1 Lineaarinen malli

1.1 Suora matemaattisena mallina

1.

Tarkastellaan kankaan hinnan ja ostetun metrimäärän riippuvuutta taulukon avulla, kun kankaan metrihinta on 12 €.

Määrä (m)	Hinta (€)
1	12
2	$12 \cdot 2 = 24$
3	$12 \cdot 3 = 36$
4	$12 \cdot 4 = 48$
x	$12 \cdot x = 12x$

Jos kankaan määrää merkitään kirjaimella x (m), kankaan hinnan riippuvuutta määrästä voidaan kuvata lausekkeella $12x$. Merkitään lauseketta $f(x) = 12x$.

a) Lasketaan hinta lausekkeen avulla.

$f(2) = 12 \cdot 2 = 24$ €

b) Muutetaan annetut arvot samoiksi yksiköiksi, 150 cm = 1,5 m.
Lasketaan hinta lausekkeen avulla.

$f(1{,}5) = 12 \cdot 1{,}5 = 18$ €

c) Lasketaan hinta lausekkeen avulla.

$f(x) = 12 \cdot x = 12x$ €

2.

a)

x	y
0	0
1	3
2	6
3	9
x	$3x$

y:n riippuvuutta x:stä voidaan kuvata lausekkeella $3x$, joten riippuvuutta kuvaava yhtälö on $y = 3x$.

b)

x	y
-3	12
-2	8
0	0
1	-4
x	$-4x$

y:n riippuvuutta x:stä voidaan kuvata lausekkeella $-4x$, joten riippuvuutta kuvaava yhtälö on $y = -4x$.

3.

a)

***t* (h)**	***s* (km)**
0	2
1	47
4	182

b) Etäisyys tien risteyksestä tarkastelu alkuhetkellä saadaan sijoittamalla yhtälöön $s = 45t + 2$ arvo $t = 0$.

$s = 45 \cdot 0 + 2 = 2$ (km)

Tarkastelun alkuhetkellä etäisyys tien risteyksestä on 2 km.

c) Sijoitetaan yhtälöön $s = 45t + 2$ arvo $s = 47$ ja ratkaistaan t.

$$47 = 45t + 2$$

$$45 = 45t \qquad |:45$$

$$t = 1 \text{ (h)}$$

Aikaa on kulunut 1 tunti.

4.

a) Sijoitetaan $x = 3$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{5}{3} \\
&= \frac{6}{3} + \frac{5}{3} \\
&= \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

b) Sijoitetaan $y = 3$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön ja ratkaistaan vastaava korkeus x.

$$
\begin{aligned}
3 &= \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} && \Big| \cdot 3 \\
9 &= 2x + 5 \\
2x &= 4 && \Big| : 2 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

5.

a) Sijoitetaan x = 100 000 riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$\begin{aligned} y &= 0,02 \cdot 100\,000 - 643 \\ &= 1\,357 \text{ (kpl)} \end{aligned}$$

b) Sijoitetaan y = 357 riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön ja ratkaistaan vastaava hirvien määrä x.

$$\begin{aligned} 357 &= 0,02x - 643 \\ x &= 50\,000 \text{ (kpl)} \end{aligned}$$

6.

a) Sijoitetaan x = 2,5 riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$\begin{aligned} y &= 120 \cdot 2,5 \\ &= 300\ (\text{km}) \end{aligned}$$

b) Muutetaan 43 minuuttia tunneiksi.

$$\frac{43}{60}\ (\text{h})$$

Sijoitetaan $x = \dfrac{43}{60}$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$\begin{aligned} y &= 120 \cdot \frac{43}{60} \\ &= 86\ (\text{km}) \end{aligned}$$

c) Sijoitetaan y = 220 riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 220 &= 120x \\ x &= 1,8333...\ (\text{h}) \\ x &= 1\ \text{h}\ (0,8333... \cdot 60)\ \text{min} \\ x &= 1\,\text{h}\ 50\ \text{min} \end{aligned}$$

7.

Koska päivittäisen myyntimäärän (kg) suuruus riippuu kilohinnan alennuskertojen määrästä, merkitään päivämyyntiä kirjaimella y ja kilohinnan alennuksien määrää kirjaimella x.

a) Muodostetaan malli tutkimalla päivämyynnin suuruutta taulukon avulla.

Alennuksien määrä (kpl)	**Päivämyynnin suuruus. (kg)**
0	120
1	$120+3$
2	$120+3\cdot 2$
x	$120+3\cdot x$

Riippuvuutta kuvaava yhtälö on $y=120+3x$ (kg) .

b) Sijoitetaan alennuskertojen määrä x = 5 riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$y=120+3\cdot 5=135$ (kg)

c) Päivämyynti on y = 165 (kg). Ratkaistaan alennuskertojen määrä x yhtälön avulla.

$$165=120+3x$$
$$x=15$$

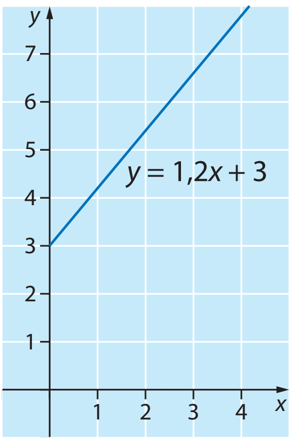
8.

Koska kokonaiskustannusten suuruus riippuu vasarahinnasta, merkitään kokonaiskustannuksia kirjaimella y ja vasarahintaa kirjaimella x.

a) Muodostetaan malli tutkimalla kokonaiskustannusten suuruutta taulukon avulla.

Vasarahinta (€)	**Kokonaiskustannukset (€)**
0	3
1	$1+0,2\cdot 1+3=4,2$
2	$2+0,2\cdot 2+3=5,4$
x	$x+0,2\cdot x+3=1,2x+3$

Riippuvuutta kuvaava yhtälö on $y=1,2x+3$ (€) . Piirretään kuvaaja teknisen apuvälineen avulla.



b) Sijoitetaan $x = 150$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$y = 1,2 \cdot 150 + 3 = 183 \text{ (€)}$$

c) Jaakon maksama hinta on $y = 70,20$ (€). Ratkaistaan vasarahinta x yhtälön avulla.

$$\begin{aligned} 70,20 &= 1,2x + 3 \\ x &= 56 \text{ (€)} \end{aligned}$$

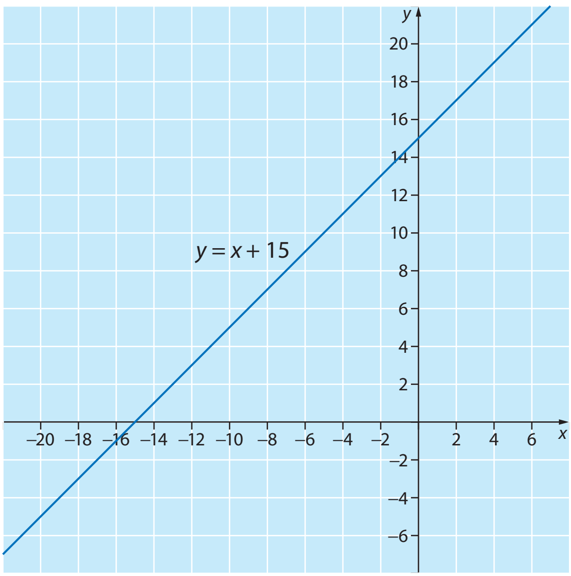
9.

a) y:n suuruus riippuu x:n suuruudesta. Muodostetaan malli tutkimalla y:n suuruutta taulukon avulla.

x	y
0	15
1	16
2	17
x	$15 + x$

Riippuvuutta kuvaava yhtälö on $y = 15 + x$.

b) Piirretään kuvaaja teknisen apuvälineen avulla.



c) Kuvaajan mukaan luvut ovat $x < -15$, jos $y < 0$.

10.

a) Muodostetaan malli.

Aika (h)	**Lämpötila (°C)**
0	15,5
1	15,5 − 2,5
2	$15{,}5-2{,}5\cdot 2=10{,}5$
3	$15{,}5-2{,}5\cdot 3=8$
x	$15{,}5-2{,}5\cdot x$

Lämpötilan y ja ajan x välistä riippuvuutta kuvaava yhtälö on

$y=-2{,}5x+15{,}5$.

b) Lasketaan aika x, kun klo on 22.00.

$x = 22.00-18.00=4$

Sijoitetaan aika x = 4 riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$y=-2{,}5\cdot 4+15{,}5=5{,}5$ (°C)

c) Lämpötila alitti 9,5 °C, kun aikaa oli kulunut

$$
\begin{aligned}
y &< 9{,}5 \\
15{,}5 - 2{,}5x &< 9{,}5 \\
x &> 2{,}4 \text{ (h)} = 2 \text{ (h) } (0{,}4 \cdot 60) \text{ min} = 2 \text{ (h) } 24 \text{ (min)}
\end{aligned}
$$

Lasketaan, kuinka paljon kello oli.

$$18.00 + 2 \text{ (h) } 24 \text{ (min)} = 20.24$$

Lämpötila alitti 9,5 °C kello 20.24 jälkeen.

11.

a) Muodostetaan malli.

Matka (km)	**Polttoainemäärä (l)**
0	75
1	$75 - 0{,}07$
2	$75-0{,}07\cdot 2=74{,}86$
100	$75-0{,}07\cdot 100=68$
x	$75-0{,}07\cdot x$

Polttoaineen määrän y ja ajettujen kilometrien x välistä riippuvuutta kuvaava yhtälö on

$y=-0{,}07x+75$ (l)

b) Sijoitetaan $x = 150$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$y=-0{,}07\cdot 150+75=64{,}5$ (l)

c) Sijoitetaan $y = 51$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

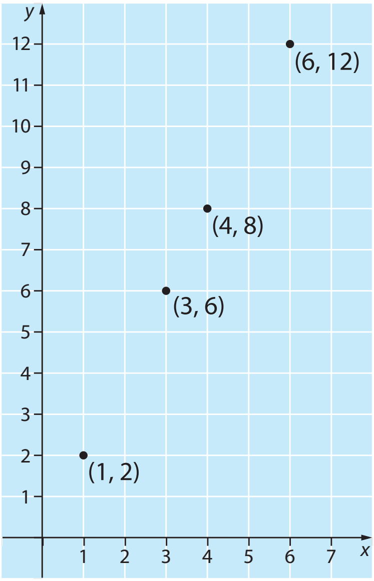
$$51=-0{,}07x+75$$
$$x=342{,}8571...\text{ (km)}\approx 340\text{ (km)}$$

d) Sijoitetaan $y = 0$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

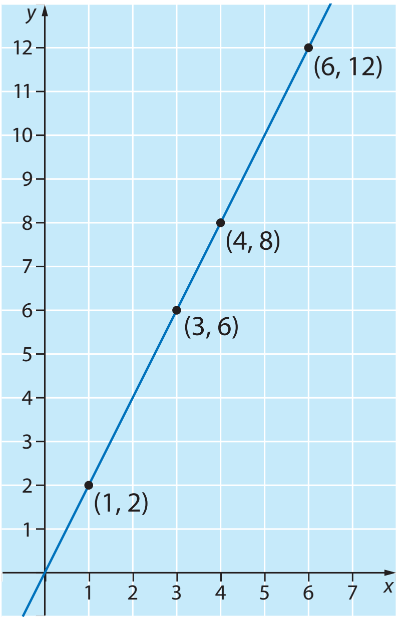
$$0=-0{,}07x+75$$
$$x=1071{,}42857...\text{ (km)}\approx 1071\text{ (km)}$$

12.

a) Koska munien lukumäärä on riippuvainen syötettyjen toukkien lukumäärästä, pisteiden y-koordinaatteina on munien lukumäärä ja x-koordinaatteina vastaavan syötettyjen toukkien lukumäärä. Merkitään pisteet koordinaatistoon.



b) Sovitetaan pistejoukkoon suora.



