5 Kertaus: Matemaattisia malleja

5.1 Kurssin keskeiset asiat

1.

a) Muodostetaan suoran yhtälö kulmakerroin $k = -2$ ja pisteen $(0, -3)$ avulla.

$$\begin{aligned} y-(-3) &= -2(x-0) \\ y+3 &= -2x \\ y &= -2x-3 \end{aligned}$$

b) Muodostetaan suoran yhtälö kulmakerroin $k = -3$ ja pisteen $(1, 2)$ avulla.

$$\begin{aligned} y-2 &= -3(x-1) \\ y-2 &= -3x+3 \\ y &= -3x+5 \end{aligned}$$

2.

a) Lasketaan ensin suoran kulmakerroin *k*.

$$k=\frac{-5-4}{-1-2}=\frac{-9}{-3}=3$$

Muodostetaan sitten suoran yhtälö.

$$\begin{aligned} y-4&=3(x-2)\\ y-4&=3x-6\\ y&=3x-2 \end{aligned}$$

b) Lasketaan ensin suoran kulmakerroin *k*.

$$k=\frac{1-(-3)}{2-10}=\frac{1+3}{-8}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$$

Muodostetaan sitten suoran yhtälö.

$$\begin{aligned} y-1&=-\frac{1}{2}\cdot(x-2)\\ y-1&=-\frac{1}{2}x+1\\ y&=-\frac{1}{2}x+2 \end{aligned}$$

3.

a) Lasketaan suoran kulmakerroin *k*.

$$k=\frac{1-(-8)}{-2-1}=\frac{1+8}{-3}=-\frac{9}{3}=-3$$

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$\begin{aligned} y-1&=-3(x-(-2)) \\ y-1&=-3(x+2) \\ y-1&=-3x-6 \\ y&=-3x-5 \end{aligned}$$

b) Tutkitaan, onko piste (7, −14) suoralla sijoittamalla pisteen koordinaatit suoran yhtälöön.

$$\begin{aligned} -14&=-3\cdot 7-5 \\ -14&=-21-5 \\ -14&=-26 \end{aligned}$$

Koska saatu yhtälö ei päde, piste (7, −14) ei ole suoralla $y=-3x-5$.

4.

a) Geometrisen jonon yleisen jäsenen määrittämiseksi tarvitaan

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 64$
- suhdeluku $q = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$.

Muodostetaan geometrisen jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

b) Lasketaan yleisen jäsenen avulla a_7.

$$\begin{aligned} a_7 &= 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-1} \\ &= 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6} \\ &= 64 \cdot \frac{1}{2^6} \\ &= 64 \cdot \frac{1}{64} = 1 \end{aligned}$$

5.

a) Aritmeettisen jonon yleisen jäsenen määrittämiseksi tarvitaan

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = -10$
- differenssi $d = -7-(-10) = -7+10 = 3$.

Muodostetaan aritmeettisen jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$\begin{aligned} a_n &= -10+(n-1)\cdot 3 \\ &= -10+3n-3 \\ &= 3n-13 \end{aligned}$$

b) Aritmeettisen jonon yleisen jäsenen määrittämiseksi tarvitaan

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = -10$
- differenssi $d = -4$.

Muodostetaan aritmeettisen jonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= -10+(n-1)\cdot(-4) \\ &= -10-4n+4 \\ &= -4n-6 \end{aligned}$$

6.

Suora 1:

- kulmakerroin on $k = 2$.
- piste (0, 0) on suoralla.

Suoran yhtälö on

$$y - 0 = 2(x - 0)$$
$$y = 2x$$

Suora 2:

- kulmakerroin on $k = -1$.
- piste (0, 1) on suoralla.

Suoran yhtälö on

$$y - 1 = -1(x - 0)$$
$$y - 1 = -x$$
$$y = -x + 1$$

Suora 3:

- kulmakerroin on $k = 0$.
- piste $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ on suoralla.

Suoran yhtälö on

$$y - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0(x - 0)$$

$$y + \frac{1}{2} = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

7.

a) $2 = 2^1$, $x = 1$

b) $2^x = \dfrac{1}{2}$

$2^x = 2^{-1}$

$x = -1$

c) $2^x = 8^2$

$2^x = (2^3)^2$

$2^x = 2^6$

$x = 6$

d) $3^x = \dfrac{1}{3^5}$

$3^x = 3^{-5}$

$x = -5$

e) $10^x = 1000$

$$10^x = 10^3$$

$$x = 3$$

f) $10^x = 0,01$

$$10^x = \frac{1}{100}$$

$$10^x = \frac{1}{10^2}$$

$$10^x = 10^{-2}$$

$$x = -2$$

8.

a) $3^{2x} = \frac{1}{9}$

$$3^{2x} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^{2x} = 3^{-2}$$

$$2x = -2 \qquad \Big|:2$$

$$x = -1$$

b) $4^{3x} = 8^{x-1}$

$$(2^2)^{3x} = (2^3)^{x-1}$$

$$2^{6x} = 2^{3x-3}$$

$$6x = 3x - 3$$

$$3x = -3 \qquad \Big|:3$$

$$x = -1$$

c)

$$\frac{27^{x+2}}{9^{1-3x}}=1$$

$$\frac{(3^3)^{x+2}}{(3^2)^{1-3x}}=1$$

$$\frac{3^{3x+6}}{3^{2-6x}}=3^0$$

$$3^{3x+6-(2-6x)}=3^0$$

$$3x+6-(2-6x)=0$$

$$3x+6-2+6x=0$$

$$9x+4=0$$

$$9x=-4 \qquad \Big|:9$$

$$x=-\frac{4}{9}$$

9.

a) $5^x = 4$

$$x = \log_5 4$$

b) $2^{3x} = 3$

$$3x = \log_2 3 \qquad \Big|:3$$

$$x = \frac{\log_2 3}{3}$$

c) $e^{x-1} = 2$

$$x - 1 = \ln 2$$

$$x = 1 + \ln 2$$

10.

a) $x^4 = 81$

$$x = \pm\sqrt[4]{81}$$

$$x = \pm\sqrt[4]{3^4}$$

$$x = \pm 3$$

b) $2x^6 = 10 \quad \Big| :2$

$$x^6 = 5$$

$$x = \pm\sqrt[6]{5}$$

c) $3x^5 - 12 = 0$

$$3x^5 = 12 \quad \Big| :3$$

$$x^5 = 4$$

$$x = \sqrt[5]{4}$$

11.

a) Muodostetaan aritmeettisen jonon 3. ja 7. jäsen jonon ensimmäisen jäsenen ja differenssi avulla.

$$a_3 = a_1 + (3-1)\cdot d = a_1 + 2d$$
$$a_7 = a_1 + (7-1)\cdot d = a_1 + 6d$$

Lasketaan jonon 3. ja 7. jäsenen erotus.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan differenssi.

$$\begin{aligned} a_7 - a_3 &= 32 - 12 \\ a_1 + 6d - (a_1 + 2d) &= 20 \\ a_1 + 6d - a_1 - 2d &= 20 \\ 4d &= 20 \qquad \Big| : 4 \\ d &= 5 \end{aligned}$$

b) Lasketaan ensin jonon ensimmäinen jäsen.

$$a_3 = a_1 + 2d$$
$$12 = a_1 + 2\cdot 5$$
$$a_1 = 12 - 10$$
$$a_1 = 2$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + (n-1)\cdot 5 \\ &= 2 + 5n - 5 \\ &= 5n - 3 \end{aligned}$$

c) Tutkitaan onko luku 57 lukujonon jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= 57 \\ 5n-3 &= 57 \\ 5n &= 60 \qquad \Big|:5 \\ n &= 12 \end{aligned}$$

Koska ratkaisuksi tuli positiivinen kokonaisluku, luku 57 on lukujonon jäsen.

12.

a) Muodostetaan geometrisen jonon 2. ja 5. jäsen jonon ensimmäisen jäsenen ja differenssi avulla.

$$a_2 = a_1 \cdot q^{2-1} = a_1 \cdot q$$
$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = a_1 \cdot q^4$$

Lasketaan jonon 2. ja 5. jäsenen osamäärä.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan differenssi.

$$\begin{aligned}\frac{a_5}{a_2} &= \frac{48}{-6}\\ \frac{a_1 \cdot q^4}{a_1 \cdot q} &= -8\\ q^{4-1} &= -8\\ q^3 &= -8\\ q &= \sqrt[3]{-8} = -2\end{aligned}$$

b) Lasketaan ensin jonon ensimmäinen jäsen.

$$\begin{aligned}a_2 &= -6\\ a_1 \cdot q &= -6\\ a_1 \cdot (-2) &= -6 \qquad \Big| :(-2)\\ a_1 &= 3\end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$$

13.

a) Muutetaan yhtälön yleinen jäsen ratkaistuun muotoon.

$$
\begin{aligned}
-4x+2y-16&=0\\
2y&=4x+16 && \mid :2\\
y&=2x+8
\end{aligned}
$$

Ratkaistusta muodosta nähdään, että suoran kulmakerroin on $k=2$.

b) Suora leikkaa *y*-akselin, kun $x = 0$. Lasketaan piste sijoittamalla yleiseen jäseneen $x = 0$.

$$
\begin{aligned}
y&=2\cdot 0+8\\
y&=8
\end{aligned}
$$

Suora leikkaa *y*-akselin pisteessä (0, 8).

