3.1 Funktion kasvaminen ja väheneminen

163.

a) Kasvavan funktion derivaatan arvo on joko positiivinen tai nolla. Väite on siis epätosi.

b) Aidosti vähenevän funktion derivaatta voi yksittäisissä pisteissä saada myös arvon nolla. Väite on siis epätosi.

c) Vakiofunktion derivaatta on koko ajan nolla, eli nolla tai positiivinen, joten vakiofunktio on kasvava. Väite on siis tosi.

d) Vakiofunktion derivaatta on koko ajan nolla, eli nolla tai negatiivinen, joten vakiofunktio on vähenevä. Väite on siis tosi.

164.

a) Derivaatta $f'(x)$ on nolla niissä kohdissa, joissa funktion f kuvaajalle piirretty tangentti on vaakasuora. Kuvaajan perusteella näitä kohtia on kaksi: $x = 0$ ja $x = 2$.

b) Derivaatta $f'(x)$ on nolla tai positiivinen niissä kohdissa, joissa funktion f kuvaajalle piirretty tangentti on vaakasuora tai nouseva. Kuvaajan perusteella nämä kohdat ovat $x \leq 0$ ja $x \geq 2$.

c) Derivaatta $f'(x)$ on negatiivinen niissä kohdissa, joissa funktion f kuvaajalle piirretty tangentti on laskeva. Kuvaajan perusteella nämä kohdat ovat $0 < x < 2$.

165.

Funktion kasvamista ja vähenemistä tutkitaan derivaatan avulla.

Derivoidaan funktio: $g'(x) = 2x + 6$.

a) Funktio g on kasvava silloin, kun derivaatta on positiivinen tai nolla. Ratkaistaan epäyhtälö $g'(x) \geq 0$.

$$\begin{aligned} 2x + 6 &\geq 0 \\ 2x &\geq -6 \quad \| : 2 \\ x &\geq -3 \end{aligned}$$

Funktio g on kasvava, kun $x \geq -3$.

b) Funktio g on vähenevä silloin, kun derivaatta on negatiivinen tai nolla. Ratkaistaan epäyhtälö $g'(x) \leq 0$.

$$\begin{aligned} 2x + 6 &\leq 0 \\ 2x &\leq -6 \quad \| : 2 \\ x &\leq -3 \end{aligned}$$

Funktio g on vähenevä, kun $x \leq -3$.

166.

Funktion kasvamista ja vähenemistä tutkitaan derivaatan avulla.

Derivoidaan funktio: $h'(x) = -3x^2 - 6 \cdot 2x - 9 = -3x^2 - 12x - 9$.

a) Funktio h on kasvava silloin, kun derivaatta on positiivinen tai nolla. Ratkaistaan epäyhtälö $h'(x) \geq 0$.

$-3x^2 - 12x - 9 \geq 0$

Toisen asteen epäyhtälö ratkaistaan nollakohtien ja kuvaajan avulla.

Nollakohdat: $-3x^2 - 12x - 9 = 0$

Yhtälö kannattaa ennen ratkaisukaavaan sijoittamista kertoa puolittain luvulla $-\frac{1}{3}$.

$$-3x^2 - 12x - 9 = 0 \quad \| \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

Derivaatan nollakohdat ovat $x = \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ ja $x = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$.

Derivaattafunktion $h'(x) = -3x^2 - 12x - 9$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten derivaatta on positiivinen silloin, kun muuttujan x arvo on nollakohtien välissä, eli $-3 < x < -1$.

Epäyhtälön $-3x^2 - 12x - 9 \geq 0$ ratkaisut ovat $-3 \leq x \leq -1$.

Funktio h on kasvava, kun $-3 \leq x \leq -1$.

b) Funktio h on vähenevä silloin, kun derivaatta on negatiivinen tai nolla. Ratkaistaan epäyhtälö $h'(x) \leq 0$.

$-3x^2 - 12x - 9 \leq 0$

Nollakohdat ratkaistiin jo a-kohdassa: $x = -3$ ja $x = -1$.

Derivaattafunktion $h'(x) = -3x^2 - 12x - 9$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten derivaatta on negatiivinen silloin, kun $x < -3$ tai $x > -1$.

Epäyhtälön $-3x^2 - 12x - 9 \leq 0$ ratkaisut ovat $x \leq -3$ tai $x \geq -1$.

Funktio h on siis vähenevä, kun $x \leq -3$ tai $x \geq -1$.

167.

a) Kulkukaaviosta luetaan derivaatan nollakohta $x = -5$.

Funktio f on vähenevä silloin, kun derivaatta $f'(x) \leq 0$, eli kun $x \geq -5$.

b) Kulkukaaviosta luetaan derivaatan nollakohdat: $x = 0$ tai $x = 4$.

Funktio f on vähenevä silloin, kun derivaatta $f'(x) \leq 0$, eli kun $x \geq 0$.

168.

a) Kulkukaaviosta luetaan derivaatan nollakohta $x = 3$.

Funktio g on kasvava silloin, kun derivaatta $g'(x) \geq 0$, eli kun $x \leq 3$.

b) Kulkukaaviosta luetaan derivaatan nollakohdat: $x = -7$ tai $x = -1$.

Funktio g on kasvava silloin, kun derivaatta $g'(x) \geq 0$, eli kun $x \leq -7$ tai kun $x \geq -1$.

169.

a) Kulkukaaviosta luetaan derivaatan nollakohta $x = 1$.

b) Funktio f on vähenevä silloin, kun derivaatta $f'(x) \leq 0$, eli kun $x \geq 1$.

c) Merkinnöissä esiintyvät muuttujan arvot $x = 2{,}000002$ ja $x = 2{,}000003$ kuuluvat välille $x > 1$, jolloin funktio f on aidosti vähenevä (derivaatta f' on negatiivinen). Tämä tarkoittaa sitä, että muuttujan arvon kasvaessa funktion arvo pienenee, eli

$$f(2{,}000002) > f(2{,}000003).$$

Funktion arvoista $f(2{,}000002)$ on siis suurempi.

170.

a) Derivaatan g' nollakohdat ovat ne kohdat, joissa funktion g kuvaajalle piirretty tangentti on vaakasuora. Näitä kohtia on yksi: derivaatta on nolla kohdassa $x = 1$.

b) Funktio g on kasvava silloin, kun sen kuvaajalle piirretyt tangentit ovat vaakasuoria tai nousevia. Derivaatan nollakohdan $x = 1$ jälkeen kuvaajalle piirretyt tangentit kääntyvät nouseviksi. Funktio g on kasvava, kun $x \geq 1$.

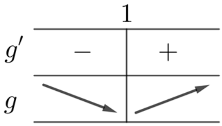
Funktion kasvavuus voidaan päätellä myös kuvaajan kulkusuunnasta. Funktio on kasvava silloin, kun muuttujan arvon kasvaessa myös funktion arvo kasvaa, eli kuvaajan kulkusuunta on *ylöspäin.* Kuvaaja kulkee ylöspäin, eli funktio on kasvava, kun $x \geq 1$.

c) Kulkukaavion merkitään derivaatan nollakohta $x = 1$.

Derivaatan g' arvo on

- positiivinen silloin, kun funktion g kuvaajalle piirretty tangentti on nouseva, eli
  kun $x > 1$.
- negatiivinen silloin, kun funktion g kuvaajalle piirretty tangentti on laskeva, eli
  kun $x < 1$.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion g kulkukaavio.



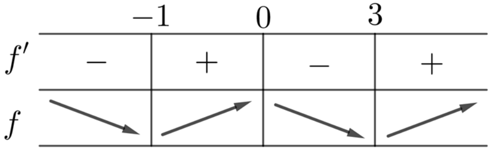
171.

a) Derivaattafunktion kuvaaja leikkaa x-akselin kolme kertaa. Derivaatan nollakohdat ovat $x = -1, x = 0$ ja $x = 3$.

Päätellään kuvaajan avulla derivaatan merkki: derivaatan arvo on

- positiivinen (+) silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli kun $-1 < x < 0$ tai kun $x > 3$
- negatiivinen (–) silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, eli kun $x < -1$ tai kun $0 < x < 3$.

Laaditaan derivaatan f' merkkikaavio ja sen perusteella funktion f kulkukaavio.



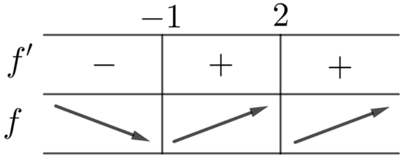
Kulkukaavion perusteella funktio f on vähenevä (nuoli alaspäin), kun $x \leq -1$ tai kun $0 \leq x \leq 3$.

b) Derivaattafunktion kuvaaja leikkaa x-akselin kaksi kertaa. Derivaatan nollakohdat ovat $x = -1$ ja $x = 2$.

Päätellään kuvaajan avulla derivaatan merkki: derivaatan arvo on

- positiivinen (+) silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli kun
  $x > -1$ ja $x \neq 2$
- negatiivinen (–) silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, eli kun $x < -1$.

Laaditaan derivaatan f' merkkikaavio ja sen perusteella funktion f kulkukaavio.



Kulkukaavion perusteella funktio f on vähenevä (nuoli alaspäin), kun $x \leq -1$.

172.

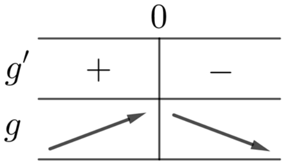
a) Derivaattafunktion kuvaaja leikkaa x-akselin kerran. Derivaatan nollakohta on $x = 0$.

Päätellään kuvaajan avulla derivaatan merkki: derivaatan arvo on

- positiivinen (+) silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli kun $x < 0$
- negatiivinen (–) silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, eli kun $x > 0$

Laaditaan derivaatan g' merkkikaavio ja sen perusteella funktion g kulkukaavio.

Kulkukaavion perusteella funktio g on vähenevä (nuoli alaspäin), kun $x \geq 0$.



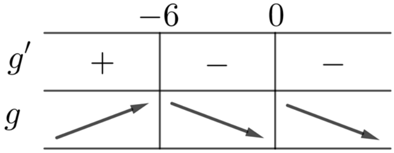
b) Derivaattafunktion kuvaaja leikkaa x-akselin kaksi kertaa. Derivaatan nollakohdat ovat $x = -6$ ja $x = 0$.

Päätellään kuvaajan avulla derivaatan merkki: derivaatan arvo on

- positiivinen (+) silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli kun $x < -6$
- negatiivinen (–) silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, eli kun $x > -6$ ja $x \neq 0$.

Laaditaan derivaatan g' merkkikaavio ja sen perusteella funktion g kulkukaavio.

Kulkukaavion perusteella funktio g on vähenevä (nuoli alaspäin), kun $x \geq -6$.



		-6		0	
g'	$+$		$-$		$-$
g	↗		↘		↘

173.

a) Kuvassa on annettu derivaattafunktion f' kuvaaja.

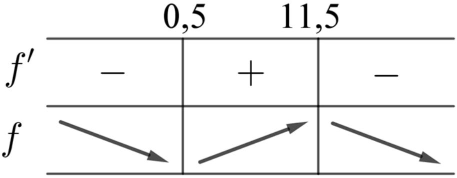
Derivaattafunktion kuvaaja leikkaa x-akselin kaksi kertaa. Derivaatan nollakohdat ovat $x \approx 0{,}5$ ja $x = 11{,}5$ (huomaa, että x-akselilla yksi ruutu = 2 yksikköä).

Päätellään kuvaajan avulla derivaatan merkki: derivaatan arvo on

- positiivinen (+) silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli kun $0{,}5 < x < 11{,}5$
- negatiivinen (–) silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, eli kun $x < 0{,}5$ tai $x > 11{,}5$.

Laaditaan derivaatan f' merkkikaavio ja sen perusteella funktion f kulkukaavio.

Kulkukaavion perusteella funktio f on kasvava (nuoli ylöspäin), kun $0{,}5 \leq x \leq 11{,}5$.



b) Kuvassa on annettu funktion h kuvaaja.

Derivaatan nollakohdat ovat ne kohdat, joissa funktion kuvaajalle piirretty tangentti on vaakasuora.

Kuvaajalle piirretty tangentti on vaakasuora kohdissa $x = -3$ ja $x = 1$. Derivaatalla h' on kaksi nollakohtaa $x = -3$ ja $x = 1$.

Päätellään kuvaajan avulla derivaatan merkki: derivaatan arvo on

- positiivinen (+) silloin, kun funktion kuvaajalle piirretty tangentti on nouseva, eli kun $x < -3$ tai kun $x > 1$
- negatiivinen (–) silloin, kun funktion kuvaajalle piirretty tangentti on laskeva, eli kun $-3 < x < 1$.

Laaditaan derivaatan h' merkkikaavio ja sen perusteella funktion h kulkukaavio.

Kulkukaavion perusteella funktio h on kasvava (nuoli ylöspäin), kun $x \leq -3$ tai kun $x \geq 1$.

		-3		1	
h'	$+$		$-$		$+$
h	↗		↘		↗

174.

a) Tutkitaan funktion g kulkua derivaatan avulla.

Sievennetään funktion lausekkeessa sulut auki:

$$g(x) = 2x(x-1) = 2x^2 - 2x$$

Derivoidaan:

$$g'(x) = 2 \cdot 2x - 2 = 4x - 2$$

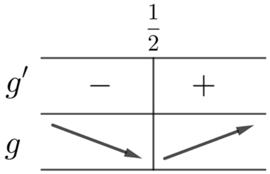
Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ 4x - 2 &= 0 \\ 4x &= 2 \\ x &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Derivaattafunktion $g'(x) = 4x - 2$ kuvaaja on nouseva suora, joten derivaatan merkki voidaan päätellä kuvaajasta:

- derivaatan kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, eli sen arvo on negatiivinen, kun $x < \frac{1}{2}$
- derivaatan kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli sen arvo on positiivinen, kun $x > \frac{1}{2}$

Laaditaan derivaatan g' merkkikaavio ja sen perusteella funktion g kulkukaavio.



b) Kulkukaaviosta luetaan, että funktio g on kasvava (nuoli ylöspäin), kun $x \geq \frac{1}{2}$.

175.

Tutkitaan funktion g kulkua derivaatan avulla.

Derivoidaan: $g'(x) = -3x^2 + 2x + 5$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$g'(x) = 0$$

$$-3x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{-6}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{-6} = \frac{-2 \pm 8}{-6}$$

Derivaatalla on kaksi nollakohtaa: $x = \frac{-2-8}{-6} = \frac{-10}{-6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ ja

$x = \frac{-2+8}{-6} = \frac{6}{-6} = -1$

Derivaattafunktion $g'(x) = -3x^2 + 2x + 5$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten derivaatan merkki voidaan päätellä kuvaajasta:

- derivaatan kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli sen arvo on positiivinen, kun
  $-1 < x < \frac{5}{3}$
- derivaatan kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, eli sen arvo on negatiivinen, kun
  $x < -1$ tai kun $x > \frac{5}{3}$

Laaditaan derivaatan g' merkkikaavio ja sen perusteella funktion g kulkukaavio.

		-1		$\frac{5}{3}$	
g'	$-$		$+$		$-$
g	↘		↗		↘

a) Kulkukaavion mukaan funktio g on kasvava, kun $-1 \leq x \leq \frac{5}{3}$.

b) Merkinnöissä esiintyvät muuttujan arvot $x = -0{,}555$ ja $x = -0{,}556$ kuuluvat kulkukaavion keskimmäiseen lokeroon, eli välille $-1 < x < \frac{5}{3}$. Tällä välillä funktio g on aidosti kasvava (derivaatta g' on positiivinen). Tämä tarkoittaa sitä, että muuttujan arvon kasvaessa myös funktion arvo kasvaa, eli

$$g(-0{,}556) < g(-0{,}555).$$

Funktion arvoista $g(-0{,}555)$ on siis suurempi.

176.

a) Tutkitaan funktion $s(t) = -1{,}7t^2 + 4{,}6t + 1{,}8$ kasvamista derivaatan avulla. Funktio on kasvava, kun derivaatta on positiivinen tai nolla, eli kun $s'(t) \geq 0$.

Derivoidaan: $s'(t) = -3{,}4t + 4{,}6$

Ratkaistaan, milloin derivaatta on positiivinen tai nolla:

$$s'(t) \geq 0$$

$$-3{,}4t + 4{,}6 \geq 0$$

$$t \leq 1{,}352\ldots \approx 1{,}4$$

Funktio *s* on kasvava, kun $t \leq 1{,}4$.

b) Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

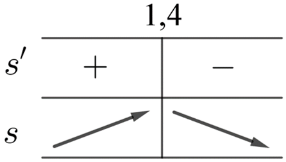
$$s'(t) = 0$$

$$-3{,}4t + 4{,}6 = 0$$

$$t = 1{,}352\ldots \approx 1{,}4$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion *s* kulkukaavio.

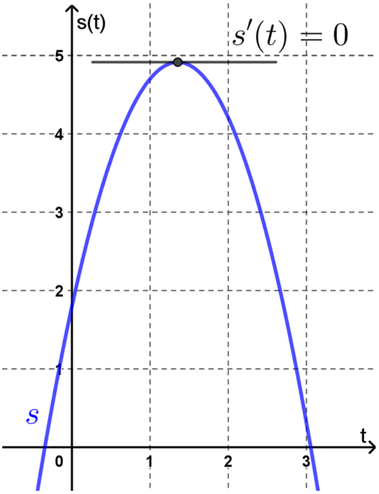
Derivaatan merkki voidaan perustella derivaatan kuvaajan (laskeva suora) tai testipisteiden avulla:



$s'(1) = 1{,}2 > 0$

$s'(2) = -2{,}2 < 0$

Huomaa: funktion $s(t) = -1{,}7t^2 + 4{,}6t + 1{,}8$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Kuvaajan kulkusuunta vaihtuu sen huippukohdassa, joka on derivaatan nollakohta $t \approx 1{,}4$.



Derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio voidaan päätellä myös funktion s kuvaajan perusteella nyt, kun kuvaajan muoto (paraabeli) on pääteltävissä funktion lausekkeesta.

177.

Tutkitaan funktion *f* kulkua derivaatan avulla.

Derivoidaan: $f'(x) = 702 - 156x$, kun $0{,}0 \leq x \leq 9{,}0$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 0$$

$$702 - 156x = 0$$

$$x = 4{,}50$$

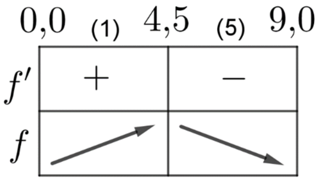
Derivaatan nollakohta kuuluu funktion määrittelyvälille $0{,}0 \leq x \leq 9{,}0$.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion *f* kulkukaavio. Rajataan kaavio määrittelyvälille $0{,}0 \leq x \leq 9{,}0$.

Selvitetään derivaatan merkki derivaattafunktion kuvaajan (laskeva suora) tai testipisteiden avulla:

$f'(1) = 546 > 0$

$f'(5) = -78 < 0$



	0,0 (1) 4,5	4,5 (5) 9,0
f'	+	−
f	↗	↘

a) Kulkukaavion perusteella myyntitulot alkavat laskea, kun $x \geq 4{,}50$ (euroa), eli kun hinta ylittää arvon 4,50 euroa.

b) Kulkukaavion perusteella myyntitulot ovat suurimmillaan, kun hinta on $x = 4{,}50$ (euroa). Jos hinta on tätä suurempi, tulot alkavat laskea.

Jäätelöä kannattaa myydä hintaan 4,50 euroa.

178.

Funktion $f(t) = -0{,}076t^3 + 1{,}213t^2 + 2{,}423t + 30$ lauseke ja määrittelyväli $0 \leq t \leq 18$ kannattaa ratkaisun alussa tallentaa laskinohjelmiston muistiin.

a) Sairastuneiden lukumäärä tarkastelun alussa $t = 0$ saadaan laskemalla funktion f arvo, kun $t = 0$. Arvo on $f(0) = 30$, joten sairastuneita oli 30 henkilöä.

b) Tutkitaan funktion f kulkua derivaatan avulla.

Derivoidaan: $f'(t) = -0{,}228t^2 + 2{,}426t + 2{,}423, \;\; 0 < t < 18$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$f'(t) = 0$$

$$-0{,}228t^2 + 2{,}426t + 2{,}423 = 0, \qquad 0 < t < 18$$

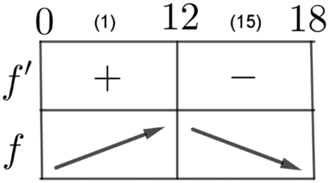
$$t = 11{,}559 \ldots \approx 12$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion f kulkukaavio. Rajataan kaavio määrittelyvälille $0 \leq t \leq 18$.

Selvitetään derivaatan merkki testipisteiden avulla:

$f'(1) = 4{,}621 > 0$

$f'(15) = -12{,}487 < 0$



Kulkukaavion perusteella sairastuneiden määrä on huipussaan, kun $x = 12$, minkä jälkeen määrä kääntyy laskuun.

Sairastuneiden määrä kääntyy laskuun 12. päivän aikana.

179.

a) Pallon maanpinnasta mitattu korkeus, eli funktion $s(x)$ arvo, on epänegatiivinen luku. Ratkaistaan, millä muuttujan x arvoilla $s(x) \geq 0$.

$$s(x) \geq 0$$

$$-0{,}75x^2 + 30x \geq 0 \qquad \textit{ratkaistaan epäyhtälö laskinohjelmistolla}$$

$$0 \leq x \leq 40$$

Funktio s on siis määritelty, kun $0 \leq x \leq 40$ (metriä).

b) Muuttujan x arvo ilmaisee pallon vaakasuoraa etäisyyttä heittokohdasta. Heiton pituus saadaan ratkaisemalla se muuttujan, jolla pallo palaa takaisin maan pinnalle.

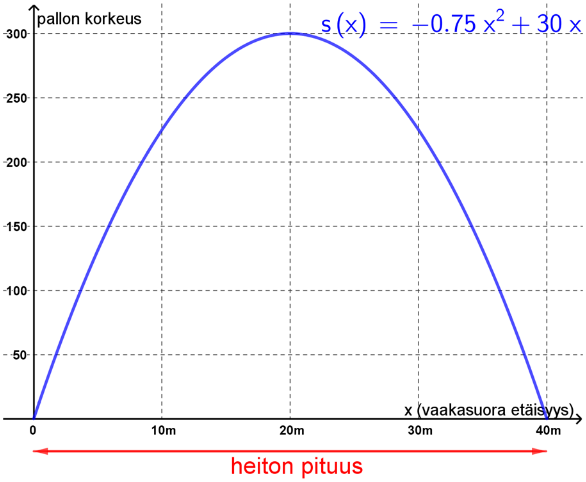
Ratkaistaan yhtälö $s(x) = 0$.

$$s(x) = 0$$

$$-0{,}75x^2 + 30x = 0 \qquad \textit{ratkaistaan yhtälö laskinohjelmistolla}$$

$$x = 0 \text{ tai } x = 40$$

Pallo palaa takaisin maan pinnalle, kun $x = 40$, joten heiton pituus on 40 metriä.



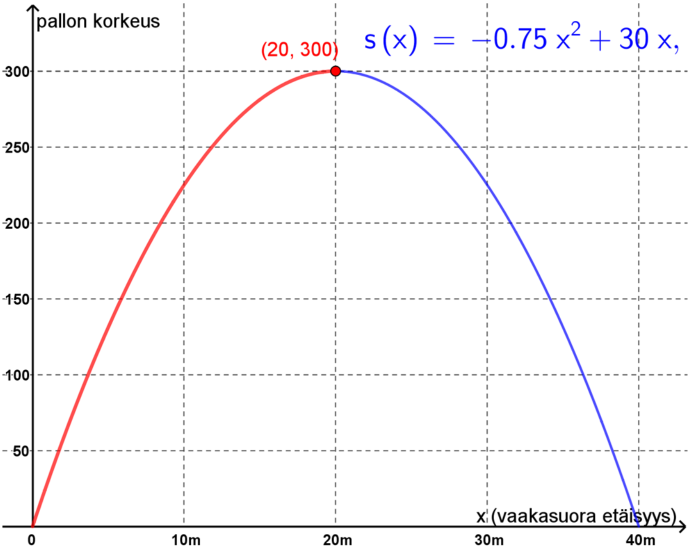
c) Pallon lentorata on sivusta katsoen paraabelin muotoinen. Pallo on nousevassa liikkeessä heiton alusta paraabelin huippuun saakka. Huipun x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

Derivoidaan: $s'(x) = -1{,}5x + 30$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} s'(x) &= 0 \\ -1{,}5x + 30 &= 0 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Pallo on nousevassa liikkeessä, kun $0 \leq x \leq 20$ (metriä).

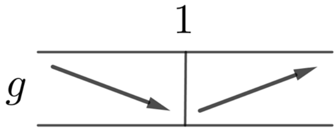


180.