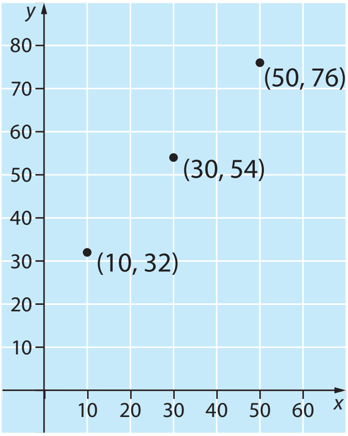
Suoran yhtälö saadaan teknisen apuvälineen avulla.

$y = 2x$

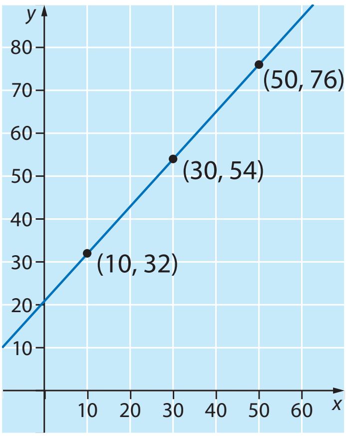
c) Liskolle voi antaa ruokintakerralla enintään 10 ja vähintään 0 toukkaa. Malli on pätevä, kun toukkien määrä on enintään 10 ja vähintään 0, eli $0 \leq x \leq 10$ (kpl).

13.

a) Merkitään pisteet koordinaatistoon.



b)



Suoran yhtälö saadaan teknisen apuvälineen avulla.

$y = 1{,}1x + 21$ (°C)

c) Malli on pätevä tutkitun 50 minuutin lämmityksen ajan, eli
$0 \le x \le 50$ (min).

Saunan lämpötila lämmityksen alussa on

$$y = \frac{11}{10} \cdot 0 + 21 = 21 \text{ (°C)}$$

14.

a) Piste B

- on 15 cm korkeammalla kuin piste A eli *y*-koordinaatti on $\dfrac{0\text{ cm}+15\text{ cm}}{10\text{ cm}}=1,5$
- on leveys suunnassa 42 cm:n päässä pisteestä A, joten sen *x*-koordinaatti on $\dfrac{0\text{ cm}+42\text{ cm}}{10\text{ cm}}=4,2$
- koordinaatit ovat (4,2; 1,5).

Piste C

- on 15 cm korkeammalla kuin piste B eli *y*-koordinaatti on $\dfrac{15\text{ cm}+15\text{ cm}}{10\text{ cm}}=3$
- on leveys suunnassa 42 cm:n päässä pisteestä B, joten sen *x*-koordinaatti on $\dfrac{42\text{ cm}+42\text{ cm}}{10\text{ cm}}=8,4$
- koordinaatit ovat (8,4; 3).

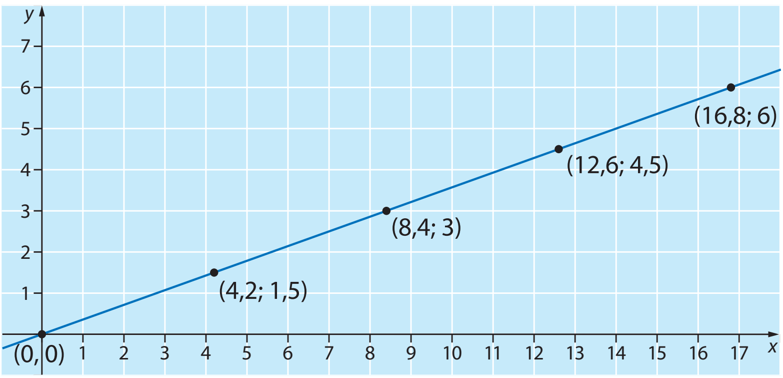
Piste D

- on 15 cm korkeammalla kuin piste C eli *y*-koordinaatti on $\dfrac{30\text{ cm}+15\text{ cm}}{10\text{ cm}}=4,5$
- on leveys suunnassa 42 cm:n päässä pisteestä C, joten sen *x*-koordinaatti on $\dfrac{84\text{ cm}+42\text{ cm}}{10\text{ cm}}=12,6$
- koordinaatit ovat (12,6; 4,5).

Piste E

- on 15 cm korkeammalla kuin piste D eli y-koordinaatti on $\dfrac{45\text{ cm}+15\text{ cm}}{10\text{ cm}}=6$
- on leveys suunnassa 42 cm:n päässä pisteestä D, joten sen x-koordinaatti on $\dfrac{126\text{ cm}+42\text{ cm}}{10\text{ cm}}=16,8$
- koordinaatit ovat (16,8; 6).

b)



Suoran yhtälö saadaan teknisen apuvälineen avulla.

$y=0,3571428...x\approx 0,36x$

15.

Koska kokonaiskustannukset riippuvat tuntimäärästä, merkitään tuntimäärää kirjaimella x (h) ja kokonaiskustannuksia kirjaimella y (€).

a) Muodostetaan malli tutkimalla kokonaiskustannusta taulukon avulla.

Tuntimäärä (h)	**Kokonaiskustannukset (€)**
1	$200 + 32 = 232$
2	$200 + 32 \cdot 2 = 264$
3	$200 + 32 \cdot 3 = 296$
x	$200 + 32 \cdot x$

Riippuvuutta kuvaava yhtälö on

$$y = 32x + 200.$$

b) Sijoitetaan $x = 2{,}5$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$y = 32 \cdot 2{,}5 + 200 = 280 \text{ (€)}$$

c) Sijoitetaan $y = 344$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön ja ratkaistaan x.

$$344 = 32x + 200$$

$$x = 4{,}5 \text{ (h)}$$

16.

a) Muutetaan annetut arvot saman nimisiksi, 0,8 dl = 0,08 l. Muodostetaan malli.

Aika (h)	**Tilavuus (l)**
0	10
1	$10-0,08=9,92$
2	$10-0,08\cdot 2=9,84$
t	$10-0,08\cdot t$

Riippuvuutta kuvaava yhtälö on

$y=-0,08t+10$.

b) Sijoitetaan t = 5 riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$y=-0,08\cdot 5+10=9,6\,(\mathrm{l})$

c) Sijoitetaan y = 0 riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön ja ratkaistaan t.

$0=-0,08t+10$

$t=125\ (\mathrm{h})$

17.

Koska henkilön massa riippuu henkilön pituudesta, merkitään henkilön massaa kirjaimella y ja henkilön pituutta kirjaimella x.

a) Muutetaan 1,8 m senttimetreiksi. 1,8 m = 180 cm. Sijoitetaan $x = 180$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$y = 0,875 \cdot 180 - 76 = 81,5 \text{ (kg)}$$

b) Sijoitetaan $y = 70$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön ja ratkaistaan x.

$$70 = 0,875x - 76$$
$$x = 166,8571...\text{(cm)} \approx 167 \text{ (cm)}$$

c) Sijoitetaan $x = 52$ riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$y = 0,875 \cdot 52 - 76 = -30,5 \text{ (kg)}$$

Malli ei ole pätevä vauvoille, sillä niiden painoiksi tulee negatiivinen luku, mikä ei ole mahdollista.

18.

Koska kokeen arvosana riippuu pistemäärästä, merkitään pistemäärää kirjaimella x (h) ja arvosanaa kirjaimella y (€).

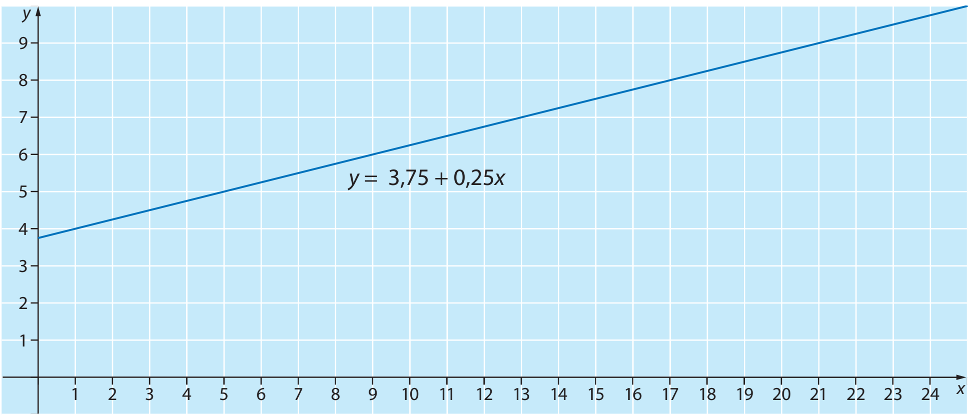
a) Muodostetaan malli.

Pistemäärä (kpl)	**Arvosana**
0	3,75
1	3,75 + 0,25
2	$3,75+0,25\cdot 2$
x	$3,75+0,25\cdot x$

Riippuvuutta kuvaava yhtälö on

$y=0,25x+3,75$.

Piirretään kuvaaja teknisen apuvälineen avulla.



b) Sijoitetaan pistemäärä x = 15 riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön.

$$y = 0,25 \cdot 15 + 3,75 = 7,5$$

c) Sijoitetaan arvosana y = 10 riippuvuutta kuvaavaan yhtälöön ja ratkaistaan pistemäärä x.

$$10 = 0,25x + 3,75$$
$$x = 25$$

19.

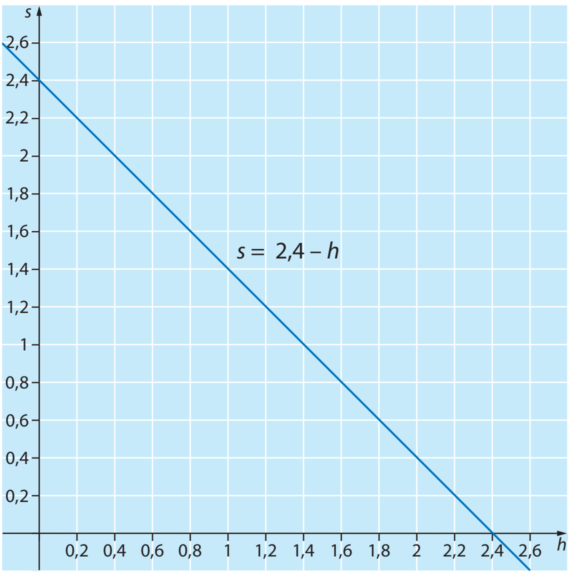
a) Muodostetaan malli.

Korkeus (m)	**Pohjasärmä (m)**
0,5	$2{,}4 - 0{,}5 = 1{,}9$
1	$2{,}4 - 1 = 1{,}4$
1,5	$2{,}4 - 1{,}5 = 0{,}9$
h	$2{,}4 - h$

Riippuvuutta kuvaava yhtälö on

$s = 2{,}4 - h\ (\mathrm{m})$.

b) Piirretään kuvaaja teknisen apuvälineen avulla.



c) Korkeus pitää olla suurempi kuin 0 ja pienempi kuin 2,4, eli
$0 < h < 2,4$ (m).

d) Muutetaan 65 cm metreiksi: 65 cm = 0,65 m.

Sijoitetaan $s = 0,65$ riippuvuutta kuvaavaan kaavaan ja ratkaistaan korkeus h.

$$0,65 = 2,4 - h$$
$$h = 1,75 \text{ (m)}$$

1.2 Suoran yhtälö

20.

a) Suoran $y = 7x - 4$ yhtälö on ratkaistussa muodossa.

Suoran kulmakerroin k on 7.

Koska $k > 0$, niin suora $y = 7x - 4$ on nouseva suora.

b) Suoran $y = -x - 4$ yhtälö on ratkaistussa muodossa.

Suoran kulmakerroin k on −1.

Koska $k < 0$, niin suora $y = -x - 4$ on laskeva suora.

c) Suoran $y = -\frac{1}{3}x$ yhtälö on ratkaistussa muodossa.

Suoran kulmakerroin k on $-\frac{1}{3}$.