Suora leikkaa *x*-akselin, kun $y = 0$.

Lasketaan piste sijoittamalla yleiseen jäseneen $y = 0$.

$$
\begin{aligned}
0&=2x+8\\
2x&=-8 && \mid :2\\
x&=-4
\end{aligned}
$$

Suora leikkaa *x*-akselin pisteessä (−4, 0)

14.

a) Ruokaan joutunut bakteerimäärä saadaan sijoittamalla $x = 0$ funktioon f.

$f(0) = 120 \cdot 1,0353^0 = 120 \cdot 1 = 120$

b) Bakteerien kasvu minuutissa voidaan päätellä funktion suhdeluvusta.

$1,0353 - 1 = 0,0353 = 3,53\ \%$

c) Bakteereja on aluksi 120 kpl. Kun bakteeri jakaantuu kahtia, niitä on $120 \cdot 2 = 240$ kappaletta.

Katsotaan kuvaajasta, milloin bakteereja on 240.

Kuvaajasta nähdään, että bakteeri jakaantuu kahtia 20 minuutissa.

15.

Lasketaan aritmeettisen jonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa summakaavalla.

Siihen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 2 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5$
- viimeinen yhteenlaskettava $a_{10} = 2 + 3 \cdot 10 = 32$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 10$.

$$\begin{aligned}
S_{10} &= n \cdot \frac{a_1 + a_{10}}{2} \\
&= 10 \cdot \frac{5+32}{2} \\
&= 10 \cdot \frac{37}{2} \\
&= \frac{370}{2} \\
&= 185
\end{aligned}$$

16.

Muodostetaan jonon kuudennen ja seitsemännen jäsenen keskiarvo ja ratkaistaan siitä jonon seitsemäs jäsen.

$$\frac{a_6 + a_7}{2} = 27$$
$$\frac{25 + a_7}{2} = 27 \qquad \vert \cdot 2$$
$$25 + a_7 = 54$$
$$a_7 = 29$$

Muodostetaan aritmeettisen jonon kuudes ja seitsemäs jäsen jonon ensimmäisen ja differenssin avulla.

$$a_6 = a_1 + (6-1) \cdot d = a_1 + 5d$$
$$a_7 = a_1 + (7-1) \cdot d = a_1 + 6d$$

Muodostetaan yhtälöpari, ja ratkaistaan siitä jonon ensimmäinen jäsen ja differenssi.

$$\begin{cases} a_1 + 5d = 25 \\ a_1 + 6d = 29 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1 = 25 - 5d \\ a_1 = 29 - 6d \end{cases}$$

$$25 - 5d = 29 - 6d \quad \text{ja} \quad a_1 = 25 - 5 \cdot 4 = 5$$
$$d = 4$$

Muodostetaan jonon kuuden ensimmäisen jäsenen summa summakaavalla.

$$S_6 = 6 \cdot \frac{5 + 25}{2} = 6 \cdot \frac{30}{2} = 6 \cdot 15 = 90$$

17.

Geometrisen jonon kuuden ensimmäisen jäsen summa voidaan laskea summakaavalla.

Summakaavaan tarvitaan:

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = -3$
- suhdeluku $q = 2$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 6$

$$\begin{aligned}
S_6 &= a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \\
&= -3 \cdot \frac{1-2^6}{1-2} \\
&= -3 \cdot \frac{1-64}{1} \\
&= -3 \cdot \frac{63}{1} \\
&= -189
\end{aligned}$$

18.

a) Suoran $y = 2x + 3$ kulmakerroin on 2.

Merkitään normaalin kulmakerrointa kirjaimella *k*. Suoran ja sen normaalin kulmakertoimien tulo on −1.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k*.

$$\begin{aligned} 2 \cdot k &= -1 \qquad \Big| : 2 \\ k &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Lasketaan, missä pisteessä suora $y = 2x + 3$ leikkaa *y*-akselin.

Suora leikkaa *y*-akselin, kun $x = 0$.

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot 0 + 3 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Suora $y = 2x + 3$ leikkaa *y*-akselin pisteessä (0, 3).

Muodostetaan normaalin yhtälö.

$$\begin{aligned} y - 3 &= -\frac{1}{2} \cdot (x - 0) \\ y - 3 &= -\frac{1}{2}x \\ y &= -\frac{1}{2}x + 3 \end{aligned}$$

b) Suora *t* on yhdensuuntainen suoran $y = 2x + 3$ kanssa, joten niillä on sama kulmakerroin $k = 2$.

Muodostetaan suoran *t* yhtälö.

$$
\begin{aligned}
y - 5 &= 2(x - 2) \\
y - 5 &= 2x - 4 \\
y &= 2x + 1
\end{aligned}
$$

c) Määritetään suorien *n* ja *t* leikkauspiste.

Lasketaan leikkauspisteen *x*-koordinaatti.

$$
\begin{aligned}
2x + 1 &= -\frac{1}{2}x + 3 \\
\frac{5}{2}x &= 2 \qquad \Big|: \frac{5}{2} \\
x &= 2 \cdot \frac{2}{5} \\
x &= \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

Lasketaan leikkauspisteen *y*-koordinaatti.

$$y = 2 \cdot \frac{4}{5} + 1 = \frac{8}{5} + 1 = \frac{13}{5}$$

Suorien *n* ja *t* leikkauspiste on $\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

19.

a) Platinan paino alussa saadaan sijoittamalla $x = 0$ funktioon f.

$$f(0) = 50 \cdot 0{,}943^0 = 50 \cdot 1 = 50$$

Platinaa oli alussa 50 g.

b) Platinan hajoamisen määrä prosentteina tunnissa voidaan päätellä funktion suhdeluvusta.

$$1 - 0{,}943 = 0{,}057 = 5{,}7\ \% \approx 6\ \%$$

c) Ainetta on alussa 50 g. Kun ainetta on hajonnut puolet, sitä on jäljellä

$$\frac{50\text{ g}}{2} = 25\text{ g}.$$

Tutkitaan kuvaajasta, kuinka monen tunnin päästä isotooppia on jäljellä 25g.

Kuvaajasta voidaan nähdä, että isotoopin puoliintumisaika on 10 tuntia.

20.

a) Muodostetaan riippuvuutta kuvaava suoran yhtälö pisteiden (30, 10) ja (15, 7) avulla.

- Suoran kulmakerroin on $k = \frac{10-7}{30-15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$
\begin{aligned}
y-7 &= \frac{1}{5}(x-15) \\
y-7 &= \frac{1}{5}x-3 \\
y &= \frac{1}{5}x+4
\end{aligned}
$$

b) Sijoittamalla x = 10 suoran yhtälöön saadaan arvosana 10 pisteellä.

$$y = \frac{1}{5} \cdot 10 + 4 = \frac{10}{5} + 4 = 2 + 4 = 6$$

c) Sijoittamalla y = 8 suoran yhtälöön, saadaan pistemäärä, jolla saa arvosanan 8.

$$
\begin{aligned}
8 &= \frac{1}{5}x+4 \\
\frac{1}{5}x &= 4 \qquad \Big| \cdot 5 \\
x &= 20
\end{aligned}
$$

21.

a) Korttien määrä eri pinoissa muodostaa aritmeettisen jonon.

Aritmeettisen jonon muodostamiseksi tarvitaan

- jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 1$
- jonon differenssi $d = 2$.

Jonon yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + (n-1) \cdot 2 \\ &= 1 + 2n - 2 \\ &= 2n - 1 \end{aligned}$$

b) Kahdeksannen pinon korttimäärä saadaan laskemalla jonon kahdeksas jäsen.

$$a_8 = 2 \cdot 8 - 1 = 16 - 1 = 15$$

c) Lasketaan kuinka monta korttia pinoihin menee summakaavan avulla.

$$\begin{aligned} S_8 &= 8 \cdot \frac{1+15}{2} \\ &= 8 \cdot \frac{16}{2} \\ &= 8 \cdot 8 = 64 \end{aligned}$$

Kahdessa pakassa on $52 \cdot 2 = 104$ korttia.

Kahdeksan pinon ulkopuolelle jää $104 - 64 = 40$ korttia.

22.

a) Jonon yleisestä jäsenestä $a_n = -2n + 3$ huomataan, että jono on aritmeettinen.

Lasketaan jonon yleisen jäsenen avulla $a_n = -2n + 3$:

- Summan ensimmäinen yhteenlaskettava on
  $a_4 = -2 \cdot 4 + 3 = -8 + 3 = -5$
- Summan viimeinen yhteenlaskettava on
  $a_{13} = -2 \cdot 13 + 3 = -26 + 3 = -23$

Summassa yhteenlaskettavia on $n = 13 - 3 = 10$.

Muodostetaan summa summakaavan avulla.

