2 Eksponentiaalinen malli

2.1 Eksponenttifunktio

86.

a) Funktion f kuvaajasta nähdään, että $f(-1) \approx 2$ ja $f(-3) \approx 8$.

Funktion g kuvaajasta nähdään, että $g(1) \approx 1$ ja $g(3) \approx 8$.

b) Funktion g muuttujan arvojen kasvaessa funktion arvot kasvavat eli g kuvaa eksponentiaalista kasvua.

c) Funktion f kuvaajasta nähdään, että $f(-4) \approx 16$ ja funktion g kuvaajasta nähdään, että $g(4) \approx 16$. Huomataan, että $f(-4) = g(4) \approx 16$.

d) Nähdään, että funktioiden arvot ovat samat, kun muuttujan x arvot ovat toistensa vastalukuja.

Tiedetään, että $g(6) = 256$, joten $f(x) = 256$, kun $x = -6$.

e) $f(x) = g(x)$ siinä koordinaatiston pisteessä, jossa funktioiden kuvaajat leikkaavat toisensa eli pisteessä (0, 1). Tällöin $x \approx 0$.

87.

a) Funktion h kuvaajasta nähdään, että $h(0) \approx 8$ *ja* $h(1) \approx 4$.

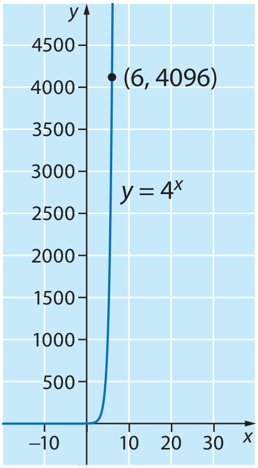
b) Yhtälön $h(x) = 16$ ratkaisuna on se pisteen x-koordinaatti, jonka y-koordinaatti on 16. Tämä piste on $(-1, 16)$ eli $x \approx -1$.

c) Epäyhtälön $2 < h(x) < 16$ ratkaisuna ovat ne x-koordinaatin arvot, joiden y-koordinaatit ovat vähintään 2 ja enintään 16. Nämä x:n arvot ovat $-1 < x < 2$.

88.

$g - E$, $j - C$, $f - A$, $l - B$, $k - D$, $h - F$

89.

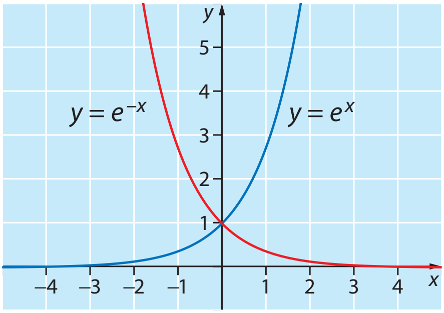


a) Funktion f kuvaajasta nähdään, että $f(3) \approx 64$.

b) Funktion f kuvaajasta huomataan, että $f(x) = 4096$, kun $x \approx 6$.

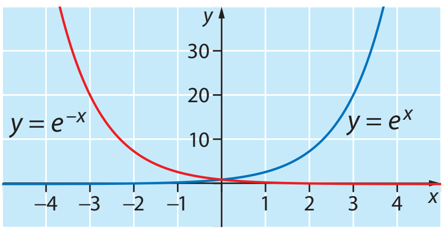
90.

a)



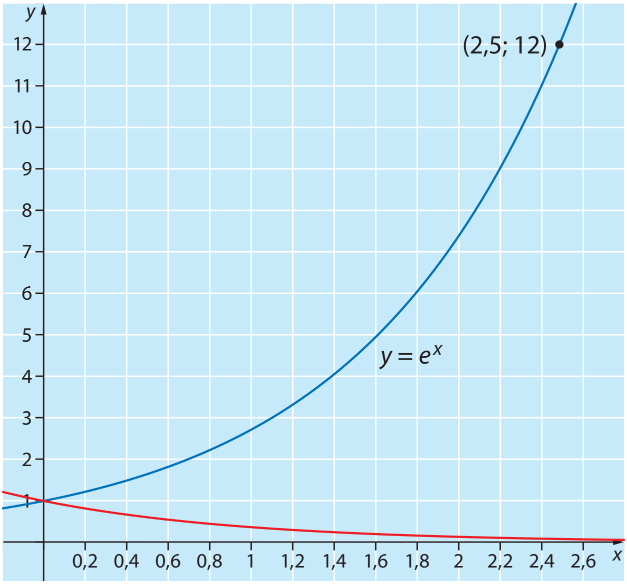
$f(x) = g(x)$ siinä koordinaatiston pisteessä, jossa funktioiden kuvaajat leikkaavat toisensa, eli pisteessä (0, 1). Tällöin $x = 0$.

b)



Funktion f kuvaajasta nähdään, että $f(3) \approx 20$ ja funktion g kuvaajasta nähdään, että $g(-3) \approx 20$.

c)



Funktion f kuvaajasta nähdään, että $f(x) = 12$, kun $x \approx 2,5$.

91.

a) Bakteerien määrä aloittamishetkellä saadaan sijoittamalla $x = 0$ funktioon g.

$$g(0) = 1000 \cdot e^{0,04 \cdot 0} = 1000$$

Aloittamishetkellä viljelmässä on 1000 bakteeria.

b) Vuorokaudessa on 24 tuntia, joten sijoittamalla $x = 24$ funktioon g saadaan bakteerien määrä vuorokauden kuluttua.

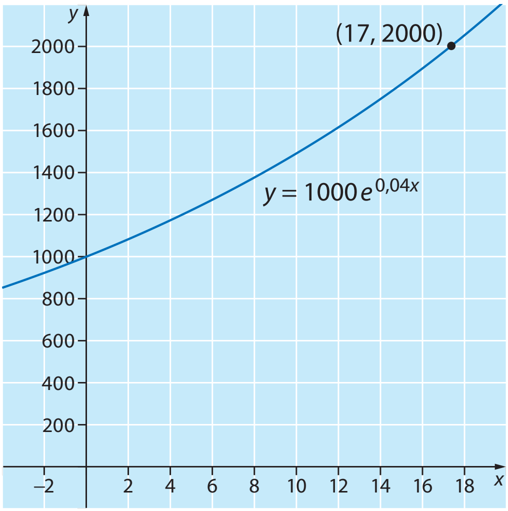
$$g(24) = 1000 \cdot e^{0,04 \cdot 24} = 2611,6964... \approx 2600$$

Vuorokauden kuluttua bakteereja on 2600.

c) Bakteerien määrä on kaksinkertaistunut, kun bakteerien määrä on $1000 \cdot 2 = 2000$.

Funktion g arvo eli kuvaajan y-koordinaatti kertoo bakteerien määrän.

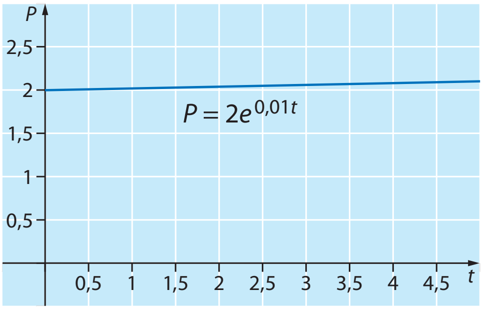
Etsitään kuvaajalta piste, jonka y-koordinaatti on 2000.



Funktio g kuvaajasta huomataan, että $g(x) = 2000$, kun $x \approx 17$.

92.

a)

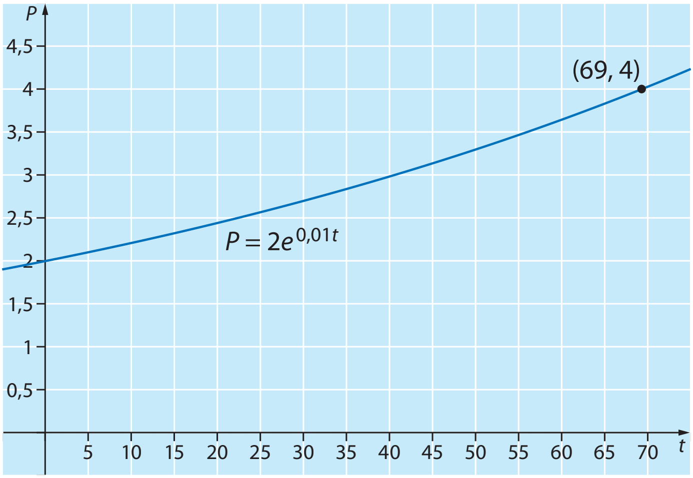


b) Tämänhetkinen asukasmäärä saadaan sijoittamalla $t = 0$ funktioon P.

$$P(0) = 2e^{0,01 \cdot 0} = 2$$

Tämänhetkinen asukasmäärä on 2 miljoonaa.

c) Asukasmäärä on kaksinkertaistunut, kun asukkaita on $2 \cdot 2 = 4$ miljoonaa.



Kuvaajasta P nähdään, että asukasmäärä on 4 miljoonaa, kun $x \approx 69$.

d) Asukasmäärä 100 vuotta sitten saadaan sijoittamalla $t = -100$ funktion P yhtälöön.

$$P(-100) = 2e^{0,01\cdot(-100)} = 0,735... \approx 0,7$$

100 vuotta sitten asukkaita oli 0,7 miljoonaa.