Koska $k < 0$, niin suora $y = -\frac{1}{3}x$ on laskeva suora.

21.

a) Suoran $y = -x - 2$ on ratkaistussa muodossa.

Suoran vakiotermi b on −2.

Suora leikkaa y-akselin pisteessä (0, −2).

b) Suoran $y = \frac{2}{3}x$ on ratkaistussa muodossa.

Suoran vakiotermi b on 0.

Suora leikkaa y-akselin pisteessä (0, 0).

c) Suoran $y = 6$ on ratkaistussa muodossa.

Suoran vakiotermi b on 6.

Suora leikkaa y-akselin pisteessä (0, 6).

22.

a) Suora $y=-0,5x+3,6$ on ratkaistussa muodossa.

Suoran kulmakerroin k on −0,5.

Koska $k < 0$, niin suora on laskeva suora.

b) Muutetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$\begin{aligned}3x&=2-y\\ y&=-3x+2\end{aligned}$$

Suoran kulmakerroin k on −3.

Koska $k < 0$, niin suora on laskeva suora.

c) Muutetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$\begin{aligned}6x-y&=0\\ y&=6x\end{aligned}$$

Suoran kulmakerroin k on 6.

Koska $k > 0$, niin suora on nouseva suora.

23.

a) Valitaan suoralta kaksi pistettä, (−1, 2) ja (0, 0).

Kulmakerroin

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2}{0 - (-1)} = \frac{-2}{1} = -2$$

Koska $k < 0$, niin suora on laskeva suora.

b) Valitaan suoralta kaksi pistettä, (0, −1) ja (1, 2).

Kulmakerroin

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{1 - 0} = \frac{3}{1} = 3$$

Koska $k > 0$, niin suora on nouseva suora.

24.

a) Lasketaan ensin suoran kulmakerroin *k*.

Valitaan pisteeksi $(x_1, y_1) = (-5, 0)$ ja $(x_2, y_2) = (1, 6)$.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-0}{1-(-5)} = \frac{6}{6} = 1$$

Koska kulmakerroin $k = 1$ on positiivinen luku, suora on nouseva suora.

b) Lasketaan ensin suoran kulmakerroin *k*.

Valitaan pisteeksi $(x_1, y_1) = (2, 5)$ ja $(x_2, y_2) = (4, -7)$.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7-5}{4-2} = \frac{-12}{2} = -6$$

Koska kulmakerroin $k = -6$ on negatiivinen luku, suora on laskeva suora.

25.

a) Valitaan pisteeksi $(x_1, y_1) = (-5, 2)$ ja $(x_2, y_2) = (3, -6)$.

Kulmakerroin on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-6-2}{3-(-5)} = \frac{-8}{8} = -1$$

b) Valitaan pisteeksi $(x_1, y_1) = (-6, 8)$ ja $(x_2, y_2) = (-1, 8)$.

Kulmakerroin on

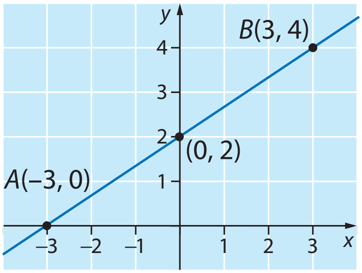
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-8}{-1-(-6)} = \frac{0}{5} = 0$$

26.

a) Kulmakerroin

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-0}{3-(-3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

b) Kuvaajasta nähdään y-akselin leikkauspiste (0, 2).



c) Suoran yhtälö voidaan muodostaa kulmakertoimen ja vakiotermin avulla.

- Suoran kulmakertoimeksi määritettiin $k = \frac{2}{3}$.
- Koska y-akselin leikkauspiste on (0, 2), vakiotermin on $b = 2$.

Suoran yhtälö on

$$y = kx + b$$

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

27.

a) Suoran yhtälö voidaan muodostaa kulmakertoimen ja vakiotermin avulla.

- Suoran kulmakerroin on $k = -5$.
- Koska y-akselin leikkauspiste on (0, −3), vakiotermin on $b = -3$.

Suoran yhtälö on

$$y = kx + b$$
$$y = -5x - 3$$

b) Suoran yhtälö voidaan muodostaa kulmakertoimen ja vakiotermin avulla.

- Suoran kulmakerroin on $k = 0$.
- Koska y-akselin leikkauspiste on (0, 1), vakiotermin on $b = 1$.

Suoran yhtälö on

$$y = kx + b$$
$$y = 0x + 1$$
$$y = 1$$

28.

a) Muutetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$y-4x+3=0$$
$$y=4x-3$$

Suoran kulmakerroin $k = 4$ ja y-akselin leikkauspiste on $(0, -3)$.

b) Muutetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$y+\frac{3}{5}x-2=0$$
$$y=-\frac{3}{5}x+2$$

Suoran kulmakerroin $k=-\frac{3}{5}$ ja y-akselin leikkauspiste on $(0, 2)$.

c) Muutetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$-2y+6x-1=0$$
$$2y=6x-1 \quad \Big| :2$$
$$y=3x-\frac{1}{2}$$

Suoran kulmakerroin $k = 3$ ja y-akselin leikkauspiste on $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

d) Muutetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$\begin{aligned} y+5&=0 \\ y&=-5 \end{aligned}$$

Suoran kulmakerroin on 0 ja y-akselin leikkauspiste on $(0, -5)$.

29.

a) Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} 5x - 0 + 1 &= 0 \\ 5x &= -1 \qquad \Big| :5 \\ x &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Piste, jossa suora leikkaa x-akselin, on $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$.

Suoran ja y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} 5 \cdot 0 - y + 1 &= 0 \\ 0 - y + 1 &= 0 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Piste, jossa suora leikkaa y-akselin on (0, 1).

b) Tutkitaan, onko piste (2, 11) suoralla sijoittamalla pisteen koordinaatit yhtälöön.

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2 - 11 + 1 &= 0 \\ 10 - 11 + 1 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Saatu väite on tosi, joten piste on suoralla.

30.

a) Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$
\begin{aligned}
0 &= 3x - 15 \\
3x &= 15 \qquad \Big| :3 \\
x &= 5
\end{aligned}
$$

Piste, jossa suora leikkaa x-akselin, on (5, 0).

Suoran ja y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$
\begin{aligned}
y &= 3 \cdot 0 - 15 \\
y &= -15
\end{aligned}
$$

Piste, jossa suora leikkaa y-akselin on (0, −15).

b) Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$
\begin{aligned}
0 &= -5x \qquad \Big| :(-5) \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Piste, jossa suora leikkaa x-akselin, on (0, 0).

Suoran ja y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$
\begin{aligned}
y &= -5 \cdot 0 \\
y &= 0
\end{aligned}
$$

Piste, jossa suora leikkaa y-akselin on (0, 0).

c) Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$0 = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$\frac{1}{2}x = 4 \qquad \Big| \cdot 2$$

$$x = 8$$

Piste, jossa suora leikkaa x-akselin, on (8, 0).

Suoran ja y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 4$$

$$y = 4$$

Piste, jossa suora leikkaa y-akselin, on (0, 4).

31.

a) Muutetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$x - 5y + 25 = 0$$
$$5y = x + 25 \quad \Big| : 5$$
$$y = \frac{1}{5}x + 5$$

Suoran kulmakerroin $k = \frac{1}{5} > 0$, joten suora on nouseva suora.

b) Suoran ja x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$0 = \frac{1}{5}x + 5$$
$$\frac{1}{5}x = -5 \quad \Big| \cdot 5$$
$$x = -25$$

Piste, jossa suora leikkaa x-akselin, on $(-25, 0)$.

c) Suoran ja y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$, jolloin sijoittamalla saadaan

$$y = \frac{1}{5} \cdot 0 + 5$$
$$y = 5$$

Piste, jossa suora leikkaa y-akselin, on $(0, 5)$.

32.

a) Suora leikkaa y-akselin kohdassa $y = 1$, joten vakiotermi $b = 1$ ja y-akselin leikkauspiste on (0, 1).

Nyt tiedetään suoralta kaksi pistettä, joten määritetään suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-1}{-10-0} = \frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}$$

Suoran ratkaistu muoto on $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Suoran yleinen muoto on

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x + 1 \\ y + \frac{1}{2}x - 1 &= 0 \qquad \Big| \cdot 2 \\ x + 2y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

b) Tutkitaan, onko piste (36, 20) suoralla sijoittamalla pisteen koordinaatit yhtälöön.

$$\begin{aligned} 36 + 2 \cdot 20 - 2 &= 0 \\ 36 + 40 - 2 &= 0 \\ 74 &= 0 \end{aligned}$$

Saatu väite on epätosi, joten piste (36, 20) ei ole suoralla.

33.

a) Suoran kulmakerroin $k = 1$. Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (-6, 5)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y - 5 &= 1 \cdot (x - (-6)) \\ y - 5 &= 1 \cdot (x + 6) \\ y - 5 &= x + 6 \\ y &= x + 11 \end{aligned}$$

b) Suoran kulmakerroin on $k = \frac{1}{3}$. Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (-6, 5)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y - 5 &= \frac{1}{3} \cdot (x - (-6)) \\ y - 5 &= \frac{1}{3} \cdot (x + 6) \\ y - 5 &= \frac{1}{3}x + 2 \\ y &= \frac{1}{3}x + 7 \end{aligned}$$

34.

a) Suoran kulmakerroin on $k = -\frac{1}{5}$.

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (1, -2)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$
\begin{aligned}
y - (-2) &= -\frac{1}{5} \cdot (x - 1) \\
y + 2 &= -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \\
y &= -\frac{1}{5}x - \frac{9}{5}
\end{aligned}
$$

b) Suoran kulmakerroin on $k = -\frac{1}{5}$.

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (-5, -3)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$
\begin{aligned}
y - (-3) &= -\frac{1}{5}(x - (-5)) \\
y + 3 &= -\frac{1}{5}(x + 5) \\
y + 3 &= -\frac{1}{5}x - 1 \\
y &= -\frac{1}{5}x - 4
\end{aligned}
$$

35.

a) Suoran kulmakerroin on $k = 5$.

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (-1, 12)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y - 12 &= 5(x - (-1)) \\ y - 12 &= 5(x + 1) \\ y - 12 &= 5x + 5 \\ y &= 5x + 17 \end{aligned}$$

b) Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{-5 - 15}{3 - 13} = \frac{-20}{-10} = 2$$

Valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (3, -5)$.

Sijoitetaan kulmakertoimen arvo ja sekä pisteen (3, −5) koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y - (-5) &= 2(x - 3) \\ y + 5 &= 2x - 6 \\ y &= 2x - 11 \end{aligned}$$

c) Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{-6-(-6)}{7-(-12)} = \frac{0}{19} = 0$$

Valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (7, -6)$.

Sijoitetaan kulmakertoimen arvo ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y-(-6) &= 0(x-7) \\ y+6 &= 0 \\ y &= -6 \end{aligned}$$

36.

a) Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{10-(-8)}{13-4} = \frac{18}{9} = 2$$

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (4, -8)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y-(-8) &= 2(x-4) \\ y+8 &= 2x-8 \\ y-2x+16 &= 0 \end{aligned}$$

b) Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{6-5}{4-(-1)} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$$

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (-1, 5)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned}
y - 5 &= \frac{1}{5}(x - (-1)) \\
y - 5 &= \frac{1}{5}(x + 1) \\
y - 5 &= \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \qquad \qquad \Big| \cdot 5 \\
5y - 25 &= x + 1 \\
5y - x - 26 &= 0
\end{aligned}$$

37.

a) Koska piste (5, −13) on suoralla, pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön $4ax - y - 7a = 0$.

$$
\begin{aligned}
4a \cdot 5 - (-13) - 7a &= 0 \\
20a + 13 - 7a &= 0 \\
13a &= -13 \qquad \big| :13 \\
a &= -1
\end{aligned}
$$

Suoran t yhtälö saadaan, kun sijoitetaan $a = -1$ suoran t yhtälöön.

$$
\begin{aligned}
4 \cdot (-1) \cdot x - y - 7 \cdot (-1) &= 0 \\
-4x - y + 7 &= 0
\end{aligned}
$$

Määritetään suoran t yhtälön ratkaistu muoto, josta nähdään kulmakerroin.

$$
\begin{aligned}
-4x - y + 7 &= 0 \\
y &= -4x + 7
\end{aligned}
$$

Suoran t kulmakerroin on $k = -4$.

b) Leikkauspiste on molemmilla suorilla, joten se toteuttaa molempien suorien yhtälöt. Leikkauspiste määritetään ratkaisemalla yhtälöpari

$$
\begin{cases}
y = -\frac{5}{2}x + 1 \\
y = -4x + 7
\end{cases}
$$

$x = 4$ ja $y = -9$

Suorien leikkauspiste on (4, −9).