Kuvaajan perusteella funktion kulkusuunta vaihtuu kohdassa $x = 1$.

Kun $x < 1$, niin funktion kuvaajan kulkusuunta on alaspäin, eli funktio on aidosti vähenevä.

Kun $x > 1$, niin funktion kuvaajan kulkusuunta on ylöspäin, eli funktio on aidosti kasvava.



Funktio g on kasvava, kun $x \geq 1$.

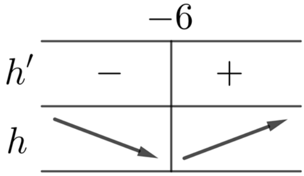
181.

a) Derivaattafunktion kuvaaja leikkaa x-akselin kerran kohdassa $x = -6$. Derivaattafunktiolla on nollakohta $x = -6$.

Päätellään kuvaajan avulla derivaatan merkki: derivaatan arvo on

- negatiivinen (–) silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, eli kun $x < -6$
- positiivinen (+) silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli kun $x > -6$.

Laaditaan derivaatan h' merkkikaavio ja sen perusteella funktion h kulkukaavio.



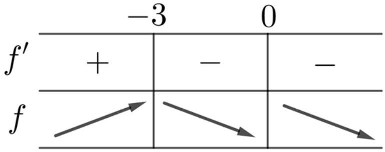
Kulkukaavion perusteella funktio h on vähenevä (nuoli alaspäin), kun $x \leq -6$.

b) Derivaattafunktion kuvaaja leikkaa x-akselin kaksi kertaa kohdissa $x = -3$ ja $x = 0$. Derivaattafunktiolla on nollakohdat $x = -3$ ja $x = 0$.

Päätellään kuvaajan avulla derivaatan merkki: derivaatan arvo on

- positiivinen (+) silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli kun $x < -3$
- negatiivinen (–) silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, eli kun $x > -3$
  ja $x \neq 0$

Laaditaan derivaatan f' merkkikaavio ja sen perusteella funktion f kulkukaavio.



Kulkukaavion perusteella funktio f on vähenevä (nuoli alaspäin), kun $x \geq -3$.

182.

a) Derivoidaan: $f'(x) = -3 \cdot 2x \mp 18 = -6x + 18$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 0$$

$$-6x + 18 = 0$$

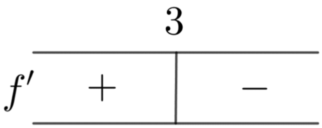
$$-6x = -18$$

$$x = \frac{-18}{-6} = 3$$

Päätellään derivaatan merkki derivaattafunktion $f'(x) = -6x + 18$ kuvaajasta. Kuvaaja on laskeva suora, joka leikkaa x-akselin nollakohdassa $x = 3$, joten

- derivaattafunktion kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli derivaatan merkki on positiivinen, kun $x < 3$
- derivaattafunktion kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, eli derivaatan merkki on negatiivinen, kun $x > 3$.

Laaditaan derivaatan f' merkkikaavio.



Derivaatan merkki voidaan selvittää myös testipisteiden avulla:

$f'(1) = -6 \cdot 1 + 18 = 12 > 0$

$f'(4) = -6 \cdot 4 + 18 = -6 \ < 0$

b) Kulkukaavio laaditaan derivaatan merkkikaavion avulla:

		3	
f'	$+$		$-$
f	↗		↘

c) Kulkukaaviosta nähdään, että funktio f on vähenevä (nuoli alaspäin), kun $x \geq 3$.

183.

Derivoidaan: $f'(x) = -2x^2 + 5x + 3$

Tallennetaan derivaattafunktion lauseke laskinohjelmiston muistiin.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 0$$

$$-2x^2 + 5x + 3 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = 3$$

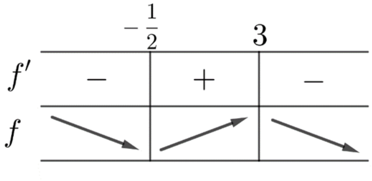
Laaditaan derivaatan f' merkkikaavio ja sen perusteella funktion f kulkukaavio.

Derivaatan merkki voidaan perustella derivaatan kuvaajan (alaspäin aukeava paraabeli) tai testipisteiden avulla:

$f'(-1) = -4 < 0$

$f'(0) = 3 > 0$

$f'(4) = -49 < 0$



a) Kulkukaavion perusteella funktio f on vähenevä (nuoli alaspäin), kun $x \leq -\frac{1}{2}$ tai kun $x \geq 3$.

b) Merkinnöissä esiintyvät muuttujan arvot $x = -3{,}001$ ja $x = -3{,}002$ kuuluvat kulkukaavion ensimmäiseen lokeroon, eli ne välille $x < -\frac{1}{2}$. Tällä välillä funktio f on aidosti vähenevä (derivaatta f' on negatiivinen). Tämä tarkoittaa sitä, että muuttujan arvon kasvaessa funktion arvo pienenee, eli

$$f(-3{,}002) > f(-3{,}001).$$

Funktion arvoista $f(-3{,}002)$ on siis suurempi.

184.

Funktion $g(x) = -2{,}1x^3 + 13x^2 + 27{,}8x + 11$, $0 \leq x \leq 8{,}0$ lauseke kannattaa tehtävän alussa tallentaa laskinohjelmiston muistiin.

a) Asiakkaiden lukumäärä alkuhetkellä $x = 0$ saadaan laskemalla funktion g arvo, kun $x = 0$- Arvo on $g(0) = 11$, joten asiakkaita oli 11 kappaletta.

b) Tutkitaan funktion g kulkua derivaatan avulla.

Derivoidaan: $g'(x) = -6{,}3x^2 + 26x + 27{,}8$, $0 < x < 8$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$g'(x) = 0$$

$$-6{,}3x^2 + 26x + 27{,}8 = 0, \qquad 0 < x < 8$$

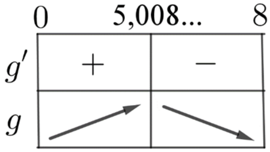
$$x = 5{,}008 \ldots$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion g kulkukaavio. Rajataan kaavio määrittelyvälille $0 \leq x \leq 8$.

Selvitetään derivaatan merkki testipisteiden avulla:

$g'(1) = 47{,}5 > 0$

$g'(6) = -43 < 0$



Kulkukaavion perusteella asiakkaiden määrä on huipussaan, kun $x = 5{,}008 \ldots$, minkä jälkeen määrä alkaa vähentyä.

Ilmaistaan ajanhetki $x = 5{,}008 \ldots$ (tuntia) minuutin tarkkuudella.

$$\begin{aligned} 5{,}008 \ldots \mathrm{h} &= 5\ \mathrm{h} + 0{,}008 \ldots \mathrm{h} = 5\ \mathrm{h} + 0{,}008 \ldots \cdot 60\ \mathrm{min} \\ &= 5\ \mathrm{h} + 0{,}485\ \mathrm{min} \approx 5\ \mathrm{h} \end{aligned}$$

Asiakkaiden määrä alkaa vähentyä viiden tunnin kuluttua alennusmyynnin alkamisesta.

3.2 Funktion ääriarvot

185.

a) Kuvaajan perusteella funktiolla *f* on yksi derivaatan nollakohta $x = -1$, jossa funktion *f* kulkusuunta vaihtuu vähenevästä kasvavaksi. Kohta $x = -1$ on siis funktion *f* minimikohta.

b) Funktion *f* kuvaaja on nouseva suora. Kuvaajan kulkusuunta ei vaihdu, joten funktiolla *f* ei ole ääriarvokohtia.

186.

a) Kuvaajan perustella funktiolla f on yksi derivaatan nollakohta $x = 1$, jossa funktion f kulkusuunta vaihtuu kasvavasta väheneväksi. Kohta $x = 1$ on siis funktion f maksimikohta.

Funktiolla on tässä kohdassa maksimiarvo, joka on $f(1) = -2$.

b) Kuvaajan perustella funktion f derivaatalla on kaksi nollakohtaa $x = 0$ ja $x = 4$.

Kohdassa $x = 0$ funktion f kulkusuunta vaihtuu kasvavasta väheneväksi. Kohta $x = 0$ on siis funktion f maksimikohta.

Funktiolla on tässä kohdassa maksimiarvo, joka on $f(0) = 0$.

Kohdassa $x = 4$ funktion f kulkusuunta vaihtuu vähenevästä kasvavaksi. Kohta $x = 4$ on siis funktion f minimikohta.

Funktiolla on tässä kohdassa minimiarvo, joka on $f(4) = -4$.

187.

a) Kuvaajan perustella funktion g derivaatalla on yksi nollakohta $x = 2$.

Tässä kohdassa funktion g kulkusuunta vaihtuu kasvavasta väheneväksi. Kohta $x = 2$ on siis funktion g maksimikohta.

Funktiolla on tässä kohdassa maksimiarvo, joka on $g(2) = -2$.

b) Kuvaajan perustella funktion g derivaatalla on kaksi nollakohtaa $x = -4$ ja $x = 2$.

Kohdassa $x = -4$ funktion g kulkusuunta vaihtuu vähenevästä kasvavaksi. Kohta $x = -4$ on siis funktion g minimikohta.

Funktiolla on tässä kohdassa minimiarvo, joka on $g(-4) = -3$.

Kohdassa $x = 2$ funktion g kulkusuunta vaihtuu kasvavasta väheneväksi. Kohta $x = 2$ on siis funktion g maksimikohta.

Funktiolla on tässä kohdassa maksimiarvo, joka on $g(2) = 1$.

188.

Kuvaajan perustella funktion g derivaatalla on kolme nollakohtaa $x = 0, x = 1$ ja $x = 3$.

Kohdassa $x = 0$ funktion g kulkusuunta vaihtuu kasvavasta väheneväksi. Kohta $x = 0$ on siis funktion g maksimikohta.

Funktiolla on tässä kohdassa maksimiarvo, joka on $g(0) = 0$.

Kohdassa $x = 1$ funktion g kulkusuunta vaihtuu vähenevästä kasvavaksi. Kohta $x = 1$ on siis funktion g minimikohta.

Funktiolla on tässä kohdassa minimiarvo, joka on $g(1) = -3$.

Kohdassa $x = 3$ funktion g kulkusuunta ei vaihdu. Kohta $x = 1$ ei siis ole funktion g ääriarvokohta. Kyseessä on terassikohta.

189.

a) Merkintä $f(-3)$ tarkoittaa funktion f arvoa kohdassa $x = -3$.

Kun $x = -3$, niin funktion f kuvaajalla oleva piste on $(-3, 0)$, eli pisteen y-koordinaatti on $y = -3$. Siispä $f(-3) = 0$ ja väite on **tosi**.

b) Merkintä $f'(0)$ tarkoittaa funktion f derivaatan arvoa kohdassa $x = 0$.

Funktion f kuvaajalle kohtaan $x = 0$ piirretty tangentti on vaakasuora. Tangentin kulmakertoimen arvo, eli derivaatan arvo, on nolla, ja siis $f'(0) = 0$.

Väite $f'(0) = -3$ on **epätosi**.

c) Kuvaajan perusteella funktion kuvaajaparaabelin huippu on y-akselilla pisteessä $(0, -3)$.

Väite on **tosi.**

d) Derivaatan nollakohdat ovat ne kohdat, joissa funktion f kuvaajalle piirretty tangentti on vaakasuora. Funktion f kuvaajan perusteella derivaatalla on yksi nollakohta $x = 0$.

Kohdat $x = -3$ ja $x = 3$ eivät ole derivaatan nollakohtia vaan ne ovat funktion f nollakohtia.

Väite on siis **epätosi.**

e) Kohdassa $x = -3$ funktion kulkusuunta ei vaihdu. Kohta $x = -3$ ei siis ole ääriarvokohta. Sen sijaan kohta $x = 0$ on ääriarvokohta ja arvo $y = -3$ on ääriarvo.

Väite on **epätosi.**

f) Funktiolla f on kuvaajan perusteella ääriarvo kohdassa $x = 0$. Ääriarvo on funktion arvo, joka on $y = f(0) = -3$.

Väite on **epätosi.**

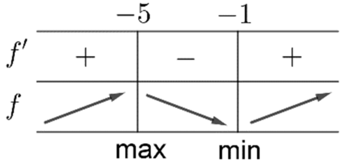
190.

a) Derivaatalla on kuvaajan perusteella kaksi nollakohtaa $x = -5$ ja $x = -1$.

- Derivaatan f' arvo on positiivinen (+) silloin, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli kun $x < -5$ tai kun $x > -1$.

- Derivaatan f' arvo on negatiivinen (−) silloin, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, eli kun $-5 < x < -1$.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion f kulkukaavio.



	-5		-1	
f'	+		−		+
f	↗		↘		↗
		max		min	

Kulkukaavion perusteella funktiolla f on kaksi ääriarvokohtaa: maksimikohta $x = -5$ ja minimikohta $x = -1$.

b) Derivaatalla on kuvaajan perusteella kaksi nollakohtaa $x = -1$ ja $x = 3$.

- derivaatan f' arvo on positiivinen (+) silloin, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli kun $x > 3$.
- derivaatan f' arvo on negatiivinen (-) silloin, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, eli kun $x < 3$ ja $x \neq -1$.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion f kulkukaavio.

		-1		3	
f'	$-$		$-$		$+$
f	↘		↘		↗
				min	

Kulkukaavion perusteella funktiolla f on yksi ääriarvokohta: minimikohta $x = 3$.

Derivaatan nollakohta $x = -1$ ei ole ääriarvokohta koska derivaatan merkki, ja siis funktion f kulkusuunta, ei tässä kohdassa vaihdu. Kohta $x = -1$ on terassikohta.

191.

a) Derivaatalla ei kuvaajan perusteella ole nollakohtia ja derivaatan arvo on aina positiivinen.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion *h* kulkukaavio.

h'	$+$
h	↗

Funktiolla *h* ei ole ääriarvokohtia.

b) Derivaatalla on kuvaajan perusteella kaksi nollakohtaa $x = 1$ ja $x = 2$.

- derivaatan h' arvo on negatiivinen (−) silloin, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, eli kun $x < 1$

- derivaatan h' arvo on positiivinen (+) silloin, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli kun $x > 1$ ja $x \neq 2$.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion *h* kulkukaavio.

		1		2	
h'	$-$		$+$		$+$
h	↘		↗		↗
		min			

Kulkukaavion perusteella funktiolla *h* on yksi ääriarvokohta: minimikohta $x = 1$.

Derivaatan nollakohta $x = 2$ ei ole ääriarvokohta koska derivaatan merkki, ja siis funktion h kulkusuunta, ei tässä kohdassa vaihdu. Kohta $x = 2$ on terassikohta.

192.

a) Kuvassa on annettu derivaattafunktion g' kuvaaja. Derivaattafunktion huippu on pisteessä $(-2, -2)$. Derivaatan arvo on kuvaajan perusteella koko ajan negatiivinen, joten funktio g on aidosti vähenevä. Funktion g kuvaajalla ei ole huippua. Väite on **epätosi.**

b) Merkintä $g(-2)$ tarkoittaa funktion g arvoa kohdassa $x = -2$. Derivaattafunktion g' kuvaajan perusteella ei voida sanoa mitään funktion g arvosta.

Väite voi olla **tosi** tai **epätosi.**

c) Kuvaajan perusteella derivaattafunktiolla ei ole nollakohtia, joten funktiolla g ei ole ääriarvokohtia. Väite on **epätosi.**

d) Derivaatan arvo on kuvaajan perusteella koko ajan negatiivinen, joten funktio g on aidosti vähenevä. Funktiolla g ei ole ääriarvoja, joten väite on **tosi.**

193.

a) Funktio m on vähenevä silloin, kun sen kuvaajalle piirretyt tangentit ovat laskevia tai vaakasuoria. Huomataan, että osallistujien määrä kasvaa kohtaan $t = 4$ saakka. Tästä eteenpäin, eli kun $4 < t < 8$, osallistujien määrä vähenee.

Funktio m on vähenevä, kun $4 \leq t < 8$ (tuntia).

b) Kuvaajalle piirretyt tangentit ovat vaakasuoria, kun $t = 2$ ja kun $t = 4$.

Kohdassa $t = 2$ kuvaajan kulkusuunta ei vaihdu, joten kyseessä ei ole ääriarvokohta.

Kohdassa $t = 4$ kuvaajan kulkusuunta vaihtuu kasvavasta väheneväksi, joten kyseessä on maksimikohta.

c) Maksimikohdassa $t = 4$ funktion arvo on $m(4) \approx 90$, joten maksimiarvo on 90 (katsojaa).

194.

a) Funktio f on kasvava silloin, kun sen kuvaajalle piirretyt tangentit ovat nousevia tai vaakasuoria. Huomataan, että myynnin määrä vähenee kohtaan $t = 6$ saakka. Tästä eteenpäin kohtaan $t = 9$ saakka, eli kun $6 < t < 9$, myynnin määrä kasvaa, mikä jälkeen määrä vähenee.

Funktio f on kasvava, kun $6 \leq t \leq 9$ (kuukautta).

b) Kuvaajalle kohtaan $t = 4$ piirretty tangentti on vaakasuora, eli kyseessä on derivaatan nollakohta. Kuvaajan kulkusuunta ei kuitenkaan vaihdu tässä kohdassa, joten kyseessä ei ole ääriarvokohta. Kohta $t = 4$ on terassikohta.

c) Kuvaajalle piirretyt tangentit ovat vaakasuoria, kun $t = 4$, $t = 6$ ja kun $t = 9$.

Kohdassa $t = 4$ kuvaajan kulkusuunta ei vaihdu, joten kyseessä ei ole ääriarvokohta.

Kohdassa $t = 6$ kuvaajan kulkusuunta vaihtuu vähenevästä kasvavaksi, joten kyseessä on minimikohta. Funktion arvo on $f(6) = 40$, joten minimiarvo on 40 (kappaletta).

Kohdassa $t = 9$ kuvaajan kulkusuunta vaihtuu kasvavasta väheneväksi, joten kyseessä on maksimikohta. Funktion arvo on $f(9) = 70$, joten maksimiarvo on 70 (kappaletta).

195.

a) Funktio h on kasvava silloin, kun sen kuvaajalle piirretyt tangentit ovat nousevia tai vaakasuoria. Huomataan, että hinta vähenee kohtaan $t = 7$ saakka. Tästä eteenpäin kohtaan $t = 10$ saakka, eli kun $7 < t < 10$, hinta kasvaa, mikä jälkeen hinta kääntyy taas laskuun.

Funktio h on kasvava, kun $7 \leq t \leq 10$ (kuukautta).

b) Kuvaajan kulkusuunta ei vaihdu kohdassa $t = 2$, joten tässä kohdassa ei ole ääriarvoa.

c) Kuvaajalle piirretyt tangentit ovat vaakasuoria, kun $t = 7$ ja kun $t = 10$.

Kohdassa $t = 7$ (kk) kuvaajan kulkusuunta vaihtuu vähenevästä kasvavaksi, joten kyseessä on minimikohta. Funktion arvo on $h(7) \approx 130$, joten minimiarvo on 130 (euroa/1000 kg).

Kohdassa $t = 10$ (kk) kuvaajan kulkusuunta vaihtuu kasvavasta väheneväksi, joten kyseessä on maksimikohta. Funktion arvo on $h(10) \approx 150$, joten maksimiarvo on 150 (euroa/1000 kg).

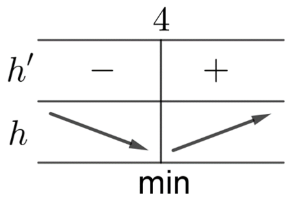
196.

Derivoidaan: $h'(x) = 4x - 16$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 0 \\ 4x - 16 &= 0 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion *h* kulkukaavio. Derivaatan $h'(x) = 4x - 16$ kuvaaja on nouseva suora, joten derivaatan merkki voidaan päätellä kuvaajasta.



Derivaatan merkki voidaan perustella myös testipisteiden avulla:

$h'(1) = -12 < 0$

$h'(5) = 4 > 0$

Kulkukaavion perusteella funktiolla *h* on yksi ääriarvokohta. Funktiolla on minimi kohdassa $x = 4$.

Lasketaan minimiarvo. Funktion *h* paikallinen minimiarvo on $h(4) = 32$.

197.

Derivoidaan: $g'(x) = -6x + 6$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ -6x + 6 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion g kulkukaavio. Derivaatan $g'(x) = -6x + 6$ kuvaaja on laskeva suora, joten derivaatan merkki voidaan päätellä kuvaajasta.

		1	
g'	+		−
g	↗		↘
		max	

Derivaatan merkki voidaan perustella myös testipisteiden avulla:

$g'(0) = 6 > 0$

$g'(2) = -6 < 0$

a) Kulkukaavion perusteella funktiolla g on yksi ääriarvokohta: maksimikohta $x = 1$.

b) Lasketaan ääriarvo. Funktion g paikallinen maksimiarvo on $g(1) = 8$.

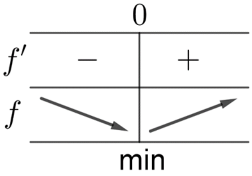
198.

a) Derivoidaan: $f'(x) = 4x$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
4x &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion f kulkukaavio. Derivaatan $f'(x) = 4x$ kuvaaja on nouseva suora, joten derivaatan merkki voidaan päätellä kuvaajasta.



Derivaatan merkki voidaan perustella myös testipisteiden avulla:

$f'(-1) = -4 < 0$

$f'(1) = 4 > 0$

Kulkukaavion perusteella funktiolla f on minimikohta $x = 0$.

b) Tehtävänannossa on ilmoitettu derivaattafunktio: $f'(x) = 2x^2 - 6$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 0$$

$$2x^2 - 6 = 0$$

$$x = -\sqrt{3} = -1{,}732\ldots \text{ tai } x = \sqrt{3} = 1{,}732\ldots.$$

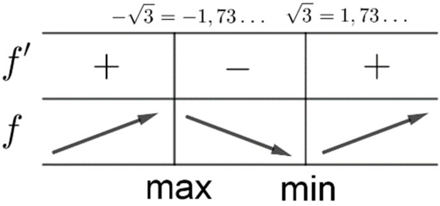
Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion *f* kulkukaavio. Derivaatan $f'(x) = 2x^2 - 6$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten derivaatan merkki voidaan päätellä kuvaajasta.

Derivaatan merkki voidaan perustella myös testipisteiden avulla:

$f'(-2) = 2 > 0$

$f'(0) = -6 < 0$

$f'(2) = 2 > 0$



Kulkukaavion perusteella funktiolla *f* on maksimikohta $x = -\sqrt{3}$ ja minimikohta $x = \sqrt{3}$.

199.

a) Derivoidaan: $g'(x) = \frac{1}{2}x - 2$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

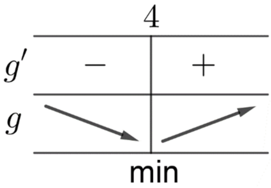
$$
\begin{aligned}
g'(x) &= 0 \\
\frac{1}{2}x - 2 &= 0 \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion *h* kulkukaavio. Derivaatan $g'(x) = \frac{1}{2}x - 2$ kuvaaja on nouseva suora, joten derivaatan merkki voidaan päätellä kuvaajasta.

Derivaatan merkki voidaan perustella myös testipisteiden avulla:

$g'(2) = -1 < 0$

$g'(6) = 1 > 0$



Kulkukaavion perusteella funktiolla g on minimi kohdassa $x = 4$.

Lasketaan minimiarvo. Funktion g paikallinen minimiarvo on $g(4) = -1$.

b) Derivoidaan: $g'(x) = -\frac{4}{3}x - 3$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$g'(x) = 0$$

$$-\frac{4}{3}x - 3 = 0$$

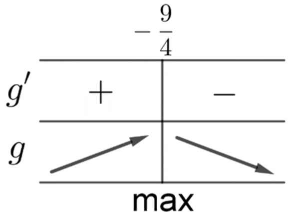
$$x = -\frac{9}{4} = -2{,}25$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion *h* kulkukaavio. Derivaatan $g'(x) = -\frac{4}{3}x - 3$ kuvaaja on laskeva suora, joten derivaatan merkki voidaan päätellä kuvaajasta.

Derivaatan merkki voidaan perustella myös testipisteiden avulla:

$g'(-3) = 1 > 0$

$g'(0) = -3 < 0$



Kulkukaavion perusteella funktiolla g on maksimi kohdassa $x = -\frac{9}{4}$.

Lasketaan minimiarvo. Funktion g paikallinen minimiarvo on $g\left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{35}{8}$.

200.

Ääriarvotehtävää ratkaistaessa funktion lauseke kannattaa tallentaa laskinohjelmiston muistiin. Myös derivaattafunktion lauseke kannattaa tallentaa ohjelmistoon. Tämä nopeuttaa arvojen laskemista.

a) Tallennetaan funktio $g(x) = x^3 - x^2 - x - 3$ laskinohjelmiston muistiin.