93.

a) Potilaalle annetaan 5,0 mg jodia, joten a = 5,0. Kahdessa viikossa on 14 vuorokautta, joten sijoitetaan x = 14 funktioon f.

$$f(14) = 5,0 \cdot 0,917^{14} = 1,4864...\text{ (mg)} \approx 1,5\text{ mg}$$

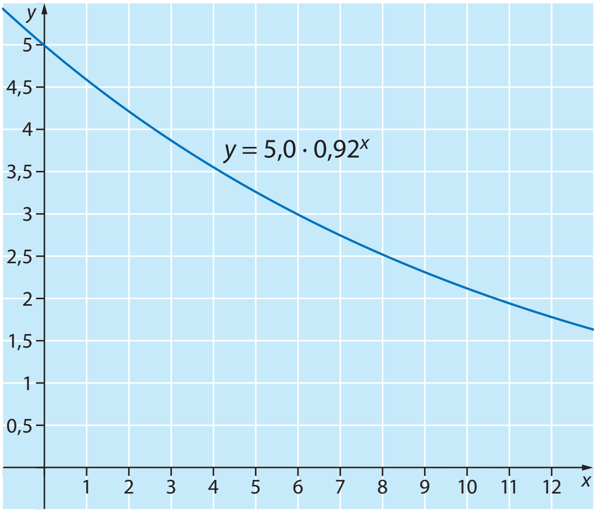
b) Lasketaan, kuinka monta milligrammaa jodia on 100 vuorokauden kuluttua sijoittamalla x = 100 funktioon f.

$$f(100) = 5,0 \cdot 0,917^{100} = 0,0008627...\text{ (mg)}$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia 0,0008627… milligrammaa on 5,0 milligrammasta.

$$1 - \frac{5,0\text{ mg} - 0,0008627...\text{ mg}}{5,0\text{ mg}} = 0,0001725... \approx 0,00017 = 0,017\ \%$$

c)



Aineesta on hajonnut puolet, kun ainetta on jäljellä $5,0 : 2 = 2,5$.

Funktion f kuvaajasta huomataan, että $f(x) = 2,5$, kun $x \approx 8$.

Aineen puoliintumisaika on 8 vuorokautta.

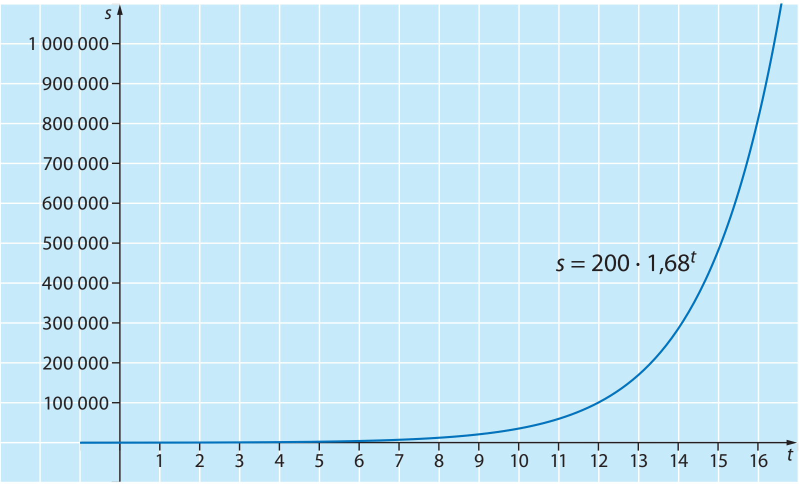
94.

a) Sijoitetaan $t = 5$ funktioon s.

$$s(5) = 200 \cdot 1{,}682^5 = 2\,692{,}5262... \approx 2\,700$$

Viiden tunnin kuluttua soluja on 2 700 kpl.

b)



Funktion s kuvaajasta nähdään, että $f(x) = 1\,000\,000$, kun $x \approx 16$

95.

a) Viikossa vedestä vaihtuu 0,05 %, jolloin vanhan veden määrä on $100\,\% - 0,05\,\% = 99,95\,\% = 0,9995$ edellisestä eli vanhan veden määrä 0,9995-kertaistuu.

Tutkitaan taulukon avulla aineen määrän muuttumista.

Viikot	Myrkyllisen aineen määrä (mg)
1	$0,9995 \cdot 300$
2	$0,9995^2 \cdot 300$
3	$0,9995^3 \cdot 300$
x	$0,9995^x \cdot 300$

Myrkyllisen aineen määrää voidaan mallintaa funktiolla $m(x) = 0,9995^x \cdot 300\ (\text{mg})$.

b) Vuodessa on 52 viikkoa. Veden myrkkypitoisuus vuoden päästä onnettomuudesta saadaan sijoittamalla $x = 52$ funktioon m.

$$m(52) = 0,9995^{52} \cdot 300 = 292,2986...\ (\text{mg}) \approx 292\ \text{mg}$$

96.

a) Puun massa kasvaa joka vuosi keskimäärin 13 %, jolloin puun uusi massa on $100\,\% + 13\,\% = 113\,\% = 1{,}13$ edellisestä eli puun massa 1,13-kertaistuu.

Tutkitaan taulukon avulla puun massan muuttumista.

Puun ikä (aloitushetki 11 vuotta)	Puun massa (kg)
1	$1{,}13 \cdot 1900$
2	$1{,}13^2 \cdot 1900$
3	$1{,}13^3 \cdot 1900$
x	$1{,}13^x \cdot 1900$

Puun massaa voidaan mallintaa funktiolla $f(x) = 1{,}13^x \cdot 1900\ \text{(kg)}$.

b) Puun massa 20-vuotiaana saadaan sijoittamalla $x = 20 - 11 = 9$ funktioon *f*.

$f(9) = 1{,}13^9 \cdot 1900 = 5707{,}679...\ \text{(kg)} \approx 5700\ \text{kg}$

c) Puun massa 6-vuotiaana saadaan sijoittamalla $x = 6 - 11 = -5$ funktioon *f*.

$f(-5) = 1{,}13^{-5} \cdot 1900 = 1031{,}243...\ \text{(kg)} \approx 1000\ \text{kg}$

97.

a) Riisinjyvien määrä kasvaa joka ruudussa 100 %, jolloin riisijyvien uusi määrä on $100\,\% + 100\,\% = 200\,\% = 2$ edellisestä eli riisijyvien määrä kaksinkertaistuu.

Tutkitaan taulukon avulla riisijyvien määrän muuttumista.

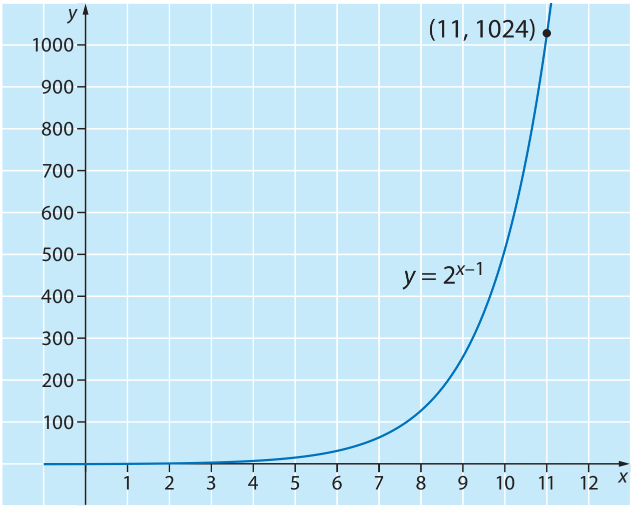
Monesko ruutu?	Riisijyvien määrä (kpl)
1	$1 \cdot 2^{1-1}$
2	$1 \cdot 2^{2-1}$
3	$1 \cdot 2^{3-1}$
x	$1 \cdot 2^{x-1}$

Riisijyvien määrä voidaan mallintaa funktiolla $f(x) = 1 \cdot 2^{x-1}$.

b) Riisijyvien määrä 10. ruudussa saadaan sijoittamalla $x = 10$ funktioon f.

$f(10) = 1 \cdot 2^{10-1} = 512$

c)



d) Funktiosta *f* huomataan, että 1024 riisinjyvää on 11. ruudussa.

98.

a) Vuosittainen kasvu on 5,0 %. Lasketaan kasvua kuvaava prosenttikerroin.

$100\,\% + 5{,}0\,\% = 105\,\% = 1{,}05$

Luomutuotteiden myynti siis 1,05-kertaistuu joka vuosi. Tutkitaan taulukon avulla myynnin muutosta.

Vuosi	Myynti (€)
1	$250\,000 \cdot 1{,}05$
2	$250\,000 \cdot 1{,}05^2$
3	$250\,000 \cdot 1{,}05^3$
x	$250\,000 \cdot 1{,}05^x$

Luomutuotteiden myyntiä voidaan mallintaa funktiolla
$m(x) = 250\,000 \cdot 1{,}05^x$

b) Myynti 8 vuoden kuluttua saadaan sijoittamalla $x = 8$ funktioon m.

$m(8) = 250\,000 \cdot 1{,}05^8 = 369\,363{,}860... \approx 370\,000$ (€)

c) Myynti kolme vuotta aikaisemmin saadaan sijoittamalla $x = -3$ funktioon m.

$m(-3) = 250\,000 \cdot 1{,}05^{-3} = 215\,959{,}399... \approx 220\,000$ (€)

99.

a) Lääkeaineen pitoisuus vähenee joka tunti 8,0 %. Lasketaan vähenemistä kuvaava prosenttikerroin.

$100\ \% - 8{,}0\ \% = 92\ \% = 0{,}92$

Lääkeaineen määrä siis 0,92-kertaistuu joka tunti. Tutkitaan taulukon avulla lääkeaineen määrän muutosta.