38.

a) Koska piste (12, −35) on suoralla, pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön $2y-7cx+4c=0$.

$$
\begin{aligned}
2\cdot(-35)-7\cdot c\cdot 12+4c&=0\\
-70-84c+4c&=0\\
-80c&=70 \qquad \big|:(-80)\\
c&=-\frac{7}{8}
\end{aligned}
$$

b) Koska piste (−18, 26) on suoralla, pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön $2y-7cx+4c=0$.

$$
\begin{aligned}
2\cdot 26-7\cdot c\cdot(-18)+4c&=0\\
52+126c+4c&=0\\
130c&=-52 \qquad \big|:130\\
c&=-\frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

39.

Suoran *t* kulmakerroin on $k = 4$. Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (10, 37)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$
\begin{aligned}
y - 37 &= 4(x - 10) \\
y - 37 &= 4x - 40 \\
y &= 4x - 3
\end{aligned}
$$

Määritetään suoran *s* yhtälön ratkaistu muoto.

$$
\begin{aligned}
2x - 5y - 6 &= 0 \\
5y &= 2x - 6 \qquad |:5 \\
y &= \frac{2}{5}x - \frac{6}{5}
\end{aligned}
$$

Leikkauspiste on molemmilla suorilla, joten se toteuttaa molempien suorien yhtälöt. Leikkauspiste määritetään ratkaisemalla yhtälöpari

$$
\begin{cases}
y = \frac{2}{5}x - \frac{6}{5} \\
y = 4x - 3
\end{cases}
$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ ja } y = -1$$

Suorien leikkauspiste on $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

40.

a) Suoran on nouseva, kun kulmakerroin $k > 0$.

$$\frac{1-(-11)}{-2a-(5a-3)} > 0$$
$$a < \frac{3}{7}$$

b) Suoran kulmakerroin on −3, kun

$$\frac{1-(-11)}{-2a-(5a-3)} = -3$$
$$a = 1$$

Kun $a = 1$, suora kulkee pisteiden (2, −11), (−2, 1) kautta. Koska kulmakerroin on $k = -3$, suoran yhtälöksi saadaan

$$\begin{aligned} y-1 &= -3(x-(-2)) \\ y-1 &= -3x-6 \\ y &= -3x-5 \end{aligned}$$

41.

a) Suoran on laskeva, kun kulmakerroin $k < 0$.

$$\frac{3-(-7)}{(2a-1)-(4a)} < 0$$

$$a > -\frac{1}{2}$$

b) Suoran kulmakerroin on −15, kun

$$\frac{3-(-7)}{(2a-1)-(4a)} = -15$$

$$a = -\frac{1}{6}$$

42.

a) Valitaan suoralta kaksi pistettä, (0, −3) ja (2, 0). Lasketaan suoran kulmakerroin

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-(-3)}{2-0}=\frac{3}{2}$$

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0,\, y_0)=(2,\, 0)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y-y_0=k(x-x_0)$.

$$y-0=\frac{3}{2}(x-2)$$

$$\mathrm{y}=\frac{3}{2}x-\frac{6}{2}$$

$$y=\frac{3}{2}x-3$$

b) Valitaan suoralta kaksi pistettä, (0, 1) ja (2, 0). Lasketaan suoran kulmakerroin

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2}$$

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y - 0 &= -\frac{1}{2}(x-2) \\ y &= -\frac{1}{2}x - \left(-\frac{2}{2}\right) \\ y &= -\frac{1}{2}x + 1 \end{aligned}$$

43.

a) Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{21-33}{5-1} = \frac{-12}{4} = -3$$

Suora on laskeva, koska $k < 0$.

b) Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{-12-2}{-20-8} = \frac{-14}{-28} = \frac{1}{2}$$

Suora on nouseva suora, koska $k > 0$.

44.

a) Suoran kulmakerroin on $k = -3$.

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (0, 4)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön
$y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y - 4 &= -3(x - 0) \\ y - 4 &= -3x \\ y &= -3x + 4 \end{aligned}$$

b) Suoran kulmakerroin on $k = -\frac{5}{3}$.

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (6, -7)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön
$y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y - (-7) &= -\frac{5}{3}(x - 6) \\ y + 7 &= -\frac{5}{3}x - \left(-\frac{30}{3}\right) \\ y + 7 &= -\frac{5}{3}x + 10 \\ y &= -\frac{5}{3}x + 3 \end{aligned}$$

c) Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{32-5}{-3-(-12)} = \frac{27}{9} = 3$$

Merkitään suoralta tunnettua pistettä $(x_0, y_0) = (-12, 5)$.

Sijoitetaan kulmakerroin ja tunnetun pisteen koordinaatit yhtälöön $y - y_0 = k(x - x_0)$.

$$\begin{aligned} y-5 &= 3(x-(-12)) \\ y-5 &= 3(x+12) \\ y-5 &= 3x+36 \\ y &= 3x+41 \end{aligned}$$

45.

Leikkauspiste on molemmilla suorilla, joten se toteuttaa molempien suorien yhtälöt. Leikkauspiste määritetään ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ 3x - 10y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$x = -27 \quad \text{ja} \quad y = -8$$

Tutkitaan, onko piste (−27, −8) suoralla $y = -\frac{4}{3} - 44$ sijoittamalla pisteen koordinaatit yhtälöön.

$$-8 = -\frac{4}{3} \cdot (-27) - 44$$
$$-8 = -8$$

Saatu väite on tosi, joten piste (−27, −8) on suoralla $y = -\frac{4}{3} - 44$.

46.

a) Suora on nouseva, kun kulmakerroin $k > 0$.

$$\frac{a+1-(4a-2)}{-1-3} > 0$$
$$a > 1$$

b) Suoran kulmakerroin $k = 6$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{a+1-(4a-2)}{-1-3} = 6$$
$$a = 9$$

Kun $a = 9$, suora kulkee pisteiden (3, 34), (−1, 10) kautta. Koska kulmakerroin on $k = 6$, suoran yhtälöksi saadaan

$$\begin{aligned} y-10 &= 6(x-(-1)) \\ y-10 &= 6(x+1) \\ y-10 &= 6x+6 \\ y &= 6x+16 \end{aligned}$$

1.3 Yhdensuoraisuus ja kohtisuoruus.

47.

Yhdensuuntaisilla suorilla on sama kulmakerroin, mutta eri vakiotermit. Yhdensuuntaisia suoria ovat:

- A ja D
- E ja C

48.

a) Yhdensuuntaisilla suorilla on sama kulmakerroin, mutta eri vakiotermit. Suoran $y = 2x - 3$ kanssa yhdensuuntainen on esimerkiksi suora $y = 2x + 1$

b) Yhdensuuntaisilla suorilla on sama kulmakerroin, mutta eri vakiotermit.

Muutetaan suoran $x + y + 5 = 0$ yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$x + y + 5 = 0$$
$$y = -x - 5$$

Suoran $y = -x - 5$ kanssa yhdensuuntainen on suora $y = -x + 5$.

c) Yhdensuuntaisilla suorilla on sama kulmakerroin, mutta eri vakiotermit.

Muutetaan suoran $3x - 4y + 8 = 0$ yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$3x - 4y + 8 = 0$$
$$4y = 3x + 8 \quad \Big| :4$$
$$y = \frac{3}{4}x + 2$$

Suoran $y = \frac{3}{4}x + 2$ kanssa yhdensuuntainen on suora $y = \frac{3}{4}x + 1$.

49.

a) Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niiden kulmakertoimet ovat samat.

- Suoran $y = -\frac{1}{2}x + 3$ kulmakerroin on $k = -\frac{1}{2}$.
- Suoran $y = -2x + 3$ kulmakerroin on $k = -2$.

Kulmakertoimet ovat eri suuret, $-\frac{1}{2} \neq -2$, joten suorat eivät ole yhdensuuntaiset.

b) Määritetään suorien kulmakertoimet.

- Suoran $y = \frac{2}{5}x - 7$ kulmakerroin on $k = \frac{2}{5}$.
- Suoran $5y = 2x + 15$ kulmakerroin saadaan ratkaistusta muodosta

$$
\begin{aligned}
5y &= 2x + 15 \quad \left| : 5 \right. \\
y &= \frac{2}{5}x + 3
\end{aligned}
$$

- Suoran $y = \frac{2}{5}x + 3$ kulmakerroin on $k = \frac{2}{5}$.

Kulmakertoimet ovat yhtä suuret, $\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$, joten suorat ovat yhdensuuntaiset.

50.

a) Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niiden kulmakertoimet ovat samat.

- Suoran $y = x + 7$ kulmakerroin on $k = 1$.
- Suoran $y = -4x + 7$ Kulmakerroin on $k = -4$.

Kulmakertoimet ovat eri suuret, $1 \neq -4$, joten suorat eivät ole yhdensuuntaiset.

b) Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niiden kulmakertoimet ovat samat.

- Suoran $-x + 3y + 2 = 0$ kulmakerroin saadaan ratkaistusta muodosta

$$
\begin{aligned}
-x + 3y + 2 &= 0 \\
3y &= x - 2 \quad \Big| :3 \\
y &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

- Suoran $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ kulmakerroin on $k = \frac{1}{3}$.
- Suoran $y = -\frac{1}{3}x + 1$ kulmakerroin on $k = -\frac{1}{3}$

Kulmakertoimet ovat eri suuret, $-\frac{1}{3} \neq \frac{1}{3}$, joten suorat eivät ole yhdensuuntaiset.

c) Muutetaan kummatkin suoran yhtälöt ratkaistuun muotoon.

$$-6x + y = -5$$
$$y = 6x - 5$$

$$-12x + 2y + 10 = 0$$
$$2y = 12x - 10 \quad |:2$$
$$y = 6x - 5$$

Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niiden kulmakertoimet ovat samat.

- Suoran $-6x + y = -5$ kulmakerroin on $k = 6$.
- Suoran $-12x + 2y + 10 = 0$ kulmakerroin on $k = 6$.

Kulmakertoimet ovat yhtä suuret, 6 = 6, joten suorat ovat yhdensuuntaiset.

51.

Määritetään suorien kulmakertoimet.

- Suoran *s* kulmakerroin on $k=-\frac{4}{5}$.
- Suoran *t* kulmakerroin on $k=\frac{-7-13}{3-28}=\frac{-20}{-25}=\frac{4}{5}$.

Koska suorien kulmakertoimet ovat eri suuret, $\frac{4}{5}\neq-\frac{4}{5}$, suorat ovat erisuuntaiset. Erisuuntaiset suorat leikkaavat toisensa.

52.

a) Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat samat, joten määritetään ensin suoran $-3y+2x-9=0$ kulmakerroin.

$$
\begin{aligned}
-3y+2x-9&=0\\
3y&=2x-9 \qquad \Big|:3\\
y&=\frac{2}{3}x-3
\end{aligned}
$$

Kysytyn suoran kulmakerroin on siis $k=\frac{2}{3}$. Lisäksi tiedetään, että suora kulkee pisteen (6, 19) kautta. Muodostetaan suoran yhtälö.

$$
\begin{aligned}
y-19&=\frac{2}{3}(x-6)\\
y-19&=\frac{2}{3}x-4\\
y&=\frac{2}{3}x+15
\end{aligned}
$$

b) Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos niiden kulmakertoimet ovat samat.