Derivoidaan: $g'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

Tallennetaan derivaattafunktio laskinohjelmiston muistiin.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$g'(x) = 0$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ tai } x = 1$$

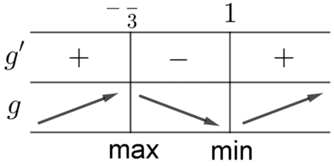
Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion g kulkukaavio. Derivaatan $g'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ kuvaaja on ylöspäin avautuva paraabeli, joten derivaatan merkki voidaan päätellä kuvaajasta.

Derivaatan merkki voidaan perustella myös testipisteiden avulla:

$g'(-1) = 4 > 0$

$g'(0) = -1 < 0$

$g'(2) = 9 > 0$



Kulkukaavion perusteella funktiolla g on maksimikohta $x = -\frac{1}{3}$.

Paikallinen maksimiarvo on $g\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{76}{27}$.

Kulkukaavion perusteella funktiolla g on minimikohta $x = 1$.

Paikallinen minimiarvo on $g(1) = -4$.

b) Tallennetaan funktio $g(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 8x - 12$ laskinohjelmiston muistiin.

Derivoidaan: $g'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$.

Tallennetaan derivaattafunktio laskinohjelmiston muistiin.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

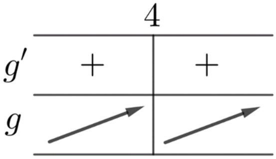
$g'(x) = 0$

$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8 = 0$

$x = 4$ *derivaatalla on vain yksi nollakohta*

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion g kulkukaavio. Derivaatan $g'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$ kuvaaja on ylöspäin avautuva paraabeli, joten derivaatan merkki voidaan päätellä kuvaajasta.

Derivaatan merkki voidaan perustella myös testipisteiden avulla:



$g'(1) = \frac{9}{2} > 0$

$g'(5) = \frac{1}{2} > 0$

Derivaatan nollakohta $x = 4$ ei ole funktion g ääriarvokohta, koska derivaatan merkki ja funktion g kulku eivät vaihdu tässä kohdassa. Funktio g on aidosti kasvava.

Funktiolla g ei ole ääriarvokohtia eikä ääriarvoja.

201.

Ääriarvotehtävää ratkaistaessa funktion lauseke kannattaa tallentaa laskinohjelmiston muistiin. Myös derivaattafunktion lauseke kannattaa tallentaa ohjelmistoon. Tämä nopeuttaa arvojen laskemista.

Tallennetaan funktio $f(t) = t^3 - t^2 - 21t + 1$ laskinohjelmiston muistiin.

Derivoidaan: $f'(t) = 3t^2 - 2t - 21$.

Tallennetaan derivaattafunktio laskinohjelmiston muistiin.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$f'(t) = 0$$

$$3t^2 - 2t - 21 = 0$$

$$t = -\frac{7}{3} \text{ tai } t = 3$$

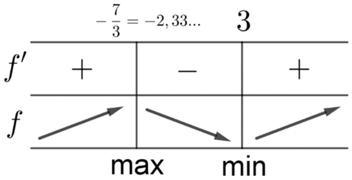
Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion g kulkukaavio. Derivaatan $f'(t) = 3t^2 - 2t - 21$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten derivaatan merkki voidaan päätellä kuvaajasta.

Derivaatan merkki voidaan perustella myös testipisteiden avulla:

$f'(-3) = 12 > 0$

$f'(0) = -21 < 0$

$f'(4) = 19 > 0$



Kulkukaavion perusteella funktiolla f on maksimikohta $x = -\frac{7}{3}$.

Paikallinen maksimiarvo on $f\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{860}{27}=31\frac{23}{27}$.

Kulkukaavion perusteella funktiolla f on minimikohta $x=3$.

Paikallinen minimiarvo on $f(3)=-44$.

202.

Tutkitaan ensin funktion $f(x) = -4x^3$ ääriarvoja.

Derivoidaan: $f'(x) = -12x^2$.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -12x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion f kulkukaavio.
Derivaatan $f'(x) = -12x^2$ kuvaaja on alaspäin avautuva paraabeli, joten derivaatan merkki voidaan päätellä kuvaajasta.

Derivaatan merkki voidaan perustella myös testipisteiden avulla:

$f'(-1) = -12 < 0$

$f'(1) = -12 < 0$

		0	
f'	$-$		$-$
f	↘		↘

Derivaatan merkki ei vaihdu nollakohdassa $x = 0$, joten tämä kohta ei ole funktion f ääriarvokohta. Funktio f on aidosti vähenevä.

Funktiolla f ei ole ääriarvokohtia eikä ääriarvoja.

Tutkitaan sitten funktion $g(x) = x^3 + x$ ääriarvoja.

Derivoidaan: $g'(x) = 3x^2 + 1$.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

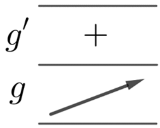
$$g'(x) = 0$$
$$3x^2 + 1 = 0$$

ei ratkaisua *derivaatalla g' ei ole nollakohtia*

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion g kulkukaavio. Derivaatan $g'(x) = 3x^2 + 1$ kuvaaja on ylöspäin avautuva paraabeli, joten derivaatan merkki voidaan päätellä kuvaajasta.

Derivaatan merkki voidaan perustella myös testipisteen avulla: Derivaatan merkki voi vaihtua vain nollakohdassa, ja nollakohtia ei ole, joten derivaatan merkki ei vaihdu. Lasketaan derivaatan arvo jossakin kohdassa, esimerkiksi kohdassa $x = 0$, ja päätellä derivaatan merkki tästä:

$$g'(0) = 1 > 0$$



Funktio g on aidosti kasvava. Funktiolla g ei ole ääriarvokohtia eikä ääriarvoja.

Tutkitaan lopuksi summafunktion $h(x) = f(x) + g(x)$ ääriarvoja.

$$h(x) = -4x^3 + x^3 + x = -3x^3 + x$$

Derivoidaan: $h'(x) = -9x^2 + 1$.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$h'(x) = 0$$

$$-9x^2 + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \text{ tai } x = \frac{1}{3}$$

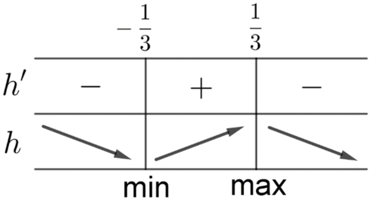
Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja summafunktion *h* kulkukaavio. Derivaatan $h'(x) = -9x^2 + 1$ kuvaaja on alaspäin avautuva paraabeli, joten derivaatan merkki voidaan päätellä kuvaajasta.

Derivaatan merkki voidaan perustella myös testipisteiden avulla:

$h'(-1) = -8 < 0$

$h'(0) = 1 > 0$

$h'(1) = -8 < 0$



Kulkukaavion perusteella summafunktiolla *h* on minimikohta $x = -\frac{1}{3}$. Paikallinen minimiarvo on $h\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{9}$.

Kulkukaavion perusteella summafunktiolla *h* on maksimikohta $x = \frac{1}{3}$. Paikallinen maksimiarvo on $h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$.

203.

Tallennetaan funktio $V(t) = -520t(t - 20)$ laskinohjelmiston muistiin.

a) Funktio V kuvaa säiliössä olevan veden määrää, joka on epänegatiivinen luku. Funktio on määritelty niillä muuttujan t arvoilla, joilla $V(t) \geq 0$ (litraa).

Ratkaistaan millä muuttujan t arvoilla $V(t) \geq 0$.

$$-520t(t - 20) \geq 0$$
$$0 \leq t \leq 20$$

Määritelty, kun $0 \leq t \leq 20$.

b) Tutkitaan funktion V kulkua, kun $0 \leq t \leq 20$.

Derivoidaan: $V'(t) = 10\,400 - 1040t$.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$V'(t) = 0$$

$$10400 - 1040t = 0$$

$$t = 10$$

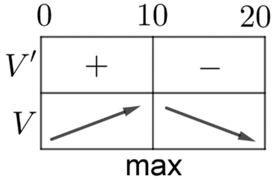
Derivaatan nollakohta kuuluu määrittelyvälille $0 \leq t \leq 20$.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion g kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio määrittelyvälille $0 \leq t \leq 20$. Derivaattafunktion $V'(t) = 10\,400 - 1040t$ kuvaaja on laskeva suora, joten derivaatan merkki voidaan päätellä kuvaajasta.

Derivaatan merkki voidaan perustella myös testipisteiden avulla:

$V'(1) = 9360 > 0$

$V'(20) = -10\,400 < 0$



Kulkukaavion perusteella funktiolla V on maksimikohta $t = 10$ (min) ja veden määrä on tällöin suurimmillaan. Veden määrä on suurimmillaan 10 minuutin kuluttua.

c) Kulkukaaviosta nähdään, että kun säiliössä olevan veden määrä on saavuttanut huippunsa ajanhetkellä $t = 10$ (minuuttia), veden määrä alkaa vähentyä. Säiliö on tyhjä, kun veden määrä on 0.

$$\begin{aligned} V(t) &= 0 \\ -520t(t-20) &= 0 \\ t &= 0 \text{ tai } t = 20 \end{aligned}$$

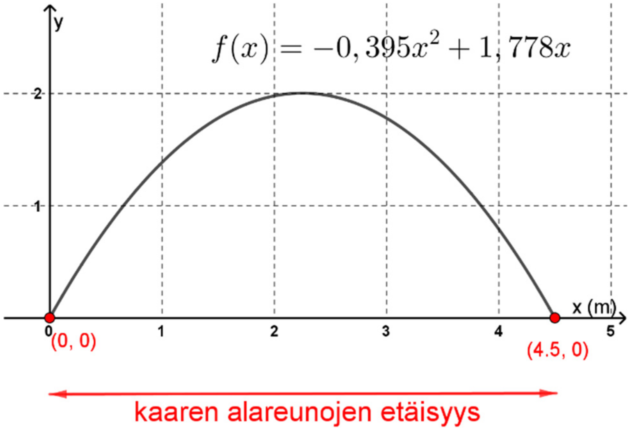
Veden määrä on tyhjä alussa ($t = 0$) ja uudelleen, kun $t = 20$.

Säiliö alkaa tyhjentyä, kun $t = 10$, joten tyhjenemiseen menee aikaa $20 - 10 = 10$ minuuttia.

204.

Tallennetaan funktio $f(x) = -0{,}395x^2 + 1{,}778x$ laskinohjelmiston muistiin.

Funktion kuvaaja on piirretty ratkaisun avuksi.



a) Kaaren alareunat ovat funktion f nollakohdat, joten alareunojen etäisyys on funktion nollakohtien välinen etäisyys.

Ratkaistaan funktion f nollakohdat.

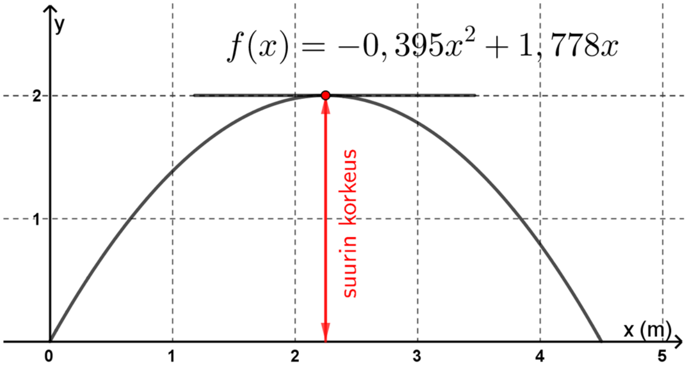
$$f(x) = 0$$

$$-0{,}395x^2 + 1{,}778x = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = 4{,}501 \ldots$$

Kaaren päiden välinen etäisyys on siis noin 4,50 metriä.

b) Funktion *f* kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Kaaren suurin korkeus saadaan funktion *f* ääriarvokohdasta, joka on derivaatan nollakohta.



Derivoidaan: $f'(x) = -0{,}79x + 1{,}778$.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 0$$

$$-0{,}79x + 1{,}778 = 0$$

$$x = 2{,}250\ldots$$

Kaaren suurin korkeus on $f(2{,}250\ldots) = 2{,}0008\ldots \approx 2{,}00$ (metriä).

205.

Tallennetaan funktio $h(t) = -0{,}15t^2 + 2{,}4t + 1{,}8$ laskinohjelmiston muistiin.

a) Kun pallo saavuttaa huippukorkeutensa, niin sen nopeus on hetkellisesti nolla, eli funktion h derivaatta on nolla.

Derivoidaan: $h(x) = -0{,}30t + 2{,}4$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta.

$$
\begin{aligned}
-0{,}30t + 2{,}4 &= 0 \\
t &= 8
\end{aligned}
$$

Pallo saavuttaa huippukorkeutensa hetkellä $t = 8$ (sekuntia).

Lasketaan huippukorkeus.

$$h(8) = -0{,}15 \cdot 8^2 + 2{,}4 \cdot 8 + 1{,}8 = 11{,}4 \approx 11$$

Pallo käy 11 metrin korkeudessa.

b) Kun pallo on saavuttanut huippukorkeutensa hetkellä $t = 8$ (sekuntia), sen lentorata kääntyy laskevaksi. Rata on laskeva, kunnes pallon korkeus on tullut nollaksi.

Ratkaistaan ajanhetki, jolloin pallon korkeus on nolla.

$$h(t) = 0$$
$$-0{,}15t^2 + 2{,}4t + 1{,}8 = 0, \quad t \geq 0$$
$$t = 16{,}717 \ldots \approx 17$$

Pallon korkeus on nolla, kun $t \approx 17$ (sekuntia).

Pallon lentorata on laskeva aikavälillä 8,0 s – 17 s.

Huomaa, että vastaukset ilmoitetaan kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

206.

a) Kuvaajan perustella funktiolla g on yksi derivaatan nollakohta $x = -1$, jossa funktion g kulkusuunta vaihtuu vähenevästä kasvavaksi. Kohta $x = -1$ on siis funktion g minimikohta.

b) Funktion g derivaatalla g' ei kuvaajan perusteella ole nollakohtia, joten funktiolla g ei ole ääriarvokohtia.

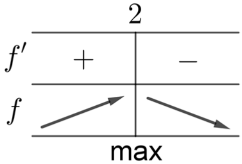
207.

a) Derivaatalla on kuvaajan perusteella yksi nollakohta $x = 2$.

- Derivaatan f' arvo on positiivinen (+) silloin, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli kun $x < 2$.

- Derivaatan f' arvo on negatiivinen (−) silloin, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, eli kun $x > 2$.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion f kulkukaavio.



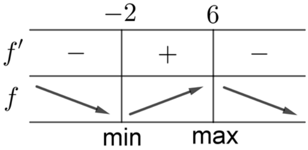
Kulkukaavion perusteella funktiolla f maksimikohta $x = 2$.

b) Derivaatalla on kuvaajan perusteella kaksi nollakohtaa $x = -2$ ja $x = 6$.

- Derivaatan f' arvo on positiivinen (+) silloin, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli kun $-2 < x < 6$.

- Derivaatan f' arvo on negatiivinen (−) silloin, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, eli kun $x < -2$ tai $x > 6$.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion f kulkukaavio.



		-2		6	
f'	$-$		$+$		$-$
f	↘		↗		↘
		min		max	

Kulkukaavion perusteella funktiolla f on minimikohta $x = -2$ ja maksimikohta $x = 6$.

208.

a) Funktio g on kasvava silloin, kun sen kuvaajalle piirretyt tangentit ovat nousevia tai vaakasuoria. Huomataan, että latausnopeus kasvaa kohtaan $t = 4$ saakka, eli kun $0 < t \leq 4$. Tämän jälkeen se vähenee kohtaan $t = 7$ saakka, minkä jälkeen se kääntyy taas kasvuun. Latausnopeus kasvaa kohtaan $t = 15$ saakka, eli välillä $7 \leq t \leq 15$, minkä jälkeen latausnopeus jälleen vähenee.

Latausnopeus g on kasvava, kun $0 < t \leq 4$ ja kun $7 \leq t \leq 15$.

b) Funktion kuvaajan kulkusuunta ei muutu kohdassa $t = 11$, joten kyseessä ei ole ääriarvokohta.

c) Kohdassa $t = 4$ kuvaajan kulkusuunta vaihtuu kasvavasta väheneväksi, joten kyseessä on maksimikohta. Funktion arvo on $g(4) = 100$, joten maksimiarvo on 100 (Mbit/s).

Kohdassa $t = 7$ kuvaajan kulkusuunta vaihtuu vähenevästä kasvavaksi, joten kyseessä on minimikohta. Funktion arvo on $g(7) = 65$, joten minimiarvo on 65 (Mbit/s).

Kohdassa $t = 15$ kuvaajan kulkusuunta vaihtuu kasvavasta väheneväksi, joten kyseessä on maksimikohta. Funktion arvo on $g(15) = 98$, joten maksimiarvo on 100 (Mbit/s).

209.

Tallennetaan funktio $f(x) = 2(x^2 - 3x) - (2x + 1)$ laskinohjelmiston muistiin.

Derivoidaan: $f'(x) = 4x - 8$.

Tallennetaan derivaattafunktio laskinohjelmiston muistiin.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

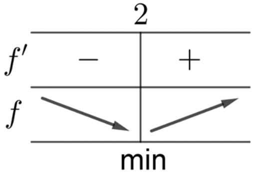
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x - 8 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion f kulkukaavio. Derivaatan $f'(x) = 4x - 8$ kuvaaja on nouseva suora, joten derivaatan merkki voidaan päätellä kuvaajasta.

Derivaatan merkki voidaan perustella myös testipisteiden avulla:

$f'(1) = -4 < 0$

$f'(3) = 4 > 0$



Kulkukaavion perusteella funktiolla f on minimikohta $x = 2$. Paikallinen minimiarvo on $f(2) = -9$.

210.

Ääriarvotehtävää ratkaistaessa funktion lauseke kannattaa tallentaa laskinohjelmiston muistiin. Myös derivaattafunktion lauseke kannattaa tallentaa ohjelmistoon. Tämä nopeuttaa arvojen laskemista.

a) Tallennetaan funktio $h(x) = -x(-3x - 6)$ laskinohjelmiston muistiin.

Derivoidaan: $h'(x) = 6x + 6$.

Tallennetaan derivaattafunktio laskinohjelmiston muistiin.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$h'(x) = 0$

$6x + 6 = 0$

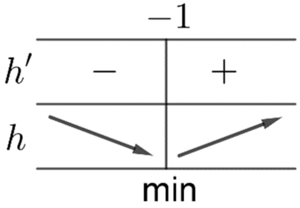
$x = -1$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion h kulkukaavio. Derivaatan $h'(x) = 6x + 6$ kuvaaja on nouseva suora, joten derivaatan merkki voidaan päätellä kuvaajasta.

Derivaatan merkki voidaan perustella myös testipisteiden avulla:

$h'(-2) = -6 < 0$

$h'(0) = 6 > 0$



Kulkukaavion perusteella funktiolla h on minimikohta $x = -1$. Paikallinen minimiarvo on $h(-1) = -3$.

b) Tehtävänannossa on ilmoitettu derivaattafunktio:
$h'(x) = x(-3x - 6)$.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$h'(x) = 0$$

$$x(-3x - 6) = 0$$

$$x = -2 \text{ tai } x = 0$$

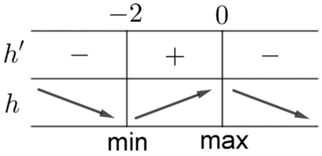
Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion *f* kulkukaavio.

Perustellaan derivaatan merkki testipisteiden avulla:

$h'(-3) = -9 < 0$

$h'(-1) = 3 > 0$

$h'(1) = -9 < 0$



Kulkukaavion perusteella funktiolla *h* on minimikohta $x = -2$ ja maksimikohta $x = 0$. Derivaattafunktion ja kulkukaavion perusteella voidaan määrittää ainoastaan ääriarvokohdat, ei ääriarvoja (funktion *h* arvoja ääriarvokohdissa).

211.

Derivoidaan: $f'(x) = 2x^2 + 4x + 4$.

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 0$$

$$2x^2 + 4x + 4 = 0$$

ei ratkaisua (laskin)

Derivaattafunktion $f'(x) = 2x^2 + 4x + 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, jolla ei ole nollakohtia. Kuvaaja on siis kokonaisuudessaan *x*-akselin yläpuolella ja derivaatan arvo on koko ajan positiivinen, eli $f'(x) > 0$ kaikilla muuttujan *x* arvoilla.

Koska derivaatan merkki ei vaihdu, funktiolla *f* ei ole ääriarvokohtia. Funktio *f* on aidosti kasvava.

212.

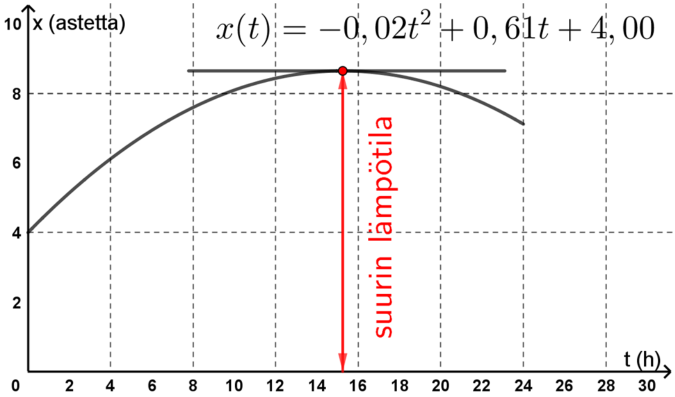
Tallennetaan funktio $x(t) = -0{,}02t^2 + 0{,}61t + 4{,}00,\ \ 0 \leq t \leq 24$ laskinohjelmiston muistiin.

a) Lämpötila tarkastelun alussa, eli kun $t = 0$, saadaan laskemalla funktion x arvo tässä kohdassa.

$$x(0) = 4{,}00\ (°\text{C})$$

Lämpötila oli tarkastelun alussa 4,00 astetta.

b) Funktion $x(t) = -0{,}02t^2 + 0{,}61t + 4{,}00,\ \ 0 \leq t \leq 24$, kuvaaja on alaspäin aukeava paraabelin kaari. Lämpötila oli korkeimmillaan funktion x ääriarvokohdassa, joka on derivaatan nollakohta.



Derivoidaan: $x'(t) = -0{,}04t + 0{,}61$.

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

$$x'(t) = 0$$

$$-0{,}04t + 0{,}61 = 0$$

$$t = 15{,}25$$

Lämpötila oli korkeimmillaan ajanhetkellä $t = 15{,}25$ tuntia (keskiyöstä), eli kello 15:15.

c) Lämpötilafunktion $x(t) = -0{,}02t^2 + 0{,}61t + 4{,}00$,
$0 \leq t \leq 24$ kuvaaja on alaspäin avautuvan paraabelin kaari, ja paraabeli huippu on kohdassa $t = 15{,}25$. Funktio on kasvava, kun $0 \leq t \leq 15{,}25$.

Lämpötila kasvoi keskiyöstä alkaen klo 15:15 saakka.

3.3 Funktion suurin ja pienin arvo

213.

a) Kulkukaavion perusteella kohta $x = -1$ on funktion paikallinen maksimikohta. Funktio saa tässä kohdassa myös suurimman arvonsa. Pienintä arvoa ei ole.

b) Kulkukaavion perusteella kohta $x = -1$ on funktion paikallinen maksimikohta. Funktio saa tässä kohdassa myös suurimman arvonsa. Kulkukaavio on rajattu määrittelyvälille $[-5, 2]$, ja välin päätepisteet $x = -5$ ja $x = 2$ ovat funktion paikallisia minimikohtia. Funktio saa pienimmän arvonsa joko kohdassa $x = -5$ tai $x = 2$.

c) Kulkukaavion mukaan funktio on aidosti vähenevä. Funktiolla ei ole pienintä eikä suurinta arvoa.

d) Kulkukaavion mukaan funktio on aidosti vähenevä määrittelyvälillä $[0, 7]$. Funktio saa pienimmän arvonsa välin vasemmassa päätepisteessä $x = 0$ ja suurimman arvonsa välin oikeassa päätepisteessä $x = 7$.

214.

a) Kulkukaavion mukaan funktio on aidosti kasvava. Kulkukaavio on rajattu määrittelyvälille $x \geq 3$. Funktio saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = 3$ ja funktiolla ei ole suurinta arvoa.

b) Kulkukaavion perusteella kohta $x = 0$ on funktion paikallinen minimikohta. Funktio saa tässä kohdassa myös pienimmän arvonsa. Kulkukaavio on rajattu määrittelyvälille $[-2, 5]$, ja välin päätepisteet $x = -2$ ja $x = 5$ ovat funktion paikallisia maksimikohtia. Funktio saa suurimman arvonsa joko kohdassa $x = -2$ tai $x = 5$.

215.

a) Kulkukaavio on rajattu määrittelyvälille $[-4, 10]$.