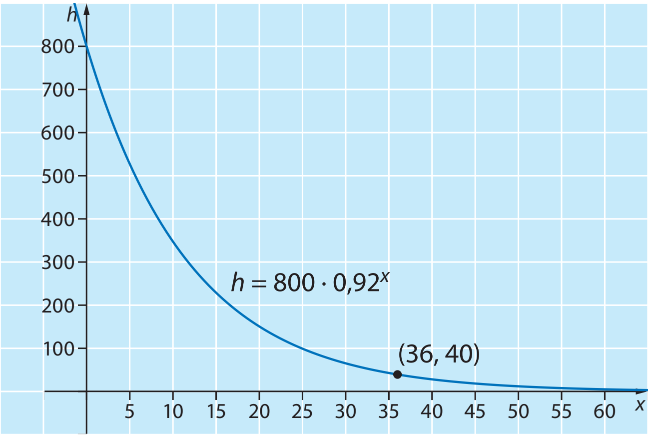
Tunti	Lääkeaineen määrä (mg)
1	$800 \cdot 0{,}92$
2	$800 \cdot 0{,}92^2$
3	$800 \cdot 0{,}92^3$
x	$800 \cdot 0{,}92^x$

Lääkeaineen määrää elimistössä voidaan mallintaa funktiolla
$h(x) = 800 \cdot 0{,}92^x$ (mg)

b) Vuorokaudessa on 24 tuntia, joten sijoittamalla $x = 24$ funktioon h saadaan lääkkeen määrä vuorokauden kuluttua sen antamisesta.

$h(24) = 800 \cdot 0{,}92^{24} = 108{,}142... \approx 110$ (mg)

c)



Lääkettä on poistunut 95 %, eli sitä on jäljellä $100\ \% - 95\ \% = 5\ \% = 0{,}05$

Lääkettä on jäljellä $800\ \text{mg} \cdot 0{,}05 = 40\ \text{mg}$.

Kuvaajasta *h* huomataan, että lääkettä on 40 mg jäljellä 36 tunnin kuluttua sen ottamisesta.

100.

a) Lämpötila nousee vuosittain 0,77 %. Lasketaan nousua kuvaava prosenttikerroin.

$100\ \% + 0,77\ \% = 100,77\ \% = 1,0077$

Lämpötila 1,0077-kertaistuu joka vuosi. Tutkitaan taulukon avulla veden lämpötilan muutosta.

Vuosi	Lämpötila (°C)
1	$5,0 \cdot 1,0077$
2	$5,0 \cdot 1,0077^2$
3	$5,0 \cdot 1,0077^3$
x	$5,0 \cdot 1,0077^x$

Lämpötilan muutosta voidaan mallintaa funktiolla $T(x) = 5,0 \cdot 1,0077^x$.

b) Sijoittamalla $x = 100$ funktioon T saadaan veden lämpötila 100 vuoden kuluttua.

$T(100) = 5,0 \cdot 1,0077^{100} = 10,767... \approx 11$ (°C)

c) Sijoittamalla $x = -50$ funktioon T saadaan veden lämpötila 50 vuotta mittaushetkeä aikaisemmin.

$T(-50) = 5,0 \cdot 1,0077^{-50} = 3,407... \approx 3,4$ (°C)

101.

a) Funktion f kuvaajasta nähdään, että $f(0)=10$.

b) Funktion f kuvaajasta nähdään, että $f(-1)=20$.

c) Yhtälön $f(x)=5$ ratkaisuna on sen pisteen x-koordinaatti, jonka y-koordinaatti on 5. Tämä piste on (1, 5) eli $x \approx 1$.

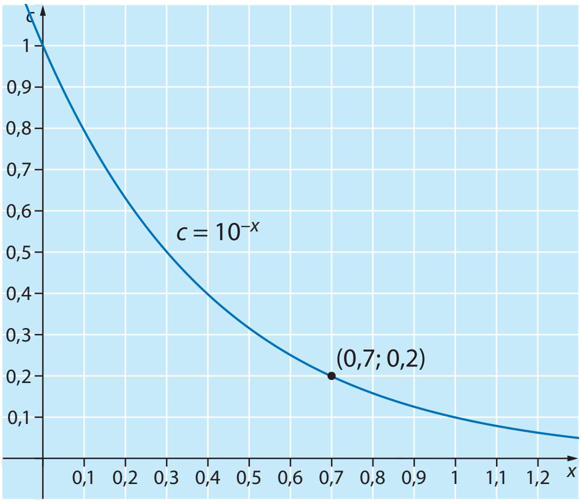
d) Epäyhtälön $f(x)>10$ ratkaisuna ovat ne pisteen x-koordinaatit, joiden y-koordinaatit ovat yli 10. Nämä x-koordinaatit ovat pienempää kuin 0 eli $x < 0$.

102.

a) Liuoksen, jonka pH = 2,5, konsentraatio saadaan sijoittamalla $x = 2{,}5$ funktioon c.

$$c(2{,}5) = 10^{-2{,}5} = 0{,}00316... \approx 0{,}0032 \text{ (mol/l)}$$

b)



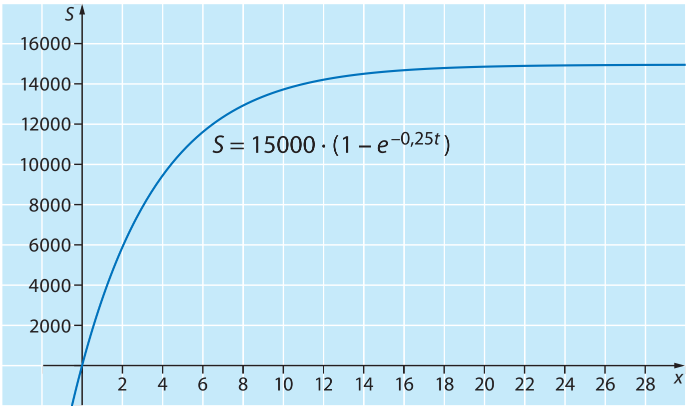
Funktion c kuvaajasta nähdään, että liuoksen konsentraatio on 0,2 mol/l, kun pH on 0,7.

103.

a) Tuotteen ensimmäisen kuuden kuukauden myynti saadaan sijoittamalla $t = 6$ funktioon S.

$$S(6) = 15\,000 \cdot (1 - e^{-0,25 \cdot 6}) = 11\,653,047... \approx 12\,000$$

b)



Kuvaajasta S nähdään, että tuotetta on myyty 14 000 kappaletta 11 kuukaudessa.

c) Tuotteen myynti vakiintuu tasolle 15 000 kpl.

104.

a) Kurssi nousee vuosittain 19,4 %. Laskataan nousun prosenttikerroin.

$100\ \% + 19,4\ \% = 119,4\ \% = 1,194$

Kurssi 1,194-kertaistuu joka vuosi. Tutkitaan taulukon avulla osakkeen kurssin muutosta.

Vuosi 2016 alkaen	Osakkeen kurssi (€)
1	$44,87 \cdot 1,194$
2	$44,87 \cdot 1,194^2$
3	$44,87 \cdot 1,194^3$
x	$44,87 \cdot 1,194^x$

Osakkeen kurssia voidaan mallintaa funktiolla $k(x) = 44,87 \cdot 1,194^x$ (€).

b) Osakkeen kurssi 4 vuoden kuluttua saadaan sijoittamalla $x = 4$ funktioon k.

$k(4) = 44,87 \cdot 1,194^4 = 91,195... \approx 91,20$ (€)

c) Osakkeen kurssi 5 vuotta sitten saadaan sijoittamalla $x = -5$ funktioon k.

$k(-5) = 44,78 \cdot 1,194^{-5} = 18,4528... \approx 18,50$ (€)

105.

a) Eläkeyhtiöiden pääoma pienenee joka vuosi 2,5 %. Lasketaan sen prosenttikerroin.

$100\,\% - 2,5\,\% = 97,5\,\% = 0,975$

Pääoma 0,975-kertaistuu joka vuosi. Tutkitaan taulukon avulla yhtiöisen nettovarallisuuden muutosta.

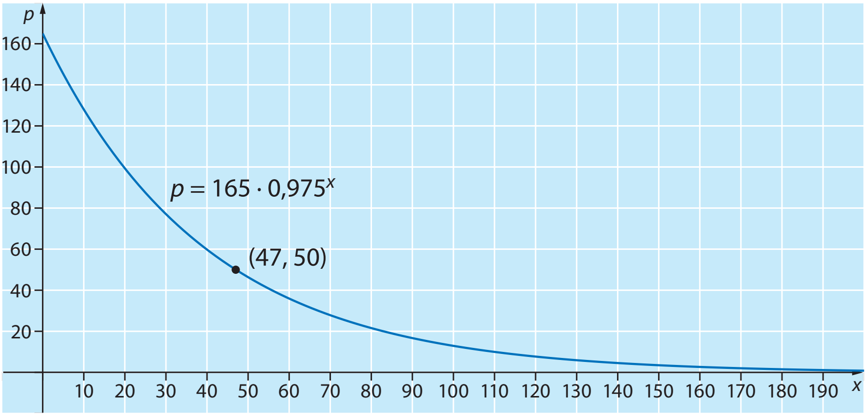
Vuosi 2016 lähtien	Nettovarallisuus (mrd. €)
1	$165 \cdot 0,975$
2	$165 \cdot 0,975^2$
3	$165 \cdot 0,975^3$
x	$165 \cdot 0,975^x$

Eläkeyhtiöiden pääomaa voidaan mallintaa funktiolla
$p(x) = 165 \cdot 0,975^x$ (mrd. €)

b) Eläkeyhtiön nettovarallisuus 20 vuoden kuluttua saadaan sijoittamalla $x = 20$ funktioon p.