Määritetään ensin suoran $-3y+5x-2=0$ kulmakerroin.

$$
\begin{aligned}
3y+5x-2&=0 \\
3y&=-5x+2 && |:3 \\
y&=-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Kysytyn suoran kulmakerroin on siis $k=-\dfrac{5}{3}$.

Suoran $y=-5cx+8$ kulmakerroin on $k=-5c$.

Merkitään kulmakertoimet yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälö.

$$
\begin{aligned}
-5c&=-\frac{5}{3} && |:(-5) \\
c&=-\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) \\
c&=\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

53.

a) Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat samat.

Suoran $y = 2x + 3$ kulmakerroin on $k = 2$, joten kysytyn suoran kulmakerroin on sama.

Lisäksi tiedetään, että suora kulkee pisteen (−16, 7) kautta.

Muodostetaan yhtälö.

$$
\begin{aligned}
y - 7 &= 2(x - (-16)) \\
y - 7 &= 2(x + 16) \\
y - 7 &= 2x + 32 \\
y &= 2x + 39
\end{aligned}
$$

b) Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat samat, joten määritetään ensin suoran $-x+8y-24=0$ kulmakerroin.

$$\begin{aligned} -x+8y-24&=0 \\ 8y&=x+24 && \Big| :8 \\ y&=\frac{1}{8}x+3 \end{aligned}$$

Kysytyn suoran kulmakerroin on siis $k=\frac{1}{8}$.

Lisäksi tiedetään, että suora kulkee pisteen (−16, 7) kautta.

Muodostetaan yhtälö.

$$\begin{aligned} y-7&=\frac{1}{8}(x-(-16)) \\ y-7&=\frac{1}{8}(x+16) \\ y-7&=\frac{1}{8}x+2 \\ y&=\frac{1}{8}x+9 \end{aligned}$$

54.

a) Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat samat, joten määritetään ensin suoran $-6ax + y - 13 = 0$ kulmakerroin.

$$\begin{aligned} -6ax + y - 13 &= 0 \\ y &= 6ax + 13 \end{aligned}$$

Suoran $-6ax + y - 13 = 0$ kulmakerroin on $k = 6a$.

Suoran $y = -9x + 1$ kulmakerroin on $k = -9$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan vakio a.

$$6a = -9 \quad |:6$$

$$a = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$$

b) Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat samat, joten määritetään suoran $-6x+5y-3=0$ kulmakerroin.

$$
\begin{aligned}
-6x+5y-3&=0 \\
5y&=6x+3 \qquad && |:5 \\
y&=\frac{6}{5}x+\frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

Suoran $-6x+5y-3=0$ kulmakerroin on $k=\frac{6}{5}$.

Suoran $-6ax+y-13=0$ kulmakerroin on $k=6a$.

Merkitään kulmakertoimet yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälö.

$$
\begin{aligned}
6a&=\frac{6}{5} \qquad && |:6 \\
a&=\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{6} \\
a&=\frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

55.

a) Jos suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kulmakertoimien tulo on −1.

- Suoran $y=-4x-13$ kulmakerroin on $k=-4$.
- Suoran $y=4x+17$ kulmakerroin on $k=4$.

Lasketaan kulmakertoimien tulo.

$4\cdot(-4)=-16$

Koska tulo ei ole −1, suorat eivät ole kohtisuorassa.

b) Suorat ovat toistensa normaaleja, jos ne ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Kulmakertoimet nähdään suorien yhtälöiden ratkaistuista muodoista.

$$
\begin{aligned}
7x+5y-20&=0 \\
5y&=-7x+20 \qquad \Big|:5 \\
y&=-\frac{7}{5}x+4
\end{aligned}
$$

Suoran $7x+5y-20=0$ kulmakerroin on $k=-\frac{7}{5}$.

$$
\begin{aligned}
-5x+7y&=0 \\
7y&=5x \qquad \Big|:7 \\
y&=\frac{5}{7}x
\end{aligned}
$$

Suoran $-5y+7y=0$ kulmakerroin on $k=\frac{5}{7}$.

Lasketaan kulmakertoimien tulo.

$$-\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7}=-1$$

Koska tulo on −1, suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan ja täten myös toistensa normaaleja.

56.

a) Jos suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kulmakertoimien tulo on -1.

Lasketaan suorien *m* ja *n* kulmakertoimet.

Suora *n* kulkee pisteiden (0, 1) ja (−3, 2) kautta, joten suoran *n* kulmakerroin on

$$k=\frac{1-2}{0-(-3)}=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

Suora *m* kulkee pisteiden (0, 1) ja (1, 4) kautta, joten suoran *m* kulmakerroin on

$$k=\frac{1-4}{0-1}=\frac{3}{1}=3.$$

Lasketaan kulmakertoimien tulo.

$$-\frac{1}{3}\cdot 3=-\frac{3}{3}=-1$$

Koska tulo on -1, suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

b) Jos suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, kulmakertoimien tulo on -1.

Lasketaan suorien *m* ja *n* kulmakertoimet.

Suora *n* kulkee pisteiden (0, 3) ja (−5, 0) kautta, joten suoran *n* kulmakerroin on

$$k = \frac{3-0}{0-(-5)} = \frac{3}{5}.$$

Suora *m* kulkee pisteiden (0, 1) ja (−3, 5) kautta, joten suoran *m* kulmakerroin on

$$k = \frac{1-5}{0-(-3)} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}.$$

Lasketaan kulmakertoimien tulo.

$$-\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{12}{15} = -\frac{4}{5}$$

Koska tulo ei ole −1, suorat eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

57.

a) Suoran $y = \frac{1}{3}x + 14$ kulmakerroin on $\frac{1}{3}$. Merkitään normaalin kulmakerrointa kirjaimella *k*.

Koska suorat ovat toistensa normaaleja, niiden kulmakertoimien tulo on −1

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot k &= -1 \qquad \Big| : \frac{1}{3} \\ k &= -3 \end{aligned}$$

Normaalin eli suoran *t* yhtälö on

$$\begin{aligned} y - (-3) &= -3(x - (-9)) \\ y + 3 &= -3(x + 9) \\ y + 3 &= -3x - 27 \\ y &= -3x - 30 \end{aligned}$$

b) Ratkaistusta muodosta nähdään *y*-akselin leikkauspiste (0, −30).

Suoran ja *x*-akselin leikkauspisteessä *y*-koordinaatti on 0.

$$\begin{aligned} -3x - 30 &= 0 \\ -3x &= 30 \qquad \big| : (-3) \\ x &= -10 \end{aligned}$$

Leikkauspiste on siis (−10, 0).

58.

a) Suoran $y=-\frac{4}{3}x-5$ kulmakerroin on $-\frac{4}{3}$. Merkitään normaalin kulmakerrointa kirjaimella *k*.

Koska suorat ovat toistensa normaaleja, niiden kulmakertoimien tulo on -1.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$
\begin{aligned}
-\frac{4}{3}\cdot k &= -1 \qquad \left| :\left(-\frac{4}{3}\right)\right. \\
k &= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Merkitään suoran *l* vakiotermiä kirjaimella *b*.

Tiedetään, että suora leikkaa *x*-akselin pisteessä (−8, 0), joten suoran ja *x*-akselin leikkauspisteessä *y*-koordinaatti on 0 ja *x*-koordinaatti on −8.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *b*.

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4}\cdot(-8)+b &= 0 \\
-6+b &= 0 \\
b &= 6
\end{aligned}
$$

Suoran *l* yhtälö on $y=\frac{3}{4}x+6$.

b) Suoran l ja y-akselin leikkauspiste kertoo suoran l vakiotermin, joka on $b = -25$.

Suoran l yhtälö on $y = \frac{3}{4}x - 25$.

59.

a) Suorien *n* ja *s* välinen kulma on 90°, joten suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Suoran *s* kulmakerroin saadaan ratkaistussa muodosta.

$$-3x+4y-2=0$$
$$4y=3x+2 \qquad \Big|:4$$
$$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$$

Suoran *s* kulmakerroin on $k=\frac{3}{4}$.

Merkitään suoran *n* kulmakerrointa kirjaimella *k*. Koska suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niiden kulmakertoimien tulo on −1.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$\frac{3}{4}\cdot k=-1 \qquad \Big|:\frac{3}{4}$$
$$k=-\frac{4}{3}$$

Suoran kulmakerroin on siis $k=-\frac{4}{3}$.

Lisäksi tiedetään, että suora kulkee pisteen (6, 5) kautta.

Muodostetaan yhtälö.

$$y-5=-\frac{4}{3}\cdot(x-6)$$
$$y-5=-\frac{4}{3}x+8$$
$$y=-\frac{4}{3}x+13$$

b) Sijoitetaan koordinaatit suoran *n* yhtälöön.

$$-83=-\frac{4}{3}\cdot 60+13$$
$$-83=-80+13$$
$$-83=67$$

Koska yhtälö on epätosi, piste (60, −83) ei ole suoralla *n*.

60.

a) Suoran *t* kulmakerroin on $-\frac{6}{5}$. Merkitään suoran *n* kulmakerrointa kirjaimella *k*.

Kohtisuorien suorien kulmakertoimien tulo on −1.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$-\frac{6}{5}\cdot k=-1 \qquad \Big| : \left(-\frac{6}{5}\right)$$
$$k=\frac{5}{6}$$

Toisaalta suora *n* kulkee pisteiden (−3, 5) ja (2*a* + 1, −5) kautta, joten suoran *n* kulmakerroin on

$$k=\frac{-5-5}{2a+1-(-3)}=\frac{-10}{2a+4}$$

Tämän lausekkeen arvo pitää olla yhtä suuri kuin edellä määritelty kulmakertoimen arvo $k=\frac{5}{6}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *a*.

$$\frac{5}{6}=\frac{-10}{2a+4}$$
$$a=-8$$

b) Muodostetaan suoran *n* yhtälö.

$$y-5=\frac{5}{6}\cdot(x-(-3))$$

$$y=\frac{5}{6}x+\frac{45}{6}$$

Leikkauspiste ratkaistaan yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y=\frac{5}{6}x+\frac{45}{6} \\ y=-\frac{6}{5}x-23 \end{cases}$$

$x=-15$ ja $y=-5$

Leikkauspiste on (−15, −5).

61.

a) Suora s on suoran $y = 4x + 1$ suuntainen, joten niillä on sama kulmakerroin $k = 4$.

Muodostetaan suoran *s* yhtälö.

$$
\begin{aligned}
y - 6 &= 4(x - 0) \\
y &= 4x + 6
\end{aligned}
$$

Suora *m* on kohtisuorassa suoraa $y = -2x + 1$ vastaan, joten niiden kulmakertoimien tulo on −1.

Suoran $y = -2x + 1$ kulmakerroin on -2. Merkitään suoran *m* kulmakerrointa kirjaimella *k*. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$
\begin{aligned}
-2 \cdot k &= -1 \qquad \Big| : (-2) \\
k &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Muodostetaan suoran *m* yhtälö.

$$
\begin{aligned}
y - 0 &= \frac{1}{2}(x - (-5)) \\
y &= \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Leikkauspiste ratkaistaan yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y = 4x + 6 \\ y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$x = -1$ ja $y = 2$

Leikkauspiste on $(-1, 2)$

b) Sijoitetaan pisteen koordinaatit suoran *m* yhtälöön.

$$4 = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{5}{2}$$
$$4 = 4$$

Yhtälö on tosi, joten piste (3, 4) on suoralla *m*.

62.

a) Suoran $y=-7x+1$ ja sen normaalin kulmakertoimien tulo on −1.