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{-5 + (-23)}{2} = 10 \cdot \frac{-28}{2} = 10 \cdot (-14) = -140$$

b) Jonon yleisestä jäsenestä $a_n = (-2)^{n-1}$ huomataan, että jonon on geometrinen.

Jonon yleisen jäsenen avulla nähdään

- summan ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = (-2)^{3-1} = (-2)^2 = 4$
- jonon suhdeluku $q = -2$

Yhteenlaskettavien määrä on $n = 8 - 2 = 6$

$$S_6 = 4 \cdot \frac{1 - (-2)^6}{1 - (-2)} = 4 \cdot \frac{1 - 64}{1 + 2} = 4 \cdot \frac{-63}{3} = 4 \cdot (-21) = -84$$

23.

a) Kiian television katselun määrä eri kuukausina muodostaa aritmeettisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen on tammikuussa television katselun määrä $a_1 = 60$.
- Jonon differenssi on $d = -4$.

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= 60 + (n-1) \cdot (-4) \\ &= 60 - 4n + 4 \\ &= -4n + 64 \end{aligned}$$

b) Elokuu on vuoden 8. kuukausi, joten se on jonon 8. jäsen.

Lasketaan jonon 8. jäsenen arvo yleisen jäsenen avulla.

$$a_8 = -4 \cdot 8 + 64 = -32 + 64 = 32$$

Kiia katselee elokuussa 32 tuntia.

c) Vuodessa on 12 kuukautta, joten yhteenlaskettavien määrä on $n = 12$.

Lasketaan jonon 12. jäsenen arvo.

$$a_{12} = -4 \cdot 12 + 64 = -48 + 64 = 16$$

Lasketaan jonon 12 ensimmäisen jäsenen summa summakaavan avulla.

$$\begin{aligned}
S_{12} &= 12 \cdot \frac{60+16}{2} \\
&= 12 \cdot \frac{76}{2} \\
&= 12 \cdot 38 \\
&= 456
\end{aligned}$$

24.

a) Muokataan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$(2a-1)x+6y+2=0$$

$$6y=-(2a-1)x-2 \quad \Big| :6$$

$$y=\frac{-(-2a-1)}{6}x-\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{1-2a}{6}x-\frac{1}{3}$$

Suora on x-akselin suuntainen, kun suoran yhtälössä x:n kerroin on 0.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$\frac{1-2a}{6}=0 \quad \Big| \cdot 6$$

$$1-2a=0$$

$$2a=1 \quad \Big| :2$$

$$a=\frac{1}{2}$$

b) Suora on laskeva, kun suoran yhtälössä x:n kerroin on pienempää kuin nolla.

Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan a.

$$\frac{1-2a}{6} < 0 \qquad \Big| \cdot 6$$

$$1-2a < 0$$

$$-2a < -1 \qquad \Big| : (-2)$$

$$a > \frac{1}{2}$$

c) Sijoitetaan piste $(1, -1)$ suoran yhtälöön ja ratkaistaan a.

$$-1 = \frac{1-2a}{6} \cdot 1 - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1-2a}{6} = -1 + \frac{1}{3} \qquad \Big| \cdot 6$$

$$1-2a = -6+2$$

$$-2a = -5 \qquad \Big| : (-2)$$

$$a = \frac{5}{2}$$

25.

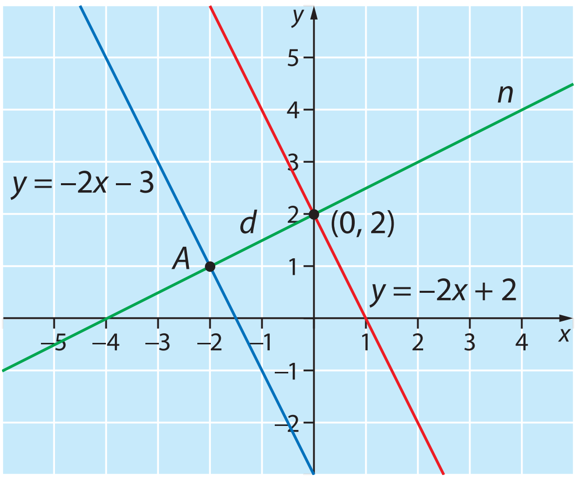
Suorista tiedetään:

- Suorat ovat samansuuntaisia suoria, joten niillä on sama normaali.
- Suora $y=-2x+2$ kulkee pisteen (0, 2) kautta (y-akselin leikkauspiste).

Piirretään kuva suorista. Suorien etäisyys on suorien kohtisuora etäisyys.

Piirretään pisteen (0, 2) kautta suoralle $y=-2x+2$ normaali n.

Merkitään suoran ja sen normaalin leikkauspistettä kirjaimella A ja suorien etäisyyttä kirjaimella d.



Suorien etäisyys d on pisteiden (0, 2) ja A välinen etäisyys.

Piste A on normaalilla, joten määritetään ensin normaalin yhtälö.

Koska suoran $y=-2x+2$ kulmakerroin on $k=-2$, niin normaalin n kulmakerroin on $k_n=\frac{1}{2}$.

Muodostetaan normaalin yhtälö kulmakertoimen $k_n=\frac{1}{2}$ ja pisteen (0, 2) avulla.

$$y-2=\frac{1}{2}(x-0)$$
$$y-2=\frac{1}{2}x$$
$$y=\frac{1}{2}x+2$$

Lasketaan suorien leikkauspisteen A koordinaatit yhtälöparin avulla.
Lasketaan x-koordinaatti.

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+2 \\ y=-2x-3 \end{cases}$$

$$-2x-3=\frac{1}{2}x+2$$
$$\frac{5}{2}x=-5 \qquad \Big| :\frac{5}{2}$$
$$x=-5\cdot\frac{2}{5}=-2$$

Lasketaan y-koordinaatti.

$$y = -2 \cdot (-2) - 3 = 4 - 3 = 1$$

Leikkauspisteen A koordinaatit ovat $(-2, 1)$.

Lasketaan pisteiden $(-2, 1)$ ja $(0, 2)$ etäisyys.

$$d = \sqrt{(0-(-2))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

5.2 Matemaattisia malleja

26.

a) Muodostetaan vuoden 2014 ja 2018 asukaslukujen avulla yhtälöpari.

$$\begin{cases} 607\,417 = a(2\,014 - 2\,014) + b \\ 629\,894 = a(2\,018 - 2\,014) + b \end{cases}$$

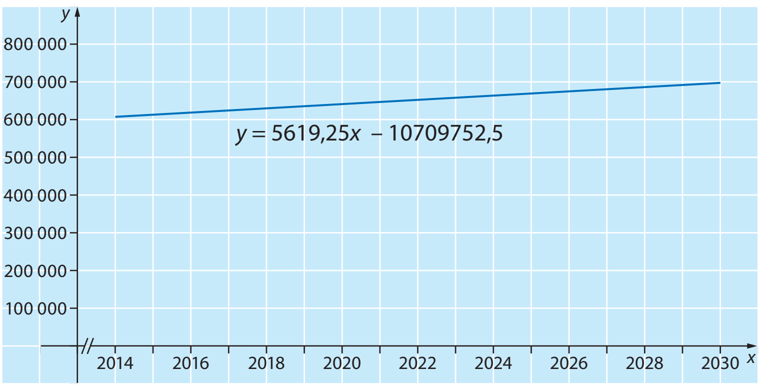
$b = 607\,417$ ja $a = 5\,619{,}25$

b) Lasketaan vuoden 2030 asukasluku.

$$y = 5619{,}25 \cdot (2030 - 2014) + 607\,417 = 697\,325$$

Asukasluvun kasvu aikavälillä 2014 – 2030 on
$697\,325 - 607\,417 = 89\,908 \approx 90\,000$.

c)



27.

a) Riippuvuutta kuvaava suora kulkee pisteiden (150, 3000) ja (330, 4800) kautta.

Lasketaan ensin suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{4800-3000}{330-150} = 10$$

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$\begin{aligned} y-3000 &= 10(x-150) \\ y &= 10x+1500 \text{ (€)} \end{aligned}$$

b) Viikon myyntitulot, kun mainontaan käytetään 280 €, saadaan sijoittamalla suoran yhtälöön $x = 280$.

$$y = 10\cdot 280+1500 = 4300 \text{ €}$$

c) Mainontaan käytettävä rahamäärä saadaan sijoittamalla suoran yhtälöön $y = 8000$.