$p(20) = 165 \cdot 0,975^{20} = 99,443... \approx 100$ (mrd. €)

c)



Funktion p kuvaajasta nähdään, että 47 vuoden kuluttua omaisuus on kutistunut 50 miljardiin.

2.2 Eksponenttiyhtälön ratkaiseminen

106.

a) $5^x = 5^{-x+2}$

$$x = -x + 2$$

$$2x = 2 \qquad |:2$$

$$x = 1$$

b) $9^{2x} = 3$

$$(3^2)^{2x} = 3^1$$

$$3^{4x} = 3^1$$

$$4x = 1 \qquad |:4$$

$$x = \frac{1}{4}$$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^2$$

$$(3^{-1})^x = 3^2$$

$$3^{-x} = 3^2$$

$$-x = 2 \qquad |\cdot(-1)$$

$$x = -2$$

107.

a) $2^x = 32$

$2^x = 2^5$

$x = 5$

b) $3^{2x-1} = 9$

$3^{2x-1} = 3^2$

$2x - 1 = 2$

$2x = 3 \qquad |:2$

$x = \frac{3}{2}$

c) $6^{5x-10} = 1$

$6^{5x-10} = 6^0$

$5x - 10 = 0$

$5x = 10 \qquad |:5$

$x = 2$

d) $4^x = \frac{1}{16}$

$4^x = 16^{-1}$

$4^x = (4^2)^{-1}$

$4^x = 4^{-2}$

$x = -2$

108.

a) $4^x = 2^{1-x}$

$(2^2)^x = 2^{1-x}$

$2^{2x} = 2^{1-x}$

$2x = 1 - x$

$3x = 1 \qquad \Big|: 3$

$x = \dfrac{1}{3}$

b) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{4x} = 25^2$

$(5^{-1})^{4x} = (5^2)^2$

$5^{-4x} = 5^4$

$-4x = 4 \qquad \Big|: (-4)$

$x = -1$

109.

a) $$4^{6x-3}=8^{4-x}$$

$$(2^2)^{6x-3}=(2^3)^{4-x}$$

$$2^{12x-6}=2^{12-3x}$$

$$12x-6=12-3x$$

$$15x=18 \qquad \Big|:15$$

$$x=\frac{18}{15}=\frac{6}{5}$$

b)

$$\frac{81^{x+1}}{27^{5x}}=3$$

$$\frac{(3^4)^{x+1}}{(3^3)^{5x}}=3^1$$

$$\frac{3^{4x+4}}{3^{15x}}=3^1$$

$$3^{(4x+4)-15x}=3^1$$

$$(4x+4)-15x=1$$

$$4x-15x+4=1$$

$$-11x=-3 \qquad \Big|:(-11)$$

$$x=\frac{3}{11}$$

110.

a) $3^x = 7$

$$x = \log_3 7$$

b) $4 \cdot 2^x = 24 \qquad |:4$

$$2^x = 6$$

$$x = \log_2 6$$

c) $2 \cdot e^x = 6 \qquad |:2$

$$e^x = 3$$

$$x = \ln 3$$

d) $4 \cdot e^{x-1} = 8 \qquad |:4$

$$e^{x-1} = 2$$

$$x - 1 = \ln 2$$

$$x = \ln 2 + 1$$

111.

a) $2^{5x} - 11 = 2$

$$2^{5x} = 13$$

$$5x = \log_2 13 \qquad \Big| :5$$

$$x = \frac{\log_2 13}{5}$$

b) $e^{2x-1} - 2 = 0$

$$e^{2x-1} = 2$$

$$2x - 1 = \ln 2$$

$$2x = \ln 2 + 1 \qquad \Big| :2$$

$$x = \frac{\ln 2 + 1}{2}$$

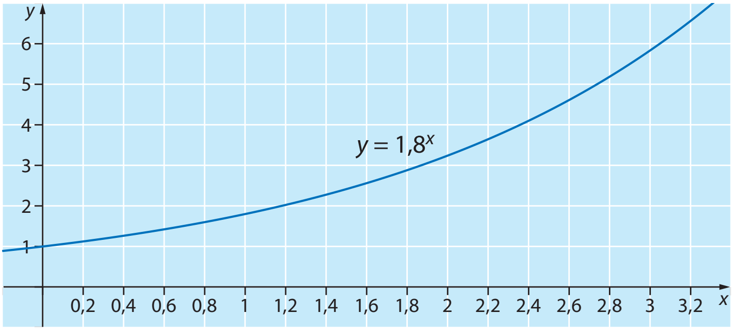
112.

a) $5^x = 14$

b) $e^x = 5$

c) $e^{4x} = 3$

113.



a) Funktion *f* kuvaajasta nähdään, että $1{,}8^x = 6$, kun $x \approx 3{,}0$.

b) Funktion *f* kuvaajasta nähdään, että $1{,}8^x = 2{,}5$, kun $x \approx 1{,}6$.

114.

a) Myynti, kun yritys ei mainosta ollenkaan, saadaan sijoittamalla $x = 0$ yhtälöön.

$$40\,000 \cdot 1{,}00005^0 = 40\,000 \text{ €}$$

b) Muodostetaan myynnin määrän 50 000 € avulla yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} 40\,000 \cdot 1{,}00005^x &= 50\,000 \\ x &= 4\,462{,}982... \\ x &\approx 4\,500 \text{ €} \end{aligned}$$

Myynnin määrä on 50 000 €, kun mainostetaan 4 500 eurolla.

115.

a) Muodostetaan toriumin määrän 1 500 g:n avulla yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} 2500 \cdot 0{,}964^x &= 1500 \\ x &= 13{,}932... \\ x &\approx 14 \end{aligned}$$

Toriumin määrä on 1500 g 14 vuorokauden kuluttua.

b) Kun toriumia on hajonnut puolet, sitä on jäljellä $\frac{2500\text{ g}}{2} = 1250\text{ g}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} 2500 \cdot 0{,}964^x &= 1250 \\ x &= 18{,}905... \\ x &\approx 19 \end{aligned}$$

Toriumia on hajonnut puolet 19 vuorokaudessa.

116.

a) Kun kauriita on 200, funktio saa arvon 200.

Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 200$.

$$300 \cdot (1 - e^{-0,3x}) = 200$$
$$x = 3,662...$$
$$x \approx 4$$

Kauriita on 4 vuoden kuluttua 200.

b) Kun kauriita on 280, funktio saa arvon 200.

Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 280$.

$$300 \cdot (1 - e^{-0,3x}) = 280$$
$$x = 9,026...$$
$$x \approx 9$$

Kauriita on 9 vuoden kuluttua 280.

117.

a) Kokeesta saa arvosanan 5, kun funktio saa arvon 5. Ratkaistaan yhtälö $k(x) = 5$.

$$4 \cdot e^{0{,}0306x} = 5$$
$$x = 7{,}2922...$$
$$x \approx 7$$

7 pisteellä saa arvosanan 5.

b) Kokeesta saa arvosanan 9, kun funktio saa arvon 9. Ratkaistaan yhtälö $k(x) = 9$.

$$4 \cdot e^{0{,}0306x} = 9$$
$$x = 26{,}500...$$
$$x \approx 27$$

27 pisteellä saa arvosanan 9.

118.

a) Pääoma kasvaa joka vuosi 2,0 %. Lasketaan kasvun prosenttikerroin.

$100\ \% + 2{,}0\ \% = 102\ \% = 1{,}02$

Pääoma 1,02-kertaistuu joka vuosi. Tutkitaan taulukon avulla pääoman muutosta.

Vuodet	Pääoma
1	$10\,000 \cdot 1{,}02$
2	$10\,000 \cdot 1{,}02^2$
3	$10\,000 \cdot 1{,}02^3$
x	$10\,000 \cdot 1{,}02^x$

Kasvanutta pääomaa voidaan mallintaa funktiolla $f(x) = 10\,000 \cdot 1{,}02^x$

b) Kun pääoma on kasvanut 13 000 euroon, funktio saa arvon 13 000.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 13\,000 \\
10\,000 \cdot 1{,}02^x &= 13\,000 \\
x &= 13{,}248... \\
x &\approx 13
\end{aligned}
$$

119.

a) Henkilöstö- ja materiaalikulut vähenevät joka vuosi 5,0 %. Lasketaan sen prosenttikerroin.

$100\,\% - 5,0\,\% = 95\,\% = 0,95$

Kulut 0,95-kertaistuvat joka vuosi. Tutkitaan taulukon avulla kulujen määrää.

Vuodet	Kulujen määrä (milj, €)
1	$1,8 \cdot 0,95$
2	$1,8 \cdot 0,95^2$
3	$1,8 \cdot 0,95^3$
x	$1,8 \cdot 0,95^x$

Kulujen määrää voidaan mallintaa funktiolla $f(x) = 1,8 \cdot 0,95^x$ (milj. €).

b) Kun kulut on pudotettu 1 miljoonaan, funktio saa arvon 1. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1 \\
1,8 \cdot 0,95^x &= 1 \\
x &= 11,459... \\
x &\approx 11
\end{aligned}
$$

11 vuoden kuluttua kulut on pudotettu 1 miljoonaan euroon.

120.

a) Syntyvyys laskee 2,8 % joka vuosi. Lasketaan laskun prosenttikerroin.