Suoran $y=-7x+1$ kulmakerroin on -7. Merkitään normaalin kulmakerrointa kirjaimella *k*.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$-7\cdot k=-1$$
$$k=\frac{1}{7}$$

Normaali kulkee kuitenkin pisteiden (−10, 21) ja (c − 5, −1) kautta, joten sen kulmakerroin on.

$$k=\frac{-1-21}{c-5-(-10)}=\frac{-22}{c+5}$$

Tämän lausekkeen arvo pitää olla yhtä suuri kuin edellä määritelty kulmakertoimen arvo $k=\frac{1}{7}$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä c.

$$\frac{1}{7}=\frac{-22}{c+5}$$
$$c=-159$$

b) Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$y-21=\frac{1}{7}(x-(-10))$$

$$-x+7y-157=0$$

c) Suorien leikkauspiste ratkaistaan yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y=-7x+1 \\ -x+7y-157=0 \end{cases}$$

$x=-3$ ja $y=22$

63.

a) Suora *l* kulkee pisteiden (1, 1) ja (2, 3) kautta, joten suoran *l* kulmakerroin on

$$k=\frac{3-1}{2-1}=\frac{2}{1}=2\,.$$

Määritetään suoran *l* kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee pisteen (−2, 2) kautta.

$$\begin{aligned}y-2&=2(x-(-2))\\ y-2&=2(x+2)\\ y-2&=2x+4\\ y&=2x+6\end{aligned}$$

b) Lasketaan suoran *l* kulmakerroin. Suora *l* kulkee pisteiden (0, 1) ja (2, 0) kautta, joten suoran *l* kulmakerroin on

$$k=\frac{0-1}{2-0}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

Määritetään suoran *l* kanssa yhdensuuntainen suora, joka kulkee pisteen (1, 3) kautta.

$$\begin{aligned}y-3&=-\frac{1}{2}(x-1)\\ y-3&=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\\ y&=-\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}\end{aligned}$$

64.

a) Lasketaan suoran *m* kulmakerroin. Suora *m* kulkee pisteiden (0, 1) ja (−3, 3) kautta, joten kulmakerroin on

$$k = \frac{3-1}{-3-0} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}.$$

Suoran *m* ja sen normaalin kulmakertoimien tulo on −1. Merkitään normaalin kulmakerrointa kirjaimella *k*.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}\cdot k &= -1 \qquad \left| : \left(-\frac{2}{3}\right)\right. \\ k &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$\begin{aligned} y-4 &= \frac{3}{2}(x-2) \\ y-4 &= \frac{3}{2}x-3 \\ y &= \frac{3}{2}x+1 \end{aligned}$$

b) Lasketaan suoran *m* kulmakerroin. Suora *m* kulkee pisteiden (0, 1) ja (−3, 3) kautta.

$$k = \frac{3-1}{-3-0} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Suoran *m* ja sen normaalin kulmakertoimien tulo on −1. Merkitään normaalin kulmakerrointa kirjaimella *k*.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$-\frac{2}{3} \cdot k = -1 \qquad \Big| : \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$k = \frac{3}{2}$$

Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - (-5))$$

$$y = \frac{3}{2}(x + 5)$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$$

65.

a) Muutetaan suoran $4x-7y+3=0$ yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$
\begin{aligned}
4x-7y+3&=0\\
7y&=4x+3 \quad \Big| :7\\
y&=\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}
\end{aligned}
$$

Suoran $4x-7y+3=0$ kulmakerroin on $\frac{4}{7}$. Jotta suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niiden kulmakertoimien tulo tulee olla -1.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k*.

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{7}\cdot k&=-1 \quad \Big| :\frac{4}{7}\\
k&=-\frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

b) Muutetaan suoran $-x-5y+20=0$ yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$
\begin{aligned}
-x-5y+20&=0 \\
5y&=-x+20 \quad \big|:5 \\
y&=-\frac{1}{5}+4
\end{aligned}
$$

Suoran $-x-5y+20=0$ kulmakerroin on $-\frac{1}{5}$.

Jotta suorat ovat yhdensuuntaiset, niiden kulmakertoimet tulee olla samat.
Suoran kulmakerroin *k* tulee olla $-\frac{1}{5}$.

66.

a) Koska suora *t* on yhdensuuntainen suoran $6x+y-17=0$ kanssa, niillä on sama kulmakerroin.

Muutetaan suora $6x+y-17=0$ ratkaistuun muotoon.

$$
\begin{aligned}
6x+y-17&=0\\
y&=-6x+17
\end{aligned}
$$

Suoran $6x+y-17=0$ kulmakerroin on $k=-6$.

Suora *t* kulkee myös pisteiden (0, −9) ja (2*c*, 15) kautta, joten sen kulmakerroin on.

$$k=\frac{15-(-9)}{2c-0}=\frac{24}{2c}=\frac{12}{c}$$

Tämän lausekkeen arvo pitää olla yhtä suuri kuin edellä määritelty kulmakertoimen arvo $k=-6$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *c*.

$$
\begin{aligned}
-6&=\frac{12}{c}\\
c&=-2
\end{aligned}
$$

b) Suoran $y=-\frac{1}{2}x+8$ kulmakerroin on $-\frac{1}{2}$.

Merkitään suoran *t* kulmakerrointa kirjaimella *k*. Kohtisuorien suorien kulmakertoimien tulo on −1. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *k*.

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\cdot k &= -1 \qquad \left|:\left(-\frac{1}{2}\right)\right. \\
k &= 2
\end{aligned}
$$

Toisaalta suora *t* kulkee pisteiden (0, −9) ja (2*c*, 15) kautta, joten suoran *t* kulmakerroin on

$$k=\frac{15-(-9)}{2c-0}=\frac{24}{2c}=\frac{12}{c}.$$

Tämän lausekkeen arvo pitää olla yhtä suuri kuin edellä määritelty kulmakertoimen arvo $k=2$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *c*.

$$
\begin{aligned}
2 &= \frac{12}{c} \\
c &= 6
\end{aligned}
$$

67.

a) Muutetaan suoran $-5ax+3y-22=0$ yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$
\begin{aligned}
-5ax+3y-22&=0\\
3y&=5ax+22 \qquad \Big|:3\\
y&=\frac{5a}{3}x+\frac{22}{3}
\end{aligned}
$$

Suoran $-5ax+3y-22=0$ kulmakerroin on $\frac{5a}{3}$.

Suoran $y=\frac{1}{10}x-5$ kulmakerroin on $\frac{1}{10}$.

Suorat ovat toistensa normaaleja, joten niiden kulmakertoimien tulo on -1.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$
\begin{aligned}
\frac{5a}{3}\cdot\frac{1}{10}&=-1\\
a&=-6
\end{aligned}
$$

b) Sijoitetaan saatu a:n arvo normaalin yhtälöön ja määritetään sen ratkaistu muoto.

$$
\begin{aligned}
y&=\frac{5\cdot(-6)}{3}x+\frac{22}{3}\\
y&=-10x+\frac{22}{3}
\end{aligned}
$$

c) Sijoitetaan pisteen koordinaatit normaalin yhtälöön.

$$-9 = -10 \cdot 1 + \frac{22}{3}$$

$$-9 = -\frac{8}{3}$$

Saatu yhtälö on epätosi, joten piste (1, −9) ei ole normaalilla.

1.4 Sovelluksia lineaarisesta mallista.

68.

a) Muodostetaan suoran yhtälö annettujen pisteiden (34, 23) ja (−5, 75) avulla.

Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{23-75}{34-(-5)} = -\frac{4}{3}$$

Muodostetaan katua kuvaavan suoran yhtälö.

$$\begin{aligned} y-23 &= -\frac{4}{3}(x-34) \\ y &= -\frac{4}{3}x + \frac{205}{3} \end{aligned}$$

b) Kirkon x-koordinaatti on −5 ja monumentin x-koordinaatti on 34.

Koska nähtävyydet sijaitsevat kadun päätepisteissä, suoran yhtälö on pätevä, kun $-5 \leq x \leq 34$.

c) Sijoitetaan metroaseman sisäänkäynnin koordinaatit katua kuvaavaan suoran yhtälöön.

$$27 = -\frac{4}{3} \cdot 30 + \frac{205}{3}$$
$$27 = 28\frac{1}{3}$$

Saatu yhtälö on epätosi, joten metroaseman sisäänkäynti ei ole kadulla.

69.

a) Suoran yhtälö muodostamiseen tarvitaan kaksi pistettä. Koska x on aika vuosina vuodesta 2009 alkaen, $x = 0$ tarkastelun alkuhetkellä eli vuonna 2009. Vuoteen 2013 mennessä on kulunut 4 vuotta alkuhetkestä, joten $x = 4$.

x (a)	y (kpl)	(x, y)
0	160	(0, 160)
4	208	(4, 208)

Suoran kulmakerroin

$$k = \frac{160 - 208}{0 - 4} = 12$$

Lisäksi valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (0, 160)$, joten suoran yhtälöksi saadaan

$$y - 160 = 12(x - 0)$$
$$y = 12x + 160$$

b) Vuoteen 2016 on kulunut 2009 − 2016 = 7 vuotta eli x = 7.

Susien kanta, kun x = 7, on

$$y = 12 \cdot 7 + 160 = 244 \text{ (kpl)}$$

c) Kulunut aika saadaan, kun susien määrä on $y = 250$.

$$\begin{aligned} 250 &= 12x + 160 \\ x &= 7{,}5 \end{aligned}$$

Susien määrä on 250 vuonna $2009 + 7{,}5 = 2016{,}5$. Susien määrä on yli 250 vuonna 2017.

70.

a) Suoran yhtälön muodostamiseen tarvitaan kaksi pistettä. Koska x on leveyspiiri, Tampereen leveyspiiri on 61,5°, jolloin $x = 61,5$. Rovaniemi on leveyspiirissä 66,5°, jolloin $x = 66,5$.

x (°)	y (min)	(x, y)
0	590	(61,5; 590)
5	500	(66,5; 500)

Suoran kulmakerroin

$$k = \frac{590 - 500}{61,5 - 66,5} = -18$$

Lisäksi valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (61,5; 590)$, joten suoran yhtälöksi saadaan

$$y - 590 = -18(x - 61,5)$$
$$y = -18x + 1\,697$$

b) Valoisan ajan määrä Kuopiossa saadaan, kun sijoitetaan $x = 62,9$.

$$y = -18 \cdot 62,9 + 1\,697 = 564,8 \approx 565 \text{ (min)}$$

c) Helsingin leveyspiiri tämän mallin perusteella saadaan, kun sijoitetaan suoran yhtälöön $y = 600$.

$$600 = -18x + 1\,697$$
$$x = 60,944... \approx 60,9°$$

71.

a) Suoran yhtälö muodostamiseen tarvitaan kaksi pistettä. Koska x on käytetty aika (min), $x = 30$, kun matkaa on kuljettu 37,5 km. Matkaa on kuljettu 60 km, kun aikaa on kulunut $x = 30 + 18 = 48$ min.

x (min)	y (km)	(x, y)
30	37,5	(30, 37,5)
48	60	(48, 60)

Suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{37{,}5 - 60}{30 - 48} = \frac{5}{4}$$

Lisäksi valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (48, 60)$, joten suoran yhtälöksi saadaan

$$y - 60 = \frac{5}{4}(x - 48)$$
$$y = \frac{5}{4}x$$

b) Kulunut aika saadaan, kun sijoitetaan $y = 340$ suoran yhtälöön.

$$340 = \frac{5}{4}x$$
$$x = 272 \text{ (min)}$$

c) Muutetaan 2 tuntia minuuteiksi. 2 h = 120 min.

Kuljettu matka saadaan, kun sijoitetaan suoran yhtälöön $x = 120$.

$$y = \frac{5}{4} \cdot 120 = 150 \text{ (km)}$$

72.

a) Suoran yhtälö muodostamiseen tarvitaan kaksi pistettä. Koska x on aika vuosina vuodesta 1972 alkaen, $x = 0$ tarkastelun alkuhetkellä eli vuonna 1972. Vuoteen 2002 mennessä on kulunut 30 vuotta alkuhetkestä, joten $x = 30$. Miesten verenpainearvot:

x (a)	y (mmHg)	(x, y)
0	147	(0, 147)
30	137	(30, 137)

Suoran kulmakerroin

$$k = \frac{147-137}{0-30} = -\frac{1}{3}$$

Lisäksi valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (0, 147)$, joten suoran yhtälöksi saadaan

$$y - 147 = -\frac{1}{3}(x-0)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 147$$

Miesten verenpaineen arvoa kuvaava suoran yhtälö on $y = -\frac{1}{3}x + 147$.