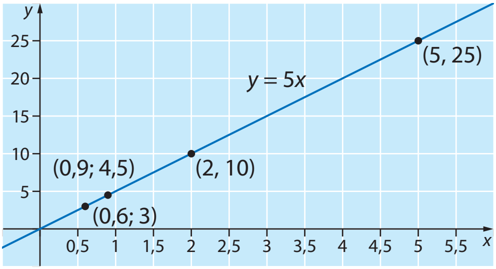
$$\begin{aligned} 8000 &= 10x+1500 \\ x &= 650 \text{ (€)} \end{aligned}$$

d) Kauppiaan on saatava viikossa vähintään 2 000 euron myyntitulot. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan x.

$$\begin{aligned} 2000 &\le 10x+1500 \\ x &\ge 50 \text{ (€)} \end{aligned}$$

28.

a)



Suoran yhtälö on $y = 5x$ (km)

b) Oonan kävelymatka 1,2 tunnissa saadaan sijoittamalla $x = 1{,}2$ suoran yhtälöön.

$$y = 5 \cdot 1{,}2 = 6{,}0 \text{ km}$$

c) Oonan kävelymatka 30 minuutissa saadaan sijoittamalla $x = 0{,}5$ suoran yhtälöön.

$$y = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5 \text{ km}$$

d) 9,4 km:n kävelylenkkiin kulunut aika saadaan sijoittamalla $y = 9{,}4$ suoran yhtälöön.

$$9{,}4 = 5x$$
$$x = 1{,}88 \text{ h}$$

e) 1,8 km:n kävelylenkkiin kulunut aika saadaan sijoittamalla $y = 1{,}8$ suoran yhtälöön.

$$1{,}8 = 5x$$
$$x = 0{,}36 \text{ h} = 21{,}6 \text{ min}$$
$$x \approx 22 \text{ min}$$

29.

a) Lääkärikäynneistä maksetaan 75,00 euron vuosimaksu ja sen lisäksi 10,50 euron kertamaksu.

Tutkitaan taulukon avulla vuoden lääkärinmaksujen määrä eri käyntimäärillä.

Lääkärikäyntien määrä vuodessa	Kokonaiskustannukset (€)
0	$75,00$
3	$75,00+10,50\cdot 3$
x	$75,00+10,50\cdot x$

Riippuvuutta kuvaava suoran yhtälö on $y=10,5x+75$ (€).

b) Ilman kanta-asiakas pakettia lääkärissä käynti maksaa 21,80 € kerralta.

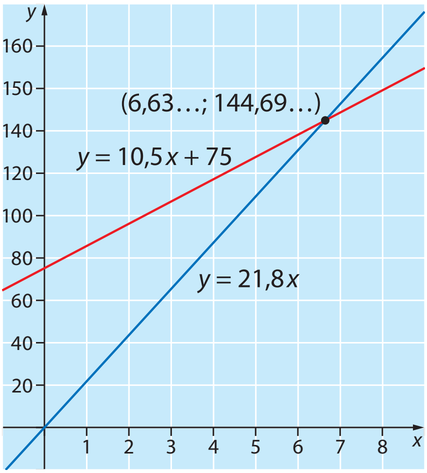
Tutkitaan taulukon avulla vuoden lääkärimaksujen määrää eri käyntimäärillä.

Lääkärikäyntien määrä vuodessa	Kokonaiskustannukset (€)
1	$21,80$
3	$21,80\cdot 3$
x	$21,80\cdot x$

Riippuvuutta kuvaava suoran yhtälö on $y=21,8x$.

Lasketaan, milloin kanta-asiakaspaketin kokonaiskustannukset ovat pienemmät kuin ilman kanta-asiakaspakettia.

$$10,5x + 75 < 21,8x$$
$$x > 6,637...$$



Lääkärissä tulee käydä vähintään 7 kertaa, jotta kanta-asiakaspaketti on kannattava.

30.

a) Koska ilman lämpötila laskee lineaarisesti, se laskee joka kilometri saman verran.

Tiedetään, että merenpinnan tasolla lämpötila on +15 °C ja 11 km:n korkeudessa lämpötila on –56 °C.

Lasketaan kuinka monta astetta lämpötila laski joka kilometrillä.

$$\frac{-56-15}{11-0}=\frac{-71}{11}=-6,4545...\approx -6,5\ °\mathrm{C}$$

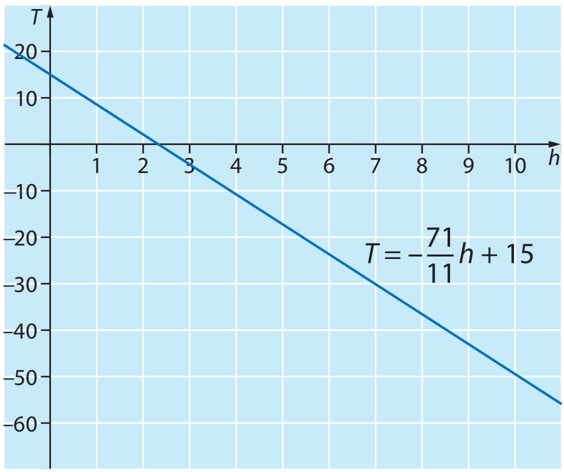
b) Mallin mukaan lämpötila kulkee lineaarisesti pisteiden (0, 15) ja (11, −56) kautta. Lasketaan ensin suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{-56-15}{11-0} = -\frac{71}{11}$$

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$T - 15 = -\frac{71}{11}(h-0)$$
$$T = -\frac{71}{11}h + 15 \text{ (°C)}$$

Piirretään kuvaaja.

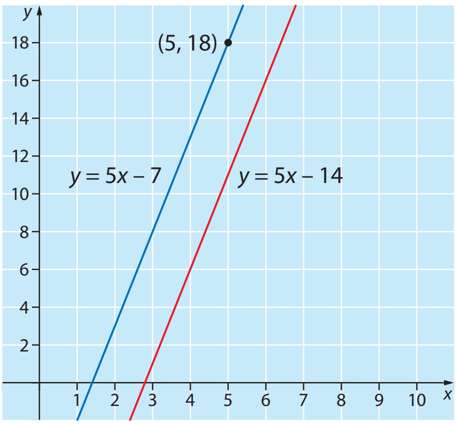


31.

a) Koska tie on joka kohdasta yhtä leveä, tien reunaa kuvaavat suorat ovat yhdensuuntaiset. Tällöin kummankin suoran kulmakerroin on $k = 5$.

Muodostetaan Petruksen puoleista valtatien reunaa kuvaavan suoran yhtälö.

$$y - 18 = 5(x - 5)$$
$$y = 5x - 7$$

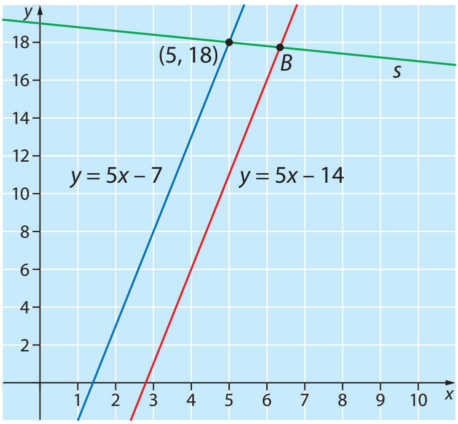


b) Muodostetaan ensin tien reunoja kuvaavia suoria kohtisuora suora *s*, joka kulkee pisteen (5, 18) kautta.

Koska tien reunoja kuvaavien suorien kulmakerroin $k = 5$, niin suoran *s* kulmakerroin on $k_s = -\frac{1}{5}$.

Muodostetaan suoran *s* yhtälö.

$$y - 18 = -\frac{1}{5}(x - 5)$$
$$y = -\frac{1}{5}x + 19$$



Lasketaan suoran *s* ja suoran $y = 5x - 14$ leikkauspisteen *B* koordinaatit.

$$\begin{cases} y = 5x - 14 \\ y = -\frac{1}{5}x + 19 \end{cases}$$

$x = \frac{165}{26}$ ja $y = \frac{461}{26}$

Tien leveys saadaan, kun lasketaan pisteiden B ja (5, 18) välinen etäisyys.

$$d=\sqrt{\left(5-\frac{165}{26}\right)^2+\left(18-\frac{461}{26}\right)^2}=1,3728...$$

Koordinaatiston yksikkönä on 10 m, joten tien leveys on

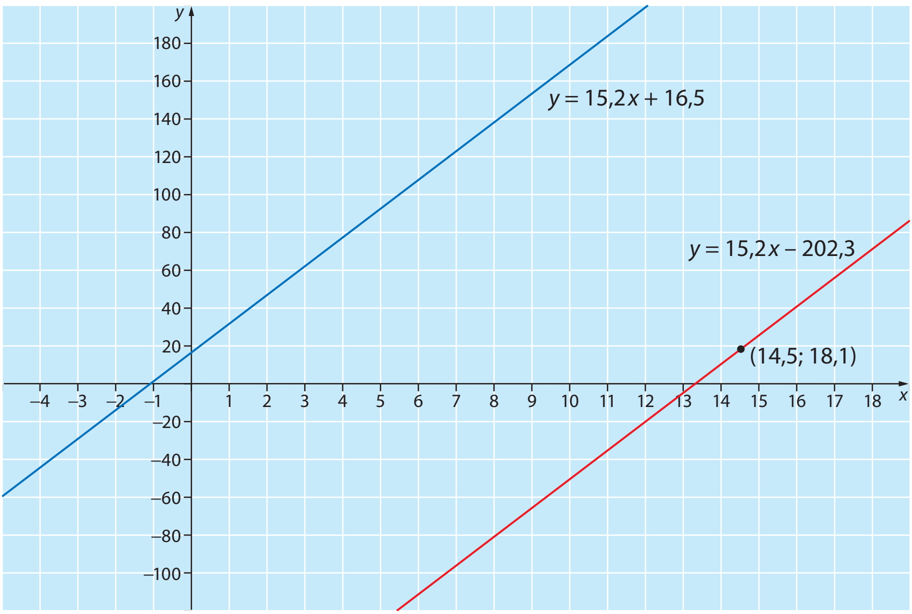
$1,3728...\cdot 10\text{ m}=13,728...\text{ m}\approx 13,7\text{ m}$.

