4 Lisämateriaali

4.1 Suoran yhtälö

267.

a) Suoran kulmakerroin nähdään suoran yhtälöstä muuttujatermin kertoimesta. Kulmakerroin on $k = -4$.

b) Suoran kulmakerroin nähdään suoran yhtälöstä muuttujatermin kertoimesta. Kulmakerroin on $k = 1$.

c) Suoran kulmakerroin nähdään suoran yhtälöstä muuttujatermin kertoimesta. Muuttujatermiä ei ole, joten kerroin on nolla. Kulmakerroin on $k = 0$.

d) Suora $x = 1$ on y-akselin suuntainen pystysuora suora. Sen kulmakerrointa ei ole määritelty.

268.

a) Suoran kulmakerroin on $k = \frac{1}{4} > 0$, joten kyseessä on nouseva suora.

b) Kirjoitetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$y - 2x + 8 = 0$$
$$y = 2x - 8$$

Suoran kulmakerroin on $k = 2 > 0$, joten kyseessä on nouseva suora.

c) Kirjoitetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$3x + y = 1$$
$$y = -3x + 1$$

Suoran kulmakerroin on $k = -3 < 0$, joten kyseessä on laskeva suora.

d) Kirjoitetaan suoran yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$4y + 2x - 1 = 0$$
$$4y = -2x + 1 \quad \|: 4$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

Suoran kulmakerroin on $k = -\frac{1}{2} < 0$, joten kyseessä on laskeva suora.

269.

a) Määritetään suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-(-6)}{4-2} = \frac{7}{2}$$

Muodostetaan suoran yhtälö. Valitaan pisteeksi $(x_0, y_0) = (4, 1)$.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 1 = \frac{7}{2}(x - 4)$$

$$y = \frac{7}{2}x - 14 + 1$$

$$y = \frac{7}{2}x - 13$$

b) Määritetään suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-5}{-1-3} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Muodostetaan suoran yhtälö. Valitaan pisteeksi $(x_0, y_0) = (3, 5)$.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 5$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$$

c) Määritetään suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2-(-2)}{8-0} = \frac{-2+2}{8} = \frac{0}{8} = 0$$

Suoran kulmakerroin on nolla, joten suora on x-akselin suuntainen. Suora kulkee pisteen $(0,-2)$,joten suoran yhtälö on $y = -2$.

Suoran yhtälö voidaan muodostaa myös suoran yleisestä yhtälöstä. Valitaan pisteeksi $(x_0, y_0) = (8,-2)$.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - (-2) = 0(x - 8)$$

$$y + 2 = 0$$

$$y = -2$$

d) Määritetään suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{-2-(-2)} = \frac{3}{-2+2} = \frac{3}{0} \quad \textit{ei ole määritelty}$$

Jakajaan tuli nolla, joten suoran kulmakerrointa ei ole määritelty.

Suora kulkee y-akselin suuntaisesti, eli on pystysuora. Pisteet $(-2, 1)$ ja $(-2, 4)$ ovat suoralla, ja suora leikkaa x-akselin kohdassa $x = -2$. Suoran yhtälö on $x = -2$.

Tilanteen hahmottamiseksi pisteet ja suora kannattaa piirtää koordinaatistoon.

270.

Suoran $y = -5x - 6$ yhtälöstä nähdään, että tämän suoran kulmakerroin on $k = -5$.

a) Pisteen $(-3, 2)$ kautta kulkeva suora on yhdensuuntainen, joten sillä on sama kulmakerroin $k = -5$.

Muodostetaan suoran yhtälö. Nyt $(x_0, y_0) = (-3, 2)$.

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 2 = -5(x - (-3))$$

$$y - 2 = -5(x + 3)$$

$$y = -5x - 15 + 2$$

$$y = -5x - 13$$

b) Pisteen $(-3, 2)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin -5.
Merkitään kysyttyä kulmakerrointa kirjaimella *k.*

Suorat ovat kohtisuorassa, kun niiden kulmakertoimien tulo on -1.

$$-5 \cdot k = -1 \quad \| : (-5)$$

$$k = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$$

Kohtisuoran suoran kulmakerroin on siis $\frac{1}{5}$.

271.

Muutetaan suoran $y + 4x - 3 = 0$ yhtälö ratkaistuun muotoon.

$$\begin{aligned} y + 4x - 3 &= 0 \\ y &= -4x + 3 \end{aligned}$$

Ratkaistusta yhtälöstä nähdään, että tämän suoran kulmakerroin on -4.