Välin vasen päätepiste $x = -4$ on funktion paikallinen maksimikohta. Funktiolla on myös toinen paikallinen maksimikohta $x = 6$. Näistä maksimikohdista toisessa funktio saa myös suurimman arvonsa.

Välin oikea päätepiste $x = 10$ on funktion paikallinen minimikohta. Funktiolla on myös toinen paikallinen minimikohta $x = 2$. Näistä minimikohdista toisessa funktio saa myös pienimmän arvonsa.

Funktiolla on sekä pienin että suurin arvo.

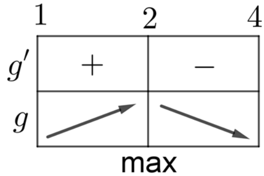
b) Kulkukaavion perusteella kohta $x = -3$ on funktion paikallinen minimikohta. Funktio saa tässä kohdassa myös pienimmän arvonsa. Tämän jälkeen, eli kun $x > -3$ funktio on aidosti kasvava. Funktiolla ei ole suurinta arvoa.

216.

a) Laaditaan ratkaisun avuksi derivaattafunktion g'merkkikaavio ja funktion g kulkukaavio. Rajataan kaavio välille $[1, 4]$.

Funktion g kuvaajalle piirretty tangentti on

- vaakasuora, eli derivaatan g' arvo on nolla, kun $x = 2$,
- nouseva, eli derivaatan g' arvo on positiivinen (+), kun $x < 2$,
- laskeva, eli derivaatan g' arvo on negatiivinen (-), kun $x > 2$.



Kohta $x = 2$ on derivaattafunktion g' nollakohta ja funktion g paikallinen maksimikohta. Funktio saa siinä suurimman arvonsa. Suurin arvo on kuvaajan perusteella $g(2) = 4$.

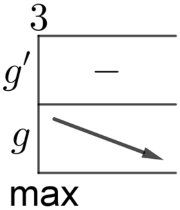
Kohta $x = 1$ on funktion g paikallinen minimikohta. Minimiarvo on kuvaajan perusteella $g(1) = 0$.

Kohta $x = 4$ on funktion g paikallinen minimikohta. Minimiarvo on kuvaajan perusteella $g(4) = 0$.

Minimiarvot ovat keskenään yhtä suuret. Funktion pienin arvo välillä $[1, 4]$ on 0.

b) Laaditaan ratkaisun avuksi derivaattafunktion g'merkkikaavio ja funktion g kulkukaavio. Rajataan kaavio välille $x \geq 3$.

Funktion g kuvaajalle piirretty tangentti on laskeva, eli derivaatan g' arvo on negatiivinen välin $x \geq 3$ jokaisessa kohdassa.



Kohta $x = 3$ on funktion g paikallinen maksimikohta. Funktio saa siinä suurimman arvonsa. Suurin arvo on kuvaajan perusteella $g(3) = 3$.

Kun $x > 3$, on funktio g aidosti vähenevä. Pienintä arvoa ei ole.

217.

Kuva a)

- funktion kuvaaja on laskeva suora, joten funktiolla ei ole pienintä eikä suurinta arvoa
- maksimi kohdassa $x = -2$

Kuvaan a sopii siis väittämä C.

Kuva b)

- funktion määrittelyväli on suljettu väli $[-2, 2]$
- funktio saa suurimman arvonsa välin vasemmassa päätepisteessä kun $x = -2$ ja suurin arvo on kuvaajan perusteella $f(-2) = 3$
- funktio saa pienimmän arvonsa välin oikeassa päätepisteessä kun $x = 2$ ja pienin arvo on kuvaajan perusteella $f(2) = -1$.

Kuvaan b sopivat siis väittämät A ja B.

218.

Kuva a)

- funktiolla on paikallinen maksimikohta $x = -1$ ja paikallinen maksimiarvo $f(-1) = 3$, joka on myös funktion suurin arvo.
- funktiolla ei ole minimiarvoja eikä pienintä arvoa.

Kuvaan a sopivat siis väittämät A ja E.

Kuva b)

- funktion määrittelyväli on suljettu väli $[-2,1]$
- funktiolla on paikallinen maksimikohta $x = -1$ ja paikallinen maksimiarvo $f(-1) = 3$, joka on myös funktion suurin arvo
- funktiolla on paikallinen minimikohta $x = -2$ ja paikallinen minimiarvo $f(-2) = 2$
- funktiolla on toinen paikallinen minimikohta $x = 1$ ja paikallinen minimiarvo $f(1) = -1$, joka on myös funktion pienin arvo.

Kuvaan b sopivat siis kaikki väittämät A, B, C, D ja E.

219.

a) Rajataan kuvaajan tarkastelu välille $-2 \leq x \leq 1$ ja etsitään kuvaajalta paikallisia minimejä. Tällä välillä funktiolla on yksi paikallinen minimikohta $x = 0$ ja paikallinen minimiarvo $f(0) = -2$, joka on myös funktion pienin arvo.

Funktion pienin arvo on –2 ja funktio saa sen kohdassa $x = 0$.

b) Rajataan kuvaajan tarkastelu välille $-4 \leq x \leq 5$ ja etsitään kuvaajalta paikallisia maksimeja. Tällä välillä funktiolla on paikallinen maksimikohta $x = -3$ ja paikallinen maksimiarvo $f(-3) = 4$ sekä toinen paikallinen maksimikohta $x = 5$ ja paikallinen maksimiarvo $f(5) = 6$. Näistä suurempi, eli arvo 6, on funktion suurin arvo.

Funktion suurin arvo on 6 ja funktio saa sen kohdassa $x = 5$.

c) Kuvaajan mukaan funktio saa arvon 6 kohdassa $x = 5$ ja arvon 4 esimerkiksi kohdassa $x = 4$. Välillä $4 \leq x \leq 5$ funktio on aidosti kasvava, joten välillä $[4, 5]$ funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin päätepisteissä: funktion arvoista pienin on $f(4) = 4$ ja suurin on $f(5) = 6$.

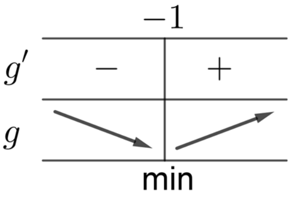
Esimerkiksi kelpaa siis väli [4,5].

Myös väli $[4, 6]$ kelpaa esimerkiksi, sillä nyt pienin arvo 4 saavutetaan kahdesti: $f(4) = 4$ ja $f(6) = 4$

220.

a) Kuvassa on annettu derivaattafunktion g' kuvaaja.

Derivaattafunktiolla on yksi nollakohta $x = -1$. Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion g kulkukaavio.

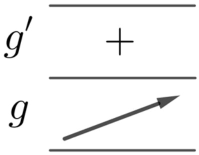


Kulkukaavion perusteella funktiolla g on paikallinen minimi kohdassa $x = -1$. Minimiarvo on myös funktion g pienin arvo.

Kun $x > -1$, niin funktio g on aidosti kasvava. Funktiolla ei ole suurinta arvoa.

b) Kuvassa on annettu derivaattafunktion g' kuvaaja. Derivaattafunktiolla ei ole nollakohtia ja sen kuvaaja on kokonaisuudessaan x-akselin yläpuolella. Derivaatan arvo on koko ajan positiivinen, eli $g'(x) > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion g kulkukaavio.



Funktio g on aidosti kasvava. Funktiolla ei ole suurinta eikä pienintä arvoa.

221.

a) Kuvassa on annettu derivaattafunktion f' kuvaaja.

Derivaattafunktiolla on yksi nollakohta $x = 4$. Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion f kulkukaavio.

		4	
f'	+		−
f	↗		↘
		max	

Kulkukaavion perusteella funktiolla f on paikallinen maksimiarvo kohdassa $x = 4$. Maksimiarvo on myös funktion f suurin arvo.

Kun $x > 4$, niin funktio f on aidosti vähenevä. Funktiolla ei ole pienintä arvoa.

b) Kuvassa on annettu derivaattafunktion f' kuvaaja.

Derivaattafunktiolla on kaksi nollakohtaa $x = -3$ ja $x = 1$. Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja sen perusteella funktion f kulkukaavio.

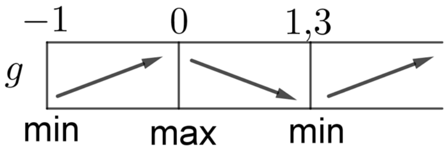
		−3		1	
f'	+		−		+
f	↗		↘		↗
		max		min	

Funktiolla f on paikallinen maksimi kohdassa $x = -3$. Funktio on aidosti kasvava, kun $x \geq 1$,joten funktiolla ei ole suurinta arvoa.

Funktiolla on paikallinen minimi kohdassa $x = 1$. Kulkukaaviosta nähdään, että funktio saa rajattoman pieniä arvoja, kun $x < -3$, joten funktiolla f ei ole pienintä arvoa.

222.

Laaditaan perustelun tueksi funktion g kulkukaavio. Rajataan kaavio välille $x \geq -1$.



Funktiolla g on paikallinen minimi kohdissa $x = -1$ ja $x \approx 1{,}3$. Kuvaajasta nähdään, että kohdassa $x = -1$ saatu minimiarvo on myös funktion pienin arvo. Kuvaajan perusteella pienin arvo on $g(-1) = -2$

Funktiolla g on paikallinen maksimi kohdassa $x = 0$. Kuvaajan perusteella funktion paikallinen maksimiarvo on $g(0) = 1$.

Tämä ei kuitenkaan ole funktion suurin arvo. Funktio on aidosti kasvava, kun $x \geq 1{,}3$ ja saa maksimiarvoa suurempia arvoja; esimerkiksi $g(2{,}2) \approx 2 > 1$.

Funktiolla g on pienin arvo, joka on $g(-1) = -2$, mutta ei ole suurinta arvoa.

223.

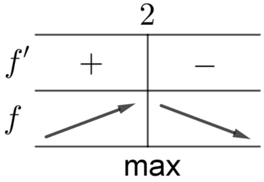
Tutkitaan funktion f kulkua derivaatan avulla.

Derivoidaan: $f'(x) = -4x + 8$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -4x + 8 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

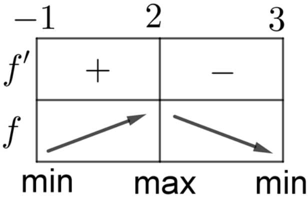
a) Laaditaan merkki- ja kulkukaavio. Derivaatan merkki voidaan päätellä derivaattafunktion $f'(x) = -4x + 8$ kuvaajasta, joka on laskeva suora, tai testipisteiden avulla.



Kulkukaavion perusteella funktiolla f on kohdassa $x = 2$ maksimi, joka on $f(2) = 9$. Tämä on myös funktion suurin arvo.

Kun $x > 2$, niin funktio on aidosti vähenevä. Funktiolla ei ole pienintä arvoa.

b) Rajataan kulkukaavio välille $-1 \leq x \leq 3$.

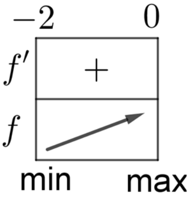


Funktion f suurin arvo välillä $-1 \leq x \leq 3$ saavutetaan kohdassa $x = 2$.
Suurin arvo on $f(2) = 9$.

Funktiolla f on paikalliset minimit kohdissa $x = -1$ ja $x = 3$.
Lasketaan minimiarvot: $f(-1) = -9$ ja $f(3) = 7$.

Pienin arvo välillä $-1 \leq x \leq 3$ on minimiarvoista pienempi, eli arvo $f(-1) = -9$.

c) Rajataan kulkukaavio välille $-2 \leq x \leq 0$. Derivaatan nollakohta $x = 0$ ei kuulu tälle välille, joten sitä ei merkitä kulkukaavioon.



Funktion f pienin arvo välillä $-2 \leq x \leq 0$ saavutetaan kohdassa $x = -2$.
Pienin arvo on $f(-2) = -23$.

Funktion f suurin arvo välillä $-2 \leq x \leq 0$ saavutetaan kohdassa $x = 0$.
Suurin arvo on $f(0) = 1$.

224.

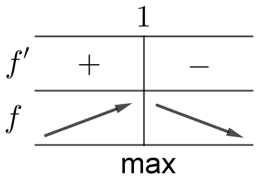
Tutkitaan funktion $f(x) = -0{,}1x^2 + 0{,}2x + 2$ kulkua derivaatan avulla.

Derivoidaan: $f'(x) = -0{,}2x + 0{,}2$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -0{,}2x + 0{,}2 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Laaditaan merkki- ja kulkukaavio. Derivaatan merkki voidaan päätellä derivaattafunktion $f'(x) = -0{,}2x + 0{,}2$ kuvaajasta, joka on laskeva suora, tai testipisteiden avulla.

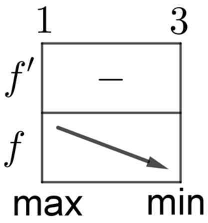


a) Kulkukaavion perusteella funktiolla f on kohdassa $x = 1$ paikallinen maksimi.

Maksimiarvo on $f(1) = 2{,}1$.

b) Kulkukaavion perusteella maksimiarvo $f(1) = 2{,}1$ on myös funktion suurin arvo. Funktio on aidosti vähenevä, kun $x > 1$, joten funktiolla ei ole pienintä arvoa.

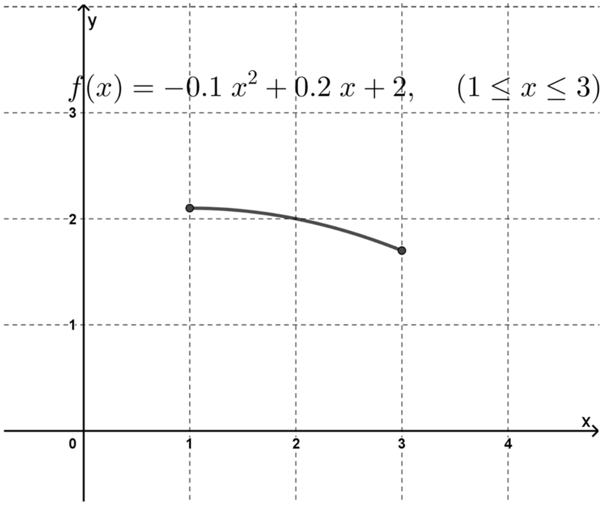
c) Rajataan kulkukaavio välille $1 \leq x \leq 3$.



Funktion f suurin arvo välillä $1 \leq x \leq 3$ saavutetaan kohdassa $x = 1$. Suurin arvo on $f(1) = 2{,}1$.

Funktion f pienin arvo välillä $1 \leq x \leq 3$ saavutetaan kohdassa $x = 3$. Pienin arvo on $f(3) = 1{,}7$.

Funktion kuvaaja välillä $1 \leq x \leq 3$ on paraabelin kaari.



225.

Tutkitaan funktion $f(x) = x^2 - 8x + 18$ kulkua derivaatan avulla.

Derivoidaan: $f'(x) = 2x - 8$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 0$$

$$2x - 8 = 0$$

$$x = 4$$

a) Laaditaan merkki- ja kulkukaavio. Rajataan kaavio välille $1 \leq x \leq 5$. Derivaatan nollakohta $x = 4$ kuuluu tälle välille, joten se merkitään kaavioon. Derivaatan merkki voidaan päätellä derivaattafunktion $f'(x) = 2x - 8$ kuvaajasta, joka on nouseva suora, tai testipisteiden avulla.

	1		4		5
f'		−		+	
f		↘		↗	
	max		min		max

Kulkukaavion perusteella funktiolla f on paikallinen minimi kohdassa $x = 1$.

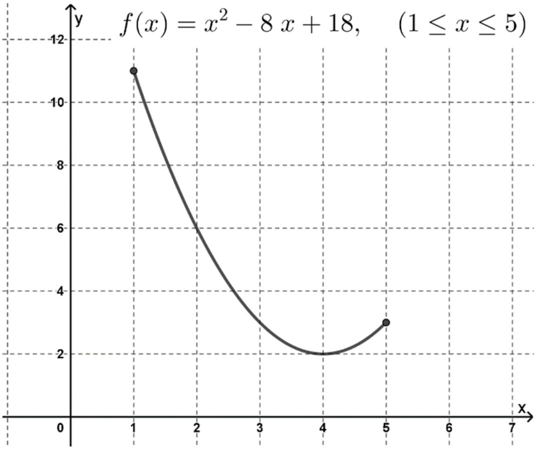
Minimiarvo $f(4) = 2$ on myös funktion pienin arvo välillä $[1, 5]$.

Funktiolla f on paikalliset maksimit kohdissa $x = 1$ ja $x = 5$.

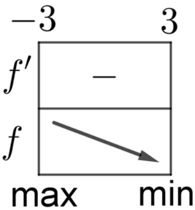
Lasketaan maksimiarvot: $f(1) = 11$ ja $f(5) = 3$.

Suurin arvo välillä $1 \leq x \leq 5$ on maksimiarvoista suurempi. Funktion suurin arvo välillä $[1, 5]$ on siis $f(1) = 11$.

Funktion f kuvaaja välillä $[1, 5]$ on paraabelin kaari.



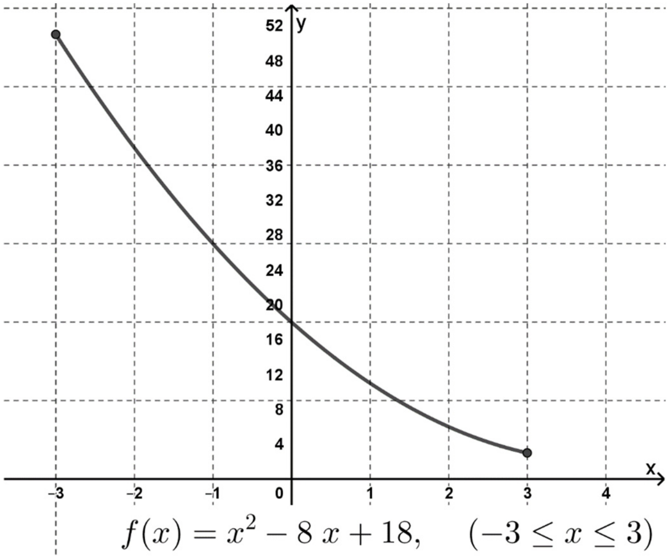
b) Rajataan merkki- ja kulkukaavio välille $-3 \leq x \leq 3$. Derivaatan nollakohta $x = 4$ ei kuulu tälle välille, joten sitä ei merkitä kaavioon.



Funktion suurin arvo välillä $[-3,3]$ on $f(-3) = 51$.

Funktion pienin arvo välillä $[-3,3]$ on $f(3) = 3$.

Funktion f kuvaaja välillä $[-3,3]$ on paraabelin kaari.



226.

Tutkitaan funktion $f(x) = 4x^3 - 11x^2 - 14x - 25$ kulkua derivaatan avulla.

Derivoidaan: $f'(x) = 12x^2 - 22x - 14$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

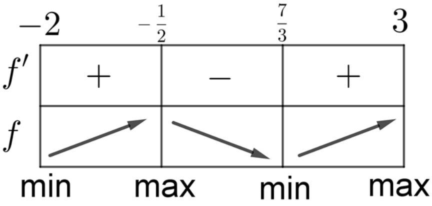
$$f'(x) = 0$$

$$12x^2 - 22x - 14 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ tai } x = \frac{7}{3}$$

a) Laaditaan merkki- ja kulkukaavio.

Rajataan kaavio välille $-2 \leq x \leq 3$. Derivaatan molemmat nollakohdat $x = -\frac{1}{2}$ ja $x = \frac{7}{3} = 2{,}33 \ldots$ kuuluvat tälle välille, joten ne merkitään kaavioon. Derivaatan merkki voidaan päätellä derivaattafunktion $f'(x) = 12x^2 - 22x - 14$ kuvaajasta, joka on ylöspäin avautuva paraabeli, tai testipisteiden avulla.



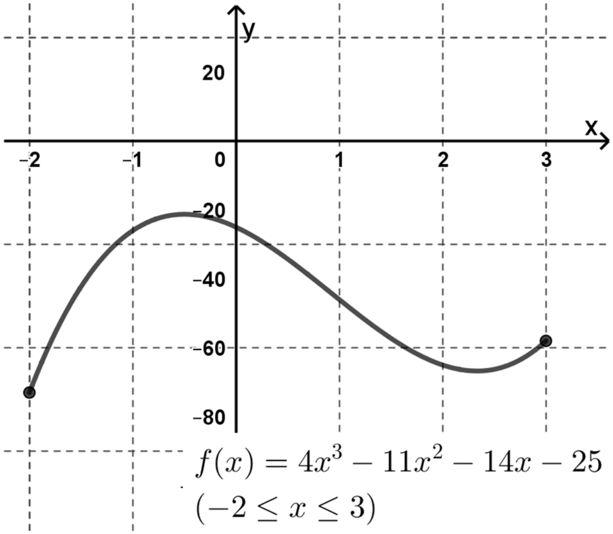
Kulkukaavion perusteella funktiolla *f* on paikallinen minimi kohdissa $x = -2$ ja $x = \frac{7}{3}$.

Minimiarvot ovat $f(-2) = -73$ ja $f\left(\frac{7}{3}\right) = -\frac{1802}{27} = -66{,}74 \ldots$

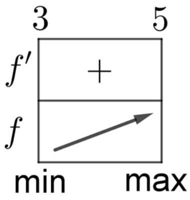
Paikallisista minimiarvoista pienempi, eli arvo $f(-2) = -73$, on funktion pienin arvo välillä $[-2, 3]$.

Funktiolla f on paikalliset maksimit kohdissa $x = -\frac{1}{2}$ ja $x = 3$. Maksimiarvot ovat $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{85}{4} = -21{,}25$ ja $f(3) = -58$.

Paikallisista maksimiarvoista suurempi, eli arvo $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{85}{4}$ on funktion suurin arvo välillä $[-2, 3]$.

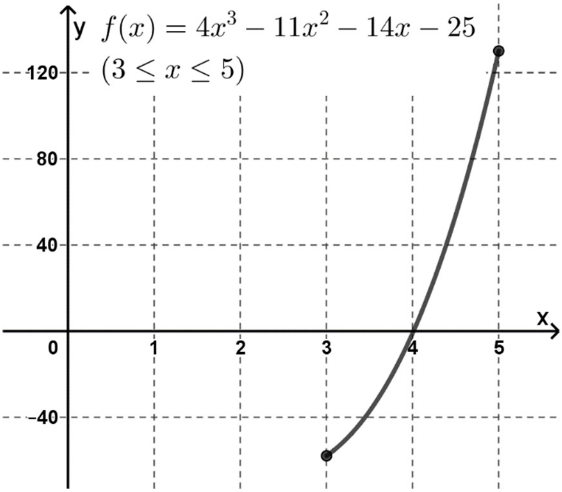


b) Rajataan merkki- ja kulku kaavio välille $3 \leq x \leq 5$. Kumpikaan derivaatan nollakohdista $x = -\frac{1}{2}$ ja $x = \frac{7}{3} = 2{,}33 \ldots$ ei kuulu tälle välille, joten niitä ei merkitä kaavioon.



Funktion pienin arvo välillä $[3, 5]$ on $f(3) = -58$.

Funktion suurin arvo välillä $[3, 5]$ on $f(5) = 130$.



227.

Tutkitaan funktion $f(t) = -0{,}0288t^3 + 1{,}3249t^2 - 11{,}824t + 99{,}3$ kulkua derivaatan avulla, kun $0 \leq t \leq 30$.

Derivoidaan: $f'(t) = -0{,}0864t^2 + 2{,}6498t - 11{,}824$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

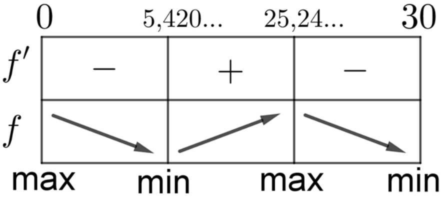
$$f'(t) = 0$$

$$-0{,}0864t^2 + 2{,}6498t - 11{,}824 = 0$$

$$t = 5{,}420\ldots \text{ tai } t = 25{,}248\ldots$$

Laaditaan merkki- ja kulkukaavio.

Rajataan kaavio välille $0 \leq x \leq 30$. Derivaatan molemmat nollakohdat $t = 5{,}420\ldots$ ja $t = 25{,}24\ldots$kuuluvat tälle välille, joten ne merkitään kaavioon. Derivaatan merkki voidaan päätellä derivaattafunktion $f'(t) = -0{,}0864t^2 + 2{,}6498t - 11{,}824$ kuvaajasta, joka on alaspäin avautuva paraabeli, tai testipisteiden avulla.



Kulkukaavion perusteella funktiolla f on paikallinen minimi kohdissa $x = 5{,}420\ldots$ ja $x = 30$.

Minimiarvot ovat $f(5{,}420\ldots) = 69{,}54\ldots$ ja $f(30) = 159{,}39$.