32.

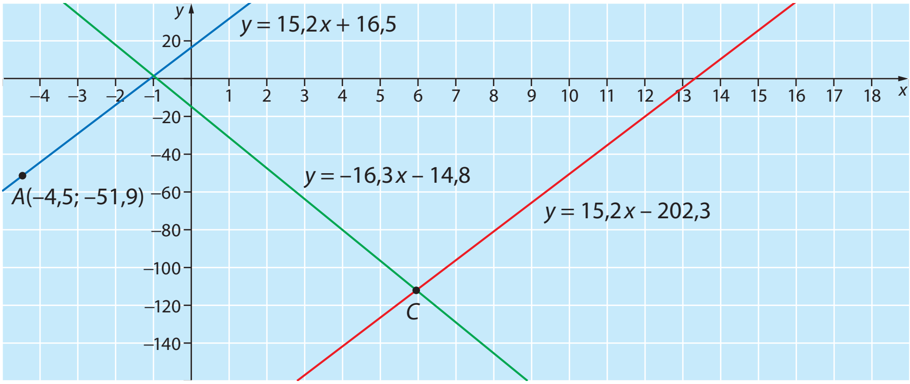
a) Lentokoneet lentävät yhdensuuntaisesti, tällöin kummankin suoran kulmakerroin on $k = 15,2$.

Muodostetaan lentokoneen B reittiä kuvaava suoran yhtälö.

$$y - 18,1 = 15,2(x - 14,5)$$
$$y = 15,2x - 202,3$$



b) Piirretään kuva tilanteesta.



Lasketaan suoran $y = -16,3x - 14,8$ ja suoran $y = 15,2x - 202,3$ leikkauspiste yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y = 15,2x - 202,3 \\ y = -16,3x - 14,8 \end{cases}$$

$x = 5,952...$ ja $y = -111,823...$

Lasketaan pisteen $C(5{,}952\ldots; -111{,}823\ldots)$ ja pisteen $A(-4{,}5; -51{,}9)$ etäisyys.

$$d = \sqrt{(5,952... - (-4,5))^2 + (-111,823... - (-51,9))^2} = 60,828...$$

Koordinaatiston yksikkö on 1 kilometri, joten lentokoneiden A ja C etäisyys on

$$60,828... \cdot 1\text{ km} = 60,828...\text{ km} \approx 61\text{ km}.$$

33.

a) Vakion a kaksidesimaalinen likiarvo saadaan muodostetaan annetuilla arvoilla yhtälö.

$$N(40) = N(0)e^{a \cdot 40}$$
$$2\,600\,000\,000 = 2300 \cdot e^{40a}$$
$$a = 0,3484...$$
$$a \approx 0,35$$

b) Lukumäärä noudattaa mallia $N(t) = N(0)e^{at}$.

Tutkitaan, millä t:n arvolla $e^{at} = 2$, eli monentena vuonna transistoreiden lukumäärä kaksinkertaistuu.

$$e^{at} = 2$$
$$at = \ln 2$$
$$t = \frac{\ln 2}{a}$$
$$t = 1,9892...$$
$$t \approx 2$$

34.

a) Muodostetaan ensin loton päävoittojen suuruuden kasvua kuvaava prosenttikerroin.

$100\ \% + 7{,}2\ \% = 107{,}2\ \% = 1{,}072$

Loton päävoittojen suuruutta x vuoden kuluttua kuvaa funktio
$f(x) = 57\,800 \cdot 1{,}072^x$ (€)

b) Vuonna 2015 on kulunut aikaa $2015 - 1971 = 44$ vuotta.

$f(44) = 57\,800 \cdot 1{,}072^{44} = 1\,231\,681{,}4313...€ \approx 1\,230\,000\ €$

c) Keskimääräinen päävoiton suuruus on yli 1 000 000 €, kun
$f(x) > 1\,000\,000$.

$$57\,800 \cdot 1{,}072^x > 1\,000\,000$$
$$x > 41{,}0028$$

Suurin kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on 42.

Tuolloin vuosi oli $1971 + 42 = 2013$.

d) Merkitään kasvua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella a.

Vuonna 1995 on kulunut $1995-1971=24$ vuotta aikaa tarkastelun alusta lukien.

Muodostetaan tietojen avulla potenssiyhtälö.

$$57\,800 \cdot a^{24} = 500\,000$$
$$a = \pm 1,0940...$$

Potenssikerroin ei voi olla negatiivinen luku, joten a = 1,0940…

Päävoitto suurenee vuosittain $1,0940...-1=0,0940...=9,40...\,\% \approx 9,4\,\%$.

35.

Vuonna 1987 aloitetaan radioaktiivisuuden tarkastelu. Tuolloin Hämeessä ja Keski-Suomessa radioaktiivisuus oli 78 kBq/m^2. Vuonna 2006 tämä oli laskenut arvoon 50 kBq/m^2.

Radioaktiivisuus vähenee eksponentiaalisesti (geometrinen jono). Merkitään radioaktiivisuuden vähenemistä kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *a*.

Vuonna 2006 aikaa on kulunut $2006 - 1987 = 19$ vuotta.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 78$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *a*.

$$78 \cdot a^{19} = 50$$
$$a = 0,97686...$$

Radioaktiivisuus on vähentynyt puoleen, kun radioaktiivisuus on $\frac{78 \text{ kBq/m}^2}{2} = 39 \text{ kBq/m}^2$.

Merkitään vuosien määrää kirjaimella *t*. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *t*.

$$78 \cdot 0,97686...^t = 39$$
$$t = 29,615...$$

Radioaktiivisuus on vähentynyt puoleen vuonna $1987 + 30 = 2017$.

Radioaktiivisuus on vähentynyt neljännekseen, kun radioaktiivisuus on

$$\frac{78\ \mathrm{kBq/m^2}}{4} = 19,5\ \mathrm{kBq/m^2}.$$

Merkitään vuosien määrää kirjaimella *t*. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä *t*.

$$\begin{aligned} 78 \cdot 0,97686...^t &= 19,5 \\ t &= 59,231... \end{aligned}$$

Radioaktiivisuus on vähentynyt neljännekseen vuonna $1987 + 60 = 2047$.

Vaasan seudun aktiivisuus on vähentynyt puoleen vuonna 2017, koska puoliintumisaika ei riipu lähtötasosta.

36.

a) Maksuhäiriöiden lukumäärä kasvoi tällä aikavälillä

$$\frac{1\,460\,500-422\,500}{422\,500}=2,45680...=245,680...\,\%\approx 246\,\%$$

b) Koska joka vuosi maksuhäiriöisien määrä vähenee yhtä monta prosenttia, tämä voidaan kuvata geometrisena jonona.

Merkitään vähenemistä kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k*.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1=1\,460\,500$ ja (neljän vuoden kuluttua) viides jäsen on $a_5=422\,500$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *k*.

$$\begin{aligned} a_1\cdot k^{5-1}&=a_5\\ 1\,460\,500\cdot k^4&=422\,500\\ k&=0,7333... \end{aligned}$$

Vuotuinen vähenemisprosentti on
$1-0,7333...=0,2666...=26,66...\,\%\approx 26,7\,\%$

37.

a) Lineaarinen kasvaminen voidaan kuvata aritmeettisena jonona.

Puhelimien myynti tammikuun aikana on jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 7\,817$.

Merkitään jonon differenssiä kirjaimella *d*.

Huhtikuu on jonon 4. jäsen.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jonon differenssi.

$$\begin{aligned} a_1 + (4-1) \cdot d &= a_4 \\ 7817 + 3d &= 13\,238 \\ d &= 1807 \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 7\,817 + (n-1) \cdot 1\,807 = 1\,807n + 6\,010$$

Joulukuu on jonon 12. jäsen.

Lasketaan joulukuun myynti.

$$a_{12} = 1807 \cdot 12 + 6010 = 27\,694$$

b) Eksponentiaalinen kasvaminen voidaan kuvata geometrisella jonolla.

Puhelimien myynti tammikuun aikana on jonon ensimmäinen jäsen
$a_1 = 7817$.

Merkitään myynnin kasvamista kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k*.