$100\,\% - 2{,}8\,\% = 97{,}2\,\% = 0{,}972$

Syntyvyys 0,972-kertaistuu joka vuosi. Tutkitaan taulukon avulla syntyvien määrää.

Vuosi 2016 lähtien	Syntyvien määrä
1	$55\,040 \cdot 0{,}972$
2	$55\,040 \cdot 0{,}972^2$
3	$55\,040 \cdot 0{,}972^3$
x	$55\,040 \cdot 0{,}972^x$

Syntyvien määrää voidaan mallintaa lausekkeella $55\,040 \cdot 0{,}972^x$.

b) Kun lapsia syntyy 50 000, lauseke saa arvon 50 000. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$55\,040 \cdot 0{,}972^x = 50\,000$$
$$x = 3{,}381...$$
$$x \approx 3$$

Kolmen vuoden kuluttua lapsia syntyy 50 000.

c) Kun lapsia syntyy 63 000, lauseke saa arvon 63 000. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$55\,040 \cdot 0{,}972^x = 63\,000$$
$$x = -4{,}756...$$
$$x \approx -5$$

Vuonna $2016 - 5 = 2011$ lapsia syntyi 63 000.

121.

a) Kun uraanista on hajonnut 90 %, sitä on jäljellä
$100\ \% - 90\ \% = 10\ \% = 0{,}1$.

Lasketaan, kuinka monta grammaa uraania on jäljellä.

$4500\text{ g} \cdot 0{,}1 = 450\text{ g}$

Kun uraania on jäljellä 450 g, funktio saa arvon 450. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} N(t) &= 450 \\ 4500 \cdot e^{-0{,}0099t} &= 450 \\ t &= 232{,}584... \\ t &\approx 233 \end{aligned}$$

233 vuodessa uraania on kulunut 90 %.

b) Lasketaan puolet alkuperäisestä uraanin määrästä

$\frac{4500\text{ g}}{2} = 2250\text{ g}$

Kun uraania on puolet jäljellä, funktio saa arvon 2250. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} N(t) &= 2250 \\ 4500 \cdot e^{-0{,}0099t} &= 2250 \\ t &= 70{,}014... \\ t &\approx 70 \end{aligned}$$

Uraanin puoliintumisaika on 70 vuotta.

122.

a) $3^{3x-4}=1$

$3^{3x-4}=3^0$

$3x-4=0$

$3x=4 \qquad |:3$

$x=\frac{4}{3}$

b) $2^{5-2x}=8^{x+1}$

$2^{5-2x}=(2^3)^{x+1}$

$2^{5-2x}=2^{3x+3}$

$5-2x=3x+3$

$5x=2 \qquad |:5$

$x=\frac{2}{5}$

c) $49^{2x-4}=\frac{1}{7}$

$(7^2)^{2x-4}=7^{-1}$

$7^{4x-8}=7^{-1}$

$4x-8=-1$

$4x=7 \qquad |:4$

$x=\frac{7}{4}$

123.

a) $2 \cdot 5^x = 8 \qquad \Big| : 2$

$5^x = 4$

$x = \log_5 4$

b) $\dfrac{4^x}{3} = 11 \qquad \Big| \cdot 3$

$4^x = 33$

$x = \log_4 33$

c) $5 \cdot e^x - 12 = 3$

$5 \cdot e^x = 15 \qquad \Big| : 5$

$e^x = 3$

$x = \ln 3$

124.

a) Platinan hinta on 363 \$, kun funktion arvo on 363. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} f(x) &= 363 \\ 180 \cdot e^{0,14x} &= 363 \\ x &= 5,010... \\ x &\approx 5 \end{aligned}$$

Vuonna $1992 + 5 = 1997$ platinan hinta oli 363 \$.

b) Platinan hinta on 1400 \$, kun funktion arvo on 1400. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1400 \\ 180 \cdot e^{0,14x} &= 1400 \\ x &= 14,651... \\ x &\approx 15 \end{aligned}$$

Vuonna $1992 + 15 = 2007$ platinan hinta oli 1400 \$.

125.

a) Muodostetaan auton hinnan 12 200 avulla yhtälö ja ratkaistaan se.

$$h(x) = 12\,200$$
$$0{,}92^x \cdot 18\,500 = 12\,200$$
$$x = 4{,}993...$$
$$x \approx 5$$

5 vuoden kuluttua auton hinta on 12 200 €.

b) Muodostetaan auton hinnan 8000 avulla yhtälö ja ratkaistaan se.

$$h(x) = 8000$$
$$0{,}92^x \cdot 18\,500 = 8000$$
$$x = 10{,}054$$
$$x \approx 10$$

Niilo on omistanut auton 10 vuotta.

126.

a) Hiivan massa kasvaa joka tunti 0,80 %. Lasketaan kasvun prosenttikerroin.

$100\ \% + 0,80\ \% = 100,8\% = 1,008$

Hiivan massa 1,008-kertaistuu joka tunti. Tutkitaan taulukon avulla hiivan massan muutosta.

Tunti	Hiivan massa (g)
1	$0,58 \cdot 1,008$
2	$0,58 \cdot 1,008^2$
3	$0,58 \cdot 1,008^3$
t	$0,58 \cdot 1,008^t$

Hiivan massaa voidaan mallintaa funktiolla $f(t) = 0,58 \cdot 1,008^t$ (g).

b) Grammoina hiivan kaksinkertainen massa on $0,58\text{ g} \cdot 2 = 1,16\text{ g}$.

Hiivan massa on 1,16 g, kun funktio saa arvon 1,16. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} f(t) &= 1,16 \\ 0,58 \cdot 1,008^t &= 1,16 \\ t &= 86,989... \\ t &\approx 87 \end{aligned}$$

Hiivan massa kaksinkertaistuu 87 tunnin jälkeen.

2.3 Potenssiyhtälö

127.

a) Kuvasta nähdään, että toisen funktion kuvaaja A kulkee aina x-akselilla tai sen yläpuolella. Tällainen funktio saa vain positiivisia arvoja tai arvon nolla.

Koska funktion $g(x) = x^4$ eksponenttina on parillinen luku, se saa aina vähintään arvon nolla (mikä tahansa luku korotettuna parilliseen potenssiin on aina vähintään nolla). Niinpä A on funktion g kuvaaja ja B funktion f kuvaaja.

b) Kuvaajan avulla on etsittävä sellainen muuttujan arvo x, että funktio f saa arvon -1.

$$\begin{aligned} f(x) &= -1 \\ x^3 &= -1 \\ x &\approx -1 \end{aligned}$$

c) Kuvaajan avulla on etsittävä sellainen muuttujan arvo x, että funktion f ja g saa saman arvon.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^3 &= x^4 \\ x &= 0 \text{ tai } x = 1 \end{aligned}$$

128.

Kuvasta nähdään, että funktion kuvaajat A ja C kulkevat aina x-akselilla tai sen yläpuolella. Tällaiset funktiot saavat vain positiivisia arvoja tai arvon nolla. Koska funktioiden $h(x) = x^6$ ja $f(x) = x^4$ eksponenttina on parillinen luku, ne saavat aina vähintään arvon nolla (mikä tahansa luku korotettuna parilliseen potenssiin on aina vähintään nolla).

Koska kuvaaja A kasvaa jyrkemmin kuin kuvaaja C, niin kuvaaja $\mathrm{A} = h(x)$ ja kuvaaja $\mathrm{C} = f(x)$.

Funktion kuvaaja B kulkee aina x-akselilla tai sen alapuolella. Tällainen funktio saavat vain negatiivisia arvoja tai arvon nolla. Koska funktion $g(x) = -x^4$ eksponenttina on parillinen luku ja kertoimena on -1, se saa aina enintään arvon nolla. Kuvaaja $\mathrm{B} = g(x)$.

129.

a) $2x^2 - 5 = 27$

$$2x^2 = 32 \qquad \Big| : 2$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

b) $-x^3 = 1000 \qquad \Big| : (-1)$

$$x^3 = -1000$$

$$x = \sqrt[3]{-1000}$$

$$x = -10$$

c) $x^7 = 2$

$$x = \sqrt[7]{2}$$

d) $3x^8 - 9 = 0$

$$3x^8 = 9 \qquad \Big| : 3$$

$$x^8 = 3$$

$$x = \pm\sqrt[8]{3}$$

130.

a) Funktio leikkaa x-akselin, kun $y = 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^3 + 3 &= 0 \\ x^3 &= -3 \\ x &= \sqrt[3]{-3} \end{aligned}$$

Funktio f leikkaa x-akselin pisteessä $\left(\sqrt[3]{-3}, 0\right)$.

b) Lasketaan yhtälö.

$$\begin{aligned} f(x) &= -5 \\ x^3 + 3 &= -5 \\ x^3 &= -8 \\ x &= \sqrt[3]{-8} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

131.

a) Funktion nollakohdat lasketaan yhtälöstä $g(x)=0$.

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ 2x^4 - 10 &= 0 \\ 2x^4 &= 10 \qquad \Big| :2 \\ x^4 &= 5 \\ x &= \pm\sqrt[4]{5} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} g(x) &= 4 \\ 2x^4 - 10 &= 4 \\ 2x^4 &= 14 \qquad \Big| :2 \\ x^4 &= 7 \\ x &= \pm\sqrt[4]{7} \end{aligned}$$

132.

a) Pallon, jonka säde on 3,60 cm, tilavuus lasketaan sijoittamalla $r = 3{,}60$ funktion $V(r)$ lausekkeeseen.

$$V(3{,}6) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3{,}6^3 = 195{,}4321... \approx 195$$

Pallon tilavuus on 195 cm^3.

b) Säde saadaan tilavuuden avulla ratkaisemalla yhtälö $V(r) = 1260$.

$$\begin{aligned} V(r) &= 1260 \\ \frac{4}{3}\pi r^3 &= 1260 \\ r &= 6{,}700... \\ r &\approx 6{,}70 \end{aligned}$$

Pallon säde on 6,70 cm.