Paikallisista minimiarvoista pienempi, eli arvo $f(5{,}420\ldots) = 69{,}54\ldots \approx 69{,}5$ on funktion pienin arvo välillä $[0, 30]$.

Funktiolla f on paikalliset maksimit kohdissa $x = 0$ ja $x = 25{,}24\ldots$. Maksimiarvot ovat $f(0) = 99{,}3$ ja $f(25{,}24\ldots) = 181{,}8\ldots$

Paikallisista maksimiarvoista suurempi, eli arvo $f(25{,}24\ldots) = 181{,}8\ldots \approx 182$ on funktion suurin arvo välillä $[0, 30]$.

Reaalihintaindeksin pienin arvo oli 69,5 ja suurin arvo oli 182.

Huomaa, että vastaus pyydettiin kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

228.

Tutkitaan funktion $f(x) = -6{,}579x^3 + 141{,}8x^2 - 941{,}4x + 6000$ kulkua derivaatan avulla, kun $0 \leq x \leq 12$.

Derivoidaan: $f'(x) = -19{,}737x^2 + 283{,}6x - 941{,}4$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

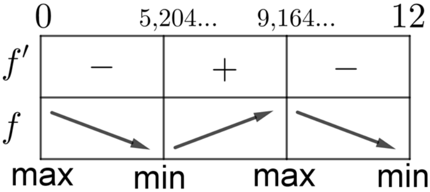
$$f'(x) = 0$$

$$-19{,}737x^2 + 283{,}6x - 941{,}4 = 0$$

$$x = 5{,}204 \ldots \text{ tai } x = 9{,}164 \ldots$$

Laaditaan merkki- ja kulkukaavio.

Rajataan kaavio välille $0 \leq x \leq 30$. Derivaatan molemmat nollakohdat $x = 5{,}204 \ldots$ ja $x = 9{,}164 \ldots$kuuluvat tälle välille, joten ne merkitään kaavioon. Derivaatan merkki voidaan päätellä derivaattafunktion $f'(x) = -19{,}737x^2 + 283{,}6x - 941{,}4$ kuvaajasta, joka on alaspäin avautuva paraabeli, tai testipisteiden avulla.



Kulkukaavion perusteella funktiolla f on paikallinen minimi kohdissa $x = 5{,}204 \ldots$ ja $x = 12$.

Minimiarvot ovat $f(5{,}204 \ldots) = 4013{,}9 \ldots$ ja $f(12) = 3753{,}8 \ldots$

Paikallisista minimiarvoista pienempi, eli arvo $f(12) = 3753{,}8\ldots \approx 3754$ on funktion pienin arvo välillä $[0, 12]$.

Funktiolla f on paikalliset maksimit kohdissa $x = 0$ ja $x = 9{,}164\ldots$. Maksimiarvot ovat $f(0) = 6000$ ja $f(9{,}164\ldots) = 4218{,}1\ldots$

Paikallisista maksimiarvoista suurempi, eli arvo $f(0) = 6000$ on funktion suurin arvo välillä $[0, 12]$.

Bakteerien lukumäärän pienin arvo on 3754 kpl/m^3 ja suurin arvo on 6000 kpl/m^3.

229.

Tutkitaan funktion $f(t) = -347t^2 + 893t + 20$ kulkua derivaatan avulla.

Muuttuja t on ilmaistu tunteina. Lämpötilaa tutkittiin aikavälillä 0…150 minuuttia, eli aikavälillä 0…2,5 tuntia. Funktion f määrittelyväli on siis $0 \leq t \leq 2{,}5$.

Derivoidaan: $f'(t) = 893 - 694t$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

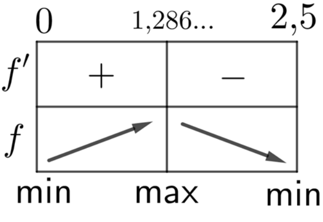
$$f'(t) = 0$$

$$893 - 694t = 0$$

$$t = 1{,}286\ldots$$

Laaditaan merkki- ja kulkukaavio.

Rajataan kaavio välille $0 \leq t \leq 2{,}5$. Derivaatan nollakohta $t = 1{,}286\ldots$ kuuluu tälle välille, joten se merkitään kaavioon. Derivaatan merkki voidaan päätellä derivaattafunktion $f'(t) = 893 - 694t$ kuvaajasta, joka on laskeva suora, tai testipisteiden avulla.



Kulkukaavion perusteella funktiolla f on paikallinen maksimi kohdassa $x = 1{,}286\ldots$.

Maksimiarvo $f(1{,}286\ldots) = 594{,}5\ldots$ on myös funktion suurin arvo.

Funktiolla f on paikallinen minimi kohdissa $x = 0$ ja $x = 2{,}5$.
Minimiarvot ovat $f(0) = 20$ ja $f(2{,}5) = 83{,}75$.

Paikallisista minimiarvoista pienempi, eli arvo $f(0) = 20$ on funktion pienin arvo.

Kiukaan lämpötilan alin arvo oli 20 °C ja korkein arvo oli 595 °C.

230.

Olkoon x positiivinen luku. Luvun neliö on x^2 ja kuutio on x^3, ja erotuksen arvo on $x^3 - x^2$.

Tutkitaan siis funktion $f(x) = x^3 - x^2$ pienintä arvo, kun muuttuja $x > 0$.

Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla.

Derivoidaan: $f'(x) = 3x^2 - 2x$

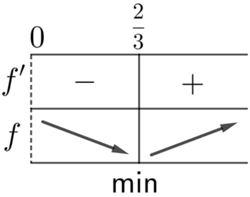
Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 2x = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = \frac{2}{3}$$

Laaditaan merkki- ja kulkukaavio. Rajataan kaavio välille $x > 0$. Derivaatan nollakohta $x = \frac{2}{3}$ kuuluu tälle välille, joten se merkitään kaavioon. Derivaatan merkki voidaan päätellä derivaattafunktion $f'(x) = 3x^2 - 2x$ kuvaajasta, joka on ylöspäin aukeava paraabeli, tai testipisteiden avulla.



Funktion f pienin arvo saavutetaan minimikohdassa $x = \frac{2}{3}$.

Erotuksen $x^3 - x^2$ arvo on mahdollisimman pieni silloin, kun $x = \frac{2}{3}$.

Luku on siis $\frac{2}{3}$.

231.

Merkitään kyseisiä lukuja kirjaimilla x ja y. Lukujen summa on 350, eli $x + y = 350$.
Lukujen tulo on $x \cdot y$.

Ratkaistaan kirjain y yhtälöstä $x + y = 350$.

$$x + y = 350$$

$$y = 350 - x$$

Lukujen tulo on tällöin $x \cdot y = x(350 - x) = 350x - x^2$.

Selvitetään tulon, eli funktion $f(x) = 350x - x^2$ suurin arvo.

Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla.

Derivoidaan: $f'(x) = 350 - 2x$

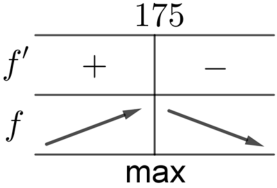
Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 0$$

$$350 - 2x = 0$$

$$x = 175$$

Laaditaan merkki- ja kulkukaavio. Derivaatan merkki voidaan päätellä derivaattafunktion $f'(x) = 350 - 2x$kuvaajasta, joka on laskeva suora, tai testipisteiden avulla.



Funktio f saa suurimman arvonsa maksimikohdassa $x = 175$.

Tällöin $y = 350 - 175 = 175$.

Lukujen tulo on suurimmillaan silloin, kun molemmat luvut ovat luku 175.

232.

Paraabelilla $y = x^2 + 2x - 1$ olevan pisteen (x, y) koordinaattien summa on

$$x + y = x + (x^2 + 2x - 1) = x^2 + 3x - 1.$$

Tutkitaan siis funktion $f(x) = x^2 + 3x - 1$ pienintä arvo.

Tutkitaan funktion kulkua derivaatan avulla.

Derivoidaan: $f'(x) = 2x + 3$

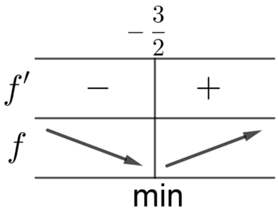
Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 0$$

$$2x + 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Laaditaan merkki- ja kulkukaavio. Derivaatan merkki voidaan päätellä derivaattafunktion $f'(x) = 2x + 3$ kuvaajasta, joka on nouseva suora, tai testipisteiden avulla.



Funktio f saa pienimmän arvonsa minimikohdassa $x = -\frac{3}{2}$.

Paraabelilla $y = x^2 + 2x - 1$ olevan pisteen y-koordinaatti on tällöin

$$y = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 1 = -\frac{7}{4}.$$

Koordinaattien summa on pienimmillään pisteessä $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$.

233.

Kuvaaja a)

- funktion $f(x) = 2x + 1$ derivaattafunktio on $f'(x) = 2$
- funktion kuvaajan kulkusuunta ei vaihdu, joten funktiolla ei ole ääriarvoja
- funktion kuvaaja on nouseva suora: funktiolla ei ole pienintä eikä suurinta arvoa

Kuvaajaan sopivat siis väittämät B ja E.

Kuvaaja b)

- funktion f määrittelyväli on $-1 \leq \ x \leq 1$
- funktion $f(x) = 2x + 1$ derivaattafunktio on $f'(x) = 2$, kun $-1 < x < 1$
- funktiolla on minimi kohdassa $x = -1$ ja maksimi kohdassa $x = 1$
- funktion pienin arvo on $f(-1) = 1$ ja funktion suurin arvo on $f(1) = 3$

Kuvaajaan sopivat siis väittämät B, C, D ja F.

Kuvaaja c)

- funktion $f(x) = x^2 + 3x + 3$ derivaattafunktio on $f'(x) = 2x + 3$
- funktiolla on minimi kohdassa $x = -1{,}5$
- funktion pienin arvo on $f(-1{,}5) = 0{,}75$
- funktio on aidosti kasvava, kun $x > -1{,}5$, joten funktiolla ei ole suurinta arvoa

Kuvaajaan sopivat siis väittämät C ja F.

Kuvaaja d)

- funktion f määrittelyväli on $x \geq -2$
- funktion $f(x) = x^2 + 3x + 3$ derivaattafunktio on $f'(x) = 2x + 3$
- funktiolla on maksimi kohdassa $x = -2$ ja minimi kohdassa $x = -1{,}5$
- funktion pienin arvo on $f(-1{,}5) = 0{,}75$
- funktio on aidosti kasvava, kun $x > -1{,}5$, joten funktiolla ei ole suurinta arvoa

Kuvaajaan sopivat siis väittämät C ja F.

234.

a) Derivaattafunktiolla g' on kaksi nollakohtaa $x = -4$ ja $x = 3$, ja derivaatan merkki vaihtuu molemmissa nollakohdissa.

- derivaatta on positiivinen (+), kun $-4 < x < 3$
- derivaatta on negatiivinen (−), kun $x < -4$ tai kun $x > 3$

Esitetään derivaatan g'merkinvaihtelu merkkikaaviossa:

		-4		3	
g'	$-$		$+$		$-$

b) Laaditaan derivaatan merkkikaavion perusteella funktion g kulkukaavio.

		-4		3	
g'	$-$		$+$		$-$
g	↘		↗		↘
		min		max	

Funktiolla g on paikallinen minimi kohdassa $x = -4$ ja paikallinen maksimi kohdassa $x = 3$. Funktio on aidosti vähenevä väleillä $x < -4$ ja $x > 3$, joten funktiolla ei ole pienintä eikä suurinta arvoa.

Funktiolla g ei ole pienintä eikä suurinta arvoa, eli funktiolla ei ole globaaleja ääriarvoja.

235.

Tutkitaan funktion $g(t) = -0{,}2t^2 + 0{,}8t + 1$ kulkua derivaatan avulla.

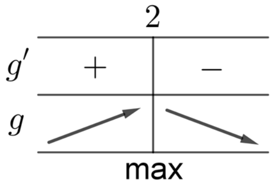
Derivoidaan: $g'(t) = -0{,}4t + 0{,}8$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} g'(t) &= 0 \\ -0{,}4t + 0{,}8 &= 0 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

Laaditaan merkki- ja kulkukaavio.

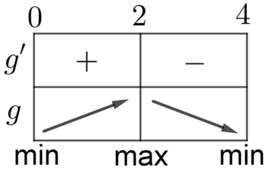
Derivaatan merkki voidaan päätellä derivaattafunktion $g'^{(t)} = -0{,}4t + 0{,}8$ kuvaajasta, joka on laskeva suora, tai testipisteiden avulla.



a) Kulkukaavion perusteella funktiolla f on kohdassa $t = 2$ paikallinen maksimi.
Maksimiarvo on $g(2) = 1{,}8$.

b) Kulkukaavion perusteella maksimiarvo $g(2) = 1{,}8$ on myös funktion suurin arvo. Funktio on aidosti vähenevä, kun $t > 2$, joten funktiolla ei ole pienintä arvoa.

c) Rajataan kulkukaavio välille $0 \leq t \leq 4$. Derivaatan nollakohta $t = 2$ on tällä välillä, joten se merkitään kaavioon.

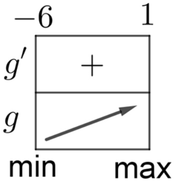


Funktio g saavuttaa välille $0 \leq t \leq 4$ suurimman arvonsa kohdassa $t = 2$.
Suurin arvo on $g(2) = 1{,}8$.

Funktiolla g on välillä $0 \leq t \leq 4$ kaksi paikallista minimikohtaa $t = 0$ ja $t = 4$. Lasketaan minimiarvot: $g(0) = 1$ ja $g(4) = 1$.

Minimiarvot ovat keskenään yhtä suuret. Funktion pienin arvo välillä $0 \leq x \leq 4$ on siis 1 ja funktio saavuttaa sen kohdissa $t = 0$ ja $t = 4$.

d) Rajataan kulkukaavio välille $-6 \leq t \leq 1$. Derivaatan nollakohta $t = 2$ ei ole tällä välillä, joten sitä ei merkitä kaavioon.



Funktio g saavuttaa välillä $-6 \leq t \leq 1$ pienimmän arvonsa kohdassa $t = -6$.
Pienin arvo on $g(-6) = -11$.

Funktio g saavuttaa välillä $-6 \leq t \leq 1$ suurimman arvonsa kohdassa $t = 1$.
Suurin arvo on $g(1) = 1{,}6$.

236.

Tutkitaan funktion $g(t) = 0{,}05t^3 - 1{,}2t^2 + 7{,}9t + 132$ kulkua derivaatan avulla, kun $0 \leq t \leq 12$.

Derivoidaan: $g'(t) = 0{,}15t^2 - 2{,}4t + 7{,}9,\ \ 0 < t < 12$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

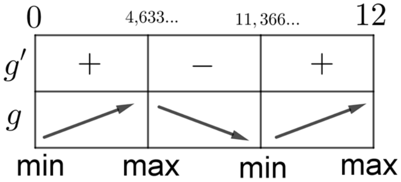
$$g'(t) = 0$$

$$0{,}15t^2 - 2{,}4t + 7{,}9 = 0, \qquad 0 < t < 12$$

$$t = 4{,}633 \ldots \text{tai } x = 11{,}366 \ldots$$

Laaditaan merkki- ja kulkukaavio.

Derivaatan merkki voidaan päätellä derivaattafunktion $g'^{(t)} = 0{,}15t^2 - 2{,}4t + 7{,}9$ kuvaajasta, joka on ylöspäin aukeava paraabeli, tai testipisteiden avulla.



Kulkukaavion perusteella funktiolla g on paikallinen minimi kohdissa $t = 0$ ja $t = 11{,}366 \ldots$

Minimiarvot ovat $g(0) = 132$ ja $g(11{,}366 \ldots) = 140{,}18 \ldots$

Paikallisista minimiarvoista pienempi, eli arvo $g(0) = 132$ (senttiä) on funktion pienin arvo.

Kulkukaavion perusteella funktiolla g on paikallinen maksimi kohdissa $t = 4{,}633\ldots$ ja $t = 12$.

Maksimiarvot ovat $g(4{,}633\ldots) = 147{,}81\ldots$ ja $g(12) = 140{,}4$.

Paikallisista maksimiarvoista suurempi, eli arvo $g(4{,}633\ldots) = 147{,}81\ldots \approx 148$ (senttiä) on funktion suurin arvo.

Bensiinin ylin arvo on 1,48 euroa/litra ja alin arvo on 1,32 euroa/litra.

237.

Tutkitaan erotusfunktion

$$h(x) = f(x) - g(x) = 0{,}01x^3 - (0{,}06x^2 + 2) = 0{,}01x^3 - 0{,}06x^2 - 2$$

kulkua derivaatan avulla.

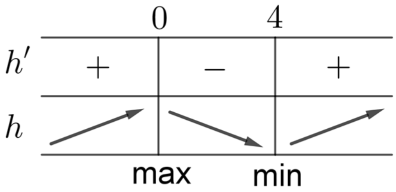
Derivoidaan: $h'(x) = 0{,}03x^2 - 0{,}12x$

Ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 0 \\ 0{,}03x^2 - 0{,}12x &= 0 \\ x &= 0 \text{ tai } x = 4 \end{aligned}$$

Laaditaan merkki- ja kulkukaavio.

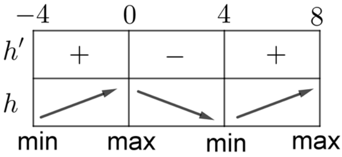
Derivaatan merkki voidaan päätellä derivaattafunktion $h'(x) = 0{,}03x^2 - 0{,}12x$ kuvaajasta, joka on ylöspäin aukeava paraabeli, tai testipisteiden avulla.



a) Kulkukaavion perusteella erotusfunktiolla h on kohdassa $x = 0$ paikallinen maksimi.
Maksimiarvo on $h(0) = -2$.

Kulkukaavion perusteella erotusfunktiolla h on kohdassa $x = 4$ paikallinen minimi.
Minimiarvo on $h(4) = -2{,}32$.

b) Rajataan kulkukaavio välille $-4 \leq x \leq 8$. Derivaatan molemmat nollakohdat $x = 0$ ja $x = 4$ kuuluvat tälle välille, joten ne merkitään kaavioon.



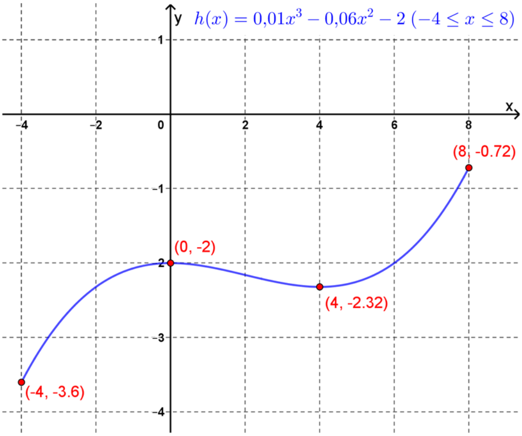
Kulkukaavion perusteella erotusfunktiolla h on paikallinen minimi kohdissa $x = -4$ ja $x = 4$.
Minimiarvot ovat $h(-4) = -3{,}6$ ja $h(4) = -2{,}32$

Paikallisista minimiarvoista pienempi, eli arvo $h(-4) = -3{,}6$ on erotuksen pienin arvo välillä $[-4, 8]$.

Erotusfunktiolla h on paikallinen maksimi kohdissa $x = 0$ ja $x = 8$.
Maksimiarvot ovat $h(0) = -2$ ja $h(8) = -0{,}72$.

Paikallisista maksimiarvoista suurempi, eli arvo $h(8) = -0{,}72$ on erotuksen suurin arvo välillä $[-4, 8]$.

Erotusfunktion $h(x) = f(x) - g(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}06x^2 - 2$ kuvaaja välillä $-4 \leq x \leq 8$ on esitetty alla. Kuvaan on merkitty myös funktion h paikalliset ääriarvot.



238.

Välillä $[a, b]$ määritellyn funktion f suurin arvo on sellainen luku M, että

- luku M on funktion arvo, eli $f(c) = M$ jollakin muuttujan arvolla $a \leq c \leq b$ ja
- funktion arvo $f(x) \leq M$ jokaisella muuttujan arvolla $a \leq x \leq b$.

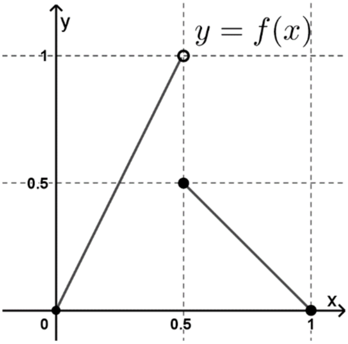
Jokaisella polynomifunktiolla on suurin arvo suljetulla välillä [0, 1]. Esimerkiksi ei siis käy mikään polynomifunktio.

Rakennetaan esimerkki kahdesta eri polynomifunktiosta.

Esimerkiksi funktiolla

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kun } 0 \leq x < 0{,}5 \\ -x + 1, & \text{kun } 0{,}5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

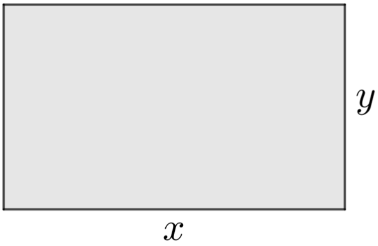
ei ole suurinta arvoa, sillä funktion arvot suurenevat välillä $0 < x < 0{,}5$ kohti lukua 1 kuitenkaan arvoa 1 saavuttamatta.



3.4 Sovelluksia

239.

Piirretään mallikuva. Merkitään suorakulmion leveyttä kirjaimella x ja pituutta kirjaimella y.



Aluetta rajaa 140 metriä pitkä eristysnauha, eli alueen piiri on 140 metriä. Leveyden ja pituuden summa on tällöin puolet piiristä, eli 70 metriä.

Muodostetaan tämän tiedon perusteella yhtälö ja ratkaistaan yhtälöstä pituus y.

$$\begin{aligned} x + y &= 70 \\ y &= 70 - x \end{aligned}$$

Muodostetaan alueen pinta-alaa kuvaava lauseke. Suorakulmion pinta-ala on $A = x \cdot y$, joten

$$A(x) = x \cdot (70 - x)$$

Mitat ovat positiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja leveys x voi saada.

$$x > 0 \qquad \text{ja} \qquad \begin{aligned} y &> 0 \\ 70 - x &> 0 \\ x &< 70 \end{aligned}$$

Pinta-alafunktion $A(x)$ määrittelyväli on siis $0 < x < 70$ (m).

Derivoidaan:

$$A'(x) = 70 - 2x, 0 < x < 70$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta:

$$A'(x) = 0$$

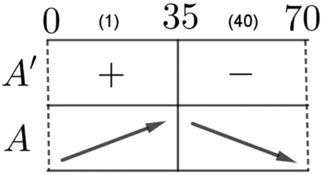
$$70 - 2x = 0$$

$$x = 35$$

Perustellaan, että derivaattafunktion nollakohta $x = 35$ (m) on pinta-alafunktion $A(x)$ maksimikohta.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja pinta-alafunktion kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio välille $0 < x < 70$.

Perustellaan derivaatan A' merkki joko derivaattafunktion kuvaajan tai testipisteiden avulla:
$A'(1) = 68 > 0$
$A'(40) = -10 < 0$



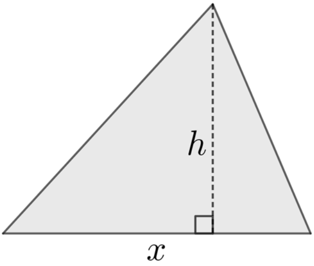
Kulkukaavion perusteella pinta-ala on suurimmillaan silloin, kun alueen leveys on $x = 35$ metriä. Alueen pituus on tällöin
$y = 70 - x = 70 - 35 = 35$ metriä.

Alueen mitat ovat siis 35 metriä ja 35 metriä.

Huomaa: kyseessä on siis neliön muotoinen alue. Tässä havainnollistuu kaunis geometrinen laki: *niistä suorakulmioista, joilla on sama piiri, suurin pinta-ala on neliöllä.*

240.

Piirretään mallikuva. Merkitään kolmion kantaa kirjaimella x ja korkeutta kirjaimella h.



Kolmion kannan x ja korkeuden h summa on 25 cm. Muodostetaan tämän tiedon perusteella yhtälö ja ratkaistaan yhtälöstä korkeus h.

$$\begin{aligned} x + h &= 25 \\ h &= 25 - x \end{aligned}$$

Muodostetaan kolmion pinta-alaa kuvaava lauseke. Kolmion pinta-ala on $A = \frac{x \cdot h}{2}$, joten

$$A(x) = \frac{x \cdot (25 - x)}{2}$$

Mitat ovat positiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja kannan pituus x voi saada.

$$x > 0 \qquad \text{ja} \qquad \begin{aligned} h &> 0 \\ 25 - x &> 0 \\ x &< 25 \end{aligned}$$

Pinta-alafunktion $A(x)$ määrittelyväli on siis $0 < x < 25$ (cm).