Huhtikuu on jonon 4. jäsen.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jonon differenssi.

$$\begin{aligned} a_1 \cdot k^{4-1} &= a_4 \\ 7\,817 \cdot k^3 &= 13\,238 \\ k &= 1{,}1919... \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 7817 \cdot 1{,}1919...^{n-1}$$

Joulukuu on jonon 12. jäsen. Lasketaan joulukuun myynti.

$$a_{12} = 7817 \cdot 1{,}1919^{12-1} = 53\,939{,}686... \approx 53\,940$$

38.

a) Peräkkäisten sävelten taajuussuhde on vakio, joten taajuuksien suuruutta voidaan kuvata geometrisen jonon avulla.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 261,6$ ja jonon 13. jäsen on $a_{13} = 261,6 \cdot 2 = 523,2$.

Merkitään taajuuden kasvamista kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella *k*.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan jonon prosenttikerroin *k*.

$$
\begin{aligned}
a_1 \cdot k^{13-1} &= a_{13} \\
261,6 \cdot k^{12} &= 523,2 \\
k &= 1,05946... \\
k &\approx 1,059
\end{aligned}
$$

Jonon suhdeluku on 1,059.

b) Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$a_n = 261,6 \cdot 1,05946...^{n-1}$

Keski-E on jonon 5. jäsen.

Lasketaan jonon 5. jäsen.

$a_5 = 261,6 \cdot 1,05946...^{5-1} = 329,595... \text{ Hz} \approx 330 \text{ Hz}$

39.

a) Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 6,2$.

Vuoden 2015 keskilämpötila on jonon $2015 - 1994 = 21$. jäsen eli $a_{21} = 7,8$.

Aritmeettisen jonon yleisen jäsenen määrittämiseksi tarvitaan ensimmäisen jäsenen lisäksi differenssi *d*.

Muodostetaan yhtälö jonon 21. jäsenen avulla ja ratkaistaan siitä *d*.

$$\begin{aligned} a_{21} &= 7,8 \\ 6,2 + (21-1)\cdot d &= 7,8 \\ d &= \frac{2}{25} \end{aligned}$$

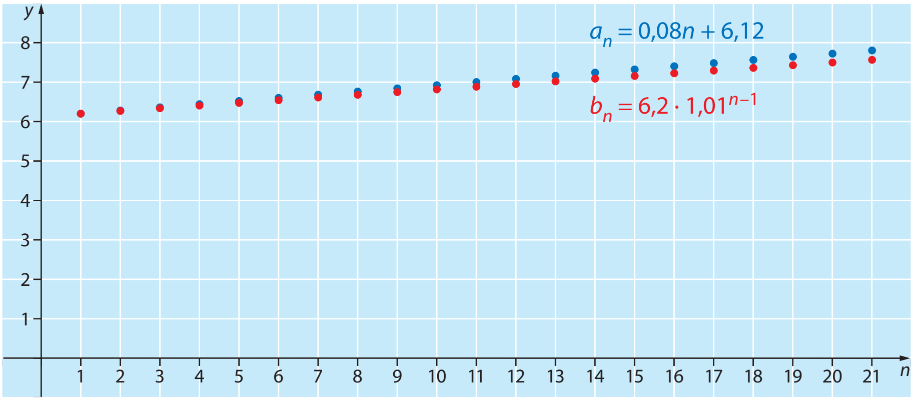
Jonon yleinen jäsen: $a_n = 6,2 + (n-1)\cdot \frac{2}{25} = \frac{2}{25}n + \frac{153}{25}$ (°C)

b) Ratkaistaan geometrisen jonon suhdeluku 21. jäsenen avulla.

$$\begin{aligned} b_{21} &= 7,8 \\ 6,2\cdot q^{21-1} &= 7,8 \\ q &= 1,0115... \approx 1,01 \end{aligned}$$

Jonon yleinen jäsen: $b_n = 6,2 \cdot 1,01^{n-1}$ (°C)

c) Piirretään lukujonojen kuvaajat samaan koordinaatistoon.



40.

a) Idan viikoittaiset lenkkien pituudet muodostavat geometrisen jonon.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1,2$.

Lenkkien pituuksien kasvua kuvaava prosenttikerroin on
$100\ \% + 15,0\ \% = 115\ \% = 1,15$.

Jonon yleinen jäsen on $a_n = 1,2 \cdot 1,15^{n-1}$ (km).

Kuudessa kuukaudessa on $\frac{52}{2} = 26$ viikkoa.

Lasketaan lenkin pituus kuuden kuukauden kuluttua lenkkeilyn aloittamisesta, joten lasketaan jonon 27. jäsen.

$a_{27} = 1,2 \cdot 1,15^{27-1} = 45,428...\text{ km} \approx 45\text{ km}$

Tinon viikoittaiset lenkkien pituudet muodostavat aritmeettisen jonon.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 2,5$. Jonon differenssi $d = 0,35$.

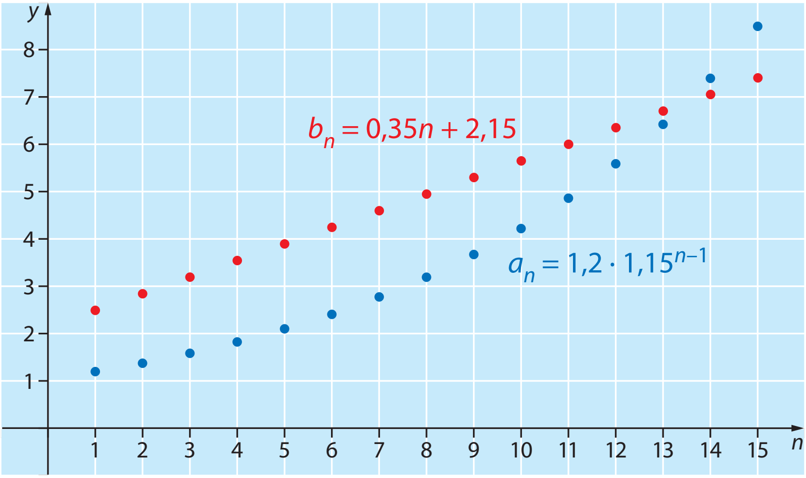
Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$b_n = 2,5 + (n-1) \cdot 0,35 = 0,35n + 2,15$ (km).

Lasketaan jonon 27. jäsen.

$b_{27} = 0,35 \cdot 27 + 2,15 = 11,6\text{ km} \approx 12\text{ km}$

b) Piirretään jonojen kuvaajat samaan koordinaatistoon.



Kuvaajasta nähdään, että jonon 14. jäsen on Idalla suurempi kuin Tinolla. Ida juoksee pidemmän lenkin 13 viikon kuluttua.

41.

a) Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 25\,000$.

Lasketaan jonon differenssi jonon 12. jäsenen avulla.

$$\begin{aligned} a_{12} &= 17\,300 \\ 25\,000 + 12d &= 17\,300 \\ d &= -\frac{1925}{3} \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 25\,000 + n \cdot \left(-\frac{1925}{3}\right) = -\frac{1925}{3}n + 25\,000$$

Ratkaistaan epäyhtälö $a_n < 1\,000$

$$\begin{aligned} -\frac{1925}{3}n + 25\,000 &< 1\,000 \\ n &> 37,402... \end{aligned}$$

Pienin kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on 38.

Seuraavalla kuulla Elise maksaa lopun velan, joten 39 lyhennyksen jälkeen Elise on maksanut koko lainan.

b) Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 25\,000$.

Lasketaan jonon suhdeluku jonon 12. jäsenen avulla.

$$\begin{aligned} a_{12} &= 17\,300 \\ 25\,000 \cdot q^{12} &= 17\,300 \\ q &= 0{,}9697... \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = 25\,000 \cdot 0{,}9697...^n$$

Ratkaistaan epäyhtälö $a_n < 1\,000$.

$$\begin{aligned} 25\,000 \cdot 0{,}9697...^n &< 1\,000 \\ n &> 104{,}915... \end{aligned}$$

Pienin kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on 105.

Seuraavalla kuulla Elise maksaa lopun velan, joten 106 lyhennyksen jälkeen Elise on maksanut koko lainan.

42.

a) Aritmeettisen summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 63\,067$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 2015 - 1994 = 21$
- viimeinen yhteenlaskettava $a_{21} = 55\,472$.

Lasketaan summan arvo summakaavalla.

$$S_{21} = 21 \cdot \frac{63\,067 + 55\,472}{2} = 1\,244\,659,5 \approx 1\,244\,700$$

b) Geometrisen jonon summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 63\,067$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 2015 - 1994 = 21$
- suhdeluku q.

Suhdeluku voidaan selvittää yleisen jäsenen avulla.

- Geometrisen jonon yleinen jäsen on muotoa $a_n = 63\,067 \cdot q^{n-1}$.
- Geometrisen jonon 21. jäsen on $a_{21} = 55\,472$.

$$63\,067 \cdot q^{21-1} = 55\,472$$
$$q = \pm 0,99360...$$

Syntyvien määrä ei voi olla negatiivinen, joten q = 0,99360…

Lasketaan geometrisen jonon 21 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{21} = 63\,067 \cdot \frac{1-0,99360...^{21}}{1-0,99360...} = 1\,243\,039,698... \approx 1\,243\,000$$

43.

a) Rasmuksen jaettujen mainoslehtien määrä muodostaa aritmeettisen jonon.