133.

a) Aineen, jonka konsentraatio on 1,2 mol/l, reaktion nopeus lasketaan sijoittamalla x = 1,2 funktion $v(x)$ lausekkeeseen.

$$v(1,2) = 0,0028 \cdot 1,2^4 = 0,005806... \approx 0,0058$$

Reaktion nopeus on $0,0058 \, \frac{\text{mol/l}}{\text{s}}$.

b) Konsentraatio saadaan reaktion nopeuden avulla ratkaisemalla yhtälö $v(x) = 0,078$.

$$\begin{aligned} v(x) &= 0,078 \\ 0,0028x^4 &= 0,078 \\ x &= \pm 2,297... \\ x &\approx \pm 2,30 \end{aligned}$$

Koska konsentraatio ei voi olla negatiivista, x = 2,30. Lähtöaineen konsentraatio on $2,30 \text{ mol/l}$.

134.

Auton nopeus saadaan jarrutusmatkan avulla ratkaisemalla yhtälö $f(x)=85$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 85 \\
\frac{1}{4000}x^3 &= 85 \\
x &= 69{,}795... \\
x &\approx 70
\end{aligned}
$$

Auton nopeus oli 70 km/h.

135.

a) Fluorin elektronegatiivisuus voidaan laskea sijoittamalla $m = 19$ funktion $e(m)$ yhtälöön.

$$e(19) = 7{,}3463 \cdot 19^{-\frac{9}{40}} = 3{,}7874... \approx 3{,}8$$

Fluorin elektronegatiivisuus on 3,8.

b) Bromin massa voidaan laskea sen elektronegatiivisuus arvon avulla ratkaisemalla yhtälö $e(m) = 2{,}8$.

$$\begin{aligned} e(m) &= 2{,}8 \\ 7{,}3463m^{-\frac{9}{40}} &= 2{,}8 \\ m &= 72{,}748... \\ m &\approx 73 \end{aligned}$$

Bromin massa on 73.

136.

a) Vuodesta 2000 vuoteen 2011 on kulunut aikaa $2011-2000=11$ vuotta.

Merkitään vuotuista muutosta kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k*. Tällöin kahvipaketin hinta *k*-kertaistuu joka vuosi.

Vuosi	Kahvipaketin hinta (€)
1	$2,65\cdot k$
2	$2,65\cdot k^2$
11	$2,65\cdot k^{11}$

11 vuoden kuluttua kahvipaketin hinta oli 4,25 €. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan prosenttikerroin *k*.

$$\begin{aligned} 2,65\cdot k^{11} &= 4,25 \\ k &= 1,043877... \end{aligned}$$

Päätellään kertoimesta prosentuaalinen kasvu.

$$1,043877...-1=0,043877...=4,3877...\ \% \approx 4,4\ \%$$

b) Vuodesta 2000 vuoteen 2016 on kulunut aikaa $2016-2000=16$ vuotta.

Merkitään hintojen laskua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella x eli gigatavun hinta kovalevyssä x-kertaistuu joka vuosi. 16 vuoden kuluttua hinta on $2,90 \cdot x^{16}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 2,90 \cdot x^{16} &= 0,10 \\ x &= \pm 0,81021... \end{aligned}$$

Vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi eli $x = 0,81021\ldots$

Päätellään kertoimesta prosentuaalinen muutos.

$1-0,81021...=0,18978...=18,978...\,\% \approx 19\,\%$

137.

Merkitään solujen määrän nousua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k*. Tällöin solut *k*-kertaistuvat joka tunti. 10 tunnin kuluttua soluja on $550 \cdot k^{10}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k*.

$$550 \cdot k^{10} = 780$$
$$k = \pm 1{,}03555...$$

Vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi eli $x = 1{,}03555\ldots$

Päätellään kertoimesta prosentuaalinen muutos.

$$1{,}03555... - 1 = 0{,}03555... = 3{,}555...\ \% \approx 3{,}6\ \%$$

Solujen määrä kasvoi joka tunti 3,6 %.

138.

Oletetaan, että tritium hajoaa joka kuukausi yhtä monta prosenttia.

Merkitään tritiumin alkuperäistä massaa kirjaimella m, joten 148 kuukauden kuluttua sen massa on 0,5 m. Merkitään tritiumin massan pienenemistä kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella x eli tritiumin massa x-kertaistuu joka kuukausi. 148 kuukauden kuluttua massa on $m \cdot x^{148}$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$m \cdot x^{148} = 0,5m$$
$$x = \pm 0,9953275...$$

Vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi eli $x = 0,9953275\ldots$

Päätellään kertoimesta kuukausittainen prosentuaalinen muutos.

$$1 - 0,9953275... = 0,0046724... = 0,46724...\ \% \approx 0,47\ \%$$

Tritiumista hajoaa 0,47 % yhden kuukauden aikana.

139.

Neljän vuoden kuluttua henkilöstöä on jäljellä $1844-350=1494$. Merkitään henkilöstön vähentämistä kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella x eli henkilöstö x-kertaistuu joka vuosi. 4 vuoden kuluttua henkilöstöä on jäljellä $1\,844\cdot x^4$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$1\,844\cdot x^4=1\,494$$
$$x=\pm 0,94874...$$

Vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi eli x = 0,94874… Päätellään kertoimesta prosentuaalinen muutos.

$$1-0,94874...=0,05125...=5,125...\,\%\approx 5,1\,\%$$

Vuotuinen vähentämistarve on 5,1 %.

140.

Viiden vuoden kuluttua sisäisen matkalipun hinta on
$3,20\text{ €} + 0,80\text{ €} = 4,0\text{ €}$.

Merkitään hinnan nousua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella x eli lipun hinta x-kertaistuu joka vuosi. 5 vuoden kuluttua lipun hinta on
$3,20 \cdot x^5$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$
\begin{aligned}
3,20 \cdot x^5 &= 4,0 \\
x &= 1,04563...
\end{aligned}
$$

Päätellään kertoimesta prosentuaalinen muutos.

$1,04563... - 1 = 0,04563... = 4,563...\ \% \approx 4,6\ \%$

Lipun hintaa on korotettava joka vuosi 4,6 %.

141.

a) $-x^8 + 2 = -3$

$$-x^8 = -5 \qquad \Big| : (-1)$$

$$x^8 = 5$$

$$x = \pm\sqrt[8]{5}$$

b) $-2x^3 - 4 = -2$

$$-2x^3 = 2 \qquad \Big| : (-2)$$

$$x^3 = -1$$

$$x = \sqrt[3]{-1}$$

$$x = -1$$

c) $\dfrac{3x^4}{8} = 6 \qquad \Big| \cdot 8$

$$3x^4 = 48 \qquad \Big| : 3$$

$$x^4 = 16$$

$$x = \pm\sqrt[4]{16}$$

$$x = \pm 2$$

142.

a) Merkitään sivun pituutta kirjaimella r. Kuution tilavuus on r^3. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan r.

$$
\begin{aligned}
r^3 &= 128 \\
r &= 5,03968... \\
r &\approx 5,04
\end{aligned}
$$

Kuution sivun pituus on 5,04 cm.

b) Kuutiossa on kuusi sivun neliön suuruista tahkoa. Lasketaan kuution kokonaispinta-ala.

$$A = 6 \cdot r^2 = 6 \cdot 5,04^2 = 152,4096 \approx 152$$

Kuution pinta-ala on 152 cm^2.

143.

a) Kuun säde lasketaan putoamiskiihtyvyyden ja massan avulla yhtälöstä $M(x) = 7,342 \cdot 10^{22}$.

$$M(x) = 7,342 \cdot 10^{22}$$
$$\frac{1,622 \cdot x^2}{6,674 \cdot 10^{-11}} = 7,342 \cdot 10^{22}$$
$$x = 1\,738\,100,427...$$
$$x \approx 1\,738\,000$$

Kuun säde on 1 738 000 m = 1738 km.

b) Lasketaan Jupiterin säde yhtälöstä $M(x) = 1,899 \cdot 10^{27}$.

$$M(x) = 1,899 \cdot 10^{27}$$
$$\frac{25,90 \cdot x^2}{6,674 \cdot 10^{-11}} = 1,899 \cdot 10^{27}$$
$$x = 69\,952\,896,451... \text{ m}$$
$$x = 69\,952,896... \text{ km}$$

Oletetaan, että Jupiter on pallon muotoinen. Lasketaan Jupiterin tilavuus yhtälöstä $V = \frac{4}{3} \cdot x^3$.

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot x^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 69\,952,896...^3 = 1,4338... \cdot 10^{15} \approx 1,434 \cdot 10^{15} \text{ km}^3$$

144.

Merkitään valmistuneiden määrää kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella x eli valmistuneiden määrä x-kertaistuu joka vuosi. 6 vuoden kuluttua valmistuneita on $3900 \cdot x^6$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned} 3900 \cdot x^6 &= 4500 \\ x &= \pm 1,0241... \end{aligned}$$

Vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi eli $x = 1,0241…$ Päätellään kertoimesta prosentuaalinen muutos.

$$1,0241... - 1 = 0,0241... = 2,41...\ \% \approx 2,4\ \%$$

Vuotuiseksi kasvutavoitteeksi on asetettava 2,4 %.

