

YHTEINEN TEKIJÄ

TEHTÄVIEN RATKAISUT

Tehtäväsarja A

1.

$$\begin{array}{ccccccc} & & -3 & & & & \\ & 36 & : & -12 & & & \\ -3 & \cdot & -12 & \cdot & 1 & & \\ -14 & + & 11 & + & -23 & - & -24 \end{array}$$

2. a) $a + b = -13 + 12 = -1$

b) $-(a + b) = -(-1) = 1$

c) $-a + (-b) = 13 + (-12) = 13 - 12 = 1$

3. a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \stackrel{2)}{=} \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

b) Pienin arvo: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{6} - \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} \right) = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$

Suurin arvo: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{6} - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{6} + \frac{2}{6} \stackrel{4)}{=} \frac{7}{12} + \frac{4}{12} = \frac{11}{12}$

4.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \frac{81}{20} & & & & \\ & \frac{90}{20} & - & \frac{9}{20} & & & \\ 20 & \cdot & \frac{9}{40} & \cdot & 2 & & \\ 4 & : & \frac{1}{5} & + & \frac{1}{40} & : & \frac{1}{80} \end{array}$$

5.

a) $2x = 18 - 4x$

$$6x = 18 \quad | :6$$

$$x = 3$$

b) $-3(2x - 4) = 12 - 3x$

$$-6x + 12 = 12 - 3x$$

$$-3x = 0 \quad | :(-3)$$

$$x = 0$$

c) $\frac{3x}{2} - \frac{x}{4} = 5$

$$\frac{6x}{4} - \frac{x}{4} = \frac{20}{4} \quad | \cdot 4$$

$$6x - x = 20$$

$$5x = 20 \quad | :5$$

$$x = 4$$

d) $\frac{x}{3} + x = \frac{x-10}{2}$

$$\frac{2x}{6} + \frac{6x}{6} = \frac{3x-30}{6} \quad | \cdot 6$$

$$2x + 6x = 3x - 30$$

$$5x = -30 \quad | :5$$

$$x = -6$$

6.

a) $-6x + 24 > 0$

$$-6x > -24 \quad | :(-6) < 0$$

$$x < 4$$

b) $18 + 2y \leq 10$

$$2y \leq -8 \quad | :2$$

$$y \leq -4$$

c) $6 + 4(1 - z) > -5(3z - 2)$

$$6 + 4 - 4z > -15z + 10$$

$$11z > 0 \quad | :11$$

$$z > 0$$

7.

a) $(-5)^2 + (-5)^3 = 25 - 125 = -100$

b) $-4^2 + 2^4 = -16 + 16 = 0$

c) $7^0 + 7^{-1} = 1 + \frac{1}{7^1} = \frac{7}{7} + \frac{1}{7} = \frac{8}{7}$

d) $3^{-2} + 3^{-4} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} = \frac{1}{9} + \frac{1}{81} = \frac{9}{81} + \frac{1}{81} = \frac{10}{81}$

8.

a) $379\,904\,201 \approx 3,80 \cdot 10^8$

b) $106\,470 \approx 1,06 \cdot 10^5$

c) $0,027\,583 \approx 2,76 \cdot 10^{-2}$

d) $0,000\,001\,997\,80 \approx 2,00 \cdot 10^{-6}$

9.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{8}$

c) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{6^2}{5^2} = \frac{36}{25}$

d) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-1} = 7^1 = 7$

10.

a) $81 \cdot 243 = 3^4 \cdot 3^5 = 3^{4+5} = 3^9 = 19\,683$

b) $\frac{19\,683}{2\,187} = \frac{3^9}{3^7} = 3^{9-7} = 3^2 = 9$

c) $81^2 = (3^4)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8 = 6\,561$

11.

a) $\frac{2a^3(-2a)^3}{(2a)^3 - 2a^3} = \frac{2a^3 \cdot (-8) \cdot a^3}{8a^3 - 2a^3} = \frac{-\cancel{16}^8 a^6}{\cancel{6}_3 a^3} = -\frac{8}{3} a^3$

b) $\frac{(2a)^3(-2a)^3}{2a^3 - (2a)^3} = \frac{8a^3 \cdot (-8) \cdot a^3}{2a^3 - 8a^3} = \frac{-\cancel{64}^{32} a^6}{-\cancel{6}_3 a^3} = \frac{32}{3} a^3$

12.

a)

$$\begin{aligned} & 5^{301} \cdot 8^{100} \cdot 0,1^{300} \\ &= 5^1 \cdot 5^{300} \cdot (2^3)^{100} \cdot 0,1^{300} \\ &= 5 \cdot 5^{300} \cdot 2^{300} \cdot 0,1^{300} \\ &= 5 \cdot (5 \cdot 2 \cdot 0,1)^{300} \\ &= 5 \cdot 1^{300} \\ &= 5 \cdot 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

b)

$$\frac{100^{630}}{10^{1263}} = \frac{(10^2)^{630}}{10^{1263}} = \frac{10^{1260}}{10^{1263}} = 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

13.

a) $4 \cdot 5^x = 100$ $:\div 4$

$$5^x = 25$$

$$5^x = 5^2$$

$$x = 2$$

b) $27^x = 9^{x+1}$

$$(3^3)^x = (3^2)^{x+1}$$

$$3^{3x} = 3^{2(x+1)}$$

$$3^{3x} = 3^{2x+2}$$

$$3x = 2x + 2$$

$$x = 2$$

c) $8^x = 4^{x+2}$

$$(2^3)^x = (2^2)^{x+2}$$

$$2^{3x} = 2^{2(x+2)}$$

$$2^{3x} = 2^{2x+4}$$

$$3x = 2x + 4$$

$$x = 4$$

d) $3^{x+5} = 1$

$$3^{x+5} = 3^0$$

$$x + 5 = 0$$

$$x = -5$$

14.

a) $\log_7 49 = 2$

b) $\log_2 8 = 3$

c) $\log_6 36 = 2$

15.

- a) Arvo $1,08a$ on 108 % tuotteen alkuperäisestä arvosta a . Arvo on siis noussut 8 %.
- b) Arvo $0,64a$ on 64 % tuotteen alkuperäisestä arvosta a . Arvo on siis laskenut 36 %.
- c) Arvo $2,1a$ on 210 % tuotteen alkuperäisestä arvosta a . Arvo on siis noussut 110 %.
- d) Arvo $1,005a$ on 100,5 % tuotteen alkuperäisestä arvosta a . Arvo on siis noussut 0,5 %.

16.

a) Merkitään funktioon syötettävää lukua kirjaimella x .

Lasketaan luvun puolikas: $\frac{x}{2}$

Luvun puolikkaaseen lisätään luku 2: $\frac{x}{2} + 2$

Summa kerrotaan luvulla 5: $\left(\frac{x}{2} + 2\right) \cdot 5$

Funktion lauseke on $f(x) = \left(\frac{x}{2} + 2\right) \cdot 5$

b) $f(-2) = \left(\frac{-2}{2} + 2\right) \cdot 5 = (-1 + 2) \cdot 5 = 1 \cdot 5 = 5$

$$f(4) = \left(\frac{4}{2} + 2\right) \cdot 5 = (2 + 2) \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20$$

c) $f(x) = 25$

$$\left(\frac{x}{2} + 2\right) \cdot 5 = 25 \quad | :5$$

$$\frac{x}{2} + 2 = 5$$

$$\frac{x}{2} = 3 \quad | \cdot 2$$

$$x = 6$$

17. a) Funktion nollakohta:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 12 - 3x &= 0 \\ -3x &= -12 && | :(-3) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Funktion arvo kohdassa nolla:

$$f(0) = 12 - 3 \cdot 0 = 12 - 0 = 12$$

b) Funktion nollakohta:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ 15x - 6(2x + 3) &= 0 \\ 15x - 12x - 18 &= 0 \\ 3x &= 18 && | :3 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Funktion arvo kohdassa nolla:

$$g(0) = 15 \cdot 0 - 6(2 \cdot 0 + 3) = 0 - 6(0 + 3) = -6 \cdot 3 = -18$$

c) Funktion nollakohta:

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \\ 2^{x+1} - 16 &= 0 \\ 2^{x+1} &= 16 \\ 2^{x+1} &= 2^4 \\ x + 1 &= 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Funktion arvo kohdassa nolla:

$$h(0) = 2^{0+1} - 16 = 2^1 - 16 = 2 - 16 = -14$$

18.

a) $f(1) = 2$, koska kohdassa $x = 1$ funktion kuvaajan pisteen y -koordinaatti on 2.

$f(3) \approx 2$, koska kohdassa $x = 3$ funktion kuvaajan pisteen y -koordinaatti on likimain $-1,4$.

b) Pitää etsiä ne funktion kuvaajan pisteet, joiden y -koordinaatti on 4.

Pisteitä löytyy kolme, ja niiden x -koordinaatit ovat -3 , 0 ja 6 .

Siis $f(x) = 4$, kun $x = -3$, $x = 0$ tai $x = 6$.

c) Pitää etsiä ne funktion kuvaajan pisteet, joiden y -koordinaatti on 0.

Funktion nollakohdat ovat $x = -4$, $x = 2$ ja $x = 5$.

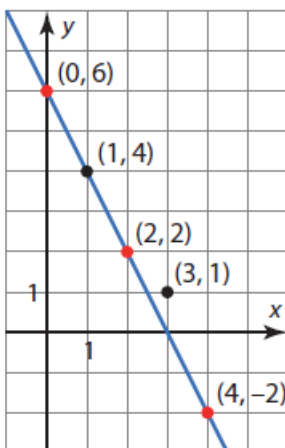
d) Funktion arvot ovat negatiivisia, kun kuvaaja on x -akselin alapuolella. Funktion arvot ovat siis negatiivisia, kun $x < -4$ tai $2 < x < 5$.

19.

$$f(0) = 6 - 2 \cdot 0 = 6 - 0 = 6$$

$$f(2) = 6 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2$$

$$f(4) = 6 - 2 \cdot 4 = 6 - 8 = -2$$



a) Kuvaajasta huomataan, että piste $(1,4)$ on kuvaajalla ja piste $(3,1)$ on kuvaajan yläpuolella.

b) Piste $(3,1)$:

Funktion arvo kohdassa 3 on $f(3) = 6 - 2 \cdot 3 = 0$.

Funktion kuvaaja kulkee siis pisteen $(3,0)$ kautta. Piste $(3,1)$ on kuvaajan yläpuolella.

Piste $(1,4)$:

Funktion arvo kohdassa 1 on $f(1) = 6 - 2 \cdot 1 = 4$.

Funktion kuvaaja kulkee siis pisteen $(1,4)$ kautta.

20.

a) Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 4$.

Lasketaan jonon differenssi.

$$d = a_2 - a_1 = -1 - (-4) = -1 + 4 = 3$$

Muodostetaan jonon yleisen jäsenen lauseke.

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -4 + (n-1) \cdot 3 = -4 + 3n - 3 = 3n - 7$$

b) Lasketaan jonon 20. jäsen.

$$a_{20} = 3 \cdot 20 - 7 = 60 - 7 = 53$$

c) Luku 38 on jonon jäsen, jos on olemassa positiivinen kokonaisluku n siten, että $a_n = 38$.

$$a_n = 38$$

$$3n - 7 = 38$$

$$3n = 45 \quad | :3$$

$$n = 15$$

Koska 15 on positiivinen kokonaisluku, luku 38 on jonon jäsen.

21.

a) Merkinnästä $\sum_{n=1}^6 (2n-1)$ nähdään, että

- jonon yleinen jäsen $a_n = 2n - 1$
- ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$
- viimeinen yhteenlaskettava on $a_6 = 2 \cdot 6 - 1 = 11$
- yhteenlaskettavia on 6 kappaletta.

Lasketaan aritmeettinen summa.

$$S_6 = 6 \cdot \frac{1+11}{2} = 6 \cdot \frac{12}{2} = 6 \cdot 6 = 36$$

b) Merkinnästä $\sum_{n=3}^5 (3n+1)$ nähdään, että

- jonon yleinen jäsen $a_n = 3n + 1$
- ensimmäinen yhteenlaskettava on $a_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$
- viimeinen yhteenlaskettava on $a_5 = 3 \cdot 5 + 1 = 16$
- yhteenlaskettavia on 3 kappaletta.

Lasketaan aritmeettinen summa.

$$S_3 = 3 \cdot \frac{10+16}{2} = 3 \cdot \frac{26}{2} = 3 \cdot 13 = 39$$

22.

a) Lukujonon jäsenet toisesta jäsenestä alkaen saadaan säännön $a_n = -2a_{n-1} + 5$ avulla.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = -2 \cdot a_1 + 5 = -2 \cdot 1 + 5 = -2 + 5 = 3$$

$$a_3 = -2 \cdot a_2 + 5 = -2 \cdot 3 + 5 = -6 + 5 = -1$$

$$a_4 = -2 \cdot a_3 + 5 = -2 \cdot (-1) + 5 = 2 + 5 = 7$$

$$a_5 = -2 \cdot a_4 + 5 = -2 \cdot 7 + 5 = -14 + 5 = -9$$

b) Lukujonon jäsenet kolmannesta jäsenestä alkaen saadaan säännön $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ avulla.

$$a_1 = -1$$

$$a_2 = 2$$

$$a_3 = a_2 - a_1 = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = 3 - 2 = 1$$

$$a_5 = a_4 - a_3 = 1 - 3 = -2$$

23.

a) Geometrisen jonon ensimmäiset jäsenet ovat $a_1 = 2$ ja $a_2 = \frac{2}{3}$.

Lasketaan jonon suhdeluku.

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots$$

b) Geometrisen jonon suhdeluku $q = -2$ ja toinen jäsen $a_2 = -6$. Ratkaistaan ensimmäinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q \\ -6 &= a_1 \cdot (-2) && | :(-2) \\ a_1 &= 3 \end{aligned}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 3 \cdot (-2)^{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots$$

24.

a) Aritmeettisen jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 5$ ja viides jäsen $a_5 = 17$.
Ratkaistaan jonon differenssi.

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$17 = 5 + 4d \quad | -5$$

$$12 = 4d \quad | :4$$

$$d = 3$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$= 5 + (n-1) \cdot 3$$

$$= 5 + 3n - 3$$

$$= 3n + 2$$

b) Lasketaan jonon kymmenes jäsen.

$$a_{10} = 3 \cdot 10 + 2 = 30 + 2 = 32$$

25. Verrataan lauseketta $S = 12 \cdot \frac{1-5^{13}}{1-5}$ geometrisen summan kaavaan $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

a) Jonon alusta laskettiin 13 jäsentä yhteen.

b) Jonon suhdeluku on 5

c) Jonon ensimmäinen jäsen on 12.

d) Jonon toinen jäsen on $a_2 = a_1 \cdot q^1 = 12 \cdot 5^1 = 60$.

e) $S = 10 \cdot \frac{1-3^{13}}{1-3}$

26. Summa $2 + 4 + 6 + \dots + 198 + 200$ on aritmeettinen.

Määritetään differenssi d ja jonon yleinen jäsen a_n .

$$d = 4 - 2 = 2$$

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 2 = 2 + 2n - 2 = 2n$$

Ratkaistaan yhteenlaskettavien lukumäärä n viimeisen yhteenlaskettavan 200 avulla.

$$\begin{array}{r} 2n = 200 \\ n = 100 \end{array} \quad \left| :2 \right.$$

Lasketaan aritmeettinen summa.

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{a_1 + a_{100}}{2} = 100 \cdot \frac{2 + 200}{2} = 100 \cdot \frac{202}{2} = 100 \cdot 101 = 10100$$

Tehtäväsarja B

1.

$$a) -8^2 + 10 - 6 : 2 = -64 + 10 - 3 = -57$$

$$b) \text{ Suurin arvo: } (-8)^2 + 10 - 6 : 2 = 64 + 10 - 3 = 71$$

$$\text{Pienin arvo: } -(8^2 + 10) - 6 : 2 = -74 - 3 = -77$$

Vastaus: a) -57 b) suurin 71 , pienin -77

2.

Vastanneita radiokuuntelijoita oli yhteensä 120 kpl.

Koska Radiojatsin valitsi $\frac{3}{5}$ vastaajista ja Klassikko-radion $\frac{1}{4}$, niin Uutisradion valitsi

$$1 - \frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20} \text{ vastaajista.}$$

$$\text{Uutisradion valinneita vastaajia oli } 120 \cdot \frac{3}{20} = \frac{360}{20} = 18.$$

Vastaus: Uutisradion valinneita oli $\frac{3}{20}$ eli 18 vastaajaa.

3. Yhtälöt ja epäyhtälö ratkaistaan laskimen *solve*- tai *ratkaise*-toiminnolla.

$$a) -3(2 - 4x) - (10x - 3) = 1 - 3x$$

$$x = \frac{4}{5}$$

$$b) \frac{1}{3} + \frac{x}{4} = \frac{1+x}{6}$$

$$x = -2$$

$$c) 8x + 5 > 3(5x + 4) - 14$$

$$x < 1$$

6.

a) Matka = 1,000 m

Aika = $4,87 \cdot 10^{-9}$ s

Lasketaan laservalon nopeus.

$$\begin{aligned} \text{nopeus} &= \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}} \\ &= \frac{1,000 \text{ m}}{4,87 \cdot 10^{-9} \text{ s}} \\ &= 205338809 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &= 2,05338809 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ &\approx 2,05 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

b) Valon taajuus $f = 7,40 \cdot 10^{14}$ Hz

Laservalon nopeus $c = 2,05 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Ratkaistaan ensin yhtälöstä $f\lambda = c$ valon aallon pituus.

$$f\lambda = c \quad | :f$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Lasketaan valon aallonpituus.

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2,05 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{7,40 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 2,770270... \cdot 10^{-7} \text{ m} \approx 2,77 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Vastaus: a) $2,05 \cdot 10^8$ m/s b) $2,77 \cdot 10^{-7}$ m

7.

a) $10 + 10^x = 25$

$$10^x = 15$$

$$x = \log_{10} 15$$

$$x = 1,17609... \approx 1,18$$

b) $5^{2x} = 2$

$$2x = \log_5 2 \quad | :2$$

$$x = \frac{\log_5 2}{2}$$

$$x = 0,215338... \approx 0,22$$

c) $7^{3x} = 129$

$$3x = \log_7 129 \quad | :3$$

$$x = \frac{\log_7 129}{3}$$

$$x = 0,832483... \approx 0,83$$

d) $1 - 0,5^x = 0,9$

$$-0,5^x = -0,1 \quad | \cdot (-1)$$

$$0,5^x = 0,1$$

$$x = \log_{0,5} 0,1$$

$$x = 3,321928... \approx 3,32$$

Vastaus: $x = \log_{10} 15 \approx 1,18$ b) $x = \frac{\log_5 2}{2} \approx 0,22$ c) $x = \frac{\log_7 129}{3} \approx 0,83$ d) $x = \log_{0,5} 0,1 \approx 3,32$

8.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttujan arvo laskimella.

a) Funktion $23\,000 \cdot 1,3^t$ arvon tulee olla 1 000 000.

$$23\,000 \cdot 1,3^t = 1\,000\,000$$

$$t = 14,3779\dots \approx 14$$

Matkapuhelin liittymiä oli 1 miljoona 14 vuoden kuluttua vuodesta 1980 eli vuonna $1980 + 14 = 1994$.

b) Funktion $23\,000 \cdot 1,3^t$ arvon tulee olla 2 000 000.

$$23\,000 \cdot 1,3^t = 2\,000\,000$$

$$t = 17,0198\dots \approx 17$$

Matkapuhelin liittymiä oli 2 miljoonaa 17 vuoden kuluttua vuodesta 1980 eli vuonna 1997.

c) Funktion $23\,000 \cdot 1,3^t$ arvon tulee olla 4 000 000.

$$23\,000 \cdot 1,3^t = 4\,000\,000$$

$$t = 19,66180\dots \approx 20$$

Matkapuhelin liittymiä oli 4 miljoonaa 20 vuoden kuluttua vuodesta 1980 eli vuonna 2000.

Vastaus: a) vuonna 1994 b) vuonna 1997 c) vuonna 2000

9.

Alkuperäistä sähkön hintaa ei tiedetä, joten merkitään sitä kirjaimella a .

Muodostetaan hinnan muutoksia vastaavat prosenttikertoimet.

$$1) 100 \% + 7,5 \% = 107,5\% = 1,075$$

$$2) 100 \% + 2,5 \% = 102,5 \% = 1,025$$

$$3) 100 \% - 9,0 \% = 91 \% = 0,91$$

$$4) 100 \% - 1,5 \% = 98,5 \% = 0,985$$

Lasketaan lopullinen sähkön hinta.

$$0,985 \cdot 0,91 \cdot 1,025 \cdot 1,075a = 0,98766\dots a \approx 0,988a$$

Alkuperäisestä hinnasta on jäljellä 98,8 %, joten hinta on laskenut $100 \% - 98,8 \% = 1,2 \%$.

Vastaus: 1,2 %

10.

Alkuperäinen matka on s ja aika t . Keskinopeus v on tällöin $v = \frac{s}{t}$.

Kun matka pitenee 20 %, uusi matka on $1,20s$.

(Prosenttikerroin $100 \% + 20 \% = 120 \% = 1,2$)

Kun aikaa kuluu 10 % enemmän, uusi aika on $1,10t$.

(Prosenttikerroin $100 \% + 10 \% = 110 \% = 1,10$)

Matkan uusi keskinopeus on

$$\frac{1,2s}{1,1t} = 1,09090\dots \frac{s}{t} \approx 1,091 \frac{s}{t} = 1,091v.$$

Uusi keskinopeus on siis 109,1 % alkuperäisestä keskinopeudesta.

Keskinopeus nousee $109,1 \% - 100 \% = 9,1 \%$.

11.

Lasketaan etikkahapon määrä salaattinkastiketta varten laimennetussa ruokaetikassa.

$$0,04 \cdot 1,5 = 0,06 \text{ (dl)}$$

Merkitään ruokaetikan määrää kirjaimella x . Ruokaetikka sisältää 10 % etikkahappoa. Lasketaan, kuinka suuressa määrässä ruokaetikkaa on etikkahappoa 0,06 dl.

$$0,1 \cdot x = 0,06 \quad | : 0,1$$

$$x = \frac{0,06}{0,1}$$

$$x = 0,6 \text{ (dl)}$$

Ruokaetikkaa tarvitaan siis 0,6 dl ja vettä $1,5 \text{ dl} - 0,6 \text{ dl} = 0,9 \text{ dl}$.

Vastaus: 0,6 dl ruokaetikkaa ja 0,9 dl vettä

12.

a) Jäsenelle kustannukset muodostuvat jäsenyysmaksusta 55 € ja kertamaksuista 10 €/kerta. Kun kuntosalia käytetään x kertaa, niin kortalippujen kustannukset ovat $10x$ euroa.

Jäsenen kuntosalikäyntikustannuksia kuvaa funktio $f(x) = 55 + 10x$.

Ei-jäsenellä kustannukset muodostuvat pelkästään kertamaksuista 12,50 €/kerta. Kun kuntosalia käytetään x kertaa, niin kortalippujen kustannukset ovat $12,5x$ euroa.

Ei-jäsenen kuntosalikustannuksia kuvaa funktio $g(x) = 12,5x$.

b) Lasketaan millä muuttujan x arvolla $f(x) = g(x)$.

$$f(x) = g(x)$$

$$55 + 10x = 12,5x$$

$$x = 22$$

Siis salilla pitää käydä 22 kertaa, jotta kustannukset ovat yhtä suuret.

Vastaus: a) jäsenelle $f(x) = 55 + 10x$, ei-jäsenelle $g(x) = 12,5x$ b) 22 kertaa

13.

a) Kännykkäliittymän A kuukausilasku muodostuu kuukausimaksusta 4 € ja puhelumaksusta 0,09 €/min. Kun kuukaudessa puhutaan x minuuttia, niin puhelumaksu on $0,09x$ euroa.

Kännykkäliittymän A kuukausilaskua kuvaa funktio $A(x) = 4 + 0,09x$.

Kännykkäliittymän B kuukausilasku muodostuu pelkästään puhelumaksusta 0,12 €/min. Kun kuukaudessa puhutaan x minuuttia, niin puhelumaksu on $0,12x$ euroa.

Kännykkäliittymän B kuukausilaskua kuvaa funktio $B(x) = 0,12x$.

b) Lasketaan millä muuttujan x arvolla $A(x) = B(x)$.

$$A(x) = B(x)$$

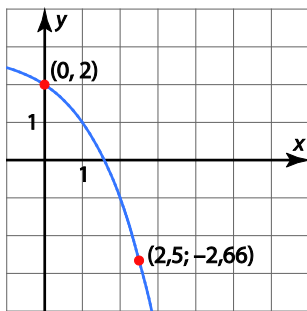
$$4 + 0,09x = 0,12x$$

$$x = 133\frac{1}{3}$$

Joten puheaika pitää olla $133\frac{1}{3}$ min, joka on 2h 13min ja 20s.

Vastaus: a) $A(x) = 4 + 0,09x$, $B(x) = 0,12x$ b) $133\frac{1}{3}$ min eli 2 h 13 min ja 20 s

14.



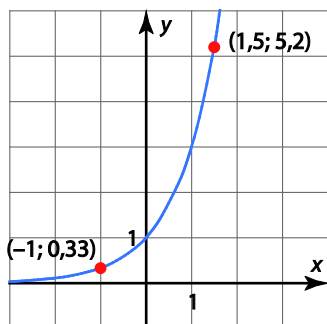
a) $f(0) = 2$ ja $f(2,5) \approx -2,7$.

b) $f(x) = -1$, kun $x = 2$.

c) $f(x) = 1,5$, kun $x \approx 0,6$.

15.

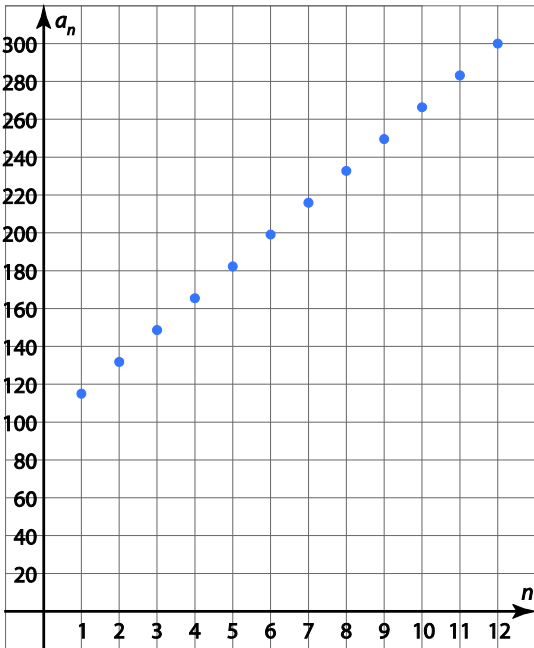
a)



a) $3^{-1} \approx 0,3$ ja $3^{1,5} \approx 5,2$.

b) $\log_3 8 \approx 1,9$ ja $\log_3 12 \approx 2,3$.

16. a)



b) Tutkitaan löytyykö sellainen positiivinen kokonaisluku n , että $a_n = 12\,455$.

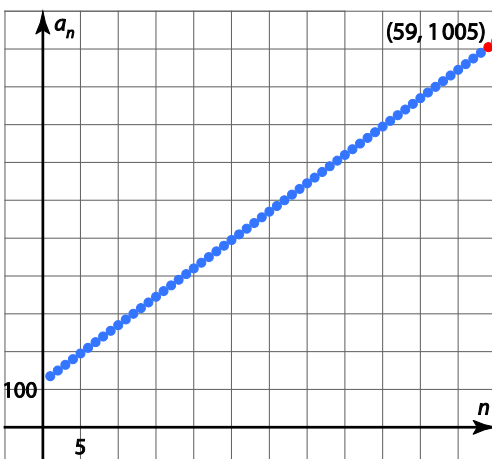
$$a_n = 12\,455$$

$$15n + 120 = 12\,455$$

$$n = 822,33333\dots$$

Koska yhtälön ratkaisuva oleva luku $822,333\dots$ ei ole positiivinen kokonaisluku, luku $12\,455$ ei ole jonon jäsen.

c) Etsitään kuvaajalta piste, jonka toinen koordinaatti ylittää ensimmäisen kerran arvon 1000 .



Lukujonon 59. jäsen on ensimmäinen, jonka arvo on suurempi kuin 1000 .

Vastaus: b) ei ole c) 59. jäsenestä alkaen

17.

Lasketaan jonon jäseniä taulukkolaskentaohjelmalla.

OHJE: Syötä ensimmäisen sarakkeen ensimmäiselle riville ensimmäinen jäsen $a_1 = 2$. Kirjoita toiselle riville kaava, jolla saat laskettua toisen jäsenen arvon: ' $= 4 \cdot a_1 - 3$ '. Kopioi kaavaa niin monta kertaa, että saat rivillä 10 olevan jäsenen näkyviin.

Myös 10 ensimmäisen jäsenen summa voidaan laskea taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B	C
1	2		
2	5		
3	17		
4	65		
5	257		
6	1025		
7	4097		
8	16385		
9	65537		
10	262145	SUMMA	349535

a) $a_{10} = 262\,145$ b) summa on $349\,535$

18.

a) Lasketaan aritmeettisen jonon differenssi.

$$d = a_2 - a_1 = 3 - (-2) = 3 + 2 = 5$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = -2 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 7$$

Lasketaan 10. jäsen.

$$a_{10} = 5 \cdot 10 - 7 = 43$$

b) Lasketaan aritmeettisen jonon 10 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{10} = n \cdot \frac{a_1 + a_{10}}{2} = 10 \cdot \frac{-2 + 43}{2} = 205$$

c) Yleisen jäsenen tulee olla suurempi kuin 100. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$5n - 7 > 100$$

$$n > 21,4$$

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n > 21,4$ on 22. Siis lukujonon 22. jäsen on ensimmäinen, joka on suurempi kuin 100.

a) $a_{10} = 43$ b) $S_{10} = 205$ c) 22. jäsen

19.

a) Lasketaan geometrisen jonon suhdeluku.

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{2}$$

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

Lasketaan 10. jäsen.

$$a_{10} = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10-1} = 76,8867... \approx 76,9$$

b) Lasketaan geometrisen jonon 10 ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{10} = a_1 \frac{1-q^{10}}{1-q} = 2 \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{10}}{1-\frac{3}{2}} = 226,660... \approx 226,7$$

c) Yleisen jäsenen tulee olla suurempi kuin 100. Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

$$2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} > 100$$
$$n > 10,648...$$

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n > 10,648...$ on 11. Siis lukujonon 11. jäsen on ensimmäinen, joka on suurempi kuin 100.

Vastaus: a) $a_{10} \approx 76,9$ b) $S_{10} \approx 226,7$ c) 11. jäsen

20.

a) Koska tölkkien määrä lisääntyy jokaisessa kerroksessa yhtä monella tölkillä, muodostaa tölkkien määrät eri kerroksissa aritmeettisen jonon. Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$, differenssi $d = 4$.

Muodostetaan aritmeettisen jonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= 3 + (n-1) \cdot 4 \\ &= 3 + 4n - 4 \\ &= 4n - 1\end{aligned}$$

b) Selvitetään kuinka mones lukujonon jäsen on 63. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttujan n arvo.

$$\begin{aligned}a_n &= 63 \\ 4n - 1 &= 63 \\ n &= 16\end{aligned}$$

Siis alimmainen kerros on 16. kerros.

c) Lasketaan aritmeettisen summan arvo.

$$S_{16} = 16 \cdot \frac{a_1 + a_{16}}{2} = 16 \cdot \frac{3 + 63}{2} = 528$$

Vastaus: a) $a_n = 4n - 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$ b) 16. kerros c) 528 tölkkiä

21.

a) Geometrisen jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 12000$ ja suhdeluku $q = 0,6$. Muodostetaan geometrisen jonon yleinen jäsen.

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 12\,000 \cdot 0,6^{n-1}$$

b) Lasketaan jonon 12. jäsen.

$$a_{12} = 12\,000 \cdot 0,6^{12-1} = 43,5356... \approx 43,5$$

c) Lasketaan geometrisen summan arvo.

$$S_{10} = a_1 \cdot \frac{1-q^{10}}{1-q} = 12\,000 \cdot \frac{1-0,6^{10}}{1-0,6} = 29\,818,601... \approx 29\,800$$

Vastaus: a) $a_n = a_1 q^{n-1} = 12\,000 \cdot 0,6^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ b) $a_{12} \approx 43,5$ c) $S_{10} \approx 29\,800$

22.

Koska talletettava summa kasvaa joka vuosi 20 %, niin talletettava summa 1,2-kertaistuu joka vuosi. Talletettavat summa muodostavat siis geometrisen jonon, jossa $a_1 = 500$ ja $q = 1,2$.

Lasketaan jonon 10 ensimmäisen jäsenen summa eli geometrinen summa.

$$S_{10} = 500 \cdot \frac{1-1,2^{10}}{1-1,2} = 12\,979,341... \approx 12\,979$$

Tilille talletetaan yhteensä 12 979€.

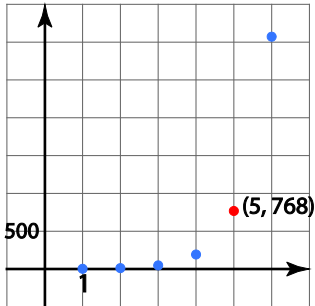
Vastaus: 12 979 €.

23.

a) Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$ ja suhdeluku $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{3} = 4$. Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1}$$

Piirretään lukujonon kuvaaja.



b) Luku 768 on lukujonon 5. jäsen: $a_5 = 768$.

c) Merkitään tarvittavien jäsenien lukumäärää kirjaimella n . Muodostetaan geometrisen summan lauseke.

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 3 \cdot \frac{1-4^n}{1-4} = -(1-4^n) = 4^n - 1$$

TAPA1: Epäyhtälö

Summan tulee olla suurempi kuin 10^8 . Muodostetaan ja ratkaistaan epäyhtälö.

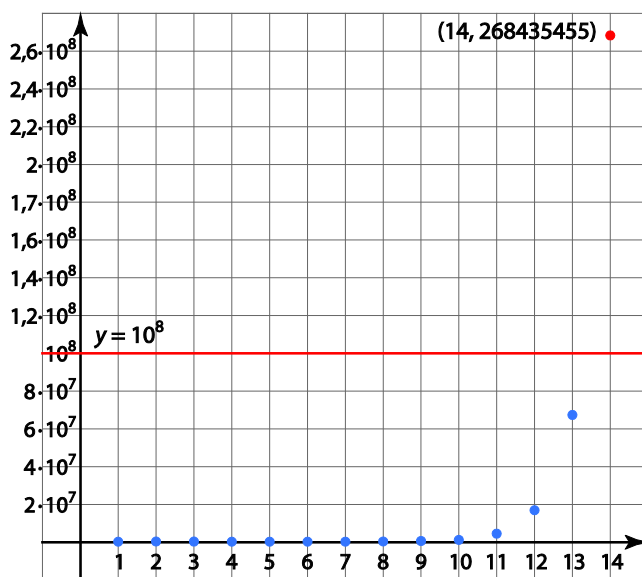
$$4^n - 1 > 10^8$$

$$n > 13,2877\dots$$

Pienin positiivinen kokonaisluku, joka toteuttaa ehdon $n > 13,2877\dots$ on 14. Siis pitää laskea vähintään 14 jäsentä yhteen, jotta summa ylittää 10^8 .

TAPA2: Kuvaaja

Piirretään summalausekkeen kuvaaja ja etsitään kuvaajalta piste, jonka toinen koordinaatti on ensimmäisen kerran yli $10^8 = 100\,000\,000$.



Vähintään 14. jäsentä pitää laskea yhteen, jotta summan arvo on suurempi kuin 10^8 .

Vastaus: a) $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ b) On, 5. jäsen. c) vähintään 14 jäsentä

24.

a) Ensimmäisen vuoden alussa pääoma on 500 000 €, joten lukujonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 500\,000$.

Säätiö jakaa vuoden aikana apurahoina 15 % pääomasta, minkä jälkeen pääomasta on jäljellä 85 %.

Ensimmäisen vuoden lopussa ennen valtion avustusta pääoma on siis $0,85 \cdot 500\,000$ euroa.

Kun säätiö saa valtiolta 30 000 euron avustuksen, kuvaa säätiön pääomaa (euroina) lauseke $0,85 \cdot 500\,000 + 30\,000$.

Siis $a_2 = 0,85 \cdot 500\,000 + 30\,000 = 0,85a_1 + 30\,000$.

Vastaavasti $a_3 = 0,85a_2 + 30\,000$.

Lukujonon rekursiokaava on

$$\begin{cases} a_1 = 500\,000 \\ a_n = 0,85a_{n-1} + 30\,000, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Lasketaan rekursiivisen lukujonon jäseniä taulukkolaskentaohjelmalla.

	A
1	500000
2	455000
3	416750
4	384237.5
5	356601.88
6	333111.59
7	313144.85
8	296173.13
9	281747.16
10	269485.08

b) $a_7 \approx 313\,145$ €

c) Pääoma alittaa 250 000 € ensimmäisen kerran 13. vuoden alussa, joten 14. vuonna voidaan ensimmäisen kerran jättää apurahat jakamatta.

Vastaus: a) $\begin{cases} a_1 = 500\,000 \\ a_n = 0,85a_{n-1} + 30\,000, \text{ kun } n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$ b) 313 145 € c) 14. vuonna

25.

a) Koska seuraavaan pinoon tulee aina 5 kolikkoa enemmän kuin edelliseen, muodostavat kolikkojen lukumäärät pinoissa aritmeettisen jonon. Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 3$ ja differenssi $d = 5$.

Muodostetaan jonon yleinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ &= 3 + (n-1)5 \\ &= 3 + 5n - 5 \\ &= 5n - 2 \end{aligned}$$

Lasketaan jonon 8. jäsen.

$$a_8 = 5 \cdot 8 - 2 = 40 - 2 = 38.$$

Joten 8. pinossa on 38 kolikkoa.

b) Lasketaan ensin kuinka monta kolikkoa on 10. pinossa.

$$a_{10} = 5 \cdot 10 - 2 = 50 - 2 = 48.$$

Yhden kolikon paksuus on 2,20mm, joten 48 kolikon paksuus on $48 \cdot 2,20 \text{ mm} = 105,6 \text{ mm} \approx 106 \text{ mm}$.

c) Aritmeettisen summan laskemiseksi pitää selvittää viimeinen yhteenlaskettava eli jonon 7. jäsen.

$$a_7 = 5 \cdot 7 - 2 = 35 - 2 = 33$$

Lasketaan aritmeettisen jonon 7 ensimmäisen jäsenen summa eli aritmeettinen summa.

$$S_7 = 7 \cdot \frac{a_1 + a_7}{2} = 7 \cdot \frac{3 + 33}{2} = 126$$

7 ensimmäisessä pinossa on kolikoita yhteensä 126 kpl.

Yhden kolikon paino on 8,50g, joten 126 kolikkoa painaa $8,50 \text{ g} \cdot 126 = 1071 \text{ g} \approx 1070 \text{ g}$.

126 kpl kahden euron kolikkoja on arvoltaan $2 \text{ €} \cdot 126 = 252 \text{ €}$.

Vastaus: a) 38 kolikkoa b) 106 mm c) 1070 g, 252 €