Lasketaan summakaavan avulla, kuinka monen päivän kuluttua Rasmus on jakanut vähintään 5000 mainoslehteä.

Aritmeettisen summan laskemiseen tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 70$
- yhteenlaskettavien määrä n
- viimeinen yhteenlaskettava $a_n = 70 + (n-1)\cdot 65 = 65n + 5$.

$$S_n > 5\,000$$

$$n \cdot \frac{70 + (65n+5)}{2} > 5\,000$$

$$n < -12{,}993 \text{ tai } n > 11{,}8399...$$

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon, on 12, joten 12 päivän kuluttua Rasmus saa jaettua mainoslehtiset.

b) Lasketaan jonon 11. jäsen. $a_{11} = 65 \cdot 11 + 5 = 720$.

Lasketaan, kuinka monta mainoslehtistä Rasmus oli jakanut 11 ensimmäisenä päivänä.

$$S_{11} = 11 \cdot \frac{70 + 720}{2} = 4\,345$$

Viimeisenä päivänä Rasmus jakoi $5000 - 4345 = 655$ mainoslehtistä.

44.

Pallon kulkemat matkat alaspäin eri ponnahduksilla muodostaa geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1$.
- Jonon suhdeluku on $q = 0,8$.
- Yhteenlaskettavien jäsenien määrä on $n = 10$.

Lasketaan 10 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{10} = 1 \cdot \frac{1-0,8^{10}}{1-0,8} = 4,4631...\,(\text{m})$$

Pallon kulkemat matkat ylöspäin eri ponnahduksilla muodostaa geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 1 \cdot 0,8 = 0,8$.
- Jonon suhdeluku on $q = 0,8$.
- Yhteenlaskettavien jäsenien määrä on $n = 9$.

Lasketaan 9 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_9 = 0,8 \cdot \frac{1-0,8^9}{1-0,8} = 3,46312...\,(\text{m})$$

Lasketaan pallon kulkema matka yhteensä.

$$4,4631... + 3,46312... = 7,92622...\,\text{m} \approx 7,9\,\text{m}$$

45.

a) Minkan tädiltään saama syntymäpäivälahjan suuruus vuosittain muodostaa geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 500$
- Jonon suhdeluku $100\,\% + 8{,}5\,\% = 108{,}5\,\% = 1{,}085$
- Jonon yleinen jäsen $a_n = 500 \cdot 1{,}085^{n-1}$ (€)

Lasketaan jonon 18 – 7 = 11. jäsen.

$a_{11} = 500 \cdot 1{,}085^{11-1} = 1130{,}4917... \text{ €} \approx 1130 \text{ €}$

b) Lasketaan 18. ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{11} = 500 \cdot \frac{1 - 1{,}085^{11}}{1 - 1{,}085} = 8548{,}041... \text{ €} \approx 8548 \text{ €}$$

c) Ratkaistaan epäyhtälö $S_n > 15\,000$.

$$500 \cdot \frac{1 - 1{,}085^{n}}{1 - 1{,}085} > 15\,000$$

$$n > 15{,}530...$$

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on 16.

Silloin Minka on $7 + 16 = 23$ -vuotias.

5.3 Monivalintatehtävät

1.

Riippuvuutta kuvaa yhtälö $y = x + 1$. Sijoittamalla yhtälöön taulukoidut arvot yhtälöt pätevät kaikki.

$$\begin{aligned} y &= x + 1 \qquad \mid y = -1 \text{ ja } x = -2 \\ -1 &= -2 + 1 \\ -1 &= -1 \\ &\text{tosi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x + 1 \qquad \mid y = 0 \text{ ja } x = -1 \\ 0 &= -1 + 1 \\ 0 &= 0 \\ &\text{tosi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x + 1 \qquad \mid y = 2 \text{ ja } x = 1 \\ 2 &= 1 + 1 \\ 2 &= 2 \\ &\text{tosi} \end{aligned}$$

Oikea vastausvaihtoehto on c.

2.

Tarkastelun alussa kaupassa oli 50 asiakasta, joten $y = 50$, kun $t = 0$.

Kaupan asiakasmäärä kasvaa tunnissa 30 asiakkaalla, joten riippuvuutta kuvaavassa yhtälössä kulmakerroin on 30.

Asiakasmäärän y riippuvuutta ajasta t (h) tarkastelun alusta lukien kuvaa yhtälö $y = 50 + 30t$.

Oikea vastausvaihtoehto on b.

3.

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$
\begin{aligned}
y-(-1) &= 3\cdot(x-0) \\
y+1 &= 3x \\
y &= 3x-1
\end{aligned}
$$

Oikea vastausvaihtoehto on c.

4.

Muutetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$
\begin{aligned}
2y - 5x &= 3 \\
2y &= 5x + 3 && \Big|: 2 \\
y &= \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

5.

Lasketaan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{2-(-1)}{4-3} = \frac{2+1}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

Oikea vastausvaihtoehto on c.

6.

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$\begin{aligned} y-(-1) &= -2\cdot(x-3) \\ y+1 &= -2x+6 \\ y+2x-5 &= 0 \end{aligned}$$

Oikea vastausvaihtoehto on c.

7.

Suoran $y = -2x + 5$ kulmakerroin on $k = -2$.

Suorat ovat yhdensuuntaisia, kun niiden kulmakertoimet ovat samat.

Suoran $y = -2x - 1$ kulmakerroin on $k = -2$.

Oikea vastausvaihtoehto on b.

8.

Suoran $y = -3x + 1$ kulmakerroin on −3.

Suoran ja sen normaalin kulmakertoimien tulo on −1.

Merkitään normaalin kulmakerrointa kirjaimella *k*.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$k \cdot (-3) = -1 \qquad \Big| : (-3)$$

$$k = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Suoran $y = \frac{1}{3}x - 1$ kulmakerroin on $k = \frac{1}{3}$.

Oikea vastausvaihtoehto on c.

9.

Sijoitetaan $t = 1$ funktioon m.

$$m(1) = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 120 \cdot \frac{1}{2} = 60 \text{ (g)}$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

10.

Korkoprosentti voidaan päätellä funktion *f* suhdeluvusta 1,0015.

$$1{,}0015 - 1 = 0{,}0015 = 0{,}15\ \%$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

11.

Epäpuhtauksien määrä eri puhdistuskerroilla muodostaa geometrisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 5$.
- Jonon suhdeluku on $q = 100\,\% - 15\,\% = 85\,\% = 0,85$.

Jonon yleinen jäsen on $a_n = 5 \cdot 0,85^x$.

Oikea vastausvaihtoehto on b.

12.

$$
\begin{aligned}
4^{x-1} &= 2^{3x} \\
(2^2)^{x-1} &= 2^{3x} \\
2^{2x-2} &= 2^{3x} \\
2x-2 &= 3x \\
x &= -2
\end{aligned}
$$

Oikea vastausvaihtoehto on a.

13.

Eksponenttiyhtälön $e^x - 3 = 0$ ratkaisu on

$$\begin{aligned} e^x - 3 &= 0 \\ e^x &= 3 \\ x &= \ln 3 \end{aligned}$$

Oikea vastausvaihtoehto on a.

14.

$$x^3 = -64$$
$$x = \sqrt[3]{-64}$$
$$x = -4$$

Oikea vastausvaihtoehto on c.

15.

Kuvaajan mukaan $f(x) = 80$, kun $x \approx -3$ tai $x \approx 3$.

Oikea vastausvaihtoehto on c.

16.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = -5$.

Jonon differenssi on $d = -7 - (-5) = -7 + 5 = -2$.

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = -5 + (n-1) \cdot (-2) = -5 - 2n + 2 = -2n - 3$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

17.

Geometrisen jonon $a_n = -5 \cdot 3^{n-1}$ suhdeluku on $q = 3$.

Suhdeluku on peräkkäisten jäsenten suhde.

Oikea vastausvaihtoehto on a.

18.

Summassa $\sum_{n=3}^{25}(20n-5)$ on yhteenlaskettavia $n = 25 - 2 = 23$.

Oikea vastausvaihtoehto on c.

19.

Jono -3, -1, 1, …, 25 on aritmeettinen jono, jonka differenssi on $d = -1-(-3) = -1+3 = 2$.

Jonon yleinen jäsen on $a_n = -3+(n-1)\cdot 2 = 2n-3-2 = 2n-5$.

Lasketaan, monesko jonon jäsen 25 on.

$$\begin{aligned} a_n &= 25 \\ 2n-5 &= 25 \\ 2n &= 30 \qquad \qquad |:2 \\ n &= 15 \end{aligned}$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

20.

Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = -7$.

Jonon differenssi on $d = -10 - (-7) = -10 + 7 = -3$.

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$a_n = -7 + (n-1) \cdot (-3) = -7 - 3n + 3 = -3n - 4$

Ratkaistaan epäyhtälö $a_n > -154$.

$$\begin{aligned} -3n - 4 &> -154 \\ -3n &> -150 \qquad \Big| : (-3) \\ n &< 50 \end{aligned}$$

Suurin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on 49.

Oikea vastausvaihtoehto on c.