145.

a) Merkitään koiran aivojen massaa kirjaimella *x* ja sijoitetaan kaavaan *EQ* = 1,0 ja kehon massa on 10. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *x*.

$$1{,}0=\frac{x}{0{,}012\cdot(10)^{\frac{2}{3}}}$$

$$x=0{,}05569...$$

$$x\approx 0{,}056\text{ kg}=56\text{ g}$$

b) Sijoitetaan tunnetut arvot kaavaan ja merkitään kehon massaa kirjaimella *x*. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *x*.

$$7{,}5=\frac{1{,}35}{0{,}012\cdot x^{\frac{2}{3}}}$$

$$x=58{,}094...$$

$$x\approx 58\text{ kg}$$

2.4 Sovelluksia

146.

a) Mittaushetkeä kuvaa muuttujan arvo $x = 0$. Sijoitetaan arvo funktioon h.

$h(0) = 13,0 \cdot 0,985^{0} = 13,0$ mg/l

b) Lammen happipitoisuuden muutos voidaan päätellä muutosta kuvaavasta prosenttikertoimesta 0,985.

$1 - 0,985 = 0,015 = 1,5\ \%$

c) Happipitoisuus 12 kuukauden kuluttua saadaan sijoittamalla $x = 12$ funktioon h.

$h(12) = 13,0 \cdot 0,985^{12} = 10,843... \approx 10,8$ mg/l

d) Muodostetaan epäyhtälö $h(x) < 5$ ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} h(x) &< 5 \\ 13,0 \cdot 0,985^{x} &< 5 \\ x &> 63,221... \end{aligned}$$

Joten 64 kuukauden kuluttua happipitoisuus alittaa 5,00 mg/l rajan.

147.

a) Populaation tilanne 24 tunnin kuluttua saadaan sijoittamalla $t = 24$ funktioon N.

$$N(24) = 1000 \cdot 1{,}25^{24} = 211\,758{,}236... \approx 212\,000$$

b) Populaation kasvu voidaan päätellä muutosta kuvaavasta prosenttikertoimesta 1,25.

$$1{,}25 - 1 = 0{,}25 = 25\ \%$$

Populaatio kasvaa 25 % joka tunti.

c) Muodostetaan epäyhtälö $N(t) > 1\,000\,000$ ja ratkaistaan siitä t.

$$\begin{aligned} N(t) &> 1\,000\,000 \\ 1000 \cdot 1{,}25^{t} &> 1\,000\,000 \\ t &> 30{,}9565... \end{aligned}$$

Populaation koko ylittää miljoonan 31 tunnissa.

148.

a) Virusten määrän muutos voidaan päätellä muutosta kuvaavasta prosenttikertoimesta $e^{0,05}$.

$e^{0,05} - 1 = 0,05127... = 5,127...\,\% \approx 5,1\,\%$

Virusten määrä kasvaa 5,1 % tunnissa.

b) Virusten määrä 24 tunnin kuluttua saadaan sijoittamalla $x = 24$ funktioon f.

$f(24) = 150 \cdot e^{0,05 \cdot 24} = 498,017... \approx 500$

24 tunnin kuluttua potilaassa on 500 virusta.

c) Lasketaan x epäyhtälöstä $f(x) > 2\,000$.

$$\begin{aligned} f(x) &> 2\,000 \\ 150 \cdot e^{0,05x} &> 2\,000 \\ x &> 51,805... \end{aligned}$$

52 tunnin kuluttua virusten määrä ylittää 2000.

149.

a) Merkitään sijoitus summaa kirjaimella *a* (*a* > 0). Sijoitus on kaksinkertaistunut, kun pääoma on 2*a*.

Koska summa kasvaa 2,4 % vuodessa, se 1,024-kertaistuu joka vuosi.

Merkitään kysyttyjen vuosien määrää kirjaimella *x*, jolloin sijoituksen summa on *x*:n vuoden kuluttua $a \cdot 1{,}024^x$.

Merkitään lauseke yhtä suureksi kuin 2*a* ja ratkaistaan yhtälöstä *x*.

$$\begin{aligned} a \cdot 1{,}024^x &= 2a \\ x &= 29{,}2263... \\ x &\approx 29 \end{aligned}$$

Sijoitus kaksinkertaistuu 29 vuodessa.

b) Merkitään kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k*. Summa siis *k*-kertaistuu vuosittain. 15 vuoden kuluttua summa on $a \cdot k^{15}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$\begin{aligned} a \cdot k^{15} &= 2a \\ k &= 1{,}04729... \end{aligned}$$

Vuotuisen korotuksen on siis oltava

$$1{,}04729... - 1 = 0{,}04729... = 4{,}729...\ \% \approx 4{,}7\ \%$$

150.

a) Merkitään asuntojen määrää kirjaimella a ($a > 0$). Asuntojen määrä on kasvanut 5,0 %, kun asuntoja on $1{,}05a$.

Koska asuntokanta kasvaa 0,20 % vuodessa, se 1,002-kertaistuu joka vuosi.

Merkitään kysyttyjen vuosien määrää kirjaimella x, jolloin asuntojen määrä x:n vuoden kuluttua on $a \cdot 1{,}002^x$.

Merkitään lauseke yhtä suureksi kuin $1{,}05a$ ja ratkaistaan yhtälöstä x.

$$\begin{aligned} a \cdot 1{,}002^x &= 1{,}05a \\ x &= 24{,}419... \\ x &\approx 24 \end{aligned}$$

24 vuoden kuluttua asuntojen määrä on kasvanut 5,0 %.

b) Merkitään kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k. Summa siis k-kertaistuu vuosittain. 10 vuoden kuluttua summa on $a \cdot k^{10}$. Asuntojen määrä on kasvanut 4,0 %, kun asuntoja on $1{,}04a$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä k.

$$\begin{aligned} a \cdot k^{10} &= 1{,}04a \\ k &= \pm 1{,}003929... \end{aligned}$$

Ratkaisuksi käy vain positiivinen luku, joten $k = 1{,}003929…$
Vuotuisen kasvun on siis oltava

$$1{,}003929... - 1 = 0{,}003929... = 0{,}3929...\ \% \approx 0{,}39\ \%$$

151.

a) Merkitään alkuperäistä liikevaihtoa kirjaimella a.

Kahdenkymmen vuoden jälkeen liikevaihto on $10a$.

Merkitään kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k*.

Liikevaihto siis *k*-kertaistui joka vuosi. 20 vuoden kuluttua liikevaihto on $a \cdot k^{20}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$a \cdot k^{20} = 10a$$
$$k = \pm 1,122018...$$

Ratkaisuksi käy vain positiivinen luku, joten $k = 1,122018\ldots$

Vuotuisen kasvun on siis oltava

$1,122018... - 1 = 0,122018... = 12,2018...\ \% \approx 12,2\ \%$

152.

Merkitään vuonna 1990 päästöjen määrää kirjaimella *a*.

2008 – 1990 = 18 vuoden päästä päästöjen määrä oli 39 % suuremmat eli 1,39*a*.

Merkitään kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k*.

Päästöjen määrä *k*-kertaistui vuosittain. 18 vuoden kuluttua päästöt ovat $a \cdot k^{18}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$
\begin{aligned}
a \cdot k^{18} &= 1,39a \\
k &= \pm 1,018463...
\end{aligned}
$$

Ratkaisuksi käy vain positiivinen luku, joten *k* = 1,018463…

Vuotuisen kasvun on siis oltava

$1,018463... - 1 = 0,018463... = 1,8463...\ \% \approx 1,85\ \%$

2015 – 1990 = 25 vuoden päästä päästöjä on:

$a \cdot 1,0185^{25} = 1,5813...a \approx 1,58a$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia vuoden 2015 päästöt ovat verrattuna vuoden 1990 päästöihin.

$$\frac{1,58a - a}{a} = \frac{0,58a}{a} = 0,58 = 58\ \%$$

153.

a) Merkitään liikevaihdon kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k* eli liikevaihto *k*-kertaistuu joka vuosi.

Vuodet	Liikevaihto (milj. €)
0	58
1	$58\cdot k$
2	$58\cdot k^2$
3	$58\cdot k^3$

Viiden vuoden kuluttua liikevaihto on siis $58\cdot k^5$ (milj. €).

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$58\cdot k^5 = 110$$
$$k = 1{,}136561...$$

Vuotuisen kasvun on siis oltava

$$1{,}136561..-1 = 0{,}136561... = 13{,}6561...\ \% \approx 14\ \%$$

b) Merkitään vuosia kirjaimella *x*. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *x*.

$$58\cdot 1{,}136561...^x = 190$$
$$x = 9{,}26965...$$
$$x \approx 9{,}3$$

9,3 vuoden kuluttua liikevaihdon ennustetaan olevan 190 miljoonaa euroa.

154.

a) Merkitään majavien määrän kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k* eli majavien määrä *k*-kertaistuu joka vuosi.

Vuosi 1930 lähtien	Majavien määrä
0	60
1	$60 \cdot k$
2	$60 \cdot k^2$
3	$60 \cdot k^3$

Viidenkymmenen vuoden päästä majavien määrä on siis $60 \cdot k^{50}$.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k*.

$$60 \cdot k^{50} = 4\,000$$
$$k = \pm 1,087622...$$

Koska vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi, $k = 1,087622\ldots$

Vuotuisen kasvun on siis oltava

$$1,087622.. - 1 = 0,087622... = 8,7622...\,\% \approx 8,8\,\%$$

b) Merkitään vuosia kirjaimella *x*. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *x*.

$$60 \cdot 1,087622478...^{x} = 12\,000$$
$$x = 63,07964...$$
$$x \approx 63$$

63 vuodessa kanta kasvaa 12 000 majavaan.