Naisten verenpainearvot:

x (a)	y (mmHg)	(x, y)
0	150	(0, 150)
30	133	(30, 133)

Suoran kulmakerroin

$$k=\frac{150-133}{0-30}=-\frac{17}{30}$$

Lisäksi valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0)=(0,150)$, joten suoran yhtälöksi saadaan

$$y-150=-\frac{17}{30}(x-0)$$
$$y=-\frac{17}{30}x+150$$

Naisten verenpaineen arvoa kuvaava suoran yhtälö on $y=-\frac{17}{30}x+150$.

b) Sijoitetaan miesten verenpaineen arvoa kuvaavaan yhtälöön y = 140.

$$140=-\frac{1}{3}x+147$$
$$x=21$$

Tarkastelun alkuhetki on 1972, joten miesten verenpaine on laskenut keskimäärin tasolle 140 mmHg vuonna 1972 + 21 = 1993.

c) Naisten keskimääräinen verenpaine vuonna 1998 saadaan sijoittamalla yhtälöön x = 26 (1998−1972).

$$y=-\frac{17}{30}\cdot 26+150=135,266\approx 135\ \text{(mmHg)}$$

73.

a) Auton ja moottoripyörän nopeus lähtöhetkellä $x = 0$, jolloin nopeudet ovat

- auton alkunopeus: $y = 0,5 \cdot 0 + 20 = 20$ (m/s)
- moottoripyörän alkunopeus: $y = 0,64 \cdot 0 + 11,1 = 11,1$ (m/s)

Autolla on siis suurempi nopeus tarkastelun alkaessa.

b) Yhtälön $y = 0,5x + 20$ kulmakertoimesta $k = 0,5$ nähdään, että auton nopeus kasvaa tarkastelun alusta alkaen 0,5 m/s sekunnissa. Auton kiihtyvyys on $0,5\ \mathrm{m/s^2}$.

Yhtälön $y = 0,64x + 11,1$ kulmakertoimesta $k = 0,64$ nähdään, että moottoripyörän nopeus kasvaa tarkastelun alusta alkaen 0,64 m/s sekunnissa. Moottoripyörän kiihtyvyys on $0,64\ \mathrm{m/s^2}$.

Moottoripyörällä on suurempi kiihtyvyys.

c) Auto ja moottoripyörä kiihdyttävät samaan aikaan. Samassa nopeudessa auton ja moottoripyörän nopeuden lausekkeet ovat yhtä suuret. Merkitään nopeutta kuvaavat yhtälöt yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} 0,64x+11,1 &= 0,5x+20 \\ x &= 63,5714\ldots \text{ (s)} \\ x &\approx 64 \text{ (s)} \end{aligned}$$

Kun on ajettu 64 s, auton ja moottoripyörän nopeus on

$y = 0,5 \cdot 64 + 20 = 52 \text{ (m/s)}$.

74.

a) Yhtiön *A* perusmaksun suuruus saadaan, kun merkitään $x = 0$.

$y = 154,8 + 0,0048 \cdot 0 = 154,80 \, (€)$

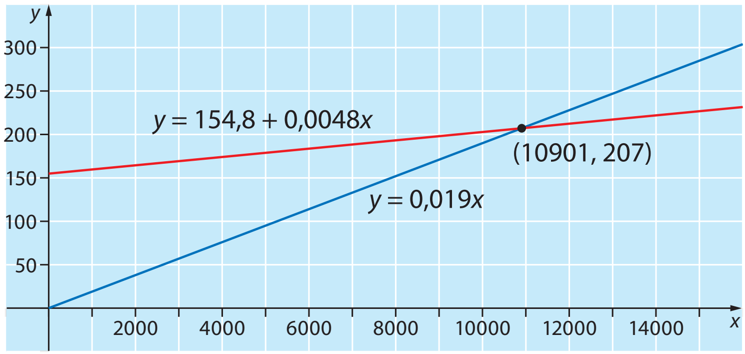
b) Sijoittamalla yhtiön *B* sopimuksen vuotuiseen kustannuksen yhtälöön $x = 1$, saadaan yhden kilowattitunnin hinta.

$y = 0,019 \cdot 1 = 0,019$ €

Yksi kilowattitunti maksaa 0,019 €.

c) Lasketaan kuinka monta kilowattituntia pitää kuluttaa sähköä, jotta vuotuiset kustannukset ovat samat. Merkitään yhtiöiden sopimuksien kustannukset samoiksi ja lasketaan *x*.

$$\begin{aligned} 154,8+0,0048x &= 0,019x \\ x &= 10\,901,4084\ldots\ (\mathrm{kWh}) \\ x &\approx 10\,901\ (\mathrm{kWh}) \end{aligned}$$



Kun vuotuinen käyttömäärä on yli 10 901 kWh, yhtiön *A* sopimus on edullisempi.

75.

a)

- Liikuntakerhon perusmaksu saadaan sijoittamalla kustannuksia kuvaavaan yhtälöön $x = 0$ eli $y = 56 + 3{,}8 \cdot 0 = 56$ (€).

- Askartelukerhon perusmaksu saadaan sijoittamalla kustannuksia kuvaavaan yhtälöön $x = 0$ eli $y = 35 + 4{,}5 \cdot 0 = 35$ (€).

Liikuntakerhon perusmaksu on suurempi.

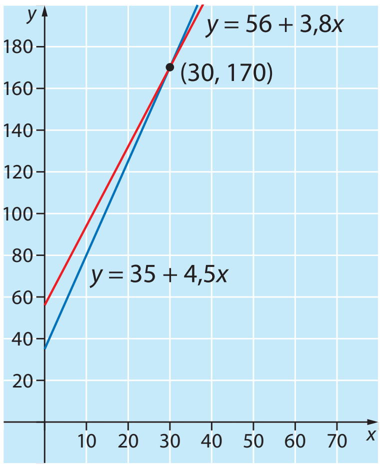
b) Yhtälön $y = 56 + 3{,}8x$ kulmakertoimesta $k = 3{,}8$ nähdään, että osallistumiskerta kasvattaa 3,8 € kustannuksia.

Yhtälön $y = 35 + 4{,}5x$ kulmakertoimesta $k = 4{,}5$ nähdään, että osallistumiskerta kasvattaa 4,5 € kustannuksia.

Osallistumiskerran yksikköhinta on halvempi liikuntakerhossa.

c) Lasketaan, mikä on osallistumiskertojen lukumäärä, jotta kerhojen vuotuiset kustannukset olisivat samat. Merkitään kustannuksia kuvaavat yhtälöt yhtä suuriksi ja lasketaan *x*.

$$56+3,8x=35+4,5x$$
$$x=30$$



Kerhojen vuotuiset kustannukset ovat samat, kun osallistumiskertoja on 30 kpl.

76.

a) Panun matka tiedetään kaksi pistettä.

- Lähtöhetkellä $x = 0$ Panu on kulkenut 0 m ($y = 0$). Panun lähtöpiste on siis (0, 0).

- 5 sekunnin kuluttua Panu on 7 m:n päässä lähtöpisteestä. Panun toinen tunnettu piste on (5, 7).

Lasketaan suoran kulmakerroin pisteitten avulla.

$$k = \frac{7-0}{5-0} = \frac{7}{5}$$

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - 0 = \frac{7}{5}(x-0)$$
$$y = \frac{7}{5}x$$

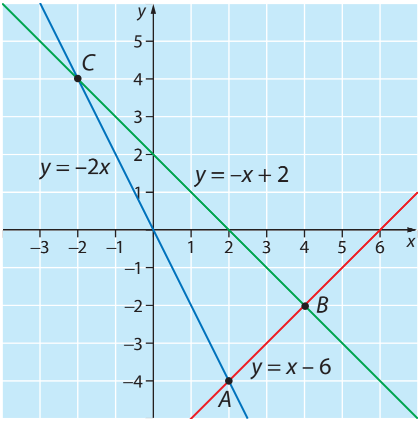
b) Lasketaan kuinka monta sekuntia pojilla kestää kävellä yhteensä 122 m. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan x.

$$\frac{7}{5}x + 1,25x = 122$$
$$x = 46,0377...(\text{s})$$
$$x \approx 46\ (\text{s})$$

46 sekunnin kuluttua pojat kohtaavat toisensa.

77.

a) Piirretään suorat samaan koordinaatistoon. Merkitään kolmion kärkipisteitä A, B ja C.



Kärkipisteet eli suorien leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla kolme yhtälöparia.

Piste A

$$\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -2x \end{cases}$$

$x = 2$ ja $y = -4$

Piste B

$$\begin{cases} y = x - 6 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$x = 4$ ja $y = -2$

Piste C

$$\begin{cases} y = -2x \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$x = -2$ ja $y = 4$

Kärkipisteet ovat: (2, −4), (4, −2) ja (−2, 4).

b) Kolmio on suorakulmainen, jos kaksi suorista on kohtisuorassa toisiaan vastaan. Tällöin suorien kulmakertoimien tulo on -1.

- Suoran $y = x - 6$ kulmakerroin on 1.
- Suoran $y = -x + 2$ kulmakerroin on -1.

Kulmakertoimien tulo on $1 \cdot (-1) = -1$ eli kolmio on siis suorakulmainen.

c) Kolmion kannan pituus on pisteiden $A(2, -4)$ ja $B(4, -2)$ etäisyys.

Kolmion kannan pituus:

$$\sqrt{(2-4)^2 + (-4-(-2))^2} = \sqrt{8}$$

Kolmion korkeus on pisteiden $B(4, -2)$ ja $C(-2, 4)$ etäisyys.

Kolmion korkeus:

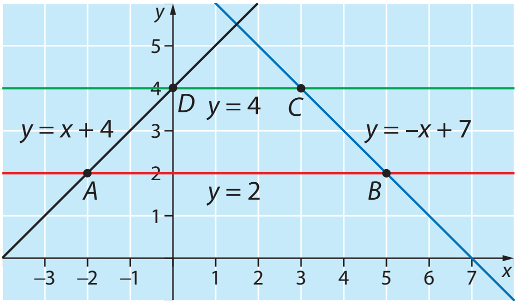
$$\sqrt{(4-(-2))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{72}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{72} = 12$$

78.

a) Piirretään suorat samaan koordinaatistoon. Merkitään kolmion kärkipisteitä *A*, *B*, *C* ja *D*.



Kärkipisteet eli suorien leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla neljä yhtälöparia.

Piste A

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$x = -2$ ja $y = 2$

Piste B

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

$x = 5$ ja $y = 2$

Piste C

$$\begin{cases} y = 4 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

$x = 3$ ja $y = 4$

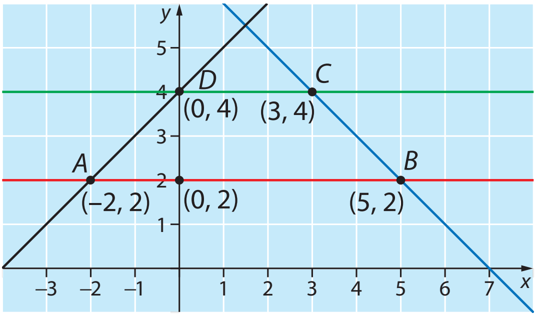
Piste D

$$\begin{cases} y = 4 \\ y = x + 4 \end{cases}$$

$x = 0$ ja $y = 4$

Kärkipisteet ovat: (−2, 2), (5, 2), (3, 4) ja (0, 4).

b) Nelikulmio on tasakylkinen puolisuunnikas.



