniä.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 3 \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1-\frac{3}{2}} = 6 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right)$$

Ratkaistaan epäyhtälö $S_n > 10^{15}$.

$$6 \cdot \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right) > 10^{15}$$

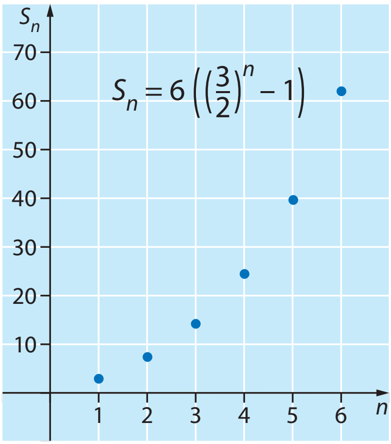
$$n > 80,764...$$

Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku.

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön, on 81.

b) Summista muodostuvan lukujonon yleinen jäsen on $S_n = 6 \cdot \left(\left(\frac{3}{2} \right)^n - 1 \right)$.

Piirretään kuvaaja tämän lukujonon kuudesta ensimmäisestä jäsenestä.



228.

a) Elisen eri päivien peliajan määrät muodostavat geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 120 \cdot 0,975 = 117$
- Jonon suhdeluku $q = 0,975$

Ensimmäisen viikon peliajan määrä saadaan, kun lasketaan geometrisen jonon seitsemän ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_7 = 117 \cdot \frac{1-0,975^7}{1-0,975} = 760,07... \approx 760 \text{ min}$$

b) Jos Elise ei olisi vähentänyt pelaamista, hän olisi pelannut viikon aikana

$120 \cdot 7 = 840 \text{ min}$

Hänellä jäi aikaa muuhun $840 - 760 = 80 \text{ min}$

c) Ratkaistaan epäyhtälö $S_n > 50 \cdot 60 = 3000$.

$$117 \cdot \frac{1-0,975^n}{1-0,975} > 3000$$

$$n > 40,465...$$

Järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku. Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa epäyhtälön, on 41.

41 päivän kuluttua Elise on pelannut 50 tuntia.