155.

Merkitään väkiluvun kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k* eli väkiluku *k*-kertaistuu joka vuosi.

Vuosi 2004 lähtien	Väkiluku (mrd.)
0	6,4
1	$6{,}4 \cdot k$
2	$6{,}4 \cdot k^2$
3	$6{,}4 \cdot k^3$

Vuodesta 2004 vuoteen 2010 on 6 vuotta. 2010 väkiluku on $6{,}4 \cdot k^6$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k*.

$$6{,}4 \cdot k^6 = 6{,}8$$
$$k = \pm 1{,}0101553...$$

Koska vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi, $k = 1{,}0101553\ldots$

Nyt tiedetään väkiluvun kasvua kuvaava prosenttikerroin.

Merkitään vuosien määrää kirjaimella *x*.

Lasketaan, kuinka monta vuotta menee, että väkiluku ylittää 10 miljardia.

$$6{,}4 \cdot 1{,}0101553...^x > 10$$
$$x > 44{,}16888$$

Joten vuosia pitää olla 45. Lasketaan, mikä vuosi on tuolloin.

$$2004 + 45 = 2049$$

156.

Merkitään aktiivisuuden laskua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k* eli aktiivisuus *k*-kertaistuu joka vuorokausi.

Vuorokausi	Aktiivisuus (kBq)
0	25,0
1	$25{,}0 \cdot k$
2	$25{,}0 \cdot k^2$
3	$25{,}0 \cdot k^3$

Viiden vuorokauden kuluttua näytteen aktiivisuus on $25{,}0 \cdot k^5$.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k*.

$$25{,}0 \cdot k^5 = 16{,}2$$
$$k = 0{,}9168852...$$

Aktiivisuus on pudonnut puoleen, kun aktiivisuus on
$\frac{25{,}0\ \text{kBq}}{2} = 12{,}5\ \text{kBq}$.

Merkitään vuorokausia kirjaimella *x*. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *x*.

$$25{,}0 \cdot 0{,}916885281...^x = 12{,}5$$
$$x = 7{,}988058...$$
$$x \approx 8{,}0$$

Puoliintumisaika on 8 vuorokautta.

Kymmenen vuorokautta ennen ensimmäistä mittausta näytteen aktiivisuus on

$$25{,}0 \cdot 0{,}9168852...^{-10} = 59{,}5374... \approx 59{,}5\ \text{kBq}.$$

157.

a) Merkitään alkuperäistä eliniänodotetta kirjaimella a. 50 vuoden kuluttua eliniänodote siis $1{,}175a$.

Merkitään vuotuista kasvamista kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli eliniänodote k-kertaistuu joka vuosi. 50 vuoden kuluttua se on $a \cdot k^{50}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$a \cdot k^{50} = 1{,}175a$$
$$k = \pm 1{,}00323057...$$

Koska vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi, $k = 1{,}00323057\ldots$

Vuotuinen kasvu on siis
$1{,}00323057... - 1 = 0{,}00323057... = 0{,}323057...\,\% \approx 0{,}323\,\%$

b) Merkitään kysyttyä aikaa kirjaimella x eli eliniänodote on x:n vuoden kuluttua $a \cdot 1{,}00323057...^x$.

Kun eliniänodote on kaksinkertainen, se on $2a$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$a \cdot 1{,}00323057...^x = 2a$$
$$x = 214{,}905...$$
$$x \approx 215$$

Eliniänodote kaksinkertaistuu 215 vuodessa.

158.

a) Merkataan nykyisiä päästöjen määrää kirjaimella a. 4 vuoden kuluttua päästöjen määrä on 0,8a.

Merkitään vuotuista vähenemistä kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli päästöjen määrä k-kertaistuu joka vuosi. 4 vuoden kuluttua se on $a \cdot k^4$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$a \cdot k^4 = 0,8a$$
$$k = \pm 0,94574160...$$

Koska vain positiivinen luku kelpaa ratkaisuksi, k = 0,94574160…

Vuotuinen väheneminen on siis
$1 - 0,94574160... = 0,054258390... = 5,4258390...\,\% \approx 5,4\,\%$

b) Merkitään kysyttyä aikaa kirjaimella x eli päästöjen määrä on x:n vuoden kuluttua $a \cdot 0,94574160...^x$

Kun päästöt on saatu vähenemään alle puoleen, se on 0,5a.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$a \cdot 0,94574160...^x < 0,5a$$
$$x > 12,425...$$

Päästöjen määrä vähenee alle puoleen 13 vuoden kuluttua.

159.

a) Merkataan nykyistä rakettien nopeutta kirjaimella a. 50 vuoden kuluttua rakettien nopeus on $2a$.

Merkitään vuotuista kasvamista kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli raketin nopeus k-kertaistuu joka vuosikymmen. 50 vuoden kuluttua se on $a \cdot k^5$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$a \cdot k^5 = 2a$$
$$k = 1{,}14869835...$$

Vuosikymmenessä rakettien nopeus kasvaa
$1{,}14869835... - 1 = 0{,}14869835... = 14{,}869835...\,\% \approx 15\,\%$.

b) Merkitään kysyttyä aikaa kirjaimella x eli rakettien nopeus on x:n vuosikymmenen kuluttua $a \cdot 1{,}14869835...^x$

Kun nopeus on vähintään kymmenkertainen, se on $10a$.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan siitä x.

$$a \cdot 1{,}14869835...^x > 10a$$
$$x > 16{,}609...$$

Rakettien nopeus kymmenkertaistuu 170 vuodessa.

160.

a) Alkuhetkeä kuvaa muuttujan arvo $t = 0$. Sijoitetaan arvo funktioon f.

$f(0) = 383 \cdot 1{,}0104^0 = 383$ (ppm)

b) Muodostetaan yhtälö $f(t) = 300$ ja ratkaistaan siitä t.

$$\begin{aligned} f(t) &= 300 \\ 383 \cdot 1{,}0104^t &= 300 \\ t &= -23{,}6077... \\ t &\approx -24 \end{aligned}$$

c) Pitoisuuden arvo 25 vuoden kuluttua saadaan sijoittamalla arvo $t = 25$ funktioon f.

$f(25) = 383 \cdot 1{,}0104^{25} = 496{,}0577... \approx 496$ (ppm)

161.

a) Merkitään nykyistä palkkaa kirjaimella a. 5 vuoden kuluttua palkka on $1{,}048a$.

Merkitään vuotuista kasvamista kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli palkka k-kertaistuu joka vuosi. Viiden vuoden kuluttua se on $a \cdot k^5$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$
\begin{aligned}
a \cdot k^5 &= 1{,}048a \\
k &= 1{,}009420816...
\end{aligned}
$$

Vuotuinen palkankorotusprosentti on

$1{,}009420816... - 1 = 0{,}009420816... = 0{,}9420816...\,\% \approx 0{,}94\,\%$.

b) Merkitään nykyistä palkkaa kirjaimella a. 3 vuoden kuluttua palkka on $1{,}04a$.

Merkitään vuotuista kasvamista kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli palkka k-kertaistuu joka vuosi. Kolmen vuoden kuluttua se on $a \cdot k^3$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$
\begin{aligned}
a \cdot k^3 &= 1{,}04a \\
k &= 1{,}0131594...
\end{aligned}
$$

Vuotuinen palkankorotusprosentti on

$1{,}0131594... - 1 = 0{,}0131594... = 1{,}31594...\,\% \approx 1{,}3\,\%$.

162.

a) Merkitään alkuperäistä käyttäjämäärää kirjaimella a. Kolmen vuoden kuluttua käyttäjämäärä on 0,6a.

Merkitään vuotuista vähenemistä kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli käyttäjämäärä k-kertaistuu joka vuosi. 3 vuoden kuluttua se on $a \cdot k^3$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$a \cdot k^3 = 0,6a$$
$$k = 0,84343266...$$

Vuotuinen väheneminen on siis

$$1 - 0,84343266... = 0,15656733... = 15,656733...\ \% \approx 16\ \%.$$

b) Merkitään kysyttyä aikaa kirjaimella x eli kävijämäärä on x:n vuoden kuluttua $a \cdot 0,84343266...^x$.

Kun käyttäjämäärä on 20 %, se on 0,2a.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$a \cdot 0,84343266...^x = 0,2a$$
$$x = 9,45197...$$
$$x \approx 9$$

Yhdeksän vuoden kuluttua Facebook-palvelun käyttäjiä on 20 % 13-vuotiaista.

163.

a) Merkitään alkuperäistä C-14-pitoisuutta kirjaimella a. 5730 vuoden päästä C-14-pitoisuus on 0,5a.

Merkitään vuotuista vähenemistä kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella k eli C-14-pitoisuus k-kertaistuu joka vuosikymmen. 5730 vuoden kuluttua se on $a \cdot k^{573}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k.

$$a \cdot k^{573} = 0,5a$$
$$k = 0,99879105...$$

Merkitään kysyttyä aikaa kirjaimella x eli C-14-pitoisuus on x:n vuosikymmenen kuluttua $a \cdot 0,99879105..^{x}$.

Kun C-14-pitoisuus on 9 %, se on 0,09a.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$a \cdot 0,99879105^{x} = 0,09a$$
$$x = 1990,561...$$
$$x \approx 2000$$

Hain hammas on 2000 vuotta vanha.