Lasketaan pisteiden $A(-2, 2)$ ja $B(5, 2)$ etäisyys.

$$\sqrt{(-2-5)^2+(2-2)^2}=7$$

Pisteiden A ja B etäisyys on 7 yksikköä eli $7\cdot 10\text{ m}=70\text{ m}$.

Lasketaan pisteiden $C(3, 4)$ ja $D(0, 4)$ etäisyys.

$$\sqrt{(3-0)^2+(4-4)^2}=3$$

Pisteiden C ja D etäisyys on 3 yksikköä eli $3\cdot 10\text{ m}=30\text{ m}$.

Lasketaan puolisuunnikkaan korkeus h. Puolisuunnikkaan korkeus on suorien $y=2$ ja $y=4$ etäisyys. Lasketaan se pisteiden (0, 4) ja (0, 2) avulla.

$$\sqrt{(0-0)^2+(4-2)^2}=2$$

Puolisuunnikkaan korkeus on 2 yksikköä eli $2 \cdot 10\ \text{m} = 20\ \text{m}$.

Lasketaan puolisuunnikkaan pinta-ala.

$$A = \frac{70\ \text{m} + 30\ \text{m}}{2} \cdot 20\ \text{m} = 1\,000\ \text{m}^2 = 10\ \text{a}$$

79.

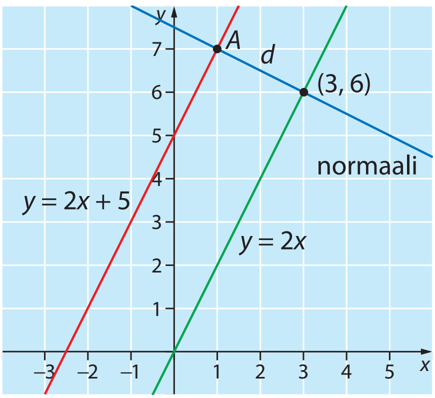
a) Suora t on yhdensuuntainen suoran m kanssa, joten niiden kulmakertoimet ovat yhtä suuret.

$k_t = k_m = 2$

Suora t kulkee pisteen (3, 6) kautta. Muodostetaan yhtälö.

$$y - 6 = 2(x - 3)$$
$$y = 2x$$

b) Piirretään kuva joesta. Joen leveys on suorien kohtisuora etäisyys. Piirretään pisteen (3, 6) kautta suoralle $y = 2x$ normaali n. Merkitään suoran ja sen normaalin leikkauspistettä kirjaimella A ja joen leveyttä kirjaimella d.



Joen leveys d on pisteiden (3, 6) ja A välinen etäisyys. Piste A on normaalilla, joten määritetään ensin normaalin yhtälö.

Koska suoran t kulmakerroin $k_t = 2$, niin normaalin n kulmakerroin $k_n = -\frac{1}{2}$. Muodostetaan normaalin yhtälö kulmakertoimen $k_n = -\frac{1}{2}$ ja pisteen (3, 6) avulla.

$$y - 6 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2}$$

Lasketaan suorien leikkauspisteen A koordinaatit yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{15}{2} \end{cases}$$

$x = 1$ ja $y = 7$

Leikkauspisteen A koordinaatit ovat (1, 7).

Lasketaan pisteiden A(1, 7) ja (3, 6) välinen etäisyys.

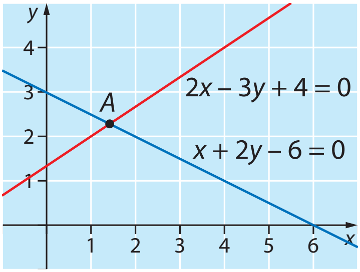
$$d = \sqrt{(1-3)^2 + (7-6)^2} = \sqrt{5} = 2,2360...$$

Koordinaattiyksikkö on 5 m, joten etäisyys on

$$2,2360... \cdot 5 \text{ m} = 11,180... \text{ m} \approx 11 \text{ m}$$

80.

a) Piirretään suorat samaan koordinaatistoon ja merkitään pistettä, jossa tiet eroavat, kirjaimella A.



Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x-3y+4=0 \\ x+2y-6=0 \end{cases}$$

$x=\dfrac{10}{7}$ ja $y=\dfrac{16}{7}$

Tiet eroavat pisteessä $\left(\dfrac{10}{7}, \dfrac{16}{7}\right)$.

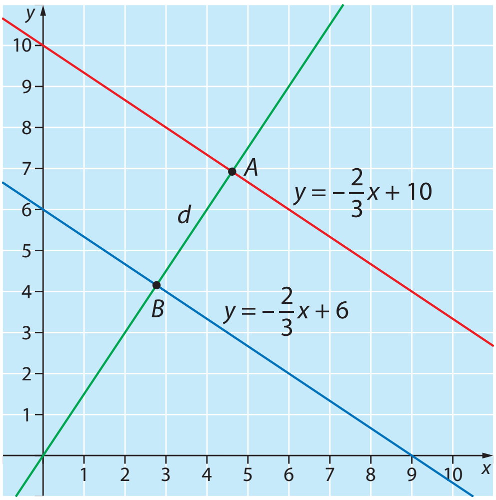
Lasketaan, kuinka pitkä etäisyys on pisteillä $\left(\dfrac{10}{7}, \dfrac{16}{7}\right)$ ja (4, 1).

$$\sqrt{\left(\frac{10}{7}-4\right)^2+\left(\frac{16}{7}-1\right)^2}=2{,}874\ldots\approx 2{,}9$$

Koska kartalla pisteiden etäisyys on 2,9 yksikköä, luonnossa etäisyys on $2{,}9\cdot 1\text{ km}=2{,}9\text{ km}$.

81.

Piirretään kuva valonsäteistä. Valonsäteiden etäisyys on suorien kohtisuora etäisyys. Piirretään suoralle $y=-\frac{2}{3}x+6$ normaali n. Merkitään suoran ja sen normaalin leikkauspisteitä kirjaimilla A ja B ja säteiden etäisyyttä kirjaimella d.



Säteiden etäisyys d on pisteiden A ja B välinen etäisyys. Pisteet ovat normaalilla, joten määritetään ensin normaalin yhtälö.

Koska suoran $y=-\frac{2}{3}x+6$ kulmakerroin $k=-\frac{2}{3}$, niin normaalin n kulmakerroin $k_n=\frac{2}{3}$.

Muodostetaan normaalin yhtälö kulmakertoimen $k_n = \frac{3}{2}$ ja pisteen (0, 0) avulla.

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - 0)$$
$$y = \frac{3}{2}x$$

Lasketaan suorien leikkauspisteiden koordinaatit yhtälöparin avulla.

Piste A

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 10 \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

$$x = \frac{60}{13} \text{ ja } y = \frac{90}{13}$$

Piste B

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 6 \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases}$$

$$x = \frac{36}{13} \text{ ja } y = \frac{54}{13}$$

Leikkauspisteen A koordinaatit ovat $\left(\frac{60}{13}, \frac{90}{13}\right)$ ja B koordinaatit ovat $\left(\frac{36}{13}, \frac{54}{13}\right)$.

Lasketaan pisteitten A ja B etäisyys.

$$\sqrt{\left(\frac{60}{13} - \frac{36}{13}\right)^2 + \left(\frac{90}{13} - \frac{54}{13}\right)^2} = 3{,}328... \approx 3{,}3$$

82.

Suoran yhtälön muodostamiseen tarvitaan kaksi pistettä. Koska x on matka kilometreinä Helsingistä alkaen, $x = 0$ tarkastelun alkupisteessä eli Helsingissä. Turkuun on matkaa 168 km alkupisteestä, joten $x = 165$.

x (km)	y (°C)	(x, y)
0	17,1	(0; 17,1)
165	22,3	(165; 22,3)

Suoran kulmakerroin

$$k = \frac{17{,}1 - 22{,}3}{0 - 165} = \frac{26}{825}$$

Lisäksi valitaan tunnetuksi pisteeksi $(x_0, y_0) = (165; 22{,}3)$, joten suoran yhtälöksi saadaan

$$\begin{aligned} y - 22{,}3 &= \frac{26}{825}(x - 165) \\ y &= \frac{26}{825}x + 17{,}1 \end{aligned}$$

Sijoittamalla $x = 110$ $(165 - 55)$ suoran yhtälöön saadaan Salon lämpötila.

$$y = \frac{26}{825} \cdot 110 + 17{,}1 = 20{,}566 \approx 20{,}6 \text{ (°C)}$$

83.

a) Suoran yhtälön muodostamiseen tarvitaan kaksi pistettä. Koska x on puun tilavuus kuutiometreinä, x = 0,060 m^3, kun puut painoivat 25 kg. Jos puiden tilavuus on x = 0,050 dm^3, puun painoivat 168 kg.

x (m^3)	y (kg)	(x, y)
0,06	25	(0,06; 25)
0,5	168	(0,5; 168)

Suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{25-168}{0{,}06-0{,}5} = 325$$

Suoran yhtälö on

$$y - 168 = 325(x - 0{,}5)$$
$$y = 325x + 5{,}5 \text{ (kg)}$$

b) Puiden paino saadaan, kun sijoitetaan suoran yhtälöön x = 1,3.

$$y = 325 \cdot 1{,}3 + 5{,}5 = 428 \approx 430 \text{ (kg)}$$

c) Männyn tilavuus saadaan, kun sijoitetaan y = 5,5 suoran yhtälöön.

$$5{,}5 = 325x + 5{,}5$$
$$x = 0 \text{ (m}^3\text{)}$$

Malli ei päde näin pienille puille.

84.

Määritettävä suora on vastakkaissuuntainen suoran $y = 2x$ kanssa, joten niiden kulmakertoimien tulo on -1. Suoran $y = 2x$ kulmakerroin on $k = 2$. Merkitään määritettävän suoran kulmakerrointa kirjaimella *k*.

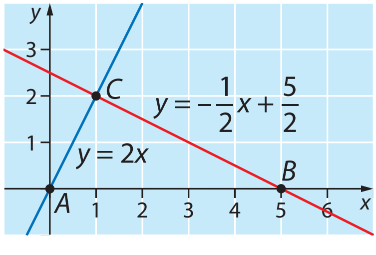
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k*.

$$2 \cdot k = -1$$
$$k = -\frac{1}{2}$$

Määritettävä suora kulkee pisteen (1, 2) kautta. Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Piirretään suorat samaan koordinaatistoon ja merkitään kolmion kulmia kirjaimilla *A*, *B* ja *C*.



Kärkipisteet eli suorien leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla kolme yhtälöparia.

Piste A

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ ja $y = 0$

Piste B

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$x = 5$ ja $y = 0$

Piste C

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = 2x \end{cases}$$

$x = 1$ ja $y = 2$

Kolmio on suorakulmainen, koska suorat $y = 2x$ ja $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Kolmion kannan pituus on pisteiden $C(1, 2)$ ja $B(5, 0)$ etäisyys.

Lasketaan kolmion kannan pituus.

$$\sqrt{(1-5)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20}$$

Kolmion korkeus on pisteiden $A(0, 0)$ ja $C(1, 2)$ etäisyys.

Lasketaan kolmion korkeus.

$$\sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$$

Lasketaan kolmion pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = 5$$

85.

a) Jotta mökkitie on mahdollisimman lyhyt, sen tulee olla kohtisuorassa valtatietä vastaan.

Suoran $y = 2x - 1$ kulmakerroin on $k = 2$. Merkitään mökkitien kulmakerrointa kirjaimella *k*. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k*.

$$2 \cdot k = -1$$
$$k = -\frac{1}{2}$$

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 13)$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$$

Suorien leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2} \end{cases}$$

$x = 3$ ja $y = 5$

Tieliittymä pitää vetää pisteeseen (3, 5).

b) Lasketaan pisteiden (3, 5) ja (13, 0) etäisyys.

$$\sqrt{(3-13)^2+(5-0)^2}=11,1803...$$

Kartalla mökkitien pituus on 11,1803… yksikköä ja luonnossa

$11,1803...\cdot 10\text{ m}=111,803...\text{ m}\approx 112\text{ m}$.