21.

Sijoitetaan y = 150 yhtälöön $y = 15x - 215$.

$$
\begin{aligned}
150 &= 15x - 215 \\
15x &= 365 \qquad \Big| :15 \\
x &= 24{,}3333... \\
x &\approx 24{,}3
\end{aligned}
$$

Oikea vastausvaihtoehto on a.

22.

Sijoitetaan annetun pisteen koordinaatit suoran yhtälöön ja ratkaistaan vakio a.

$$\begin{aligned} 4\cdot(-10)-5a\cdot 19+2&=0\\ -40-95a+2&=0\\ 95a&=-38 \quad \Big|:95\\ a&=-\frac{2}{5} \end{aligned}$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

23.

Suoran *l* ja normaalin kulmakertoimien tulo on −1.

Normaalin $y = -5x + 6$ kulmakerroin on $k = -5$.

Merkitään suoran *l* kulmakerrointa kirjaimella *k*. Lasketaan suoran *l* kulmakerroin.

$$-5 \cdot k = -1 \qquad \Big| : (-5)$$

$$k = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$$

Muodostetaan yhtälö suoran *l* kulmakertoimen ja annettujen pisteiden avulla ja ratkaistaan siitä *a*.

$$\frac{-3-(-1)}{(a+2)-2} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{-3+1}{a+2-2} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{-2}{a} = \frac{1}{5}$$

$$a = -10$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

24.

Suoran $y = -2x - 5$ kulmakerroin on $k = -2$.

Yhdensuuntaisten suorien kulmakertoimet ovat samat, joten suoran *s* kulmakerroin on $k = -2$.

Muodostetaan yhtälö suoran *s* kulmakertoimen ja annettujen pisteiden avulla ja ratkaistaan siitä *c*.

$$
\begin{aligned}
\frac{2-4}{2c-(c-3)} &= -2 \\
\frac{-2}{c+3} &= -2 \\
-2 &= -2(c+3) \\
-2 &= -2c-6 \\
-2c &= 4 && \big| : (-2) \\
c &= -2
\end{aligned}
$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

25.

Suora leikkaa *x*-akselin, kun $y = 0$

Sijoitetaan $y = 0$ suoran yhtälöön.

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 0 - 3x + 5 &= 0 \\
3x &= 5 \qquad \qquad \Big| : 3 \\
x &= \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

Suora leikkaa *x*-akselin pisteessä $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.

Oikea vastausvaihtoehto on b.

26.

Kun mainostukseen käytettyjä varoja vähennettiin puoleen, mainostukseen käytettiin $\frac{1\,000\text{ €}}{2} = 500\text{ €}$.

Riippuvuutta kuvaavan suoran yhtälön kulmakerroin on
$k = \frac{92\,000 - 70\,000}{1\,000 - 500} = \frac{22\,000}{500} = 44$.

Muodostetaan suoran yhtälö.

$$
\begin{aligned}
y - 70\,000 &= 44(x - 500) \\
y - 70\,000 &= 44x - 22\,000 \\
y &= 44x + 48\,000
\end{aligned}
$$

Oikea vastausvaihtoehto on a.

27.

Vuonna 1955 on kulunut vuosia $1955-1900=55$.

Lasketaan funktion *p* arvo kohdassa *t* = 55.

$$p(55)=2\ 745\ 000\cdot e^{0{,}007\cdot 55}=4\ 034\ 091{,}312...\approx 4\ 030\ 000$$

Oikea vastausvaihtoehto on a.

28.

$$1{,}9\cdot 0{,}72^{x}=0{,}51$$
$$x=4{,}003...$$
$$x\approx 4$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

29.

Sijoitetaan $y = 1000$ yhtälöön $y = 8043 \cdot e^{-0,1997x}$.

$$1000 = 8043 \cdot e^{-0,1997x}$$
$$x = 10,439$$
$$x \approx 10,44$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

30.

Merkitään kofeiinin alkuperäistä massaa kirjaimella a.

Kofeiinin määrä on $\frac{1}{2}a$, kun se on puolittunut.

Kofeiinin määrä eri tunteina muodostaa geometrisen jonon.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = a$ ja kuudes jäsen on $a_6 = \frac{1}{2}a$.

Jonon yleinen jäsen on $a_n = a \cdot q^n$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen avulla ja jonon 6. jäsenen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä suhdeluku q.

$$\begin{aligned} a_6 &= \frac{1}{2}a \\ a \cdot q^6 &= \frac{1}{2}a \\ q &= 0,8908... \end{aligned}$$

Kofeiinin määrä vähenee tunnissa
$1 - 0,8908... = 0,10910... = 10,910...\,\% \approx 11\,\%$.

Oikea vastausvaihtoehto on b.

31.

Merkitään lääkeannoksen alkuperäistä massaa kirjaimella a.

Lääkeannoksen määrä on $a - 0,45a = 0,55a$, 20 tunnin jälkeen.

Lääkeannoksen määrä eri tunteina muodostaa geometrisen jonon.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = a$ ja 20. jäsen on $a_{20} = 0,55a$.

Jonon yleinen jäsen on $a_n = a \cdot q^n$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen avulla ja jonon 20. jäsenen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä suhdeluku q.

$$\begin{aligned} a_{20} &= 0,55a \\ a \cdot q^{20} &= 0,55a \\ q &= 0,97055... \end{aligned}$$

Kofeiinin määrä vähenee tunnissa
$1 - 0,97055... = 0,02944... = 2,944...\ \% \approx 2,9\ \%$.

Oikea vastausvaihtoehto on c.

32.

Kunnan asukasluku eri vuosina muodostaa geometrisen jonon.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 11\,780$ ja suhdeluku
$q = 100\,\% - 2,75\,\% = 97,25 = 0,9725$.

Jonon yleinen jäsen on $a_n = 11\,780 \cdot 0,9725^{n-1}$.

Ratkaistaan epäyhtälö $a_n < 8000$.

$$11\,780 \cdot 0,9725^{n-1} < 8000$$
$$n > 14,8769...$$

Ensimmäinen positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon on 15.

Tuolloin vuosi on $2010 + 15 = 2025$.

Oikea vastausvaihtoehto on b.

33.

Tilillä oleva rahamäärä muodostaa geometrisen jonon, jonka

- ensimmäinen jäsen on $a_1 = 950$
- suhdeluku on $q = 1,0025$
- yleinen jäsen on $a_n = 950 \cdot 1,0025^{n-1}$

Lasketaan jonon 5. jäsen.

$a_5 = 950 \cdot 1,0025^{5-1} = 959,535..\text{ €} \approx 959,54\text{ €}$

Oikea vastausvaihtoehto on a.

34.

Aritmeettisen summan ratkaisemiseksi tarvitaan

- ensimmäinen yhteenlaskettava $a_1 = 15 \cdot 1 + 33 = 48$
- viimeinen yhteenlaskettava $a_{100} = 15 \cdot 100 + 33 = 1\,533$
- yhteenlaskettavien määrä $n = 100$.

Lasketaan sadan ensimmäisen jäsenen summa summakaavan avulla.

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{48 + 1\,533}{2} = 79\,050$$

Oikea vastausvaihtoehto on c.

35.

Summan $\sum_{n=4}^{15}\left(\frac{1}{2}\cdot 4^{n-1}\right)$ ensimmäinen yhteenlaskettava on jonon $a_n=\frac{1}{2}\cdot 4^{n-1}$ neljäs jäsen.

Lasketaan jonon $a_n=\frac{1}{2}\cdot 4^{n-1}$ neljäs jäsen.

$$a_4=\frac{1}{2}\cdot 4^{4-1}=32$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

36.

Jono $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{9}{4}, ..., \frac{2187}{4}$ on geometrinen jono.

Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = \frac{1}{4}$ ja suhdeluku on $q = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$.

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = \frac{1}{4} \cdot 3^{n-1}$$

Lasketaan, kuinka mones jonon jäsen $\frac{2187}{4}$ on.

$$a_n = \frac{2187}{4}$$

$$\frac{1}{4} \cdot 3^{n-1} = \frac{2187}{4}$$

$$n = 8$$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

37.

Maalattujen lautojen määrä eri päivinä muodostaa aritmeettisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 29$.
- Jonon differenssi on $d = 6$.
- Jonon yleinen jäsen on $a_n = 29 + (n-1)\cdot 6 = 6n + 23$.

Lasketaan jonon 7. jäsen.

$a_7 = 6\cdot 7 + 23 = 65$

Oikea vastausvaihtoehto on b.

38.

Poimittujen marjojen määrä muodostaa aritmeettisen jonon.

- Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 29$.
- Jonon differenssi on $d = 6$.
- Jonon yleinen jäsen on $a_n = 29 + (n-1) \cdot 6 = 6n + 23$.

Lasketaan jonon 7. jäsen.

$a_7 = 6 \cdot 7 + 23 = 65$

Muodostetaan seitsemän ensimmäisen jäsenen summa summakaavan avulla.

$$S_7 = 7 \cdot \frac{29 + 65}{2} = 329$$

Oikea vastausvaihtoehto on c.