Derivoidaan:

$$A'(x) = 12{,}5 - x, 0 < x < 25$$

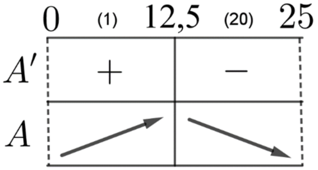
Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta:

$$A'(x) = 0$$
$$12{,}5 - x = 0$$
$$x = 12{,}5$$

Perustellaan, että derivaattafunktion nollakohta $x = 12{,}5$ (cm) on pinta-alafunktion $A(x)$ maksimikohta.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja pinta-alafunktion kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio välille $0 < x < 25$.

Perustellaan derivaatan A' merkki joko derivaattafunktion kuvaajan tai testipisteiden avulla:
$A'(1) = 11{,}5 > 0$
$A'(20) = -7{,}5 < 0$



Kulkukaavion perusteella pinta-ala on suurimmillaan silloin, kun kolmion kannan pituus on $x = 12{,}5$ senttimetriä. Kolmion pinta-ala on tällöin

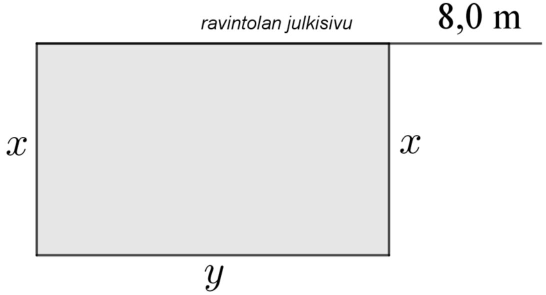
$$A(12{,}5) = \frac{12{,}5 \cdot (25 - 12{,}5)}{2} = 78{,}125 \approx 78 \text{ cm}^2.$$

Kolmion suurin mahdollinen pinta-ala on siis 78 neliösenttimetriä.

241.

Piirretään mallikuva. Merkitään terassin leveyttä kirjaimella y. Terassi on korkeintaan ravintolan julkisivun levyinen, joten $0 < y \leq 8{,}0$ (m).

Merkitään terassin pituutta kirjaimella x.



Terassia rajaavaa aitaan on käytettävissä 20,0 metriä. Muodostetaan tämän tiedon perusteella yhtälö ja ratkaistaan yhtälöstä leveys y.

$$\begin{aligned} x + y + x &= 20 \\ y &= 20 - 2x \end{aligned}$$

Muodostetaan terassin pinta-alaa kuvaava lauseke. Suorakulmion pinta-ala on $A = x \cdot y$, joten

$$A(x) = x \cdot (20 - 2x)$$

Mitat ovat positiivisia lukuja. Lisäksi leveys y on korkeintaan 8,0 metriä. Ratkaistaan, mitä arvoja pituus x voi saada.

$$\begin{array}{lclcl} x > 0 & \text{ja} & y > 0 & \text{ja} & y \leq 8 \\ & & 20 - 2x > 0 & \text{ja} & 20 - 2x \leq 8 \\ & & x < 10 & \text{ja} & x \geq 6 \end{array}$$

Pinta-alafunktion $A(x)$ määrittelyväli on siis $6 \leq x < 10$ (m).

Derivoidaan:

$$A'(x) = 20 - 4x, 6 \leq x < 10$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta:

$$A'(x) = 0$$

$$20 - 4x = 0$$

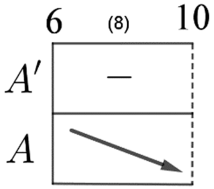
$$x = 5$$

Derivaatan nollakohta $x = 5$ (m) ei kuulu pinta-alafunktion määrittelyvälille $6 \leq x < 10$ (m). Huomaa, että jos olisi $x = 5$ (m), niin tällöin olisi $y = 20 - 2x = 20 - 2 \cdot 5 = 10$ (m), mikä on mahdotonta, sillä terassin leveys y ei voi ylittää julkisivu leveyttä, joka on 8,0 metriä.

Pinta-alafunktio siis saa suurimman arvonsa määrittelyvälin $6 \leq x < 10$ toisessa päätepisteessä. Laaditaan kulkukaavio helpottamaan päättelyä.

Perustellaan derivaatan *A'* merkki joko derivaattafunktion kuvaajan tai testipisteen avulla:

$A'(8) = -2 < 0$

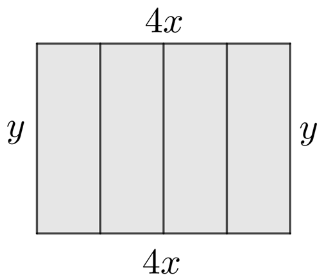


Kulkukaavion perusteella pinta-ala on suurimmillaan silloin, kun alueen pituus on $x = 6$ metriä. Terassin leveys on tällöin $y = 20 - 2x = 20 - 2 \cdot 6 = 8$ metriä ja sen pinta-ala on $A = 6 \cdot 8 = 48(\mathrm{m}^2)$.

Terassin suurin pinta-ala on siis 48 m^2. Sivujen pituudet ovat tällöin 6,0 metriä ja 8,0 metriä.

242.

a) Lasilevyjä on rinnakkain neljä, joten aukon leveys on $x + x + x + x = 4x$ (metriä).



b) Jokaista lasilevyä reunustaa kehys, jonka leveys on x (m) ja pituus on y metriä. Yhden levyn kehyksen pituus on $2x + 2y$ ja levyjä on yhteensä neljä.

Kehyksen kokonaispituus on $4 \cdot (2x + 2y) = 8x + 8y$.

c) Kehystä on käytettävissä yhteensä 50,0 metriä, joten saadaan yhtälö

$$8x + 8y = 50$$

Ratkaistaan yhtälöstä pituus *y:*

$$\begin{aligned} 8x + 8y &= 50 \\ 8y &= 50 - 8x \\ y &= \frac{50 - 8x}{8} = 6{,}25 - x \end{aligned}$$

d) Aukko on muodoltaan suorakulmio. Suorakulmion pinta-ala on $A = 4x \cdot y$, joten

$$A(x) = 4x \cdot (6{,}25 - x)$$

e) Mitat ovat positiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja leveys x voi saada.

$$x > 0 \qquad \text{ja} \qquad y > 0$$

$$6{,}25 - x > 0$$

$$x < 6{,}25$$

Leveys x voi siis saada arvoja $0 < x < 6{,}25$ (m).

f) Derivoidaan pinta-alafunktio:

$$A'(x) = 25 - 8x, \qquad 0 < x < 6{,}25$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta:

$$A'(x) = 0$$

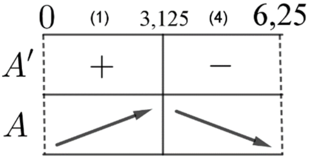
$$25 - 8x = 0$$

$$x = \frac{25}{8} = 3{,}125$$

Perustellaan, että derivaattafunktion nollakohta $x = 3{,}125$ (m) on pinta-alafunktion $A(x)$ maksimikohta.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja pinta-alafunktion kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio välille $0 < x < 6{,}25$.

Perustellaan derivaatan A' merkki joko derivaattafunktion kuvaajan tai testipisteiden avulla:



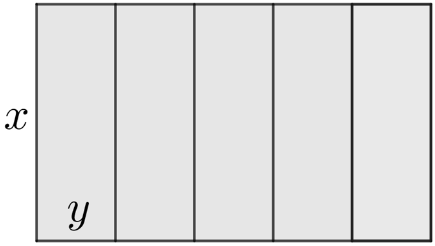
$A'(1) = 17 > 0$
$A'(4) = -7 < 0$

Kulkukaavion perusteella pinta-ala on suurimmillaan silloin, kun kehyksen leveys on $x = 3{,}125 \approx 3{,}13$ metriä.

g) Pinta-alan $A(x) = 4x \cdot (6{,}25 - x)$ suurin arvo on $A(3{,}125) = 39{,}0625 \approx 39{,}1$ neliömetriä.

243.

Piirretään mallikuva. Merkitään yhden osaston leveyttä kirjaimella y ja pituutta kirjaimella x.



Koko aitauksen leveys on tällöin $5y$. Osastojen aitaamiseen kuluu $6x + 10y$ metrin verran aitaa. Aitaa on käytettävissä yhteensä 200 metriä.

Muodostetaan tämän tiedon perusteella yhtälö ja ratkaistaan yhtälöstä leveys y.

$$6x + 10y = 200$$

$$y = \frac{200 - 6x}{10} = 20 - \frac{3}{5}x$$

Muodostetaan koko aitauksen pinta-alaa kuvaava lauseke.

Suorakulmion pinta-ala on $A = 5y \cdot x$, joten

$$A(x) = 5\left(20 - \frac{3}{5}x\right) \cdot x = 100x - 3x^2.$$

Mitat ovat positiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja pituus x voi saada.

$$x > 0 \qquad \text{ja} \qquad y > 0$$

$$20 - \tfrac{3}{5}x > 0$$

$$x < \tfrac{100}{3} = 33{,}33\ldots$$

Pinta-alafunktion $A(x)$ määrittelyväli on siis $0 < x < \frac{100}{3}$ (m).

Derivoidaan:

$$A'^{(x)} = 100 - 6x, \qquad 0 < x < \frac{100}{3}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta:

$$A'(x) = 0$$

$$100 - 6x = 0$$

$$x = \frac{100}{6} = \frac{50}{3} = 16{,}66\ldots$$

Derivaatan nollakohta on määrittelyvälillä.

Pinta-alafunktion $A(x) = 100x - 3x^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten se saa suurimman arvonsa huipussa, jossa derivaatan arvo on nolla. Derivaattafunktion nollakohta $x = 16{,}66\ldots$ (m) on siis pinta-alafunktion $A(x)$ maksimikohta.

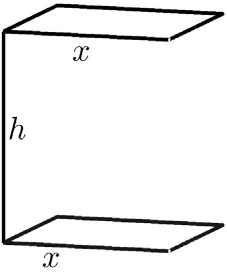
Pinta-ala on suurimmillaan silloin, kun yhden osaston pituus on $x = 16{,}66\ldots \approx 16{,}7$ metriä. Yhden osaston leveys on tällöin $y = 20 - \frac{3}{5}x = 100 - \frac{3}{5} \cdot 16{,}66\ldots = 10$ metriä.

Yhden osaston mitat ovat siis 16,7 metriä ja 10,0 metriä.

Koko aitauksen pinta-ala on tällöin $A(16{,}66\,\ldots) = 833{,}33\ldots \approx 833$ neliömetriä.

244.

Merkitään pohjaneliön sivun pituutta kirjaimella x (cm) ja kehikon korkeutta kirjaimella h (cm).



Rautalankaa on käytettävissä $50 - 2 = 48$ senttimetriä, joten neliöiden piirien ja pystysauvan pituuden summa on 48 (cm). Muodostetaan tämän tiedon perusteella yhtälö ja ratkaistaan yhtälöstä pituus h.

$$4x + 4x + h = 48$$
$$h = 48 - 8x$$

Mitat ovat positiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja pituus x voi saada.

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad h > 0$$
$$48 - 8x > 0$$
$$x < 6$$

Pohjaneliön sivunpituus x vaihtelee siis välillä $0 < x < 6$ cm.

Muodostetaan kehikon rajaaman särmiön tilavuutta kuvaava lauseke. Särmiön tilavuus on $V = x^2 \cdot h$, joten

$$V(x) = x^2 \cdot (48 - 8x).$$

Tilavuusfunktion $V(x)$ määrittelyväli on $0 < x < 6$ (cm).

Derivoidaan:

$$V'(x) = 96x - 24x^2, \qquad 0 < x < 6$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta:

$$V'(x) = 0$$

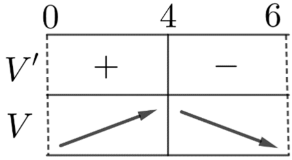
$$96x - 24x^2 = 0, \qquad 0 < x < 6$$

$$x = 4 \text{ (cm)}$$

Perustellaan, että derivaattafunktion nollakohta $x = 4$ (cm) on tilavuusfunktion $V(x)$ maksimikohta.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja tilavuusfunktion kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio välille $0 < x < 6$.

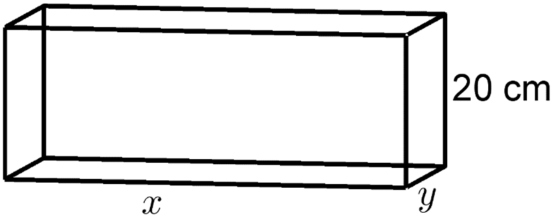
Perustellaan derivaatan V' merkki derivaattafunktion kuvaajan tai testipisteiden avulla:
$V'(1) = 72 > 0$
$V'(5) = -120 < 0$



Kulkukaavion perusteella tilavuus on suurimmillaan silloin, kun kehikon pohjaneliön sivunpituus on $x = 4$ cm. Kehikon korkeus on tällöin $h = 48 - 8 \cdot 4 = 16$ cm.

245.

Piirretään mallikuva. Merkitään laukun leveyttä kirjaimella x ja pituutta kirjaimella y.



Laukun leveyden x, pituuden y ja korkeuden 20 (cm) summa $x + y + 20$ (cm) ei saa ylittää 115 cm. Laukun tilavuus on suurin mahdollinen silloin, kun summa on suurin mahdollinen, eli

$$x + y + 20 = 115.$$

Ratkaistaan yhtälöstä pituus y.

$$\begin{aligned} x + y + 20 &= 115 \\ y &= 95 - x \end{aligned}$$

Muodostetaan laukun tilavuutta kuvaava lauseke. Suorakulmaisen särmiön tilavuus on $V = x \cdot y \cdot h$, joten

$$V(x) = x \cdot (95 - x) \cdot 20.$$

Mitat ovat positiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja leveys x voi saada.

$$x > 0 \qquad \text{ja} \qquad \begin{aligned} y &> 0 \\ 95 - x &> 0 \\ x &< 95 \end{aligned}$$

Tilavuusfunktion $V(x)$ määrittelyväli on siis $0 < x < 95$ (cm).

Derivoidaan: $V'(x) = 1900 - 40x, 0 < x < 95$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta:

$$V'(x) = 0$$

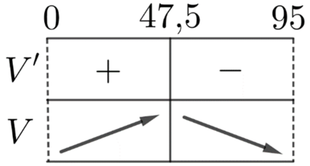
$$1900 - 40x = 0$$

$$x = \frac{95}{2} = 47{,}5$$

Derivaatan nollakohta on määrittelyvälillä.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja tilavuusfunktion kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio määrittelyvälille $0 < x < 95$.

Perustellaan derivaatan V' merkki joko derivaattafunktion kuvaajan tai testipisteiden avulla:
$V'(1) = 1860 > 0$
$V'(50) = -100 < 0$



Kulkukaavion perusteella tilavuus on suurimmillaan silloin, kun laukun leveys on $x = 47{,}5$ cm.

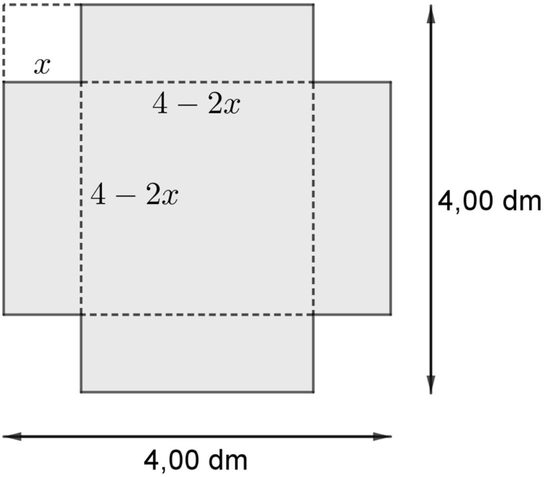
Laukun tilavuus on tällöin

$$V(47{,}5) = 47{,}5 \cdot (95 - 47{,}5) \cdot 20 = 45125 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Laukun suurin mahdollinen tilavuus on $45125 \text{ cm}^3 \approx 45 \text{ dm}^3$ eli 45 litraa.

246.

a) Piirretään mallikuva.



b) Leivoslaatikon korkeus on x. Laatikon pohja on neliö, jonka sivun pituus on $40-2x$.

c) Muodostetaan leivoslaatikon tilavuutta kuvaava lauseke. Suorakulmaisen särmiön tilavuus on $V = A_{\text{pohja}} \cdot \text{korkeus}$, joten

$$V(x) = (40-2x)^2 \cdot x = x(40-2x)^2$$

Mitat ovat positiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja pituus x voi saada.

$$x > 0 \qquad \text{ja} \qquad 40-2x > 0$$

$$x < 20$$

Tilavuusfunktion $V(x)$ määrittelyväli on siis $0 < x < 20$ (cm).

d) Derivoidaan: $V'(x) = 4(x-20)(3x-20),\ 0 < x < 20$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta:

$$V'(x) = 0$$

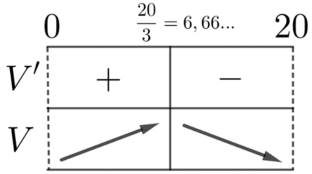
$$4(x-20)(3x-20) = 0, \qquad 0 < x < 20$$

$$x = \frac{20}{3} = 6{,}666\ldots$$

Perustellaan, että derivaattafunktion nollakohta $x = \frac{20}{3}$ (cm) on tilavuusfunktion $V(x)$ maksimikohta.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja tilavuusfunktion kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio määrittelyvälille $0 < x < 20$.

Perustellaan derivaatan V' merkki joko derivaattafunktion kuvaajan tai testipisteiden avulla:
$V'(1) = 1292 > 0$
$V'(10) = -400 < 0$

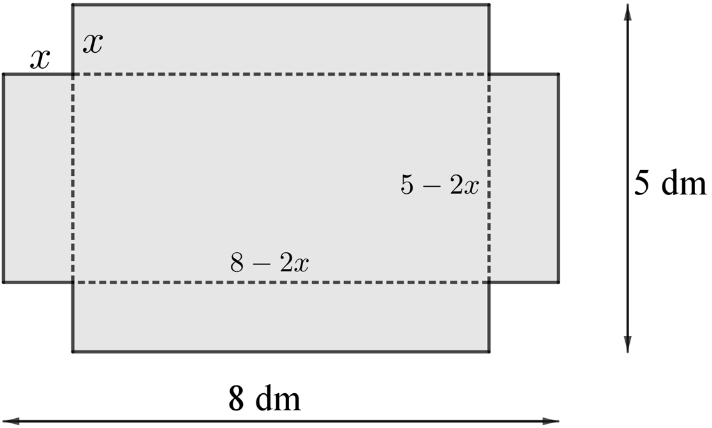


Kulkukaavion perusteella laatikon tilavuus on suurimmillaan silloin, kun poisleikatun neliön sivun pituus, ja siis laatikon korkeus, on $x = \frac{20}{3} = 6{,}666\ldots \approx 6{,}67$ cm.

247.

Muutetaan pituudet desimetreiksi: 0,80 m = 8 dm ja 0,50 m = 5 dm.

Piirretään mallikuva. Merkitään poisleikatun neliön sivun pituutta kirjaimella x (dm). Marjalaatikon pohjan leveys on tällöin $8 - 2x$ (dm) ja pituus on $5 - 2x$ (dm).



Muodostetaan marjalaatikon tilavuutta kuvaava lauseke. Suorakulmaisen särmiön tilavuus on $V =$ leveys · pituus · korkeus, joten

$$V(x) = (8 - 2x)(5 - 2x)x$$

Mitat ovat positiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja pituus x voi saada.

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad 8 - 2x > 0 \quad \text{ja} \quad 5 - 2x > 0$$

$$x < 4 \quad \text{ja} \quad x < 2{,}5$$

Tilavuusfunktion $V(x)$ määrittelyväli on siis $0 < x < 2{,}5$ (dm).

Derivoidaan:

$$V'(x) = 12x^2 - 52x + 40, \qquad 0 < x < 2{,}5$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta:

$$V'(x) = 0$$

$$12x^2 - 52x + 40 = 0, \qquad 0 < x < 2{,}5$$

$$x = 1$$

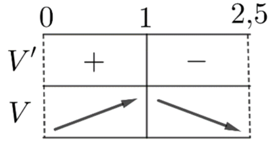
Perustellaan, että derivaattafunktion nollakohta $x = 1$ (dm) on tilavuusfunktion $V(x)$ maksimikohta.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja tilavuusfunktion kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio määrittelyvälille $0 < x < 2{,}5$.

Perustellaan derivaatan V' merkki joko derivaattafunktion kuvaajan tai testipisteiden avulla:

$V'(0{,}5) = 17 > 0$

$V'(2) = -16 < 0$



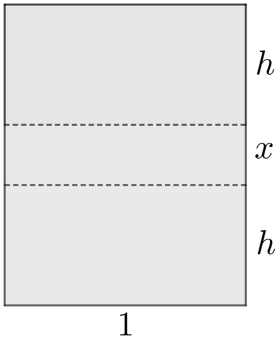
Kulkukaavion perusteella tilavuus on suurimmillaan silloin, kun poisleikatun neliön sivun pituus, ja siis marjalaatikon korkeus, on $x = 1$ dm = 10 cm. Marjalaatikon tilavuus on tällöin

$$V(1) = (8 - 2 \cdot 1)(5 - 2 \cdot 1) \cdot 1 = 18\ (\text{dm}^3).$$

Tilavuudeltaan suurimman mahdollisen marjalaatikon tilavuus on siis 18 litraa.

248.

Auki levitetty pressu on muodoltaan suorakulmio, jonka leveys on 1 metri ja pituus on
$h + x + h = 2h + x$ (metriä).



Pressun pinta-ala on 10 neliömetriä. Muodostetaan tämän tiedon perusteella yhtälö ja ratkaistaan mitta x. Suorakulmion pinta-ala on $A = 1 \cdot (2h + x)$, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 1 \cdot (2h + x) &= 10 \\ x &= 10 - 2h \end{aligned}$$

(Yhtälöstä voidaan vaihtoehtoisesti ratkaista korkeus h , mutta tällöin joudutaan jakamaan yhtälö luvulla 2 ja päädytään murtolukukertoimeen.)

Muodostetaan halkopinon tilavuutta kuvaava lauseke. Suorakulmaisen särmiön tilavuus on $V = x \cdot 1 \cdot h$, joten

$$V(h) = (10 - 2h) \cdot h = 10h - 2h^2$$

Mitat ovat positiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja korkeus h voi saada.

$$h > 0 \quad \text{ja} \quad x > 0$$

$$10 - 2h > 0$$

$$h < 5$$

Tilavuusfunktion $V(h)$ määrittelyväli on siis $0 < h < 5$ (m).

Derivoidaan:

$$V'(h) = 10 - 4h, 0 < h < 5$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta:

$$V'(h) = 0$$

$$10 - 4h = 0$$

$$h = \frac{10}{4} = 2{,}5$$

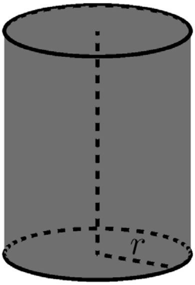
Derivaatan nollakohta kuuluu määrittelyvälille $0 < h < 5$.

Tilavuusfunktion $V(h) = 10h - 2h^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten se saa suurimman arvonsa huipussa, jossa derivaatan arvo on nolla. Derivaattafunktion nollakohta $h = 2{,}5$ (m) on siis tilavuusfunktion $V(h)$ maksimikohta.

Halkopinon tilavuus on suurimmillaan silloin, kun pinon korkeus on $h = 2{,}5$ metriä. Pinon leveys on tällöin $x = 10 - 2h = 10 - 2 \cdot 2{,}5 = 5$ metriä.

249.

Piirretään mallikuva. Merkitään karkkirasian pohjaympyrän sädettä kirjaimella r ja rasian korkeutta kirjaimella h.



Rasian korkeuden h ja pohjan halkaisijan $2r$ summa on 20 senttimetriä. Muodostetaan tämän tiedon perusteella yhtälö ja ratkaistaan yhtälöstä rasian korkeus h.

$$\begin{aligned} h + 2r &= 20 \\ h &= 20 - 2r \end{aligned}$$

Muodostetaan rasian tilavuutta kuvaava lauseke. Ympyrälieriön tilavuus on $V = \pi r^2 \cdot h$, joten

$$V(r) = \pi r^2 \cdot (20 - 2r).$$

Mitat ovat positiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja säde r voi saada.

$$r > 0 \qquad \text{ja} \qquad \begin{aligned} h &> 0 \\ 20 - 2r &> 0 \\ r &< 10 \end{aligned}$$

Tilavuusfunktion $V(r)$ määrittelyväli on siis $0 < r < 10$ (cm).

Derivoidaan:

$$V'(r) = -2\pi r(3r - 20), 0 < r < 10$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta:

$$V'(r) = 0$$

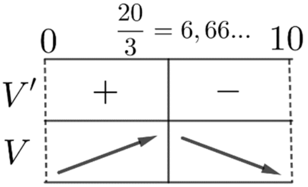
$$-2\pi r(3r - 20) = 0, \qquad 0 < r < 10$$

$$r = \frac{20}{3} = 6{,}66\ldots\,(\mathrm{cm})$$

Perustellaan, että derivaattafunktion nollakohta $r = 6{,}66\ldots$ (cm) on tilavuusfunktion $V(r)$ maksimikohta.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja tilavuusfunktion kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio välille $0 < r < 10$.

Perustellaan derivaatan V' merkki testipisteiden avulla:
$V'(1) = 106{,}8\ldots > 0$
$V'(8) = -201{,}0\ldots < 0$



Kulkukaavion perusteella karkkirasian tilavuus on suurimmillaan silloin, kun rasian pohjan säde on $r = \frac{20}{3} = 6{,}66\ldots \approx 6{,}7$ senttimetriä.

Rasian tilavuus on tällöin

$$V\left(\frac{20}{3}\right) = \pi \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^2 \cdot \left(20 - 2 \cdot \frac{20}{3}\right) = 930{,}8\ldots \approx 930\ (\mathrm{cm}^3).$$

Huomaa, että vastaus annetaan kahden merkitsevän numeron tarkkuudella, eli kymmenien kuutiosenttimetrien tarkkuudella.

250.

Merkitään altaan poikkileikkauksen sädettä kirjaimella r ja pituutta kirjaimella h.

Altaan pituuden h ja poikkileikkauksen säteen r summa on 1,2 metriä. Muutetaan pituus desimetreiksi: 1,2 m = 12 dm Muodostetaan tämän tiedon perusteella yhtälö ja ratkaistaan yhtälöstä pituus h.

$$\begin{aligned} h + r &= 1{,}2 \\ h &= 12 - r \end{aligned}$$

Muodostetaan altaan tilavuutta kuvaava lauseke. Lieriön tilavuus on $V = A_p \cdot h$, missä pohjan pinta-ala A_p on puoliympyrän pinta-ala $A_p = \frac{1}{2}\pi r^2$, joten tilavuus on

$$V(r) = \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot (12 - r).$$

Mitat ovat positiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja säde r voi saada.

$$r > 0 \qquad \text{ja} \qquad \begin{aligned} h &> 0 \\ 12 - r &> 0 \\ r &< 12 \end{aligned}$$

Tilavuusfunktion $V(r)$ määrittelyväli on siis $0 < r < 12$ (dm).

Derivoidaan:

$$V'(r) = \frac{-3\pi \cdot r \cdot (r - 8)}{2}, \qquad 0 < r < 12$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta:

$$V'(r) = 0$$

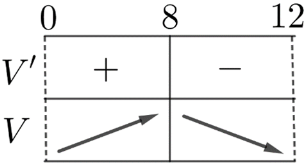
$$\frac{-3\pi \cdot r \cdot (r-8)}{2} = 0, \qquad 0 < r < 12$$

$$r = 8 \text{ (dm)}$$

Perustellaan, että derivaattafunktion nollakohta $r = 8$ (dm) on tilavuusfunktion $V(r)$ maksimikohta.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja tilavuusfunktion kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio välille $0 < r < 12$.

Perustellaan derivaatan V' merkki testipisteiden avulla:
$V'(1) = 32{,}9\ldots > 0$
$V'(10) = -94{,}2\ldots < 0$



Kulkukaavion perusteella altaan tilavuus on suurimmillaan silloin, kun poikkileikkauksen säde on $r = 8$ (dm) eli 80 senttimetriä.

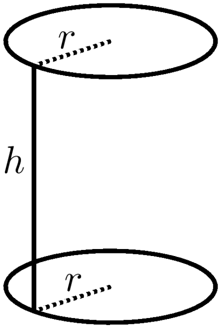
Altaan tilavuus on tällöin

$$V(8) = \frac{1}{2}\pi \cdot 8^2 \cdot (12-8) = 402{,}123\ldots \approx 400 \text{ (dm}^3\text{)}.$$

Altaaseen mahtuu siis 400 litraa vettä.

251.

Piirretään mallikuva. Merkitään vaakaympyrän sädettä kirjaimella r (cm) ja pystysauvan korkeutta kirjaimella h (cm).



Rautalankaa on käytettävissä yksi metri eli 100 senttimetriä, joten ympyröiden piirien ja pystysauvan pituuden summa on 100 (cm). Muodostetaan tämän tiedon perusteella yhtälö ja ratkaistaan yhtälöstä pituus h.

$$2\pi r + 2\pi r + h = 100$$
$$h = 100 - 4\pi r$$

Mitat ovat positiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja säde r voi saada.

$$r > 0 \qquad \text{ja} \qquad h > 0$$
$$100 - 4\pi r > 0$$
$$r < \frac{100}{4\pi} = 7{,}957\ldots$$

Ympyröiden säde r vaihtelee siis välillä $0 < r < 8$ cm.

Muodostetaan kehikon rajaaman ympyrälieriön tilavuutta kuvaava lauseke. Ympyrälieriön tilavuus on $V = \pi r^2 \cdot h$, joten

$$V(r) = \pi r^2 \cdot (100 - 4\pi r).$$

Tilavuusfunktion $V(r)$ määrittelyväli on $0 < r < \frac{100}{4\pi}$ (cm).

Derivoidaan:

$$V'(r) = -4\pi r(3\pi r - 50), \qquad 0 < r < \frac{100}{4\pi}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta:

$$V'(r) = 0$$

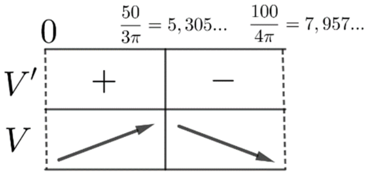
$$-4\pi r(3\pi r - 50) = 0, \qquad 0 < r < \frac{100}{4\pi}$$

$$r = \frac{50}{3\pi} = 5{,}305 \ldots \text{(cm)}$$

Perustellaan, että derivaattafunktion nollakohta $r = 5{,}305 \ldots$ (cm) on tilavuusfunktion $V(r)$ maksimikohta.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja tilavuusfunktion kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio välille $0 < r < \frac{100}{4\pi}$.

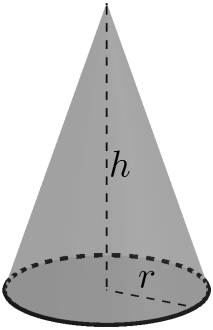
Perustellaan derivaatan V' merkki testipisteiden avulla:
$V'(1) = 509{,}8 \ldots > 0$
$V'(6) = -493{,}7 \ldots < 0$



Kulkukaavion perusteella tilavuus on suurimmillaan silloin, kun kehikon vaakaympyrän säde on $r = \frac{50}{3\pi} = 5{,}305 \ldots \approx 5{,}3$ senttimetriä.

252.

Piirretään mallikuva. Merkitään valaisimen pohjaympyrän sädettä kirjaimella r ja valaisimen korkeutta kirjaimella h.



Valaisimen korkeuden h ja pohjaympyrän halkaisijan $2r$ summa on 18,6 senttimetriä. Muodostetaan tämän tiedon perusteella yhtälö ja ratkaistaan yhtälöstä korkeus h.

$$\begin{aligned} h + 2r &= 18{,}6 \\ h &= 18{,}6 - 2r \end{aligned}$$

Muodostetaan kartion tilavuutta kuvaava lauseke. Ympyräkartion tilavuus on $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$, joten

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (18{,}6 - 2r).$$

Mitat ovat positiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja säde r voi saada.

$$r > 0 \qquad \text{ja} \qquad \begin{aligned} h &> 0 \\ 18{,}6 - 2r &> 0 \\ r &< 9{,}3 \end{aligned}$$

Tilavuusfunktion $V(r)$ määrittelyväli on siis $0 < r < 9{,}3$ (cm).

Derivoidaan:

$$V'(r) = -6{,}283\ldots \cdot r \cdot (r - 6{,}2), \qquad 0 < r < 9{,}3$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta:

$$V'(r) = 0$$

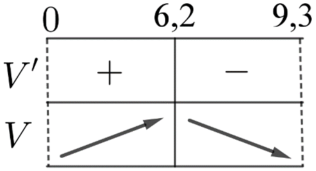
$$-6{,}283\ldots \cdot r \cdot (r - 6{,}2) = 0, \qquad 0 < r < 9{,}3$$

$$r = 6{,}2 \text{ (cm)}$$

Perustellaan, että derivaattafunktion nollakohta $r = 6{,}2$ (cm) on tilavuusfunktion $V(r)$ maksimikohta.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja tilavuusfunktion kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio välille $0 < r < 9{,}3$.

Perustellaan derivaatan V' merkki testipisteiden avulla:
$V'(1) = 32{,}6\ldots > 0$
$V'(8) = -90{,}4\ldots < 0$



Kulkukaavion perusteella lieriön tilavuus on suurimmillaan silloin, kun pohjan säde on 6,2 senttimetriä. Tilavuus on tällöin

$$V(6{,}2) = \frac{1}{3}\pi \cdot 6{,}2^2 \cdot (18{,}6 - 2 \cdot 6{,}2) = 249{,}57\ldots \approx 250 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

253.

a) Myyntitulo M saadaan, kun yksikköhinta 3,00 eur/kpl kerrotaan myyntimäärällä x (kpl):

$$M(x) = 3{,}00x.$$

b) Muuttuja x kuvaa myytyjen pullien lukumäärää, joten $x \geq 0$.

c) Myyntivoitto saadaan, kun myyntitulosta M vähennetään kokonaiskustannukset. Kustannukset yhtä pullaa kohden ovat 1,30 euroa, ja pullia myydään x kappaletta, joten kokonaiskustannukset myydyistä pullista ovat $1{,}30x$.

Myyntivoitto on:

$$T(x) = \underbrace{3{,}00x}_{\substack{\text{myynti}-\\ \text{tulo}}} - \underbrace{1{,}30x}_{\substack{\text{kokonais}-\\ \text{kustannukset}}} = 1{,}70x \text{ (euroa)}$$

254.

Myyntitulofunktio $m(x) = 310x - 4x^2$, missä $30 \leq x \leq 41$, saa suurimman ja pienimmän arvonsa joko määrittelyvälin päätepisteessä $x = 30$ tai $x = 41$ tai määrittelyvälillä $[30, 41]$ olevassa derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan: $m'(x) = 310 - 8x$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

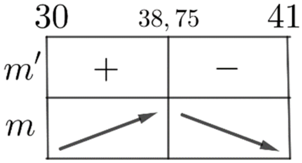
$$m'(x) = 0$$

$$310 - 8x = 0, \qquad 30 < x < 41$$

$$x = 38{,}75$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja myyntitulofunktion kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio välille $30 \leq x \leq 41$.

Perustellaan derivaatan m' merkki derivaattafunktion kuvaajan tai testipisteiden avulla:
$m'(1) = 302 > 0$
$m'(40) = -10 < 0$



	30	38,75	41
m'	+		−
m	↗		↘

a) Kulkukaavion perusteella myyntitulo on suurimmillaan silloin, kun tuotteen hinta on $x = 38{,}75 \approx 39$ euroa. Suurin mahdollinen myyntitulo on

$$m(38{,}75) = 310 \cdot 38{,}75 - 4 \cdot 38{,}75^2 = 6006{,}25 \approx 6006 \text{ (euroa)}.$$

b) Kulkukaavion perusteella myyntitulolla on paikallinen minimi kohdissa $x = 30$ ja $x = 41$. Lasketaan, kumpi paikallisista minimeistä on pienin arvo:

$$m(30) = 310 \cdot 30 - 4 \cdot 30^2 = 5700 \text{ (euroa)}$$

$$m(41) = 310 \cdot 41 - 4 \cdot 41^2 = 5986 \text{ (euroa)}$$

Pienin mahdollinen myyntitulo on 5700 euroa ja se saadaan myyntihinnalla 30 euroa.

255.

a) Muodostetaan myyntituloa kuvaava funktio M. Myyntitulo saadaan, kun sukkaparin yksikköhinta x (euroa) kerrotaan myyntimäärällä, joka on $-60x + 1100$.

Myyntitulofunktio on

$$M(x) = x \cdot (-60x + 1100) = -60x^2 + 1100x.$$

Myyntitulofunktion määrittelyväli on $0 \leq x \leq 18$ (euroa).

Myyntitulofunktio saa suurimman arvonsa joko määrittelyvälin päätepisteessä $x = 0$ tai $x = 18$ tai määrittelyvälillä $[0, 18]$ olevassa derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan: $M'(x) = -120x + 1100$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

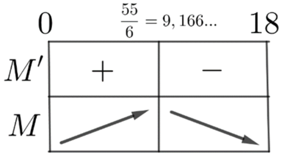
$$M'(x) = 0$$

$$-120x + 1100 = 0, \qquad 0 < x < 18$$

$$x = \frac{55}{6} = 9{,}166\ldots$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja myyntitulofunktion kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio välille $0 \leq x \leq 18$.

Perustellaan derivaatan M' merkki derivaatan kuvaajan tai testipisteiden avulla:
$M'(1) = 980 > 0$
$M'(10) = -100 < 0$



Kulkukaavion perusteella myyntitulo on suurimmillaan silloin, kun sukkaparin hinta on $x = 9{,}166\ldots \approx 9{,}17$ euroa.

b) Myyntivoitto saadaan, kun myyntitulosta M vähennetään kokonaiskustannukset. Kustannukset yhtä sukkaparia kohden ovat 5,00 euroa, ja pareja myydään $-60x + 1100$ kappaletta, joten kokonaiskustannukset ovat $5{,}00 \cdot (-60x + 1100) = -300x + 5500$.

Myyntivoitto on:

$$\begin{aligned} T(x) &= \underbrace{(-60x^2 + 1100x)}_{\text{myyntitulo}} - \underbrace{(-300x + 5500)}_{\text{kokonaiskustannukset}} \\ &= -60x^2 + 1400x - 5500. \end{aligned}$$

Myyntivoittofunktion määrittelyväli on $0 \leq x \leq 18$.

Myyntivoittofunktio saa suurimman arvonsa joko määrittelyvälin päätepisteessä $x = 0$ tai $x = 18$ tai määrittelyvälillä $[0{,}18]$ olevassa derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan: $T'(x) = -120x + 1400$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

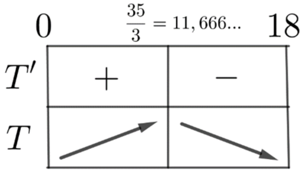
$$T'(x) = 0$$

$$-120x + 1400 = 0, \qquad 0 < x < 18$$

$$x = \frac{35}{3} = 11{,}666\ldots$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja myyntivoittofunktion kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio välille $0 \leq x \leq 18$.

Perustellaan derivaatan T' merkki derivaatan kuvaajan tai testipisteiden avulla:
$T'(1) = 1280 > 0$
$T'(15) = -400 < 0$



Kulkukaavion perusteella myyntivoitto on suurimmillaan silloin, kun sukkaparin hinta on $x = 11,666 \ldots \approx 11,67$ euroa.

256.

Muodostetaan myyntituloa kuvaava funktio *M.* Myyntitulo saadaan, kun kenkien yksikköhinta x (euroa) kerrotaan myyntimäärällä *f*, joka on $f(x) = -30x + 1000$.

Myyntitulofunktio on

$$\begin{aligned} M(x) &= x \cdot f(x) \\ &= x \cdot (-30x + 1000) = -30x^2 + 1000x. \end{aligned}$$

Kenkäparin hinta x sekä myyntimäärä $-30x + 1000$ ovat epänegatiivisia lukuja.

Ratkaistaan, mitä arvoja hinta x voi saada.

$$x \geq 0 \qquad \text{ja} \qquad -30x + 1000 \geq 0$$

$$x \leq \frac{100}{3} = 33{,}333\ldots$$

Myyntitulofunktion määrittelyväli on $0 \leq x \leq \frac{100}{3}$ (euroa).

Myyntitulofunktio saa suurimman arvonsa joko määrittelyvälin päätepisteessä tai määrittelyvälillä olevassa derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan: $M'(x) = -60x + 1000$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

$$M'(x) = 0$$

$$-60x + 1000 = 0, \qquad 0 < x < \frac{100}{3}$$

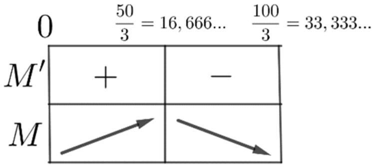
$$x = \frac{50}{3} = 16{,}666\ldots$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja myyntitulofunktion kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio välille $0 \leq x \leq \frac{100}{3}$.

Perustellaan derivaatan M' merkki derivaatan kuvaajan tai testipisteiden avulla:

$M'(1) = 940 > 0$

$M'(20) = -200 < 0$



Kulkukaavion perusteella myyntitulo on suurimmillaan silloin, kun kenkäparin hinta on $x = 16,666 \ldots \approx 17$ euroa. Myyntitulo on tällöin

$$\begin{aligned} M(16,66\ldots) &= -30 \cdot 16,66\ldots^2 + 1000 \cdot 16,66\ldots \\ &= 8333,33\ldots \approx 8333 \text{ (euroa).} \end{aligned}$$

257.

Muodostetaan myyntituloa kuvaava lauseke. Myyntitulo saadaan, kun juoman yksikköhinta x (euroa) kerrotaan myyntimäärällä m, joka on $m(x) = 3000 - 580x$.

Myyntitulo on $x \cdot m(x) = x \cdot (3000 - 580x) = 3000x - 580x^2$.

Myyntivoitto saadaan, kun myyntitulosta vähennetään kokonaiskustannukset. Kustannukset yhtä juomapulloa kohden ovat 0,35 euroa, ja pulloja myydään $3000 - 580x$ kappaletta, joten kokonaiskustannukset ovat $0{,}35 \cdot (3000 - 580x) = 1050 - 203x$.

Myyntivoitto on:

$$\begin{aligned} T(x) &= \underbrace{(3000x - 580x^2)}_{\text{myyntitulo}} - \underbrace{(1050 - 203x)}_{\text{kokonaiskustannukset}} \\ &= -580x^2 + 3203x - 1050 \end{aligned}$$

Juomapullon hinta x sekä myyntimäärä $3000 - 580x$ ovat epänegatiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja hinta x voi saada.

$$x \geq 0 \qquad \text{ja} \qquad 3000 - 580x \geq 0$$

$$x \leq \frac{150}{29} = 5{,}172\ldots$$

Myyntivoittofunktion T määrittelyväli on $0 \leq x \leq \frac{150}{29}$ (euroa).

Myyntivoittofunktio saa suurimman arvonsa joko määrittelyvälin päätepisteessä tai määrittelyvälillä olevassa derivaatan nollakohdassa.

Derivoidaan: $T'(x) = -1160x + 3203$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

$$T'(x) = 0$$

$$-1160x + 3203 = 0, \qquad 0 < x < \frac{150}{29}$$

$$x = \frac{3203}{1160} = 2{,}761\ \ldots$$

Perustellaan, että myyntivoittofunktio T saa suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa $x = 2{,}761\ \ldots$ Tämä voidaan tehdä laatimalla derivaatan merkkikaavio ja funktion T kulkukaavio välillä $0 \leq x \leq \frac{150}{29}$.

Suurin arvo voidaan perustella myös myyntivoittofunktion $T(x) = -580x^2 + 3203x - 1050$ kuvaajan avulla. Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa suurimman arvonsa derivaattafunktion nollakohdassa $x = 2{,}761\ \ldots$

Myyntivoitto on siis suurimmillaan silloin, kun juomapullon hinta on $x = 2{,}761\ \ldots \approx 2{,}76$ euroa. Huomaa, että vastaus pyydettiin sentin tarkkuudella.

258.

Muodostetaan myyntituloa kuvaava funktio *M.* Myyntitulo saadaan, kun lihan kilohinta kerrotaan myytyjen kilojen lukumäärällä. Myyntimäärä riippuu hinnanalennuksesta.

Tehdään funktion muodostamisen avuksi taulukko:

Hinnan-alennusten lukumäärä (kpl)	Lihan hinta (eur/kg)	Myyntimäärä päivässä (kg)	Myyntitulo M päivässä (eur)
0	$6{,}50$	140	$6{,}50 \cdot 140$
1	$6{,}50 - 0{,}20$	$140 + 25$	$(6{,}50 - 0{,}20)(140 + 25)$
x	$6{,}50 - 0{,}20x$	$140 + 25x$	$(6{,}50 - 0{,}20x)(140 + 25x)$

Päivittäinen myyntitulo M riippuu siis hinnanalennusten lukumäärästä x funktion

$$M(x) = \underbrace{(6{,}50 - 0{,}20x)}_{\text{hinta}}\underbrace{(140 + 25x)}_{\text{myyntimäärä}}$$

mukaisesti. Lihan kilohinta $6{,}50 - 0{,}20x$ sekä myyntimäärä $140 + 25x$ ovat epänegatiivisia lukuja.

Ratkaistaan, mitä arvoja lukumäärä x voi saada.

$$6{,}50 - 0{,}20x \geq 0 \quad \text{ja} \quad 140 + 25x \geq 0$$

$$x \leq 32{,}5 \quad \text{ja} \quad x \geq -5{,}6$$

Hinnanalennusten lukumäärä on epänegatiivinen luku, eli $x \geq 0$
Myyntitulo on määritelty, kun $0 \leq x \leq 32{,}5$ (kpl).

Derivoidaan: $M'(x) = 134{,}5 - 10x$

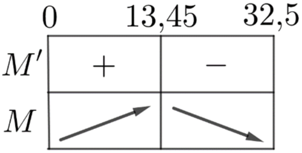
Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

$$M'(x) = 0$$
$$134{,}5 - 10x = 0$$
$$x = 13{,}45$$

Derivaatan nollakohta on määrittelyvälillä $0 \leq x \leq 32{,}5$.

Tutkitaan funktion M kulkua merkki- ja kulkukaavion avulla. Rajataan kulkukaavio määrittelyvälille $0 \leq x \leq 32{,}5$.

Perustellaan derivaatan M' merkki derivaattafunktion kuvaajan tai testipisteiden avulla:
$M'(1) = 124{,}5 > 0$
$M'(20) = -65{,}5 < 0$



	0 … 13,45	13,45 … 32,5
M'	+	−
M	↗	↘

Päivittäinen myyntitulo on suurin, kun $x = 13{,}45$.

Lihan kilohinta on tällöin $6{,}50 - 0{,}20 \cdot 13{,}45 = 3{,}81$ euroa/kg.

Huomautus: Myyntitulon suurin arvo voidaan kulkukaavion asemesta perustella myös myyntitulofunktion M kuvaajan avulla. Funktion

$$M(x) = (6{,}50 - 0{,}20x)(140 + 25x) = -5x^2 + 134{,}5x + 910$$

kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa, eli derivaatan nollakohdassa $x = 13{,}45$.

259.

Muodostetaan myyntituloa kuvaava funktio *M.* Myyntitulo saadaan, kun lipun hinta kerrotaan myytyjen lippujen lukumäärällä, eli katsojien lukumäärällä. Katsojamäärä riippuu lipun hinnasta.

Tehdään funktion muodostamisen avuksi taulukko.

Hinnan-muutosten määrä (eur)	Lipun hinta (eur)	Katsojamäärä (kpl)	Lipputulo M (eur)
0	15	3000	$15 \cdot 3000$
+1	$15 + 1$	$3000 - 100$	$(15 + 1)(3000 - 100)$
−1	$15 - 1$	$3000 + 100$	$(15 - 1)(3000 + 100)$
x	$15 + x$	$3000 - 100x$	$(15 + x)(3000 - 100x)$

Lipputulo M riippuu siis hinnanmuutoksen euromäärästä x funktion

$$M(x) = \underbrace{(15 + x)}_{\text{lipun hinta}} \underbrace{(3000 - 100x)}_{\text{katsojamäärä}}$$

mukaisesti. Lipun hinta $15 + x$ sekä katsojamäärä $3000 - 100x$ ovat epänegatiivisia lukuja.

Ratkaistaan, mitä arvoja muuttuja x voi saada.

$$15 + x \geq 0 \qquad \text{ja} \qquad 3000 - 100x \geq 0$$

$$x \geq -15 \qquad \text{ja} \qquad x \leq 30$$

Myyntitulo on siis määritelty, kun $-15 \leq x \leq 30$ (eur).

Derivoidaan: $M'(x) = 1500 - 200x$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

$$M'(x) = 0$$

$$1500 - 200x = 0$$

$$x = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

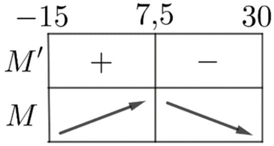
Derivaatan nollakohta on määrittelyvälillä $-15 \leq x \leq 30$.

Tutkitaan funktion M kulkua merkki- ja kulkukaavion avulla. Rajataan kulkukaavio määrittelyvälille $-15 \leq x \leq 30$.

Perustellaan derivaatan M' merkki derivaattafunktion kuvaajan tai testipisteiden avulla:

$M'(1) = 1300 > 0$

$M'(10) = -500 < 0$



-15 $7{,}5$ 30

M'	+	−
M	↗	↘

Lipputulo on suurin, kun $x = 7{,}5$. Lipun hinta on tällöin $15 + 7{,}5 = 22{,}50$ euroa/kappale.

Lipputuloja saadaan tällöin yhteensä

$$\begin{aligned} M(7{,}5) &= (15 + 7{,}5)(3000 - 100 \cdot 7{,}5) \\ &= 22{,}5 \cdot 2250 = 50\,625{,}00 \text{ (euroa)} \end{aligned}$$

Huomaa, että vastausta pyydetiin sentin tarkkuudella. Sentit on merkittävä näkyviin lipputuloissa.

Huomautus: Lipputuloja kuvaaja funktio voidaan muodostaa toisellakin tapaa. Esitetään myös vaihtoehtoinen ratkaisutapa.

Merkitään yhden lipun hintaa kirjaimella x (euroa). Lauseke $15 - x$ ilmaisee tällöin muutosta lippuhintaan 15 euroa verrattuna:

- jos lipun hinta x on pienempi kuin 15 euroa, niin $15 - x > 0$ ja lauseke $15 - x$ ilmaisee hinnan alennuksen määrää (euroina)
- jos lipun hinta x on suurempi kuin 15 euroa, niin $15 - x < 0$ ja lauseke $15 - x$ ilmaisee hinnan korotuksen määrää (negatiivisena lukuna)

Jokainen euron hinnanmuutos muuttaa 3000 katsojan määrää sadalla.

- jos $15 - x > 0$, niin katsojamäärä kasvaa, ja määrän ilmaisee lauseke $3000 + \underbrace{100(15 - x)}_{\text{positiivinen luku}}$
- jos $15 - x < 0$, niin katsojamäärä pienenee, ja määrän ilmaisee lauseke $3000 + \underbrace{100(15 - x)}_{\text{negatiivinen luku}}$

Katsojamäärän ilmaisee siis molemmissa tapauksissa lauseke

$$3000 + 100(15 - x) = 3000 + 1500 - 100x = 4500 - 100x.$$

Lipputulo on nyt

$$M(x) = \underbrace{x}_{\substack{\text{lipun} \\ \text{hinta}}} \cdot \underbrace{(4500 - 100x)}_{\text{katsojamäärä}} = 4500x - 100x^2$$

Lipun hinta x ja katsojamäärä $4500 - 100x$ ovat epänegatiivisia lukuja. Näitä ehdoista seuraa, että lipputulo on määritelty, kun $0 \leq x \leq 45$.

Derivoidaan: $M'(x) = 4500 - 200x$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

$$M'(x) = 0$$

$$4500 - 200x = 0$$

$$x = 22{,}5$$

Derivaatan nollakohta $x = 22{,}5$ kuuluu määrittelyvälille $0 \leq x \leq 45$.

Lipputulofunktion $M(x) = 4500x - 100x^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten se saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa, eli derivaatan nollakohdassa $x = 22{,}5$.

Lipputulot ovat siis suurimmillaan silloin, kun lipun hinta on $x = 22{,}50$ euroa, ja suurimmat lipputulot ovat $M(22{,}5) = 50\ 625{,}00$ euroa.

260.

Muodostetaan myyntituloa kuvaava funktio *M.* Myyntitulo saadaan, kun tuikun yksikköhinta kerrotaan myytyjen tuikkujen lukumäärällä. Myyntimäärä riippuu hinnasta.

Tehdään funktion muodostamisen avuksi taulukko:

Hinnanmuutosten lukumäärä (kpl)	Lasituikun hinta (eur)	Myyntimäärä päivässä (kpl)	Myyntitulo M päivässä (eur)
0	18	400	$18 \cdot 400$
−1	$18 - 0{,}40$	$400 + 20$	$(18 - 0{,}40)(400 + 20)$
+1	$18 + 0{,}40$	$400 - 20$	$(18 + 0{,}40)(400 - 20)$
x	$18 + 0{,}40x$	$400 - 20x$	$(18 + 0{,}40x)(400 - 20x)$

Päivittäinen myyntitulo M riippuu hinnanmuutosten lukumäärästä x funktion

$$M(x) = (18 + 0{,}40x)(400 - 20x) = -8x^2 - 200x + 7200$$

mukaisesti.

Myyntivoitto saadaan, kun myyntitulosta M vähennetään kokonaiskustannukset. Kustannukset yhtä tuikkua kohden ovat 12 euroa, ja tuikkuja myydään $400 - 20x$ kappaletta, joten kokonaiskustannukset ovat $12 \cdot (400 - 20x) = 4800 - 240x$.

Myyntivoitto on:

$$\begin{aligned} T(x) &= \underbrace{(-8x^2 - 200x + 7200)}_{\text{myyntitulo}} - \underbrace{(4800 - 240x)}_{\text{kokonaiskustannukset}} \\ &= -8x^2 + 40x + 2400 \end{aligned}$$

Tuikun hinta $18 + 0{,}40x$ sekä myyntimäärä $400 - 20x$ ovat epänegatiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja lukumäärä x voi saada.

$$18 + 0{,}40x \geq 0 \quad \text{ja} \quad 400 - 20x \geq 0$$

$$x \geq -45 \quad \text{ja} \quad x \leq 20$$

Myyntivoittofunktion $T(x)$ määrittelyväli on siis $-45 \leq x \leq 20$ (kpl).

Derivoidaan: $T'(x) = -16x + 40$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

$$T'(x) = 0$$

$$-16x + 40 = 0$$

$$x = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Derivaatan nollakohta on määrittelyvälillä $-45 \leq x \leq 20$.

Myyntivoittofunktion $T(x) = -8x^2 + 40x + 2400$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Se saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa, eli derivaattafunktion nollakohdassa.

Myyntivoitto on suurimmillaan silloin, kun muuttujan x arvo on $x = 2{,}5$. Lasituikun hinta on tällöin $18 + 0{,}40 \cdot 2{,}5 = 19{,}00$ euroa.

261.

Tutkitaan ensin, miten kalakilon *hinnanalennukset* vaikuttavat myyntivoittoon.

Muodostetaan myyntituloa kuvaava funktio *M.* Myyntitulo saadaan, kun kalan kilohinta kerrotaan myytyjen kilojen lukumäärällä. Merkitään kirjaimella x hinnanalennusten lukumäärää ja tehdään funktion muodostamisen avuksi taulukko:

Hinnan-alennusten lukumäärä (kpl)	kilohinta (eur)	Myyntimäärä päivässä (kg)	Myyntitulo M päivässä (eur)
0	13,20	120	$13{,}20 \cdot 120$
$x \geq 0$	$13{,}20 - 0{,}05x$	$120 + 3x$	$(13{,}20 - 0{,}05x)(120 + 3x)$

Myyntituloa kuvaa funktio

$$M(x) = (13{,}20 - 0{,}05x)(120 + 3x) = -0{,}15x^2 + 33{,}6x + 1584.$$

Myyntivoitto saadaan, kun myyntitulosta M vähennetään kokonaiskustannukset. Kalakauppiaan sisäänostohinta yhtä kiloa kohden on 10 euroa, ja kalaa myydään $120 + 3x$ kiloa, joten kokonaiskustannukset ovat $10 \cdot (120 + 3x) = 1200 + 30x$.

Myyntivoitto on tällöin ($x \geq 0$)

$$\begin{aligned} T(x) &= \underbrace{(-0{,}15x^2 + 33{,}6x + 1584)}_{\text{myyntitulo}} - \underbrace{(1200 + 30x)}_{\text{kokonaiskustannukset}} \\ &= -0{,}15x^2 + 3{,}6x + 384 \end{aligned}$$

Kalan kilohinta $13{,}20 - 0{,}05x$ sekä myyntimäärä $120 + 3x$ ovat epänegatiivisia lukuja.

Ratkaistaan, mitä arvoja muuttuja x voi saada.

$$13{,}20 - 0{,}05x \geq 0 \qquad \text{ja} \qquad 120 + 3x \geq 0$$

$$x \leq 264 \qquad \text{ja} \qquad x \geq -40$$

Myyntivoittofunktion $T(x)$ määrittelyväli on siis $0 \leq x \leq 264$ (kpl).

Derivoidaan: $T'(x) = -0{,}3x + 3{,}6$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta.

$$T'(x) = 0$$

$$-0{,}3x + 3{,}6 = 0$$

$$x = 12$$

Derivaatan nollakohta on määrittelyvälillä $0 \leq x \leq 264$.

Myyntivoittofunktion $T(x) = -0{,}15x^2 + 3{,}6x + 384$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Myyntivoitto saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa, eli derivaattafunktion nollakohdassa.

Kauppiaan myyntivoitto on siis suurimmillaan silloin, kun $x = 12$. Myyntivoitto on tällöin

$$T(12) = -0{,}15 \cdot 12^2 + 3{,}6 \cdot 12 + 384 = \mathbf{405{,}60}\ (\mathbf{euroa}).$$

Tutkitaan sitten, miten kalakilon *hinnankorotukset* vaikuttavat myyntivoittoon.

Muodostetaan myyntituloa kuvaava funktio *M.*

Hinnan-korotusten lukumäärä (kpl)	kilohinta (eur)	Myyntimäärä päivässä (kg)	Myyntitulo M päivässä (eur)
0	13,20	120	$13{,}20 \cdot 120$
$x \geq 0$	$13{,}20 + 0{,}1x$	$120 - 2x$	$(13{,}20 + 0{,}1x)(120 - 2x)$

Nyt myyntituloa kuvaa funktio

$$M(x) = (13{,}20 + 0{,}1x)(120 - 2x) = -0{,}2x^2 - 14{,}4x + 1584$$

Myyntivoitto saadaan, kun myyntitulosta M vähennetään kokonaiskustannukset. Kalakauppiaan sisäänostohinta yhtä kiloa kohden on 10 euroa, ja kalaa myydään $120 - 2x$ kiloa, joten kokonaiskustannukset ovat $10 \cdot (120 - 2x) = 1200 - 20x$.

Myyntivoitto on tällöin ($x \geq 0$)

$$T(x) = \underbrace{(-0{,}2x^2 - 14{,}4x + 1584)}_{\text{myyntitulo}} - \underbrace{(1200 - 20x)}_{\text{kokonaiskustannukset}}$$
$$= -0{,}2x^2 + 5{,}6x + 384$$

Kalan kilohinta $13{,}20 + 0{,}1x$ sekä myyntimäärä $120 - 2x$ ovat epänegatiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja muuttuja x voi saada.

$$13{,}20 + 0{,}1x \geq 0 \quad \text{ja} \quad 120 - 2x \geq 0$$

$$x \geq -132 \quad \text{ja} \quad x \leq 60$$

Myyntivoittofunktion $T(x)$ määrittelyväli on siis $0 \leq x \leq 60$ (kpl).

Derivoidaan: $T'(x) = -0{,}4x + 5{,}6$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

$$T'(x) = 0$$
$$-0{,}4x + 5{,}6 = 0$$
$$x = 14$$

Derivaatan nollakohta on määrittelyvälillä $0 \leq x \leq 60$.

Myyntivoittofunktion $T(x) = -0{,}2x^2 + 5{,}6x + 384$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Myyntivoitto saa suurimman arvonsa paraabelin huipussa, eli derivaattafunktion nollakohdassa.

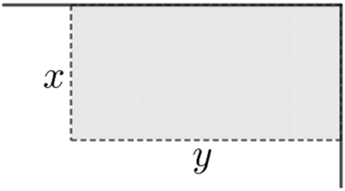
Kauppiaan myyntivoitto on siis suurimmillaan silloin, kun muuttujan x arvo on $x = 14$. Myyntivoitto on tällöin

$$T(14) = -0{,}2 \cdot 14^2 + 5{,}6 \cdot 14 + 384 = \mathbf{423{,}20}\ (\mathbf{euroa}).$$

Vertaamalla laskettuja myyntivoittoja huomataan, että kalakauppias saa suurimman voiton 423,20 euroa siinä tapauksessa, että hän korottaa kilohintaa.

Suurin voitto saadaan hinnalla $13{,}20 + 0{,}1 \cdot 14 = 14{,}60$ euroa/kg.

262.



Merkitään kanatarhan leveyttä kirjaimella y ja pituutta kirjaimella x.

Kanatarhan aitaamiseen kuluu tällöin $x + y$ metrin verran aitaa. Teräsverkkoa on käytettävissä yhteensä 25,0 metriä.

Muodostetaan tämän tiedon perusteella yhtälö ja ratkaistaan yhtälöstä leveys y.

$$x + y = 25$$
$$y = 25 - x$$

Muodostetaan koko aitauksen pinta-alaa kuvaava lauseke. Suorakulmion pinta-ala on $A = x \cdot y$, joten

$$A(x) = x(25 - x) = 25x - x^2.$$

Mitat ovat positiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja pituus x voi saada.

$$x > 0 \qquad \text{ja} \qquad y > 0$$
$$25 - x > 0$$
$$x < 25$$

Pinta-alafunktion $A(x)$ määrittelyväli on siis $0 < x < 25$ (m).

Derivoidaan:

$$A'(x) = 25 - 2x$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta:

$$A'(x) = 0$$

$$25 - 2x = 0$$

$$x = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

Derivaatan nollakohta on määrittelyvälillä $0 < x < 25$.

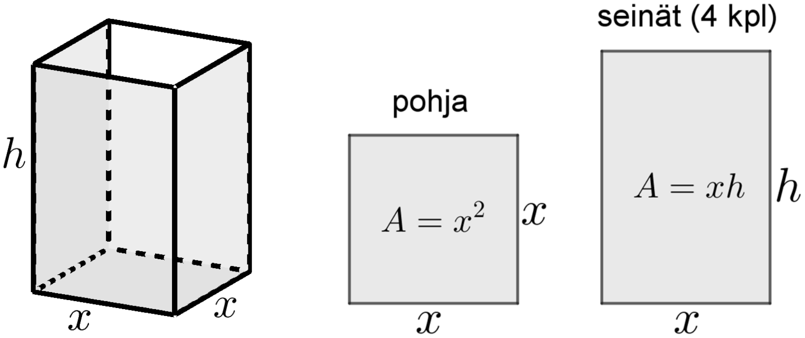
Pinta-alafunktion $A(x) = 25x - x^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Pinta-ala saa siis suurimman arvonsa huipussa, jossa derivaatan arvo on nolla. Derivaattafunktion nollakohta $x = 12{,}5$ (m) on siis pinta-alafunktion $A(x)$ maksimikohta.

Pinta-ala on siis suurimmillaan silloin, kun kanatarhan pituus on $x = 12{,}5$ metriä. Tarhan leveys on tällöin $y = 25 - 12{,}5 = 12{,}5$ metriä.

Pinta-alaltaan suurin kanatarha on siis neliö, jonka sivunpituus on 12,5 metriä.

263.

Piirretään mallikuva. Merkitään pohjaneliön sivun pituutta kirjaimella x ja laatikon korkeutta kirjaimella h (yksikkönä senttimetri).



Laatikon seininä on neljä suorakulmion muotoista tahkoa, jossa sivujen pituudet ovat x ja h. Laatikon pohjan ja seinien yhteenlaskettu pinta-ala on $x^2 + 4 \cdot xh$.

Pohjan ja seinien yhteenlaskettu pinta-ala on 1200 cm². Muodostetaan tämän tiedon perusteella yhtälö ja ratkaistaan yhtälöstä korkeus h.

$$x^2 + 4xh = 1200$$

$$h = \frac{1200 - x^2}{4x}$$

Mitat ovat positiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja pituus x voi saada.

$x > 0$ ja $h > 0$

$$\frac{1200-x^2}{4x} > 0$$

$$0 < x < 20\sqrt{3} = 34{,}641\ldots$$

(Korkeutta h koskeva ehto ratkaistaan symbolisen laskennan ohjelman avulla).

Muodostetaan laatikon tilavuutta kuvaava lauseke. Suorakulmaisen särmiön tilavuus on $V = x^2 \cdot h$, joten

$$V(x) = x^2 \cdot \frac{1200 - x^2}{4x} = 300x - \frac{1}{4}x^3.$$

Tilavuusfunktion $V(x)$ määrittelyväli on $0 < x < 34{,}641\ldots$ (cm).

Derivoidaan: $V'(x) = 300 - \frac{3}{4}x^2$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat:

$$V'(x) = 0$$

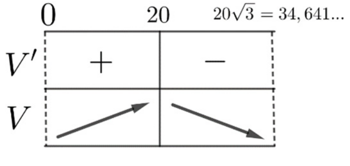
$$300 - \frac{3}{4}x^2 = 0, \qquad 0 < x < 20\sqrt{3}$$

$$x = 20$$

Perustellaan, että derivaattafunktion nollakohta $x = 20$ (cm) on tilavuusfunktion $V(x)$ maksimikohta.

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja tilavuusfunktion kulkukaavio. Rajataan kulkukaavio välille $0 < x < 20\sqrt{3}$.

Perustellaan derivaatan V' merkki testipisteiden avulla:
$V'(1) = 299{,}25 > 0$
$V'(30) = -375 < 0$



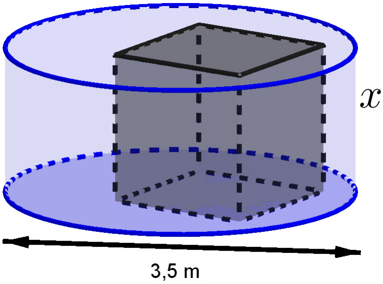
Kulkukaavion perusteella tilavuus on suurimmillaan silloin, kun laatikon pohjaneliön sivunpituus on $x = 20$ cm.

Laatikon korkeus on tällöin $h = \frac{1200-20^2}{4\cdot 20} = 10$ cm ja laatikon tilavuus on

$$V(20) = 300 \cdot 20 - \frac{1}{4} \cdot 20^3 = 4000\ (\mathrm{cm}^3)$$

264.

a) Piirretään mallikuva.



b) Altaan pohjaympyrän säde on $r = \frac{d}{2} = \frac{3{,}5}{2} = 1{,}75$ m. Altaan tilavuus on

$$V = \pi r^2 \cdot x.$$

Kivikuution pohjatahko lepää altaan pohjalla ja ylätahko on samassa tasossa vedenpinnan kanssa, joten kuution sivun korkeus on x (m) ja kuution tilavuus on x^3 (m^3).

Altaassa olevan veden tilavuuden (m^3) ilmoittaa funktio

$$\begin{aligned} V(x) &= \pi r^2 x - x^3 = \pi \cdot 1{,}75^2 \cdot x - x^3 \\ &= 3{,}0625\pi x - x^3, \end{aligned}$$

jossa $x > 0$.

Derivoidaan: $V'(x) = \pi r^2 - 3x^2,\ x > 0$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohta:

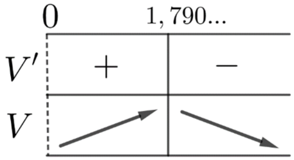
$$V'(x) = 0$$

$$\pi r^2 - 3x^2 = 0, \qquad x > 0$$

$$x = r\sqrt{\frac{\pi}{3}} = 1{,}75\sqrt{\frac{\pi}{3}} = 1{,}790\ldots\ (\mathrm{m})$$

Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja tilavuusfunktion kulkukaavio.

Perustellaan derivaatan V' merkki derivaattafunktion kuvaajan tai testipisteiden avulla:
$V'(1) = 6{,}62\ldots > 0$
$V'(2) = -2{,}37\ldots < 0$



Kulkukaavion perusteella altaassa olevan veden tilavuus on suurimmillaan silloin, kun altaan korkeus, eli veden syvyys on $x = 1{,}790\ldots \approx 1{,}8$ metriä.

265.

Muodostetaan myyntituloa kuvaava funktio M. Myyntitulo saadaan, kun yksikköhinta x (eur) kerrotaan myyntimäärällä, joka on $72\,000 - 180x$ (kappaletta):

$$M(x) = x \cdot (72\,000 - 180x) = 72\,000x - 180x^2.$$

Hinta ja kappalemäärä ovat positiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja hinta x voi saada.

$$x > 0 \qquad \text{ja} \qquad 72\,000 - 180x > 0$$

$$x < 400$$

Myyntitulofunktion $M(x)$ määrittelyväli on siis $0 < x < 400$ (eur).

Derivoidaan: $M'(x) = 72\,000 - 360x$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

$$M'(x) = 0$$

$$72\,000 - 360x = 0$$

$$x = 200$$

Derivaatan nollakohta on määrittelyvälillä $0 < x < 400$.

Myyntitulofunktion $M(x) = 72\,000x - 180x^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Myyntitulo saa siis suurimman arvonsa paraabelin huipussa, jossa on derivaattafunktion nollakohta.

Myyntitulo on siis suurimmillaan silloin, kun yksikköhinta on 200 euroa.

266.

a) Muodostetaan myyntituloa kuvaava funktio M. Myyntitulo saadaan, kun yksikköhinta kerrotaan myyntimäärällä, joka riippuu hinnanalennuksesta. Tehdään funktion muodostamisen avuksi taulukko:

Hinnan-alennusten lukumäärä (kpl)	Lounas-annoksen hinta (eur)	Myyntimäärä päivässä (kpl)	Myyntitulo M päivässä (eur)
0	6,00	100	$6{,}00 \cdot 100$
1	$6{,}00 - 0{,}30$	$100 + 20$	$(6{,}00 - 0{,}30)(100 + 20)$
x	$6{,}00 - 0{,}30x$	$100 + 20x$	$(6{,}00 - 0{,}30x)(100 + 20x)$

Päivittäinen myyntitulo M riippuu siis hinnanalennusten lukumäärästä x funktion

$$M(x) = (6{,}00 - 0{,}30x)(100 + 20x) = -6x^2 + 90x + 600$$

mukaisesti.

Lounasannoksen hinta $6{,}00 - 0{,}30x$ sekä myytyjen lounaiden lukumäärä $100 + 20x$ ovat epänegatiivisia lukuja. Ratkaistaan, mitä arvoja lukumäärä x voi saada.

$$6{,}00 - 0{,}30x \geq 0 \quad \text{ja} \quad 100 + 20x \geq 0$$

$$x \leq 20 \quad \text{ja} \quad x \geq -5$$

Hinnanalennusten lukumäärä on epänegatiivinen luku, eli $x \geq 0$. Myyntitulofunktion $M(x)$ määrittelyväli on $0 \leq x \leq 20$ (kpl).

Derivoidaan: $M'(x) = -12x + 90$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

$$M'(x) = 0$$

$$-12x + 90 = 0$$

$$x = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

Derivaatan nollakohta on määrittelyvälillä $0 \leq x \leq 20$.

Myyntitulofunktion $M(x) = -6x^2 + 90x + 600$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Myyntitulo saa siis suurimman arvonsa paraabelin huipussa, jossa on derivaattafunktion nollakohta.

Myyntitulo on siis suurimmillaan silloin, kun muuttujan x arvo on $x = 7{,}5$. Lounasannoksen hinta on tällöin $6{,}00 - 0{,}30 \cdot 7{,}5 = 3{,}75$ euroa.

b) Myyntivoitto saadaan, kun myyntitulosta M vähennetään kokonaiskustannukset. Kustannukset yhtä annosta kohden ovat 2,80 euroa, ja annoksia myydään $100 + 20x$ kappaletta, joten kokonaiskustannukset ovat $2{,}80 \cdot (100 + 20x) = 280 + 56x$.

Myyntivoitto on:

$$T(x) = \underbrace{(-6x^2 + 90x + 600)}_{\text{myyntitulo}} - \underbrace{(280 + 56x)}_{\text{kokonaiskustannukset}}$$
$$= -6x^2 + 34x + 320$$

Derivoidaan: $T'(x) = -12x + 34$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

$$M'(x) = 0$$
$$-12x + 34 = 0$$
$$x = \frac{17}{6} = 2{,}833 \ldots$$

Derivaatan nollakohta on määrittelyvälillä $0 \leq x \leq 20$.

Myyntivoittofunktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Myyntitulo saa siis suurimman arvonsa paraabelin huipussa, jossa on derivaattafunktion nollakohta.

Myyntivoitto on siis suurimmillaan silloin, kun muuttujan x arvo on $x = \frac{17}{6} = 2{,}833 \ldots$ Lounasannoksen hinta on tällöin $6{,}00 - 0{,}30 \cdot 2{,}833 \ldots = 5{,}15$ euroa.