Suoran $y + 4x - 3 = 0$ normaali on suoraa vastaan kohtisuorassa. Merkitään normaalin kulmakerrointa kirjaimella k. Suorat ovat kohtisuorassa, kun niiden kulmakertoimien tulo on -1.

$$\begin{aligned} -4 \cdot k &= -1 \quad \| : (-4) \\ k &= \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Normaalin kulmakerroin on siis $k = \frac{1}{4}$.

Muodostetaan normaalin yhtälö. Nyt $(x_0, y_0) = (1,2)$.

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0) \\ y - 2 &= \frac{1}{4}(x - 1) \quad \| \cdot 4 \\ 4y - 8 &= x - 1 \\ 4y - x - 8 + 1 &= 0 \\ 4y - x - 7 &= 0 \end{aligned}$$

Huomaa, että vastaus pyydettiin normaalimuodossa.

4.2 Identtinen epäyhtälö

272.

a)

$$
\begin{aligned}
-4x + 3 &< -4x + 1 \\
-4x + 4x &< 1 - 3 \\
0 &< -2
\end{aligned}
$$

Väite ”nolla on pienempi kuin -2” on epätotta, eli epäyhtälö $0 < -2$ on *identtisesti epätosi*.

Tällöin myös alkuperäinen epäyhtälö $-4x + 3 < -4x + 1$ on identtisesti epätosi, eli epäyhtälö ei toteudu millään muuttujan x arvolla. Epäyhtälöllä ei ole ratkaisua.

b)

$$
\begin{aligned}
-4x + 3 &< -4x + 6 \\
-4x + 4x &< 6 - 3 \\
0 &< 3
\end{aligned}
$$

Väite ”nolla on pienempi kuin kolme” on totta, eli epäyhtälö $0 < 3$ on *identtisesti tosi*.

Tällöin myös alkuperäinen epäyhtälö $-4x + 3 < -4x + 6$ on identtisesti tosi, eli epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan x arvolla. Epäyhtälön ratkaisuja ovat kaikki muuttujan x arvot.

273.

a)

$$
\begin{aligned}
-2x+5 &\geq x+4-(3x-1)\\
-2x+5 &\geq x+4-3x+1\\
-2x+5 &\geq -2x+5\\
0 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Väite ”nolla on suurempi tai yhtä suuri kuin nolla” on totta, eli epäyhtälö $0 \geq 0$ on *identtisesti tosi*.

Tällöin myös alkuperäinen epäyhtälö $-2x+5 \geq x+4-(3x-1)$ on identtisesti tosi, eli epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan *x* arvolla. Epäyhtälön ratkaisuja ovat kaikki muuttujan *x* arvot.

b)

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}x+2\right) &\geq 5\left(-\frac{1}{4}x-\frac{2}{9}\right)\\
-\frac{5}{4}x-1 &\geq -\frac{5}{4}x-\frac{10}{9}\\
-\frac{5}{4}x+\frac{5}{4}x &\geq -\frac{10}{9}+1\\
0 &\geq -\frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

Väite ”nolla on suurempi tai yhtä suuri kuin $-\frac{1}{10}$” on totta, eli epäyhtälö $0 \geq -\frac{1}{10}$ on *identtisesti tosi*.

Tällöin myös alkuperäinen epäyhtälö on identtisesti tosi, eli epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan *x* arvolla. Epäyhtälön ratkaisuja ovat kaikki muuttujan *x* arvot.

274.

Ratkaistaan epäyhtälö $f(x) < g(x)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &< g(x) \\
-3x - 2 &< 4 - 3x \\
-3x + 3x &< 4 + 2 \\
0 &< 6
\end{aligned}
$$

Väite ”nolla on pienempi kuin kuusi” on totta, eli epäyhtälö $0 < 6$, on *identtisesti tosi*.

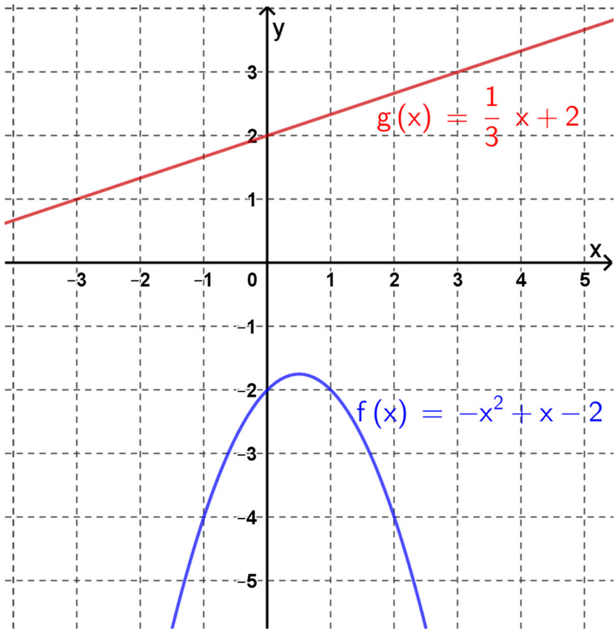
Tällöin myös alkuperäinen epäyhtälö on identtisesti tosi, eli epäyhtälö toteutuu kaikilla muuttujan x arvolla.

