1 Kertausta polynomifunktioista

1.1 Polynomifunktioita

1.

a) Kun $x = -2$, niin funktion kuvaajalla olevaan pisteen y-koordinaatti on $y \approx -2$. Funktion arvo on siis $f(-2) \approx -2$.

Huomaa, että funktion arvo $f(-2)$ kohdassa $x = -2$ voidaan päätellä kuvaajalta piirtämällä kuvaan pystysuora suora $x = -2$ ja katsomalla missä pisteessä se leikkaa funktion kuvaajan. Leikkauspisteen y-koordinaatti on $y = f(-2) \approx -2$.

Kun $x = 0$, niin funktion kuvaajalla olevaan pisteen y-koordinaatti on $y \approx -1$. Funktion arvo on siis $f(0) \approx -1$.

Huomaa, että funktion arvo $f(0)$ kohdassa $x = 0$ on funktion kuvaajan ja y-akselin leikkauskohta. Kuvaaja leikkaa y-akselin kohdassa $y = f(0) \approx -1$.

b) Kun $y = 1$, niin funktion kuvaajalla olevaan pisteen x-koordinaatti on $x \approx 4$. Kohta, jossa $f(x) = 1$ on siis $x \approx 4$.

Huomaa, että kohta x, jossa $f(x) = 1$ voidaan päätellä kuvaajalta piirtämällä kuvaan vaakasuora suora $y = 1$ ja katsomalla missä pisteessä se leikkaa funktion kuvaajan. Leikkauspisteen x-koordinaatti on $x \approx 4$.

c) Yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisut ovat funktion nollakohtia, eli kohtia, joissa kuvaaja leikkaa x-akselin. Kuvaaja leikkaa x-akselin nollakohdassa $x \approx 2$.

2.

a) Kysytyt funktioiden arvot kohdassa $x = 0$ ovat funktioiden kuvaajien ja y-akselin leikkauskohtia.

Funktion f kuvaaja leikkaa y-akselin kohdassa $f(0) \approx 1$.

Funktion g kuvaaja leikkaa y-akselin kohdassa $g(0) \approx -2$.

Funktion h kuvaaja leikkaa y-akselin kohdassa $h(0) \approx 2$.

b) Kohta x, jossa funktion arvo on 1 voidaan päätellä kuvaajalta piirtämällä kuvaan vaakasuora suora $y = 1$ ja katsomalla missä pisteissä se leikkaa funktion kuvaajan.

Funktio f saa arvon 1 kohdassa $x = 0$.

Funktio g saa arvon 1 kohdassa $x = 1$.

Funktio h saa arvon 1 kohdassa $x = 2$.

c) Yhtälön $f(x) = g(x)$ ratkaisut ovat funktioiden f ja g kuvaajien leikkauspisteiden x-koordinaatit. Kuvaajat leikkaavat likimain pisteessä (2, 4), joten yhtälön ratkaisu on $x \approx 2$.

3.

a) Sijoitetaan muuttujan arvo $x = -5$ funktion lausekkeeseen ja lasketaan funktion arvo.

$$f(-5) = -4 \cdot (-5) + 1 = 20 + 1 = 21$$

b) Ratkaistaan, millä muuttujan x arvolla funktion arvo on -3.

$$\begin{aligned} f(x) &= -3 \\ -4x + 1 &= -3 \\ -4x &= -4 \quad |:(-4) \\ x &= 1 \end{aligned}$$

4.

a) Sijoitetaan muuttujan arvo $x = -6$ funktion lausekkeeseen ja lasketaan funktion arvo.

$$g(-6) = \frac{1}{3} \cdot (-6) - 2 = -2 - 2 = -4$$

b) Sijoitetaan muuttujan arvo $x = 4$ funktion lausekkeeseen ja lasketaan funktion arvo.

$$g(4) = \frac{1}{3} \cdot 4 - 2 = \frac{4}{3} - 2 = \frac{4}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{2}{3}$$

c) Ratkaistaan, millä muuttujan x arvolla funktion arvo on $\frac{1}{3}$.

$$g(x) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}x - 2 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}x = \frac{1}{3} + 2$$

$$\frac{1}{3}x = \frac{7}{3} \quad | \cdot 3$$

$$x = 7$$

d) Ratkaistaan, millä muuttujan *x* arvolla funktion arvo on -4.

$$g(x) = -4$$

$$\frac{1}{3}x - 2 = -4$$

$$\frac{1}{3}x = -4 + 2$$

$$\frac{1}{3}x = -2 \quad | \cdot 3$$

$$x = -6$$

5.

a) Kun $x = -4$, niin suoralla $y = -2x - 1$ olevan pisteen y-koordinaatti on

$$y = -2 \cdot (-4) - 1 = 8 - 1 = 7 \neq 9.$$

Piste $(-4, 9)$ ei siis ole suoralla.

b) Kun $x = -4$, niin suoralla $y = \frac{1}{8}x + \frac{19}{2}$ olevan pisteen y-koordinaatti on

$$y = \frac{1}{8} \cdot (-4) + \frac{19}{2} = -\frac{4}{8} + \frac{19}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{19}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Piste $(-4, 9)$ on suoralla.

6.

Suoran kulkusuunta voidaan päätellä sen kulmakertoimesta.

a) Suoran kulmakerroin on $k = 7 > 0$, joten suora on nouseva.

b) Suoran yhtälö voidaan esittää ratkaistussa muodossa $y = -12x + 8$. Suoran kulmakerroin on $k = -12 < 0$, joten suora on laskeva.

c) Jokaisen suoralla olevan pisteen y-koordinaatti on –5. Suora on siis vaakasuora ja sen kulmakerroin on $k = 0$. Suora kulkee x-akselin suuntaisesti.

d) Suoran yhtälö voidaan esittää ratkaistussa muodossa $y = 15x - 9$. Suoran kulmakerroin on $k = 15 > 0$, joten suora on nouseva.

e) Jokaisen suoralla olevan pisteen x-koordinaatti on 9. Suora on siis pystysuora ja sen kulmakerrointa ei ole määritelty. Suora kulkee y-akselin suuntaisesti.

f) Suoran kulmakerroin on $k = \pi = 3{,}1415\ldots > 0$, joten suora on nouseva.

7.

a) Suoran kulmakerroin on $k = -2 < 0$, joten suora on laskeva. Suoran yhtälössä vakiotermi on $b = 1$, joten suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 1)$.

b) Suoran kulmakerroin on $k = 3 > 0$, joten suora on nouseva. Suoran yhtälössä vakiotermi on $b = -5$, joten suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -5)$.

c) Jokaisen suoralla olevan pisteen x-koordinaatti on 3. Suora on siis pystysuora ja sen kulmakerrointa ei ole määritelty. Suora kulkee y-akselin suuntaisesti. Suora ei leikkaa y-akselia.

d) Jokaisen suoralla olevan pisteen y-koordinaatti on –2. Suora on siis vaakasuora ja sen kulmakerroin on $k = 0$. Suora kulkee x-akselin suuntaisesti ja leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -2)$.

8.

a) Funktion $f(x)$ kuvaaja on suora $y = \frac{1}{4}x - 2$.

Suoran kulmakerroin on $k = \frac{1}{4} > 0$, joten suora on nouseva.
Suoran yhtälössä vakiotermi on $b = -2$, joten suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -2)$.

Huomaa, että kuvaajan ja y-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti saadaan myös laskemalla funktion arvo, kun $x = 0$.

$$y = f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0 - 2 = -2.$$

b) Funktion $g(x)$ kuvaaja on suora $y = -\frac{3}{4}x + 1$.

Suoran kulmakerroin on $k = -\frac{3}{4} < 0$, joten suora on laskeva.
Suoran yhtälössä vakiotermi on $b = 1$, joten suora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 1)$.

Huomaa, että kuvaajan ja y-akselin leikkauspisteen y-koordinaatti saadaan myös laskemalla funktion arvo, kun $x = 0$:

$$y = g(0) = -\frac{3}{4} \cdot 0 + 1 = 1.$$

9.

a) Kuvaajien perusteella

- suora s leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 1)$
- suora t leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 3)$
- suora l leikkaa ei leikkaa y-akselia
- suora m leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 5)$.

b) Suoran yhtälö on muotoa $y = kx + b$, missä kerroin k on suoran kulmakerroin ja vakiotermi b ilmaisee suoran ja y-akselin leikkauskohdan.

Suoran s kulmakerroin on kuvaajan perusteella $k = 3$ ja a-kohdan perusteella vakiotermi on $b = 1$. Suoran s yhtälö on siis $y = 3x + 1$.

Suora t on vaakasuora ja suoran jokaisen pisteen y-koordinaatti on 3. Suoran yhtälö on $y = 3$.

Suora l on pystysuora ja suoran jokaisen pisteen x-koordinaatti on 2. Suoran yhtälö on $x = 2$.

Suoran m kulmakerroin on kuvaajan perusteella $k = -\frac{1}{2}$ ja a-kohdan perusteella vakiotermi on $b = 5$. Suoran m yhtälö on $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

10.

Suoran kulmakerroin lasketaan jakamalla kahden suoralla olevan pisteen y-koordinaattien muutos pisteiden x-koordinaattien muutoksella:

$$k = \frac{y\text{-muutos}}{x\text{-muutos}}$$

a) Suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{2-(-6)}{5-3} = \frac{8}{2} = 4$$

Huomaa, että y-koordinaattien ja x-koordinaattien muutosta laskettaessa erotukset voidaan laskea myös toisin päin.

$$k = \frac{-6-2}{3-5} = \frac{-8}{-2} = 4$$

b) Suoran kulmakerroin $k = 4 > 0$, joten suora on nouseva.

c) Valitaan toinen suoralla olevista pisteistä, esimerkiksi piste $(5, 2)$. Lasketaan pisteiden $(5, 2)$ ja $(6, 6)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{2-6}{5-6} = \frac{-4}{-1} = 4$$

Kulmakertoimet ovat samat, joten piste $(6, 6)$ on suoralla.

11.

Suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{5-7}{-2-2} = \frac{-2}{-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Huomaa, että y-koordinaattien ja x-koordinaattien muutosta laskettaessa erotukset voidaan laskea myös toisin päin.

$$k = \frac{7-5}{2-(-2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Valitaan toinen suoralla olevista pisteistä, esimerkiksi piste (2, 7). Lasketaan pisteiden (2, 7) ja (4, 9) kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{9-7}{4-2} = \frac{2}{2} = 1 \neq \frac{1}{2}$$

Kulmakertoimet eivät ole samat, joten piste (4, 9) ei ole suoralla.

12.

a) Suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{4-2}{-3-1} = \frac{2}{-4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

b) Suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{1-2}{-1-2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

13.

a) Funktion kuvaajan ja x-akselin leikkauspisteessä y-koordinaatti, eli funktion arvo on nolla. Leikkauspisteen x-koordinaatti saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} 2x - 8 &= 0 \\ 2x &= 8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Funktion kuvaajan ja x-akselin leikkauspiste on $(4, 0)$.

b) Funktion kuvaajan ja y-akselin leikkauspisteessä muuttujan x arvo on nolla. Leikkauspisteen y-koordinaatti saadaan laskemalla funktion arvo kohdassa $x = 0$.

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 8 = -8$$

Funktion kuvaajan ja y-akselin leikkauspiste on $(0, -8)$.

14.

Funktion kuvaajan ja koordinaattiakselien leikkauspisteessä toinen koordinaateista on nolla.

a) x-akselin leikkauspisteessä y-koordinaatti, eli funktion arvo on nolla. Leikkauspisteen x-koordinaatti saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} -3x + 5 &= 0 \\ -3x &= -5 \\ x &= \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Funktion kuvaajan ja x-akselin leikkauspiste on $(\frac{5}{3}, 0)$.

y-akselin leikkauspisteessä muuttujan x arvo on nolla. Leikkauspisteen y-koordinaatti saadaan laskemalla funktion arvo kohdassa $x = 0$.

$$f(0) = -3 \cdot 0 + 5 = 5$$

Funktion kuvaajan ja y-akselin leikkauspiste on $(0, 5)$.

b) x-akselin leikkauspisteessä y-koordinaatti, eli funktion arvo on nolla. Leikkauspisteen x-koordinaatti saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} -5x - 4 &= 0 \\ -5x &= 4 \\ x &= \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Funktion kuvaajan ja x-akselin leikkauspiste on $(-\frac{4}{5}, 0)$.

y-akselin leikkauspisteessä muuttujan x arvo on nolla. Leikkauspisteen y-koordinaatti saadaan laskemalla funktion arvo kohdassa $x = 0$.

$$f(0) = -5 \cdot 0 - 4 = -4$$

Funktion kuvaajan ja y-akselin leikkauspiste on $(0, -4)$.

15.

a) Funktion nollakohta saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$.

$$-\frac{3}{5}x - 6 = 0$$

$$-\frac{3}{5}x = 6 \quad | \cdot 5$$

$$-3x = 30 \quad |: (-3)$$

$$x = \frac{30}{-3} = -10$$

Funktion nollakohta on $x = -10$.

b) Funktion nollakohta saadaan ratkaisemalla yhtälö $g(x) = 0$.

$$\frac{2}{7}x + 4 = 0$$

$$\frac{2}{7}x = -4 \quad | \cdot 7$$

$$2x = -28 \quad |: 2$$

$$x = \frac{-28}{2} = -14$$

Funktion nollakohta on $x = -14$.

c) Funktion $h(x) = 5$ arvo on muuttujan x arvosta riippumatta 5. Funktion kuvaaja on x-akselin suuntainen suora $y = 5$, joka ei leikkaa x-akselia. Funktiolla ei siis ole nollakohtia.

16.

Funktioiden kuvaajat leikkaavat toisensa kohdassa, jossa funktioiden arvot ovat yhtä suuret, eli $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} 12x + 5 &= 8x - 3 \\ 4x &= -8 \quad |: 4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Leikkauspisteessä $x = -2$. Sijoitetaan saatu muuttujan arvo jompaankumpaan funktioon.

$$f(-2) = 12 \cdot (-2) + 5 = -24 + 5 = -19$$

Leikkauspiste on $(-2, -19)$.

17.

Funktioiden kuvaajat leikkaavat toisensa kohdassa, jossa funktioiden arvot ovat yhtä suuret, eli $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} -2x - 4 &= 3x + 1 \\ -5x &= 5 \qquad |:(-5) \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Leikkauspisteessä $x = -1$. Sijoitetaan saatu muuttujan arvo jompaankumpaan funktioon.

$$f(-1) = -2 \cdot (-1) - 4 = 2 - 4 = -2$$

Leikkauspiste on $(-1, -2)$.

Kun $x = -1$, niin suoralla $y = -14x - 12$ olevan pisteen y-koordinaatti on

$$y = -14 \cdot (-1) - 12 = 14 - 12 = 2 \neq -2.$$

Suora ei siis kulje pisteen $(-1, -2)$ kautta.

18.

Funktiot saavat saman arvon kohdassa, jossa $f(x) = g(x)$.

$$6x + 19 = -4x + 13$$

$$10x = -6$$

$$x = -\frac{6}{10}^{(2} = -\frac{3}{5}$$

Funktiot saavat saman arvon kohdassa $x = -\frac{3}{5} = -0{,}6$.

Lasketaan tämä arvo sijoittamalla saatu muuttujan arvo jompaankumpaan funktioon.

$$f(-0{,}6) = 6 \cdot (-0{,}6) + 19 = -3{,}6 + 19 = 15{,}4 = 15\frac{2}{5}$$

Voidaan tarkistaa, että funktio g saa saman arvon.

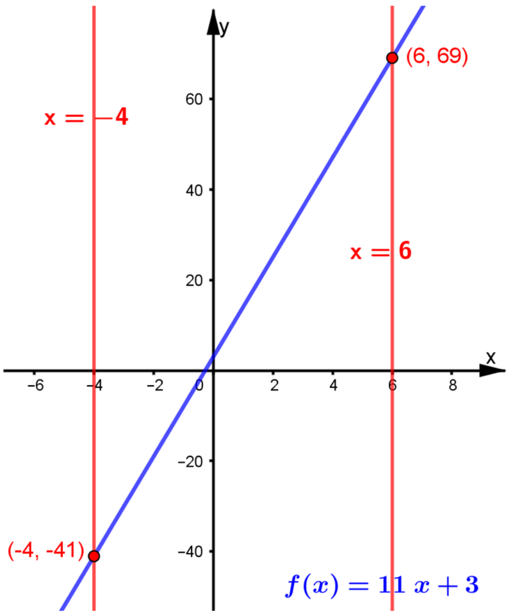
$$g(-0{,}6) = -4 \cdot (-0{,}6) + 13 = 2{,}4 + 13 = 15{,}4 = 15\frac{2}{5}$$

Funktiot f ja g saavat saman arvon kohdassa $x = -\frac{3}{5} = -0{,}6$.
Tämä arvo on $15\frac{2}{5} = 15{,}4$.

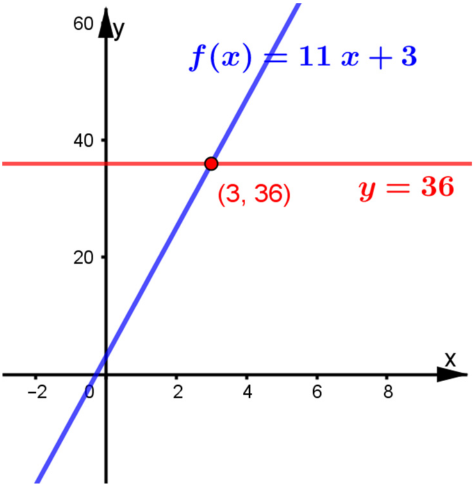
19.

Piirretään kuvaaja laskimella tai piirto-ohjelmalla.

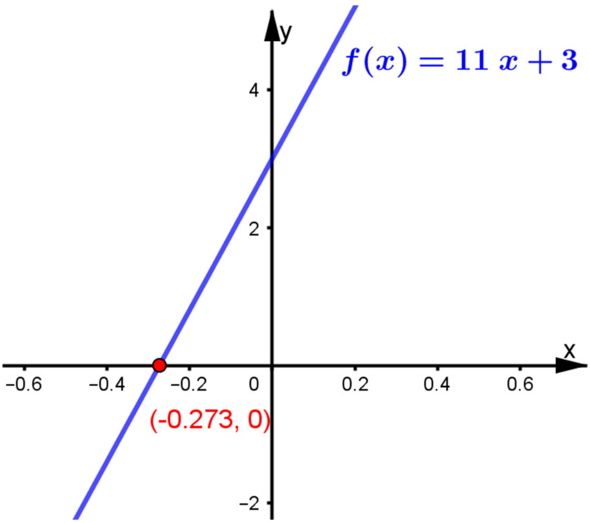
a) Kuvaajan perusteella $f(-4) = -41$ ja $f(6) = 69$.



b) Kuvaajan perusteella kohta, jossa $f(x) = 36$ on $x = 3$.



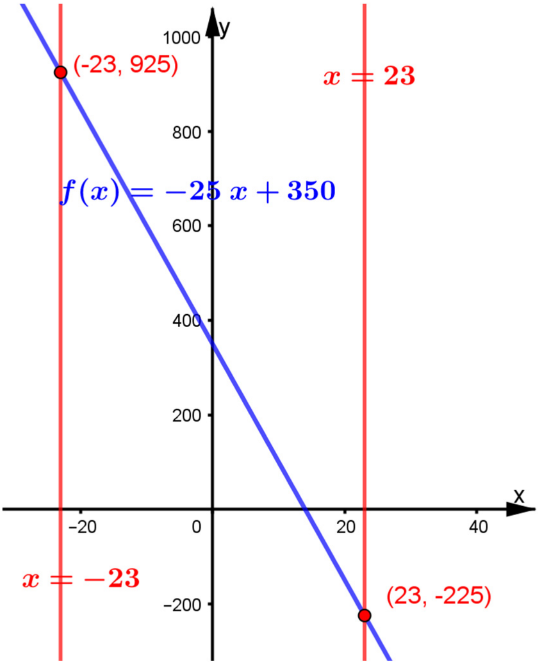
c) Yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisut ovat funktion nollakohtia, eli kuvaajan ja x-akselin leikkauskohtia. Kuvaajan perusteella funktiolla on yksi nollakohta, jonka likiarvo on yhden desimaalin tarkkuudella $x \approx -0{,}3$.



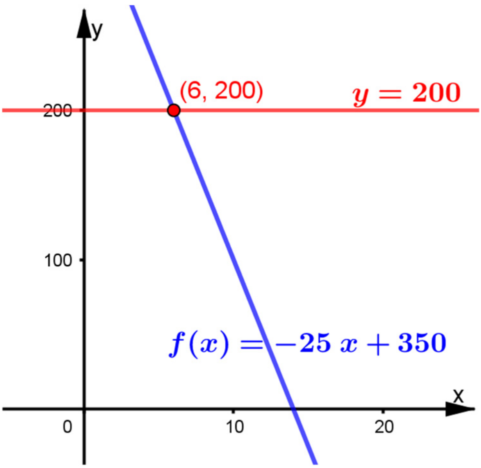
20.

Piirretään kuvaaja laskimella tai piirto-ohjelmalla.

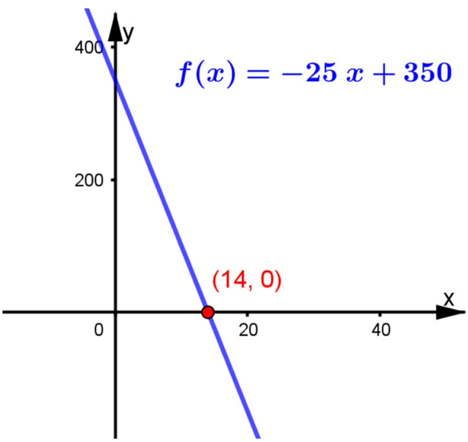
a) Kuvaajan perusteella $f(-23) = 925$ ja $f(23) = -225$.



b) Kuvaajan perusteella kohta, jossa $f(x) = 200$ on $x = 6$.



c) Yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisut ovat funktion nollakohtia, eli kuvaajan ja x-akselin leikkauskohtia. Kuvaajan perusteella funktiolla on yksi nollakohta $x = 14$.



21.

a) Piirretään pisteiden $\left(0, \frac{4}{9}\right)$ ja $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ kautta kulkeva suora laskimella tai piirto-ohjelmalla. Suoran yhtälö on $y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$, joten funktion f lauseke on $f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$.

Huomautus: piirto-ohjelma saattaa antaa suoran kulmakertoimen $-\frac{4}{3}$ ja vakiotermin $\frac{4}{9}$ likiarvona, desimaalimuodossa. Tässä tapauksessa suoran yhtälö on ratkaistava symbolisen laskennan ohjelmalla.

Tehtävä voidaan ratkaista myös ilman teknistä apuvälinettä:

Funktion f kuvaaja on suora, joten funktion lauseke on muotoa $f(x) = kx + b$.

Lasketaan pisteiden $\left(0, \frac{4}{9}\right)$ ja $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin:

$$k = \frac{y - \text{muutos}}{x - \text{muutos}} = \frac{\frac{4}{9} - 0}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{4}{9} : \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 1} = -\frac{12^{(3}}{9} = -\frac{4}{3}$$

Suora kulkee pisteen $\left(0, \frac{4}{9}\right)$ kautta, joten se leikkaa y-akselin kohdassa $b = \frac{4}{9}$.

Funktion f lauseke on siis $f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$.

b) Lasketaan funktion arvot sijoittamalla muuttujan arvo funktion lausekkeeseen. Tämä voidaan tehdä symbolisen laskennan ohjelmalla, laskimella tai ilman apuvälinettä.

$$f\left(-7\frac{2}{3}\right) = f\left(-\frac{23}{3}\right) = -\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{23}{3}\right) + \frac{4}{9} = \frac{96}{9} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

$$f(-3) = -\frac{4}{3}\cdot(-3) + \frac{4}{9} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}$$

$$f\left(25\frac{5}{9}\right) = f\left(\frac{230}{9}\right) = -\frac{4}{3}\cdot\frac{230}{9} + \frac{4}{9} = -\frac{908}{27} = -33\frac{17}{27}$$

22.

a) Lasketaan suoran kulmakerroin:

$$k = \frac{y - \text{muutos}}{x - \text{muutos}} = \frac{4{,}75 - (-0{,}50)}{2{,}35 - 12{,}85} = \frac{5{,}25}{-10{,}5} = -0{,}50$$

b) Pisteen A koordinaatit ovat $(x;\ 0{,}40)$. Muodostetaan pisteen A ja pisteen $(4{,}75;\ 2{,}35)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin:

$$k = \frac{y - \text{muutos}}{x - \text{muutos}} = \frac{4{,}75 - 0{,}40}{2{,}35 - x} = \frac{4{,}35}{2{,}35 - x}$$

Piste A on a-kohdan suoralla, kun kulmakertoimet ovat yhtä suuret. Saadaan yhtälö

$$\frac{4{,}35}{2{,}35 - x} = -0{,}50.$$

Ratkaistaan yhtälö symbolisen laskennan ohjelmistolla: ratkaisu on $x = 11{,}05$.

Pisteen A x-koordinaatti on siis $x = 11{,}05$.

23.

a) Lineaarisen funktion lauseke on muotoa $f(x) = ax + b$.

Ajanhetkellä $x = 0$ vesitornissa on 450 m^3 vettä, eli $f(0) = 450$. Muodostetaan tästä ehdosta yhtälö ja ratkaistaan vakio *b.*

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + b &= 450 \\ b &= 450 \end{aligned}$$

Funktion lausekkeessa vakiotermi on siis $b = 450$.

Tyhjentämiseen kului aikaa yhteensä kolme vuorokautta ja 8 tuntia, eli $3 \cdot 24 + 8 = 80$ tuntia. Ajanhetkellä $x = 80$ vesitornissa ei ollut enää yhtään vettä, eli $f(80) = 0$. Muodostetaan tästä ehdosta yhtälö ja ratkaistaan vakio *a.*

$$\begin{aligned} a \cdot 80 + 450 &= 0 \\ 80a &= -450 \quad |:80 \\ a &= -5{,}625 \end{aligned}$$

Funktion lausekkeessa ensimmäisen asteen termin kerroin on siis $a = -5{,}625$.

Vesitornissa olevan veden määrää kuvaa siis funktio $f(x) = -5{,}625x + 450$, missä muuttuja x on tyhjennyksen aloituksesta kulunut aika tunteina.

b) Yksi vuorokausi on 24 tuntia. Kun muuttujan arvo on $x = 24$, niin vesitornissa olevan veden määrä on

$$f(24) = -5{,}625 \cdot 24 + 450 = 315.$$

Vuorokauden kuluttua tornissa oli vettä 315 m^3.

c) Funktio $f(x)$ ilmaisee tornissa vielä olevan veden määrää. Kun vettä on tyhjennetty 350 kuutiometriä, niin tornissa on $450 - 350 = 100$ kuutiometriä vettä.

Ratkaistaan muuttujan x arvo, jolla funktion $f(x)$ arvo on 100:

$$\begin{aligned} f(x) &= 100 \\ -5{,}625x + 450 &= 100 \\ -5{,}625x &= -350 \quad |:(-5{,}625) \\ x &= 62{,}222\ldots \end{aligned}$$

Kulunut aika on siis $62{,}222\ldots = 62 + 0{,}222\ldots$ tuntia.

Muutetaan $0{,}222\ldots$ tuntia minuuteiksi: yksi tunti on 60 minuuttia, joten $0{,}222\ldots$ tuntia on $0{,}222\ldots \cdot 60 = 13{,}333\ldots$ minuuttia.

Kysytty aika on siis 62 tuntia ja 13 minuuttia.

24.

Funktion nollakohdat saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$:

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

Ratkaisuksi saadaan $x = \frac{-2-8}{2} = \frac{-10}{2} = -5$ tai $x = \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Funktion nollakohdat ovat $x = -5$ ja $x = 3$.

Huippu on nollakohtien puolivälissä, joten huipun x-koordinaatti saadaan laskemalla nollakohtien keskiarvo:

$$x_h = \frac{-5 + 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Huipun y-koordinaatti saadaan laskemalla funktion f arvo kohdassa $x = -1$.

$$y_h = f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 15 = 1 - 2 - 15 = -16$$

Huippu on siis pisteessä $(-1, -16)$.

Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa huipussaan pienimmän arvonsa.

25.

a) Funktion nollakohdat saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$:

$$-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 = 0$$

Ennen ratkaisukaavaan sijoittamista kerrotaan yhtälö puolittain sopivalla luvulla niin, että saadaan kokonaislukukertoimet.

$$-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 = 0 \quad \| \cdot (-4)$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

Ratkaisuksi saadaan $x = \frac{-2-6}{2} = \frac{-8}{2} = -4$ tai $x = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Funktion nollakohdat ovat $x = -4$ ja $x = 2$.

b) Huippu on nollakohtien puolivälissä, joten huipun x-koordinaatti saadaan laskemalla nollakohtien keskiarvo:

$$x_h = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Huipun y-koordinaatti saadaan laskemalla funktion f arvo kohdassa $x = -1$.

$$y_h = f(-1) = -\frac{1}{4} \cdot (-1)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-1) + 2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

Huippu on siis pisteessä $(-1, \frac{9}{4})$.

c) Funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa huipussaan suurimman arvonsa.

26.

a) Funktion g lausekkeessa toisen asteen termin kerroin 3 on positiivinen, joten kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Nollakohdat ratkaistaan yhtälöstä $3x^2 + 9x = 0$. Yhtälö voidaan ratkaista ratkaisukaavalla tai tulon nollasäännöllä.

Käytetään tulon nollasääntöä:

$3x^2 + 9x = 0$

$3x \cdot (x + 3) = 0$

$3x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 3 = 0$

$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -3$

Funktion nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = -3$.

Koska funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, niin funktio saa huipussa pienimmän arvonsa.

b) Funktion f lausekkeessa toisen asteen termin kerroin –5 on negatiivinen, joten kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Nollakohdat ratkaistaan yhtälöstä $-5x^2 + x = 0$. Yhtälö voidaan ratkaista ratkaisukaavalla tai tulon nollasäännöllä.

Käytetään tulon nollasääntöä:

$-5x^2 + x = 0$

$x \cdot (-5x + 1) = 0$

$x = 0 \quad \text{tai} \quad -5x + 1 = 0$

$x = 0 \quad \text{tai} \quad -5x = -1$

$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \dfrac{-1}{-5} = \dfrac{1}{5}$

Funktion nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = \frac{1}{5}$.

Koska funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, niin funktio saa huipussa suurimman arvonsa.

27.

a) Funktion nollakohdat saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$:

$x^2 + x - 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

Ratkaisuksi saadaan $x = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ tai $x = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Funktion nollakohdat ovat $x = -2$ ja $x = 1$.

Huippu on nollakohtien puolivälissä, joten huipun x-koordinaatti saadaan laskemalla nollakohtien keskiarvo:

$$x_h = \frac{-2+1}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Huipun y-koordinaatti saadaan laskemalla funktion f arvo kohdassa $x = -\frac{1}{2}$.

$$y_h = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{1}{4} - 2 = -\frac{9}{4}$$

Huippu on siis pisteessä $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$.

Paraabelin symmetria-akseli kulkee huipun kautta y-akselin suuntaisesti. Symmetria-akselin yhtälö on siis $x = -\frac{1}{2}$.

b) Funktion nollakohdat saadaan ratkaisemalla yhtälö $g(x) = 0$:

$4x^2 + 4x - 3 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{8} = \frac{-4 \pm 8}{8}$$

Ratkaisuksi saadaan $x = \frac{-4-8}{8} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$ tai $x = \frac{-4+8}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Funktion nollakohdat ovat $x = -\frac{3}{2}$ ja $x = \frac{1}{2}$.

Huippu on nollakohtien puolivälissä, joten huipun x-koordinaatti saadaan laskemalla nollakohtien keskiarvo:

$$x_h = \frac{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Huipun y-koordinaatti saadaan laskemalla funktion g arvo kohdassa $x = -\frac{1}{2}$.

$$y_h = g\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

Huippu on siis pisteessä $(-\frac{1}{2}, -4)$.

Paraabelin symmetria-akseli kulkee huipun kautta y-akselin suuntaisesti. Symmetria-akselin yhtälö on siis $x = -\frac{1}{2}$.

28.

Funktion kuvaaja leikkaa y-akselin, kun $x = 0$. Leikkauspisteen y-koordinaatti saadaan laskemalla funktion arvo kohdassa $x = 0$.

Funktion kuvaajan ja x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$. Leikkauspisteen x-koordinaatti saadaan ratkaisemalla funktion nollakohdat.

a) $f(0) = \frac{4}{7} \cdot 0^2 - \frac{5}{7} \cdot 0 = 0$. Funktion f kuvaajan ja y-akselin leikkauspiste on $(0, 0)$.

Funktion nollakohdat saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$. Yhtälö voidaan ratkaista ratkaisukaavalla tai tulon nollasäännöllä. Käytetään tulon nollasääntöä:

$$f(x) = 0$$

$$\frac{4}{7}x^2 - \frac{5}{7}x = 0$$

$$\frac{1}{7}x \cdot (4x - 5) = 0$$

$$\frac{1}{7}x = 0 \quad \text{tai} \quad 4x - 5 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \qquad x = \frac{5}{4}$$

Funktion nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = \frac{5}{4}$.

Funktion f kuvaajalla ja x-akselilla on kaksi leikkauspistettä: $(0, 0)$ ja $(\frac{5}{4}, 0)$.

b) $g(0) = -0{,}1 \cdot 0^2 + 10 = 10$. Funktion g kuvaajan ja y-akselin leikkauspiste on $(0, 10)$.

Funktion nollakohdat saadaan ratkaisemalla yhtälö $g(x) = 0$. Yhtälö voidaan ratkaista ratkaisukaavalla tai neliöjuuren avulla. Käytetään neliöjuurta yhtälön ratkaisemiseen:

$g(x) = 0$

$-0{,}1x^2 + 10 = 0$

$$-0{,}1x^2 = -10 \quad \| : (-0{,}1)$$

$$x^2 = 100 \quad \| \sqrt{}$$

$$x = \pm 10$$

Funktion nollakohdat ovat $x = -10$ ja $x = 10$.

Funktion f kuvaajalla ja x-akselilla on kaksi leikkauspistettä: $(-10, 0)$ ja $(10, 0)$.

29.

Funktion kuvaaja leikkaa y-akselin kun $x = 0$. Leikkauspisteen y-koordinaatti saadaan laskemalla funktio arvo kohdassa $x = 0$.

Funktion kuvaajan ja x-akselin leikkauspisteessä $y = 0$. Leikkauspisteen x-koordinaatti saadaan ratkaisemalla funktion nollakohdat.

a) $f(0) = 4 \cdot 0^2 + 16 = 16$. Funktion f kuvaajan ja y-akselin leikkauspiste on $(0, 16)$.

Funktion nollakohdat saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$. Yhtälö voidaan ratkaista ratkaisukaavalla tai neliöjuuren avulla. Käytetään neliöjuurta yhtälön ratkaisemiseen:

$$4x^2 + 16 = 0$$

$$4x^2 = -16 \quad \|: 4$$

$$x^2 = -4$$

Luvun neliö ei koskaan ole negatiivinen. Funktiolla ei ole nollakohtia.

Funktion f kuvaaja ei leikkaa x-akselia.

b) $g(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 - 5 = -5$. Funktion g kuvaajan ja y-akselin leikkauspiste on $(0, -5)$.

Funktion nollakohdat saadaan ratkaisemalla yhtälö $g(x) = 0$.

$-x^2 + 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{-2}$$

Negatiiviselle luvulle ei ole määritelty neliöjuurta. Funktiolla ei ole nollakohtia.

Funktion g kuvaaja ei leikkaa x-akselia.

30.

a) Leikkauspisteessä funktion *f* arvo on yhtä suurin kuin suoralla olevan pisteen *y*-koordinaatti.

$$f(x) = -8x + 5$$

$$-7x^2 + 6x - 5 = -8x - 5 \quad \| +8x + 5$$

$$-7x^2 + 14x = 0$$

Yhtälö voidaan ratkaista ratkaisukaavalla tai tulon nollasäännöllä. Käytetään tulon nollasääntöä:

$$-7x^2 + 14x = 0$$

$$7x \cdot (-x + 2) = 0$$

$$7x = 0 \quad \text{tai} \quad -x + 2 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

Funktion kuvaaja leikkaa suoran kaksi kertaa: kun $x = 0$ ja kun $x = 2$.

Leikkauspisteiden *y*-koordinaatit saadaan laskemalla joko suoran yhtälöstä tai funktion lausekkeesta.

Kun $x = 0$, niin $y = -8 \cdot 0 - 5 = -5$.

Kun $x = 2$, niin $y = -8 \cdot 2 - 5 = -16 - 5 = -21$.

Leikkauspisteet ovat $(0, -5)$ ja $(2, -21)$.

b) Leikkauspisteessä funktion f arvo on yhtä suurin kuin funktion g arvo. Leikkauspisteen x-koordinaatti saadaan siis ratkaisemalla yhtälö $f(x) = g(x)$.

$$-7x^2 + 6x - 5 = x^2 - 2x - 5 \qquad \| -x^2 + 2x + 5$$

$$-8x^2 + 8x = 0$$

Yhtälö voidaan ratkaista ratkaisukaavalla tai tulon nollasäännöllä. Käytetään tulon nollasääntöä:

$$-8x^2 + 8x = 0$$

$$8x \cdot (-x + 1) = 0$$

$$8x = 0 \quad \text{tai} \quad -x + 1 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \qquad x = 1$$

Leikkauspisteitä on kaksi ja niiden x-koordinaatit ovat $x = 0$ ja $x = 1$.

Leikkauspisteiden y-koordinaatit saadaan laskemalla jommankumman funktion arvo.

Kun $x = 0$, niin $y = f(0) = -7 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 5 = -5$

Kun $x = 1$, niin $y = f(1) = -7 \cdot 1^1 + 6 \cdot 1 - 5 = -7 + 6 - 5 = -6$

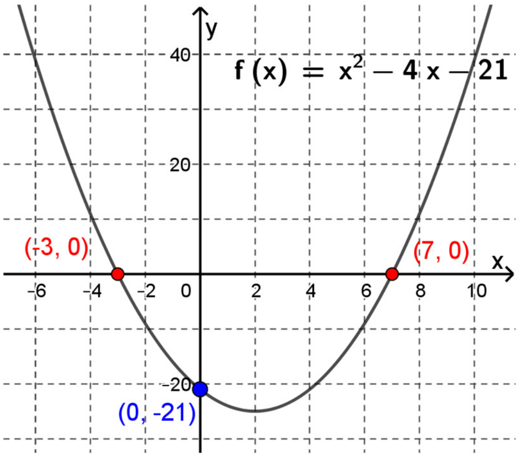
Leikkauspisteet ovat $(0, -5)$ ja $(1, -6)$.

31.

Piirretään funktion $f(x) = x^2 - 4x - 21$ kuvaaja laskimella tai piirto-ohjelmistolla.

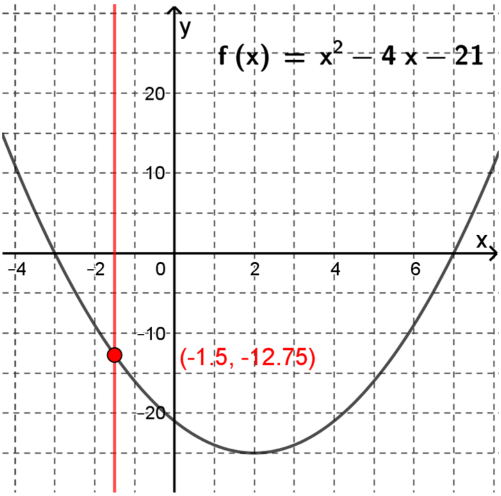
a) Kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä $(0, -21)$.

b) Funktion nollakohdat ovat $x = -3$ ja $x = 7$.



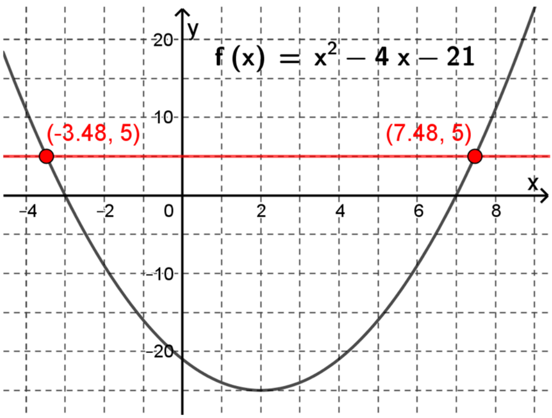
c) Funktion arvo voidaan selvittää piirtämällä kuvaan suora $x = -1{,}5$ ja merkitsemällä suoran ja funktion kuvaajan leikkauspiste.

Kun funktion kuvaajalla olevan pisteen x-koordinaatti on $x = -1{,}5$ niin y-koordinaatti on $y \approx -12{,}8$. Funktion arvo on $f(-1{,}5) \approx -12{,}8$.



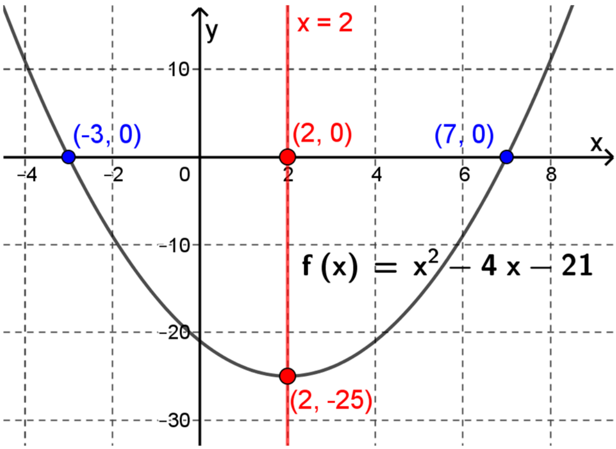
d) Muuttujan arvo voidaan selvittää piirtämällä kuvaan suora $y = 5$ ja merkitsemällä suoran ja funktion kuvaajan leikkauspisteet.

Kun funktion kuvaajalla olevan pisteen y-koordinaatti on $y = 5$, niin x-koordinaatti on $x \approx -3{,}5$ tai $x \approx 7{,}5$. Funktio saa arvon 5, kun $x \approx -3{,}5$ tai $x \approx 7{,}5$.



e) Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa pienimmän arvonsa huipussa. Pienin arvo on huipun y-koordinaatti, joten pienin arvo on $y = -25$.

Huippu saadaan merkityksi kuvaan määrittämällä ensin nollakohtien keskiarvo joko laskemalla tai ohjelmiston toiminnolla. Tämän jälkeen piirretään nollakohtien keskipisteen kautta pystysuora suora. Suora leikkaa funktion kuvaajan huipussa, joten merkitsemällä leikkauspiste näkyviin, saadaan pienin arvo luetuksi leikkauspisteen y-koordinaatista.



32.

Huomaa, että tehtävänannossa ei erikseen mainita, että tehtävän saa ratkaista kuvaajan avulla. Tehtävä on siis ratkaistava laskemalla. Kuvaaja on hyvä apu laskemalla saatujen vastausten tarkistamiseen.

a) Kuvaaja leikkaa y-akselin silloin, kun $x = 0$. Leikkauspisteen y-koordinaatti on funktion arvo kohdassa $x = 0$.

$$y = f(0) = -0^2 - 8 \cdot 0 - 7 = -7$$

Kuvaaja siis leikkaa y-askelin pisteessä $(0, -7)$.

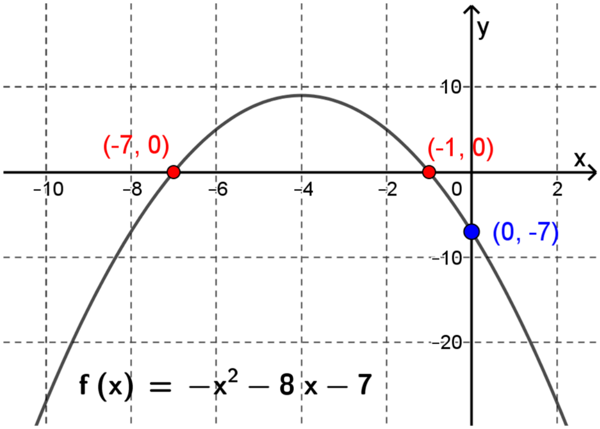
Kuvaaja leikkaa x-akselin silloin, kun $y = 0$. Leikkauspisteen x-koordinaatti on funktion nollakohta, joka ratkaistaan yhtälöstä.

$$f(x) = 0$$
$$-x^2 - 8x - 7 = 0$$

Yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla tai symbolisen laskennan ohjelmalla: $x = -7$ tai $x = -1$.

Kuvaaja siis leikkaa x-akselin pisteissä $(-7, 0)$ ja $(-1, 0)$.

Piirtämällä funktion $f(x) = -x^2 - 8x - 7$ kuvaaja laskimella tai piirto-ohjelmistolla voidaan lasketut leikkauskohdat tarkistaa kuvasta.


y
x
10
-10
-20
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
(-7, 0)
(-1, 0)
(0, -7)
f (x) = −x² − 8 x − 7

b) Funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa suurimman arvonsa huipussa. Huippu on nollakohtien puolivälissä, joten huipun x-koordinaatti saadaan laskemalla nollakohtien keskiarvo:

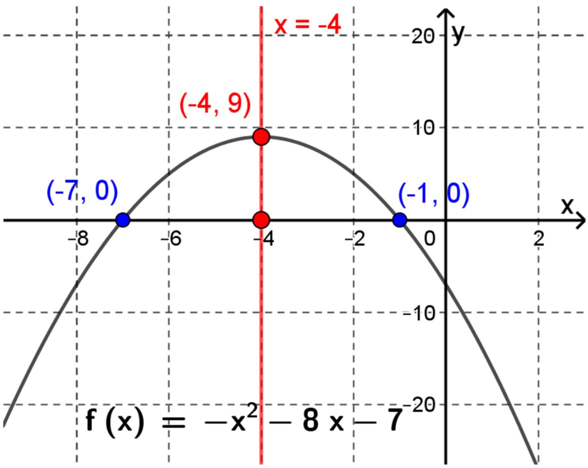
$$x_h = \frac{-7 + (-1)}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Huipun y-koordinaatti saadaan laskemalla funktion f arvo kohdassa $x = -4$.

$$y_h = f(-4) = -(-4)^2 - 8 \cdot (-4) - 7 = -16 + 32 - 7 = 9$$

Huippu on siis pisteessä $(-4, 9)$. Funktion suurin arvo on 9.

Vastaus voidaan tarkistaa merkitsemällä huippu kuvaajalle.



c) Kuvaaja leikkaa suoran $y = x + 7$ silloin, kun $f(x) = x + 7$.

$$f(x) = x + 7$$

$$-x^2 - 8x - 7 = x + 7$$

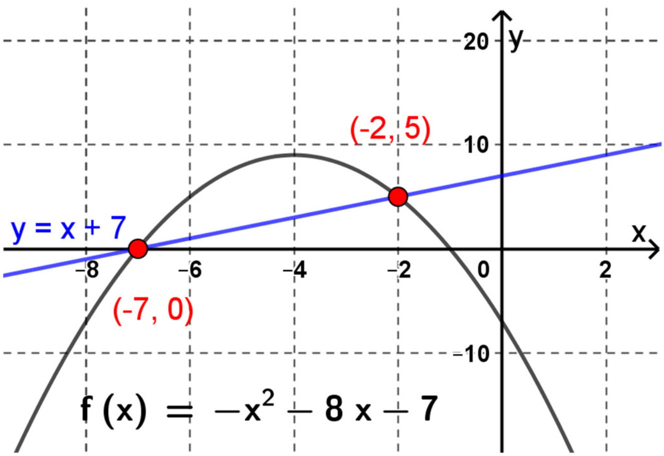
Yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla tai symbolisen laskennan ohjelmalla: $x = -7$ tai $x = -2$. Leikkauspisteiden y-koordinaatit saadaan suoran yhtälöstä tai funktion f lausekkeesta:

Kun $x = -7$, niin $y = -7 + 7 = 0$.

Kun $x = -2$, niin $y = -2 + 7 = -5$.

Kuvaaja siis leikkaa suoran $y = x + 7$ pisteissä $(-7, 0)$ ja $(-2, -5)$.

Vastaus voidaan tarkistaa piirtämällä kuvaan suora $y = x + 7$ ja määrittämällä sen ja funktion f kuvaajan leikkauspisteet.



33.

Tehtävä ratkaistaan laskennallisesti. Funktion $h(x) = -0{,}1x^2 + x + 1{,}8$ kuvaajaa voi käyttää laskemalla saatujen vastauksien tarkistamiseen.

Jos käytössä on symbolinen laskin, funktion lauseke kannattaa ratkaisun aluksi tallentaa laskimen muistiin. Tämä nopeuttaa arvojen laskemista ja yhtälöiden ratkaisemista.

a) Irtoamishetkellä $x = 0$ ja funktion h arvo ilmaisee pallon korkeuden. Lasketaan siis funktion h arvo kohdassa $x = 0$.

$$h(0) = -0{,}1 \cdot 0^2 + 0 + 1{,}8 = 1{,}8 \text{ (metriä)}$$

b) Lento päättyy, eli pallo osuu maahan silloin, kun korkeus eli funktion h arvo on nolla. Ratkaistaan siis yhtälö $h(x) = 0$.

$$h(x) = 0$$
$$-0{,}1x^2 + x + 1{,}8 = 0$$

Yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla tai symbolisen laskennan ohjelmalla:

$$x = -1{,}557\ldots \approx -2 \text{ tai } x = 11{,}557\ldots \approx 12$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa lentoajaksi. Pallo lentää 12 sekuntia.

c) Kun $x = 1{,}5$, niin pallon korkeus on

$$h(1{,}5) = -0{,}1 \cdot 1{,}5^2 + 1{,}5 + 1{,}8 \approx 3{,}1 \text{ (metriä)}$$

d) Ajanhetki x ratkaistaan yhtälöstä $h(x) = 1{,}0$.

$$h(x) = 1{,}0$$
$$-0{,}1x^2 + x + 1{,}8 = 1{,}0$$

Yhtälö ratkaistaan ratkaisukaavalla tai symbolisen laskennan ohjelmalla:

$$x \approx -0{,}7 \text{ tai } x \approx 10{,}7$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa lentoajaksi. Pallon korkeus on 1,0 metriä ajanhetkellä 11 sekuntia.

e) Pallon korkeutta kuvaavan funktion h kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa huipussa suurimman arvonsa. Huippu on nollakohtien $x = -1{,}557\ldots$ ja $x = 11{,}557\ldots$ puolivälissä, joten huipun x-koordinaatti saadaan laskemalla nollakohtien keskiarvo.

$$x_h = \frac{-1{,}557\ldots + 11{,}557\ldots}{2} = 5$$

Huipun y-koordinaatti, eli pallon suurin korkeus, saadaan laskemalla funktion h arvo kohdassa $x = 5$.

$$y_h = h(5) = -0{,}1 \cdot 5^2 + 5 + 1{,}8 = 4{,}3 \text{ (metriä)}$$

34.

a) Ratkaistaan millä muuttujan *x* arvolla funktion f arvo on -12:

$$f(x) = -12$$

$$x^2 - 8x - 5 = -12$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2}$$

Ratkaisuksi saadaan $x = \frac{8-6}{2} = \frac{2}{2} = 1$ tai $x = \frac{8+6}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

Funktio f saa arvon -12 kohdissa $x = 1$ ja $x = 7$.

Ratkaistaan millä muuttujan *x* arvolla funktion g arvo on -12:

$$g(x) = -12$$

$$6x - 7 = -12$$

$$6x = -5 \quad |:6$$

$$x = -\frac{5}{6}$$

Funktio g saa arvon –12 kohdassa $x = -\frac{5}{6}$.

b) $f(-2) = (-2)^2 - 8 \cdot (-2) - 5 = 4 + 16 - 5 = 15$

$g(-2) = 6 \cdot (-2) - 7 = -12 - 7 = -19$

35.

a) Suoralla olevien pisteiden y-koordinaattien muutos on

$$\Delta y = -1 - \left(-\frac{4}{3}\right) = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

Suoralla olevien pisteiden x-koordinaattien muutos on

$$\Delta x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} = -2.$$

Suoran kulmakerroin on

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{3} : (-2) = -\frac{1}{6}$$

b) Suoran kulmakerroin on $k = -\frac{1}{6} < 0$, joten suora on laskeva.

c) Lasketaan pisteiden $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ ja $\left(-\frac{2}{3}, -2\right)$ kautta kulkevan suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-(-2)}{-\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{-1+2}{-\frac{3}{6} + \frac{4}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 1 : \frac{1}{6} = 6 \neq -\frac{1}{6}$$

Kulmakertoimet eivät ole samat, joten piste $\left(-\frac{2}{3}, -2\right)$ ei ole suoralla.

36.

Kuvaajan ja x-akselin leikkauspisteessä y-koordinaatti on nolla, eli $f(x) = 0$.

$$
\begin{aligned}
1{,}2x + 7{,}2 &= 0 \\
1{,}2x &= -7{,}2 \\
x &= \frac{-7{,}2}{1{,}2} = -\frac{7{,}2}{1{,}2} = -6
\end{aligned}
$$

Funktion kuvaajan ja x-akselin leikkauspiste on $(-6, 0)$.

Kuvaajan ja y-akselin leikkauspisteessä $x = 0$.

$$y = f(0) = 1{,}2 \cdot 0 + 7{,}2 = 7{,}2$$

Funktion kuvaajan ja y-akselin leikkauspiste on $(0; 7{,}2)$.

37.

Leikkauspisteessä funktioiden arvot ovat yhtä suuret, eli $f(x) = g(x)$.

$$-4x + 9 = 7x + 31 \quad \| -7x - 9$$

$$-11x = 22 \quad \| : (-11)$$

$$x = \frac{22}{-11} = -2$$

Funktioiden kuvaajat leikkaavat kohdassa $x = -2$.

Leikkauspisteen y-koordinaatti saadaan laskemalla jommankumman funktion arvo.

$$y = f(-2) = -4 \cdot (-2) + 9 = 8 + 9 = 17$$

Leikkauspiste on siis $(-2, 17)$.

38.

a) Funktion nollakohdat saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$.

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0$$

Ennen ratkaisukaavaan sijoittamista kerrotaan yhtälö puolittain sopivalla luvulla niin, että saadaan kokonaislukukertoimet.

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0 \quad \| \cdot 2$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

Ratkaisuksi saadaan $x = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$ tai $x = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

Funktion nollakohdat ovat $x = 2$ ja $x = 4$.

b) Huippu on nollakohtien puolivälissä. Huipun x-koordinaatti saadaan laskemalla nollakohtien keskiarvo.

$$x_h = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Huipun y-koordinaatti saadaan laskemalla funktion f arvo kohdassa $x = 3$.

$$y_h = f(3) = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 4 = \frac{9}{2} - 9 + 4 = -\frac{1}{2}$$

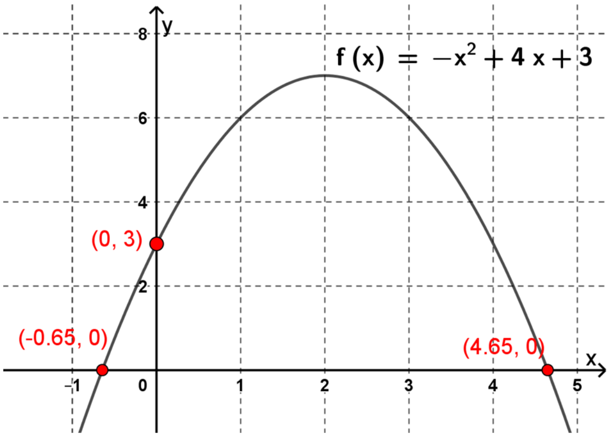
Huippu on pisteessä $(3\,, -\frac{1}{2})$.

c) Funktion f kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa huipussa pienimmän arvonsa.

39.

Piirretään funktion $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ kuvaaja laskimella tai piirto-ohjelmistolla.

a) Kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä $(0, 3)$ ja x-akselin pisteissä $(-0{,}65; 0)$ ja $(4{,}65; 0)$.

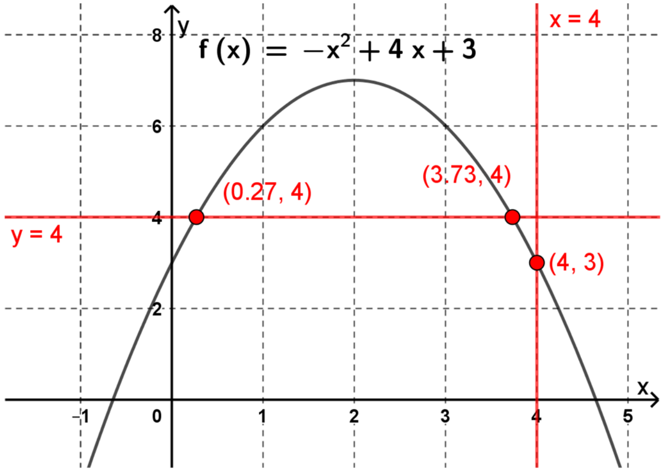


b) Piirretään kuvaan suora $x = 4$ ja merkitään näkyviin suoran ja funktion kuvaajan leikkauspiste. Leikkauspisteen $(4, 3)$ y-koordinaatti ilmoittaa funktion arvon.

Funktion arvo on $f(4) = 3$.

c) Piirretään kuvaan suora $y = 4$ ja merkitään näkyviin suoran ja funktion kuvaajan leikkauspisteet.

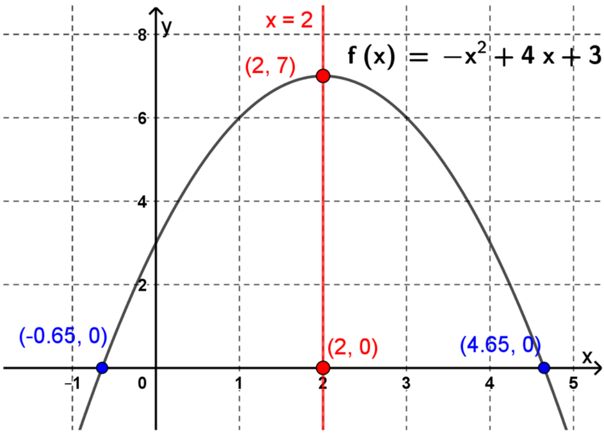
Funktion arvo $f(x) = 4$, kun $x \approx 0{,}27$ tai $x \approx 3{,}73$.



d) Funktion f kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa suurimman arvonsa huipussa. Huippu on nollakohtien puolivälissä.

Merkitään kuvaan nollakohtien puoliväli. Se on $(2, 0)$. Piirretään suora $x = 2$. Suora leikkaa funktion f kuvaajan huipussa $(2, 7)$.

Funktion suurin arvo on $f(2) = 7$.



1.2 Funktion merkki

40.

a) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion f arvo on nolla tai negatiivinen. Kuvaajasta nähdään, että funktiolla f on nollakohta $x = 2$ ja nollakohdan jälkeen, eli kun $x > 2$, kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, eli funktion arvo on negatiivinen.

Kuvaajan perusteella $f(x) \leq 0$, kun $x \geq 2$.

b) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion g arvo on nolla tai positiivinen. Kuvaajasta nähdään, että funktiolla g on nollakohta $x = -1$ ja nollakohdan jälkeen, eli kun $x > -1$, kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli funktion arvo on positiivinen.

Kuvaajan perusteella $g(x) \geq 0$, kun $x \geq -1$.

c) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion h arvo on positiivinen. Kuvaajasta nähdään, että funktiolla h on nollakohta $x = 4$ ja nollakohdan jälkeen, eli kun $x > 4$, kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli funktion arvo on positiivinen.

Kuvaajan perusteella $h(x) > 0$, kun $x > 4$.

41.

a) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion f arvo on positiivinen. Kuvaajasta nähdään, että funktiolla f on nollakohta $x = 4$ ja ennen nollakohtaa, eli kun $x < 4$, kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli funktion arvo on positiivinen.

Kuvaajan perusteella $f(x) > 0$, kun $x < 4$.

b) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion g arvo on nolla tai positiivinen. Kuvaajasta nähdään, että funktiolla g on nollakohta $x = -2$ ja nollakohdan jälkeen, eli kun $x > -2$, kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli funktion arvo on positiivinen.

Kuvaajan perusteella $g(x) \geq 0$, kun $x \geq -2$.

c) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion g arvo on suurempi kuin funktion f arvo. Kuvaajasta nähdään, että funktioilla on sama arvo silloin, kun $x = 0$. Tämän kohdan jälkeen, eli kun $x > 0$, funktion g kuvaaja kulkee funktion f kuvaajan yläpuolella, eli funktion g arvo on suurempi kuin funktion f arvo.

Kuvaajan perusteella $g(x) > f(x)$, kun $x > 0$.

42.

a) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan *x* arvot, joilla funktion *h* arvo on nolla tai negatiivinen. Kuvaajasta nähdään, että funktiolla *h* on nollakohta $x = 2$ ja nollakohdan jälkeen, eli kun $x > 2$, kuvaaja kulkee *x*-akselin alapuolella, eli funktion arvo on negatiivinen.

Kuvaajan perusteella $h(x) \leq 0$, kun $x \geq 2$.

b) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan *x* arvot, joilla funktion *i* arvo on positiivinen. Kuvaajasta nähdään, että funktiolla *i* on nollakohta $x = 6$ ja nollakohdan jälkeen, eli kun $x > 6$, kuvaaja kulkee *x*-akselin yläpuolella, eli funktion arvo on positiivinen.

Kuvaajan perusteella $i(x) > 0$, kun $x > 6$.

c) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan *x* arvot, joilla funktion *h* arvo on yhtä suuri tai pienempi kuin funktion *i* arvo. Kuvaajasta nähdään, että funktioilla on sama arvo silloin, kun $x = 3$. Tämän kohdan jälkeen, eli kun $x > 3$, funktion *i* kuvaaja kulkee funktion *h* kuvaajan yläpuolella, eli funktion *i* arvo on suurempi kuin funktion *h* arvo.

Kuvaajan perusteella $h(x) \leq i(x)$, kun $x \geq 3$.

43.

Ensimmäisen asteen epäyhtälö ratkaistaan samojen periaatteiden mukaan kuin ensimmäisen asteen yhtälö. Ainoa poikkeus on tilanne, jossa epäyhtälö kerrotaan tai jaetaan negatiivisella luvulla: tällöin epäyhtälömerkin suunta kääntyy.

a)

$$6(x-9) > 2(x-1)$$

$$6x - 54 > 2x - 2$$

$$6x - 2x > -2 + 54$$

$$4x > 52 \qquad |:4$$

$$x > \frac{52}{4}$$

$$x > 13$$

b)

$$3(x+6) \leq 5(x-6)$$

$$3x + 18 \leq 5x - 30$$

$$3x - 5x \leq -30 - 18$$

$$-2x \leq -48 \qquad |:(-2)$$

$$x \geq 24$$

44.

Ensimmäisen asteen epäyhtälö ratkaistaan samojen periaatteiden mukaan kuin ensimmäisen asteen yhtälö. Ainoa poikkeus on tilanne, jossa epäyhtälö kerrotaan tai jaetaan negatiivisella luvulla: tällöin epäyhtälömerkin suunta kääntyy.

a)

$$2(-2x+7) \leq -3(x-5)$$

$$-4x+14 \leq -3x+15$$

$$-4x+3x \leq 15-14$$

$$-x \leq 1 \qquad |:(-1)$$

$$x \geq -1$$

b)

$$5(7x-2) < -10(x-2)$$

$$35x-10 < -10x+20$$

$$35x+10x < 20+10$$

$$45x < 30 \qquad |:30$$

$$x < \frac{30}{45}$$

$$x < \frac{2}{3}$$

45.

Ensimmäisen asteen epäyhtälö ratkaistaan samojen periaatteiden mukaan kuin ensimmäisen asteen yhtälö. Ainoa poikkeus on tilanne, jossa epäyhtälö kerrotaan tai jaetaan negatiivisella luvulla: tällöin epäyhtälömerkin suunta kääntyy.

a)

$$-8(5x-4) < -3(6x-8)$$

$$-40x+32 < -18x+24$$

$$-40x+18x < 24-32$$

$$-22x < -8 \qquad |:(-22)$$

$$x > \frac{8}{22}$$

$$x > \frac{4}{11}$$

b)

$$12(3x+5) \geq 4(6x-5)$$

$$36x+60 \geq 24x-20$$

$$36x-24x \geq -20-60$$

$$12x \geq -80 \qquad |:12$$

$$x \geq -\frac{80}{12}$$

$$x \geq -\frac{20}{3}$$

46.

Ensimmäisen asteen epäyhtälö ratkaistaan samojen periaatteiden mukaan kuin ensimmäisen asteen yhtälö. Ainoa poikkeus on tilanne, jossa epäyhtälö kerrotaan tai jaetaan negatiivisella luvulla: tällöin epäyhtälömerkin suunta kääntyy.

a)

$$2\left(-\frac{3}{4}x+1\right) \leq 5\left(\frac{3}{10}x+1\right)$$

$$-\frac{3}{2}x+2 \leq \frac{3}{2}x+5$$

$$-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}x \leq 5-2$$

$$-\frac{6}{2}x \leq 3$$

$$-3x \leq 3 \qquad |:(-3)$$

$$x \geq -1$$

b)

$$-4\left(-\frac{1}{5}x+2\right) \geq 3\left(\frac{7}{15}x-3\right)$$

$$\frac{4}{5}x-8 \geq \frac{7}{5}x-9$$

$$\frac{4}{5}x-\frac{7}{5}x \geq -9+8$$

$$-\frac{3}{5}x \geq -1 \qquad | \cdot 5$$

$$-3x \geq -5 \qquad |:(-3)$$

$$x \leq \frac{-5}{-3}$$

$$x \leq \frac{5}{3}$$

47.

a)

$$8(x+3)-4(x-2) \geq 5(x+1)+7$$
$$8x+24-4x+8 \geq 5x+5+7$$
$$4x+32 \geq 5x+12$$
$$4x-5x \geq 12-32$$
$$-x \geq -20 \qquad |:(-1)$$
$$x \leq 20$$

b)

$$-(7x-12)+9(x-3) \leq 6(x-2)-(x+3)$$
$$-7x+12+9x-27 \leq 6x-12-x-3$$
$$2x-15 \leq 5x-15$$
$$2x-5x \leq -15+15$$
$$-3x \leq 0 \qquad |:(-3)$$
$$x \geq 0$$

48.

Funktion f kuvaaja kulkee funktion g kuvaajan yläpuolella silloin, kun $f(x) > g(x)$. Ratkaistaan siis epäyhtälö $4x + 3 > -5x - 6$.

$$
\begin{aligned}
4x + 3 &> -5x - 6 \\
4x + 5x &> -6 - 3 \\
9x &> -9 \qquad |:9 \\
x &> -1
\end{aligned}
$$

Funktion f kuvaaja kulkee funktion g kuvaajan yläpuolella silloin, kun $x > -1$.

49.

Funktion f kuvaaja kulkee funktion g kuvaajan alapuolella silloin, kun $f(x) < g(x)$. Ratkaistaan siis epäyhtälö $0{,}2x + 1 < -0{,}6x - 3$.

$$0{,}2x + 1 < -0{,}6x - 3$$
$$0{,}2x + 0{,}6x < -3 - 1$$
$$0{,}8x < -4 \qquad |:0{,}8$$
$$x < -5$$

Funktion f kuvaaja kulkee funktion g kuvaajan alapuolella silloin, kun $x < -5$.

50.

Funktion f kuvaaja kulkee funktion g kuvaajan yläpuolella silloin, kun $f(x) > g(x)$. Ratkaistaan siis epäyhtälö $10x + 3 > -x - 8$.

$$10x + 3 > -x - 8$$
$$10x + x > -8 - 3$$
$$11x > -11 \quad |:11$$
$$x > -1$$

Funktion f kuvaaja kulkee funktion g kuvaajan yläpuolella silloin, kun $x > -1$.

51.

Funktio *f* saa suuremman arvon kuin funktio g silloin, kun

$f(x) > g(x)$.

Ratkaistaan siis epäyhtälö $-2\frac{3}{4}x + 3 > 2$.

$-2\frac{3}{4}x + 3 > 2$ *muutetaan kerroin* $-2\frac{3}{4}$ *murtoluvuksi*

$$-\frac{11}{4}x + 3 > 2$$

$$-\frac{11}{4}x > -1 \qquad \| \cdot 4$$

$$-11x > -4 \qquad \| : (-11)$$

$$x < \frac{-4}{-11}$$

$$x < \frac{4}{11}$$

Huomaa: epäyhtälömerkin suunta vaihtuu, kun epäyhtälö jaetaan negatiivisella luvulla.

Funktio *f* saa suuremman arvon kuin funktio g silloin, kun $x < \frac{4}{11}$.

52.

a) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion f arvo on nolla tai positiivinen. Kuvaajasta nähdään, että funktiolla f on nollakohdat $x = -4$ ja $x = 3$. Funktion arvo on positiivinen silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella.

Kuvaajan perusteella $f(x) \geq 0$, kun $x \leq -4$ tai kun $x \geq 3$.

b) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion g arvo on positiivinen. Kuvaajasta nähdään, että funktiolla g on nollakohdat $x = -4$ ja $x = 0$. Funktion arvo on positiivinen silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella.

Kuvaajan perusteella $g(x) > 0$, kun $-4 < x < 0$.

53.

a) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion f arvo on nolla tai negatiivinen. Kuvaajasta nähdään, että funktiolla f on nollakohdat $x = 2$ ja $x = 6$. Funktion arvo on negatiivinen silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella.

Kuvaajan perusteella $f(x) \leq 0$, kun $2 \leq x \leq 6$.

b) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion f arvo on nolla tai positiivinen. Kuvaajasta nähdään, että funktiolla f on nollakohdat $x = -3$ ja $x = 1$. Funktion arvo on positiivinen silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella.

Kuvaajan perusteella $f(x) \geq 0$, kun $-3 \leq x \leq 1$.

c) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion f arvo on negatiivinen. Kuvaajasta nähdään, että funktiolla f on nollakohdat $x = -10$ ja $x = -5$. Funktion arvo on negatiivinen silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella.

Kuvaajan perusteella $f(x) < 0$, kun $x < -10$ tai kun $x > -5$.

d) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion f arvo on positiivinen. Kuvaajasta nähdään, että funktiolla f on nollakohdat $x = 6$ ja $x = 9$. Funktion arvo on positiivinen silloin, kun kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella.

Kuvaajan perusteella $f(x) > 0$, kun $x < 6$ tai kun $x > 9$.

54.

a) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion g arvo on positiivinen. Kuvaajan perusteella funktiolla ei ole nollakohtia ja kuvaaja kulkee koko ajan x-akselin yläpuolella, eli funktion arvo on positiivinen.

Kuvaajan perusteella $g(x) > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.

b) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion h arvo on positiivinen. Kuvaajan perusteella funktiolla ei ole nollakohtia ja kuvaaja kulkee koko ajan x-akselin alapuolella, eli funktion arvo on negatiivinen.

Kuvaajan perusteella epäyhtälö $h(x) > 0$ ei toteudu millään muuttujan x arvolla, eli epäyhtälöllä ei ole ratkaisuja.

c) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion g arvo on positiivinen. Kuvaajan perusteella funktiolla on nollakohta $x = 2$ ja muutoin kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella, eli funktion arvo on positiivinen.

Kuvaajan perusteella $g(x) > 0$ kaikilla muilla muuttujan x arvoilla lukuun ottamatta arvoa $x = 2$, eli epäyhtälön ratkaisut toteuttavat ehdon $x \neq 2$.

d) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion h arvo on nolla tai positiivinen. Kuvaajan perusteella funktiolla on nollakohta $x = 5$ ja muutoin kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, eli funktion arvo on negatiivinen.

Kuvaajan perusteella epäyhtälö $h(x) \geq 0$ toteutuu ainoastaan, kun $x = 5$.

55.

a) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion f arvo on positiivinen. Kuvaajan perusteella funktiolla ei ole nollakohtia ja kuvaaja kulkee koko ajan x-akselin alapuolella, eli funktion arvo on negatiivinen.

Kuvaajan perusteella epäyhtälö $f(x) > 0$ ei toteudu millään muuttujan x arvolla, eli epäyhtälöllä ei ole ratkaisuja.

b) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion g arvo on positiivinen. Kuvaajan perusteella funktiolla on nollakohdat $x = -3$ ja $x = 2$ ja kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella kun $x < -3$ ja kun $x > 2$.

Kuvaajan perusteella $g(x) > 0$ kun $x < -3$ tai kun $x > 2$.

c) Epäyhtälön ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion f arvo on suurempi kuin funktion g arvo. Kuvaajasta nähdään, että funktioilla on sama arvo silloin, kun $x = -2$ tai kun $x = 1$. Leikkauskohtien välissä, eli kun $-2 < x < 1$, funktion f kuvaaja kulkee funktion g kuvaajan yläpuolella, eli funktion f arvo on suurempi kuin funktion g arvo.

Kuvaajan perusteella $f(x) > g(x)$, kun $-2 < x < 1$.

56.

Toisen asteen epäyhtälö ratkaistaan neljässä vaiheessa:
(1) Sievennetään epäyhtälöä niin, että sen oikealla puolella on ainoastaan nolla. Merkitään vasemmalle puolelle epäyhtälömerkkiä jäävä lauseke funktioksi *f*.
(2) Ratkaistaan funktion *f* nollakohdat.
(3) Hahmotellaan funktion *f* kuvaaja. Merkitään kuvaan nollakohdat sekä funktion arvojen merkit.
(4) Päätellään epäyhtälön ratkaisu nollakohtien ja kuvaajan avulla.

a)

$$-x^2 - x \geq -12$$
$$\underbrace{-x^2 - x + 12}_{=f(x)} \geq 0$$

Nollakohdat: $-x^2 - x + 12 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{-2} = \frac{1 \pm 7}{-2}$$

Nollakohdat ovat $x = \frac{1-7}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$ ja $x = \frac{1+7}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$.

Funktion $f(x) = -x^2 - x + 12$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Hahmotellaan kuvaaja ja merkitään kuvaan nollakohdat sekä funktion arvojen merkit.

Päätellään epäyhtälön $-x^2 - x + 12 \geq 0$ ratkaisu kuvaajan avulla: funktion arvo on nolla tai positiivinen silloin, kun $-4 \leq x \leq 3$.

Alkuperäinen epäyhtälö $-x^2 - x \geq -12$ toteutuu samalla välillä, eli kun $-4 \leq x \leq 3$.

b)

$$x^2 + 2x > 8$$
$$\underbrace{x^2 + 2x - 8}_{=f(x)} > 0$$

Nollakohdat: $x^2 + 2x - 8 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

Nollakohdat ovat $x = \frac{-2-6}{2} = \frac{-8}{2} = -4$ ja $x = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Funktion $f(x) = x^2 + 2x - 8$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Hahmotellaan kuvaaja ja merkitään kuvaan nollakohdat sekä funktion arvojen merkit.

Päätellään epäyhtälön $x^2 + 2x - 8 > 0$ ratkaisu kuvaajan avulla: funktion arvo on positiivinen silloin, kun $x < -4$ tai $x > 2$.

Alkuperäinen epäyhtälö $x^2 + 2x > 8$ toteutuu samoilla väleillä, eli kun $x < -4$ tai $x > 2$.

57.

a) $2x^2 - 32 > 0$

Nollakohdat:

$$
\begin{aligned}
2x^2 - 32 &= 0 \\
2x^2 &= 32 \quad |:2 \\
x^2 &= 16 \quad |\sqrt{} \\
x &= \pm 4
\end{aligned}
$$

Nollakohdat ovat $x = -4$ ja $x = 4$.

Funktion $f(x) = 2x^2 - 32$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Hahmotellaan kuvaaja ja merkitään kuvaan nollakohdat sekä funktion arvojen merkit.

Päätellään epäyhtälön $2x^2 - 32 > 0$ ratkaisu kuvaajan avulla: funktion arvo on positiivinen silloin, kun $x < -4$ tai $x > 4$.

b)

$$x^2 + 6x \leq 7$$
$$\underbrace{x^2 + 6x - 7}_{=f(x)} \leq 0$$

Nollakohdat: $x^2 + 6x - 7 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-6 \pm 8}{2}$$

Nollakohdat ovat $x = \frac{-6-8}{2} = \frac{-14}{2} = -7$ ja $x = \frac{-6+8}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Funktion $f(x) = x^2 + 6x - 7$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Hahmotellaan kuvaaja ja merkitään kuvaan nollakohdat sekä funktion arvojen merkit.

Päätellään epäyhtälön $x^2 + 6x - 7 \leq 0$ ratkaisu kuvaajan avulla: funktion arvo on nolla tai negatiivinen silloin, kun $-7 \leq x \leq 1$.

Alkuperäinen epäyhtälö $x^2 + 6x \leq 7$ toteutuu samalla välillä, eli kun $-7 \leq x \leq 1$.

58.

a)

$$\frac{1}{4}x^2 \leq x$$

$$\underbrace{\frac{1}{4}x^2 - x}_{=f(x)} \leq 0$$

Ratkaistaan nollakohdat.

$$\frac{1}{4}x^2 - x = 0 \qquad | \cdot 4$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

Nollakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 4$.

Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Hahmotellaan kuvaaja ja merkitään kuvaan nollakohdat sekä funktion arvojen merkit.

Päätellään epäyhtälön $\frac{1}{4}x^2 - x \leq 0$ ratkaisu kuvaajan avulla: funktion arvo on nolla tai negatiivinen silloin, kun $0 \leq x \leq 4$.

Alkuperäinen epäyhtälö $\frac{1}{4}x^2 \leq x$ toteutuu samalla välillä, eli kun $0 \leq x \leq 4$.

b)

$$-9x^2 + 2 < 3x$$
$$\underbrace{-9x^2 - 3x + 2}_{=f(x)} < 0$$

Ratkaistaan nollakohdat:

$-9x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-9) \cdot 2}}{2 \cdot (-9)} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{-18} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{-18} = \frac{3 \pm 9}{-18}$$

Nollakohdat ovat $x = \frac{3-9}{-18} = \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}$ ja $x = \frac{3+9}{-18} = \frac{12}{-18} = -\frac{2}{3}$.

Funktion $f(x) = -9x^2 - 3x + 2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Hahmotellaan kuvaaja ja merkitään kuvaan nollakohdat sekä funktion arvojen merkit.

Päätellään epäyhtälön $-9x^2 - 3x + 2 < 0$ ratkaisu kuvaajan avulla: funktion arvo on negatiivinen silloin, kun $x < -\frac{2}{3}$ tai kun $x > \frac{1}{3}$.

Alkuperäinen epäyhtälö $-9x^2 + 2 < 3x$ toteutuu samalla välillä, eli $x < -\frac{2}{3}$ tai kun $x > \frac{1}{3}$.

59.

a) $-2x^2 + 12 > 0$

Nollakohdat:

$-2x^2 + 12 = 0$

$$-2x^2 = -12 \quad |:(-2)$$

$$x^2 = 6 \quad |\sqrt{}$$

$$x = \pm\sqrt{6}$$

Nollakohdat ovat $x = -\sqrt{6}$ ja $x = \sqrt{6}$.

Funktion $f(x) = -2x^2 + 12$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Hahmotellaan kuvaaja ja merkitään kuvaan nollakohdat sekä funktion arvojen merkit.

Päätellään epäyhtälön $-2x^2 + 12 > 0$ ratkaisu kuvaajan avulla: funktion arvo on positiivinen silloin, kun $-\sqrt{6} < x < \sqrt{6}$.

b)

$$3x^2 \geq -5x + 2$$

$$3x^2 + 5x - 2 \geq 0$$

Nollakohdat:

$3x^2 + 5x - 2 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6}$$

Nollakohdat ovat $x = \frac{-5-7}{6} = \frac{-12}{6} = -2$ ja $x = \frac{-5+7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Funktion $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Hahmotellaan kuvaaja ja merkitään kuvaan nollakohdat sekä funktion arvojen merkit.

Päätellään epäyhtälön $3x^2 + 5x - 2 \geq 0$ ratkaisu kuvaajan avulla: funktion arvo on nolla tai positiivinen silloin, kun $x \leq -2$ tai kun $x \geq \frac{1}{3}$.

Alkuperäinen epäyhtälö $3x^2 \geq -5x + 2$ toteutuu samoilla väleillä, eli kun $x \leq -2$ tai kun $x \geq \frac{1}{3}$.

60.

$$(2x-3)(3x-1) > x(5x-7)$$
$$6x^2-2x-9x+3 > 5x^2-7x$$
$$6x^2-11x+3 > 5x^2-7x$$
$$\underbrace{x^2-4x+3}_{=f(x)} > 0$$

Nollakohdat:

$$x^2-4x+3=0$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm2}{2}$$

Nollakohdat ovat $x=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}=1$ ja $x=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3$.

Funktion $f(x)=x^2-4x+3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Hahmotellaan kuvaaja ja merkitään kuvaan nollakohdat sekä funktion arvojen merkit.

Päätellään epäyhtälön $x^2-4x+3>0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktion arvo on positiivinen silloin, kun $x<1$ tai kun $x>3$.

Alkuperäinen epäyhtälö $(2x-3)(3x-1)>x(5x-7)$ toteutuu samoilla väleillä, eli kun $x<1$ tai kun $x>3$.

61.

a) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

Nollakohdat: $x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Funktiolla on yksi nollakohta $x = 2$.

Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 4$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka sivuaa x-akselia kohdassa $x = 2$. Funktion arvo on nolla, kun $x = 2$ ja funktion arvo ei koskaan ole negatiivinen.

Päätellään epäyhtälön $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktion arvo on nolla tai negatiivinen ainoastaan silloin, kun $x = 2$.

b) $-x^2 + 2x - 3 > 0$

Nollakohdat: $-x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{-2}$$

Funktiolla ei ole nollakohtia.

Funktion $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Koska funktiolla ei ole nollakohtia, on kuvaaja kokonaisuudessaan *x*-akselin alapuolella. Funktio saa ainoastaan negatiivisia arvoja.

Päätellään epäyhtälön $-x^2 + 2x - 3 > 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktio saa ainoastaan negatiivisia arvoja, joten epäyhtälö ei millään muuttujan arvolla ole tosi. Epäyhtälöllä ei ole ratkaisuja.

62.

a) $-2x^2 - 8x - 8 \leq 0$

Nollakohdat:

$$-2x^2 - 8x - 8 = 0 \quad |:(-2)$$
$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-4 \pm 0}{2} = \frac{-4}{2}$$
$$= -2$$

Funktiolla on yksi nollakohta $x = -2$.

Funktion $f(x) = -2x^2 - 8x - 8$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Hahmotellaan kuvaaja ja merkitään kuvaan nollakohta sekä funktion arvojen merkit.

Päätellään epäyhtälön $-2x^2 - 8x - 8 \leq 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktion arvo on nolla tai negatiivinen kaikilla muuttujan *x* arvoilla. Epäyhtälö on siis totta aina, eli kaikilla muuttujan *x* arvoilla.

b)

$$x^2 + 4x \geq -5$$
$$x^2 + 4x + 5 \geq 0$$

Nollakohdat: $x^2 + 4x + 5 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Funktiolla ei ole nollakohtia.

Funktion $f(x) = x^2 + 4x + 5$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Koska funktiolla ei ole nollakohtia, on kuvaaja kokonaisuudessaan x-akselin yläpuolella. Funktio saa ainoastaan positiivisia arvoja.

Päätellään epäyhtälön $x^2 + 4x + 5 \geq 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktio saa ainoastaan positiivisia arvoja, joten epäyhtälö on totta kaikilla muuttujan x arvoilla.

Alkuperäinen epäyhtälö $x^2 + 4x \geq -5$ toteutuu samalla välillä, eli kaikilla muuttujan x arvoilla.

63.

a)

$$-x^2 - 6x < 9$$
$$\underbrace{-x^2 - 6x - 9}_{=f(x)} < 0$$

Ratkaistaan nollakohdat.

$-x^2 - 6x - 9 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{-2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{6 \pm 0}{-2}$$
$$= \frac{6}{-2} = -3$$

Funktiolla on yksi nollakohta $x = -3$.

Funktion $f(x) = -x^2 - 6x - 9$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joka sivuaa x-akselia kohdassa $x = -3$.

Hahmotellaan kuvaaja ja päätellään epäyhtälön $-x^2 - 6x - 9 < 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktion arvo on negatiivinen kaikilla muilla muuttujan arvoilla, paitsi nollakohdassa $x = -3$.

Alkuperäinen epäyhtälö $-x^2 - 6x < 9$ toteutuu samalla välillä, eli kun $x \neq -3$.

b)

$$3x^2 \geq -7x - 5$$

$$\underbrace{3x^2 + 7x + 5}_{=f(x)} \geq 0$$

Ratkaistaan nollakohdat.

$$3x^2 + 7x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 60}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{-11}}{6}$$

Funktiolla ei ole nollakohtia.

Funktion $f(x) = 3x^2 + 7x + 5$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Koska funktiolla ei ole nollakohtia, on kuvaaja kokonaisuudessaan *x*-akselin yläpuolella. Funktio saa ainoastaan positiivisia arvoja.

Päätellään epäyhtälön $3x^2 + 7x + 5 \geq 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktion arvo on nolla tai positiivinen kaikilla muuttujan arvoilla.

Alkuperäinen epäyhtälö $3x^2 \geq -7x - 5$ toteutuu samalla välillä, eli kaikilla muuttujan *x* arvoilla.

64.

a)

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} < 0$$

Nollakohdat:

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0 \quad | \cdot 9$$

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 9} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{6 \pm 0}{18} = \frac{6}{18}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Funktiolla on yksi nollakohta $x = \frac{1}{3}$.

Funktion $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka sivuaa x-akselia kohdassa $x = \frac{1}{3}$.

Hahmotellaan kuvaaja ja päätellään epäyhtälön $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} < 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktion arvo ei ole negatiivinen millään muuttujan arvolla, joten epäyhtälöllä ei ole ratkaisua.

b)

$$4x^2 > 4x - 1$$
$$\underbrace{4x^2 - 4x + 1}_{=f(x)} > 0$$

Nollakohdat:

$4x^2 - 4x + 1 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8}$$
$$= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Funktiolla on yksi nollakohta $x = \frac{1}{2}$.

Funktion $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka sivuaa x-akselia kohdassa $x = \frac{1}{2}$.

Hahmotellaan kuvaaja ja päätellään epäyhtälön $4x^2 - 4x + 1 > 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktion arvo positiivinen kaikilla muilla muuttujan x arvoilla paitsi, kun $x = \frac{1}{2}$.

Alkuperäinen epäyhtälö $4x^2 > 4x - 1$ toteutuu, kun $x \neq \frac{1}{2}$.

65.

Funktio f saa suurempia arvoja kuin funktio g silloin, kun $f(x) > g(x)$.

Ratkaistaan siis epäyhtälö $-x^2 + 2x + 9 > x^2 - 2x + 3$.

$$-x^2 + 2x + 9 > x^2 - 2x + 3$$
$$\underbrace{-2x^2 + 4x + 6}_{=h(x)} > 0$$

Nollakohdat: $-2x^2 + 4x + 6 = 0$

Ennen sijoittamista ratkaisukaavaan, yhtälö kannattaa jakaa puolittain luvulla –2.

$$-2x^2 + 4x + 6 = 0 \quad \|:(-2)$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

Funktiolla on kaksi nollakohtaa $x = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ ja $x = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

Funktion $h(x) = -2x^2 + 4x + 6$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.

Päätellään epäyhtälön $-2x^2 + 4x + 6 > 0$ ratkaisu kuvaajan avulla: funktion arvo on negatiivinen silloin, kun kuvaaja on x-akselin yläpuolella, eli kun $-1 < x < 3$.

Funktio f saa suurempia arvoja kuin funktio g silloin, kun $-1 < x < 3$.

66.

Funktion f kuvaaja kulkee funktion g kuvaajan yläpuolella silloin, kun $f(x) > g(x)$.

Ratkaistaan siis epäyhtälö $x^2 + 3 > -x^2 + 15$.

$$x^2 + 3 > -x^2 + 15$$

$$\underbrace{2x^2 - 12}_{=h(x)} > 0$$

Nollakohdat:

$$2x^2 - 12 = 0$$

$$2x^2 = 12 \quad \| :2$$

$$x^2 = 6 \quad \| \sqrt{}$$

$$x = \pm\sqrt{6}$$

Funktiolla h on kaksi nollakohtaa $x = -\sqrt{6}$ ja $x = \sqrt{6}$.

Funktion $h(x) = 2x^2 - 12$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Päätellään epäyhtälön $2x^2 - 12 > 0$ ratkaisu kuvaajan avulla: funktion arvo on positiivinen silloin, kun kuvaaja on x-akselin yläpuolella, eli kun $x < -\sqrt{6}$ tai kun $x > \sqrt{6}$.

Funktion f kuvaaja kulkee funktion g kuvaajan yläpuolella silloin, kun $x < -\sqrt{6}$ tai kun $x > \sqrt{6}$.

67.

a) Kuvaajan perusteella funktiolla f on kolme nollakohtaa:
$x = -2, x = 0$ ja $x = 1$. Funktion arvo on positiivinen, eli $f(x) > 0$ silloin, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella.

Kuvaajan perusteella $f(x) > 0$, kun $x < -2$ tai kun $0 < x < 1$.

b) Kuvaajan perusteella funktiolla g on kaksi nollakohtaa $x = 1$ ja $x = 4$. Funktion arvo on negatiivinen, eli $g(x) < 0$ silloin, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella.

Kuvaajan perusteella $g(x) \leq 0$, kun $x \leq 1$ tai kun $x = 4$.

68.

a) Kuvaajan perusteella funktiolla f on kaksi nollakohtaa: $x = -2$ ja $x = 0$. Funktion arvo on positiivinen silloin, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella.

Kuvaajan perusteella $f(x) \geq 0$, kun $x \leq -2$ tai kun $x = 0$.

b) Kuvaajan perusteella funktiolla g on kolme nollakohtaa $x = -2$, $x = 1$ ja $x = 3$. Funktion arvo on negatiivinen silloin, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella.

Kuvaajan perusteella $g(x) \leq 0$, kun $x \leq -2$ tai kun $1 \leq x \leq 3$.

c) Epäyhtälön $g(x) \geq f(x)$ ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion g arvo on suurempi tai yhtä suuri kuin funktion f arvo.

Kuvaajan perusteella funktioilla on sama arvo silloin, kun $x = -2$. Tämän kohdan jälkeen, eli kun $x > -2$, funktion g kuvaaja kulkee funktion f kuvaajan yläpuolella, eli funktion g arvo on suurempi kuin funktion f arvo.

Kuvaajan perusteella $g(x) \geq f(x)$, kun $x \geq -2$.

69.

a) Kuvaajan perusteella funktiolla f on kaksi nollakohtaa: $x = 0$ ja $x = 4$. Funktion arvo on positiivinen silloin, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella.

Kuvaajan perusteella $f(x) > 0$, kun $x < 0$ tai kun $x > 4$.

b) Kuvaajan perusteella funktiolla g on yksi nollakohta $x = 4$. Funktion arvo on negatiivinen silloin, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella.

Kuvaajan perusteella $g(x) < 0$, kun $x < 4$.

c) Epäyhtälön $f(x) \leq g(x)$ ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion f arvo on pienempi tai yhtä suuri kuin funktion g arvo.

Kuvaajan perusteella funktioilla on sama arvo silloin, kun $x = 1$ ja kun $x = 4$. Kun x on näiden kohtien välissä, eli kun $1 < x < 4$, niin funktion g kuvaaja kulkee funktion f kuvaajan yläpuolella, eli funktion g arvo on suurempi kuin funktion f arvo.

Kuvaajan perusteella $f(x) \leq g(x)$, kun $1 \leq x \leq 4$.

70.

a)

$$6x - 1 > 4x + 2 \quad \| +1$$

$$6x > 4x + 3 \quad \| -4x$$

$$2x > 3 \quad \|: 2$$

$$x > \frac{3}{2}$$

b)

$$-4(x + 3) \leq 2(4x + 1)$$

$$-4x - 12 \leq 8x + 2 \quad \| +12$$

$$-4x \leq 8x + 14 \quad \| -8x$$

$$-12x \leq 14 \quad \|: (-12)$$

$$x \geq \frac{14}{-12}$$

$$x \geq -\frac{7}{6}$$

Huomaa: epäyhtälömerkin suunta kääntyy, kun epäyhtälö jaetaan puolittain negatiivisella luvulla.

c)

$$-2\left(\frac{5}{8}x - 3\right) \geq -4\left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{8}\right)$$

$$-\frac{5}{4}x + 6 \geq -x + \frac{3}{2}$$

$$-\frac{5}{4}x + x \geq \frac{3}{2} - 6$$

$$-\frac{1}{4}x \geq -\frac{9}{2} \qquad \| \cdot 4$$

$$-x \geq -18 \qquad \| : (-1)$$

$$x \leq 18$$

Huomaa: epäyhtälömerkin suunta kääntyy, kun epäyhtälö jaetaan puolittain negatiivisella luvulla.

71.

a) $-4x^2 + 64 > 0$

Ratkaistaan nollakohdat.

$$\begin{aligned} -4x^2 + 64 &= 0 \\ -4x^2 &= -64 \quad |:(-4) \\ x^2 &= 16 \quad |\sqrt{} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Nollakohdat ovat $x = -4$ ja $x = 4$.

Funktion $f(x) = -4x^2 + 64$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Hahmotellaan kuvaaja ja merkitään kuvaan nollakohdat sekä funktion arvojen merkit.

Päätellään epäyhtälön $-4x^2 + 64 > 0$ ratkaisu kuvaajan avulla: funktion arvo on positiivinen silloin, kun kuvaaja on x-akselin yläpuolella, eli kun $-4 < x < 4$.

b)

$-0{,}3x^2 - 0{,}4x - 0{,}1 \leq 0$

Ratkaistaan nollakohdat.

$-0{,}3x^2 - 0{,}4x - 0{,}1 = 0$

Ennen sijoittamista ratkaisukaavaan, yhtälö kannattaa kertoa puolittain luvulla –10:

$$-0{,}3x^2 - 0{,}4x - 0{,}1 = 0 \qquad \| \cdot (-10)$$

$$3x^3 + 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6}$$

Nollakohdat ovat $x = \frac{-4-2}{6} = \frac{-6}{6} = -1$ ja $x = \frac{-4+2}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$.

Funktion $f(x) = -0{,}3x^2 - 0{,}4x - 0{,}1$kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli. Hahmotellaan kuvaaja ja merkitään kuvaan nollakohdat sekä funktion arvojen merkit.

Päätellään epäyhtälön $-0{,}3x^2 - 0{,}4x - 0{,}1 \leq 0$ ratkaisu kuvaajan avulla: funktion arvo on nolla tai negatiivinen silloin, kun kuvaaja leikkaa x-akselin tai on sen alapuolella, eli kun $x \leq -1$ tai kun $x \geq -\frac{1}{3}$.

72.

a)

$$x^2 + 2x > -3$$
$$\underbrace{x^2 + 2x + 3}_{=f(x)} > 0$$

Ratkaistaan nollakohdat.

$x^2 + 2x + 5 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Funktiolla *f* ei ole nollakohtia.

Funktion $f(x) = x^2 + 4x + 3$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Päätellään epäyhtälön $x^2 + 4x + 3 > 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktion kuvaaja on koko ajan x-akselin yläpuolella, joten funktion arvo on aina positiivinen.

Epäyhtälö $x^2 + 4x > -3$ toteutuu kaikilla muuttujan *x* arvoilla.

b)

$$-x^2 \geq 10x + 25$$

$$\underbrace{-x^2 - 10x - 25}_{=f(x)} \geq 0$$

Ratkaistaan nollakohdat.

$-x^2 - 10x - 25 = 0$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-25)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{-2}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{10}{-2} = -5$$

Funktiolla f ei yksi nollakohta $x = -5$.

Funktion $f(x) = -x^2 - 10x - 25$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joka sivuaa x-akseli kohdassa $x = -5$.

Päätellään epäyhtälön $-x^2 - 10x - 25 \geq 0$ ratkaisu kuvaajan avulla. Funktion arvo on nolla, kun $x = -5$, ja funktion arvo ei koskaan ole positiivinen.

Epäyhtälö $-x^2 \geq 10x + 25$ toteutuu vain, kun $x = -5$.

73.

Ratkaistaan epäyhtälö $f(x) < g(x)$.

$f(x) < g(x)$

$x^2 - 1 < \frac{1}{4}x^2 - 2 \quad \| +2$

$x^2 + 1 < \frac{1}{4}x^2 \quad \| -\frac{1}{4}x^2$

$\underbrace{\frac{3}{4}x^2 + 1}_{=h(x)} < 0$

Ratkaistaan nollakohdat.

$$\frac{3}{4}x^2 + 1 = 0$$

$$\frac{3}{4}x^2 = -1 \quad \| \cdot \frac{4}{3}$$

$$x^2 = -\frac{4}{3}$$

Luvun neliö ei koskaan ole negatiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua: ei nollakohtia.

Funktion $h(x) = \frac{3}{4}x^2 + 1$ kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Koska funktiolla ei ole nollakohtia, kuvaaja on kokonaisuudessaan x-akselin yläpuolella. Funktio ei siis saa negatiivisia arvoja, joten epäyhtälöllä $\frac{3}{4}x^2 + 1 < 0$ ei ole ratkaisuja. Tällöin myöskään epäyhtälöllä $f(x) < g(x)$ ei ole ratkaisuja.

Funktio $f(x) = x^2 - 1$ ei millään muuttujan arvolla saa pienempiä arvoja kuin funktio $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$.

Tehtävä voidaan ratkaista myös päättelemällä, funktioiden kuvaajien avulla:

- molempien funktioiden kuvaajat ovat ylöspäin aukeavia paraabeleja

- funktion $f(x) = x^2 - 1$ kuvaaja leikkaa y-akselin kohdassa $y = -1$ ja funktion $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ kuvaaja leikkaa y-akselin kohdassa $y = -2$, toisin sanoen: $f(0) > g(0)$

- toisen asteen termin kertoimet ovat $a = 1$ ja $a = \frac{1}{4}$, joten funktion f kuvaajaparaabeli on kapeampi kuin funktion g kuvaajaparaabeli

Voidaan siis päätellä, että funktio $f(x) = x^2 - 1$ ei millään muuttujan arvolla saa pienempiä arvoja kuin funktio $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$

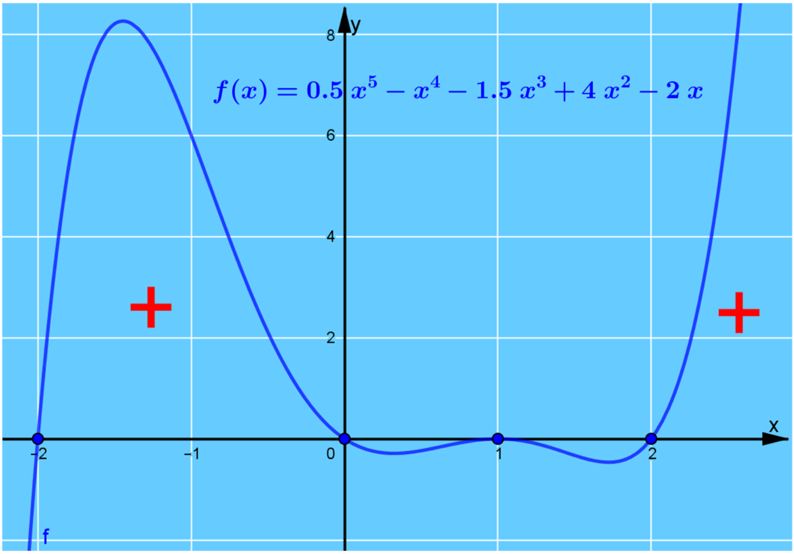
74.

Epäyhtälön $h(x) \geq 0$ ratkaisut ovat ne muuttujan x arvot, joilla funktion h arvo on nolla tai positiivinen. Nämä ovat ne muuttujan arvot, joissa funktion kuvaajalla oleva piste on x-akselilla tai sen yläpuolella.

Kuvaajan perusteella funktiolla h on neljä nollakohtaa:
$x = -4$, $x = -3$, $x = -1$ ja $x = 1$. Funktion arvo on positiivinen silloin, kun sen kuvaaja kulkee x-akselin yläpuolella.

Kuvaajan perusteella $h(x) \geq 0$, kun $-4 \leq x \leq -3$ tai kun $-1 \leq x \leq 1$.

75.



Epäyhtälön $f(x) \geq 0$ ratkaisut ovat ne muuttujan *x* arvot, joilla funktion *f* arvo on nolla tai positiivinen. Nämä ovat ne muuttujan arvot, joissa funktion kuvaajalla oleva piste on *x*-akselilla tai sen yläpuolella.

Kuvaajan perusteella funktiolla *f* on neljä nollakohtaa:
$x = -2, x = 0, x = 1$ ja $x = 2$. Laskemalla voimme varmistua siitä, että nämä ovat nollakohdat (eivätkä nollakohtien likiarvoja):

$f(-2) = 0{,}5 \cdot (-2)^5 - (-2)^4 - 1{,}5 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2) = 0$
$f(0) = 0{,}5 \cdot 0^5 - 0^4 - 1{,}5 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0 = 0$
$f(1) = 0{,}5 \cdot 1^5 - 1^4 - 1{,}5 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 = 0$
$f(2) = 0{,}5 \cdot 2^5 - 2^4 - 1{,}5 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 = 0$

Funktio *f* vaihtaa kuvaajan perusteella merkkiään jokaisessa nollakohdassa. Funktion arvo on positiivinen silloin, kun sen kuvaaja kulkee *x*-akselin yläpuolella.

Kuvaajan perusteella epäyhtälö $f(x) \geq 0$ toteutuu kun $-2 \leq x \leq 0$ tai kun $x = 1$ tai kun $x \geq 2$.