Funktion f kuvaaja kulkee joka kohdassa, eli kaikilla muuttujan x arvoilla, funktion g kuvaajan alapuolella.

275.

Piirretään funktioiden f ja g kuvaajat samaan koordinaatistoon. Näkyvän kuvaajien osan perusteella vaikuttaa siltä, että funktion g kuvaaja kulkee koko ajan funktion f kuvaajan yläpuolella.

Vaikuttaa siltä, että epäyhtälö $f(x) > g(x)$ ei ole koskaan totta.



Perustellaan havainto ratkaisemalla epäyhtälö.

$$f(x) > g(x)$$

$$-x^2 + x - 2 > \frac{1}{3}x + 2$$

$$\underbrace{-x^2 + \frac{2}{3}x - 4}_{=h(x)} > 0$$

Toisen asteen epäyhtälö ratkaistaan nollakohtien ja kuvaaja avulla.

Ratkaistaan nollakohdat:

$$h(x) = 0$$

$$-x^2 + \frac{2}{3}x - 4 = 0 \quad \| \cdot 3$$

$$-3x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-12)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 144}}{-6}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{-140}}{-6}$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisua, eli funktiolla h ei ole nollakohtia.

Funktion $h(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x - 4$ kuvaaja on alaspäin avautuva paraabeli. Funktiolla ei ole nollakohtia, joten funktion kuvaaja on kokonaisuudessaan x-akselin alapuolella. Funktion h arvo on joka kohdassa negatiivinen.

Epäyhtälö $h(x) > 0$ ei siis koskaan ole totta. Näin ollen epäyhtälö $f(x) > g(x)$ ei ole koskaan totta, eli epäyhtälöllä ei ole ratkaisua.

4.3 Lukuvälit

276.

a) $-10 < x < 0$ eli avoin väli $]-10, 0[$.

b) $-10 < x \leq 0$ eli puoliavoin väli $]-10, 0]$.

c) $x \leq -10$ eli puoliavoin ja toisesta päästä rajoittamaton väli $]-\infty, -10]$.

277.

Hakasulkumerkinnän lisäksi lukuväliä on ratkaisussa havainnollistettu lukusuoralla.

a) $2 \leq x \leq 7$ eli suljettu väli $[2, 7]$.

b) $2 < x \leq 7$ eli puoliavoin väli $]2, 7]$.

c) $2 < x < 7$ eli avoin väli $]2, 7[$.

278.

a) Päätepisteet ovat mukana lukuvälissä $[-4, 9]$.
Välillä olevat luvut toteuttavat epäyhtälön $-4 \leq x \leq 9$.

b) Päätepisteet eivät ole mukana lukuvälissä $]-4, 9[$.
Välillä olevat luvut toteuttavat epäyhtälön $-4 < x < 9$.

c) Lukuväli $]-\infty, 9]$ on vasemmalta rajoittamaton. Oikea päätepiste on mukana lukuvälissä.

Välillä olevat luvut toteuttavat epäyhtälön $x \leq 9$.

279.

a) Epäyhtälön $x > 13$ toteuttavat kaikki luvut, jotka ovat lukua 13 suurempia. Luku 13 ei kuulu lukuväliin. Hakasulkumerkinnän avulla lukuväli on $]13, \infty[$.

b) Lukuväli $] - 15,5;\ \infty[$ on oikealta rajoittamaton. Vasen päätepiste on mukana lukuvälissä.
Välillä olevat luvut toteuttavat epäyhtälön $x \geq -15,5$.

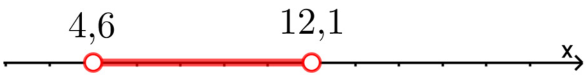
280.

a) Epäyhtälömerkintä: $4{,}6 < x < 12{,}1$

Välimerkintä:]4,6; 12,2[

Huomaa: kun lukuvälin päätepisteissä on desimaalipilkku, niin välimerkinnässä käytetään lukujen välissä erottimena puolipistettä, eli merkkiä ;

Lukusuoramerkintä:



b) Epäyhtälömerkintä: $13 \leq x \leq 25{,}5$

Välimerkintä: [13; 25,5]

Lukusuoramerkintä:

c) Epäyhtälömerkintä: $x \geq -7{,}8$

Välimerkintä: $[-7{,}8; \infty[$

Lukusuoramerkintä: