

YHTEINEN TEKIJÄ

TEHTÄVIEN RATKAISUT

Luku 4.1

183.

a) Merkintä $f(5)$ tarkoittaa lukua, jonka funktio tuottaa, kun siihen syötetään luku 5.

Lasketaan funktioon syötetyn luvun neliö: $5^2 = 25$.

Saatuun arvoon lisätään luku 1: $25 + 1 = 26$.

Siis $f(5) = 26$.

Funktion arvo $f(4)$:

Lasketaan funktioon syötetyn luvun neliö: $4^2 = 16$.

Saatuun arvoon lisätään luku 1: $16 + 1 = 17$.

Siis $f(4) = 17$.

b) Funktion lauseke $f(x)$:

Lasketaan funktioon syötetyn luvun neliö: x^2 .

Saatuun arvoon lisätään luku 1: $x^2 + 1$.

Siis $f(x) = x^2 + 1$.

c) Funktion arvo kohdassa 3 merkitään $f(3)$ ja lasketaan sijoittamalla lausekkeeseen muuttujan x paikalle luku 3.

$$f(3) = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

Vastaus: a) $f(5) = 26$, $f(4) = 17$ b) $f(x) = x^2 + 1$ c) $f(3) = 10$

184.

a) Muodostetaan funktion lauseke $g(x)$.

Lasketaan luvun neliöjuuri: \sqrt{x} .

Vähennetään luku 3 saadusta arvosta: $\sqrt{x} - 3$.

Siis $g(x) = \sqrt{x} - 3$.

b) Funktion arvo $g(1)$:

$$g(1) = \sqrt{1} - 3 = 1 - 3 = -2$$

Funktion arvo $g(4)$:

$$g(4) = \sqrt{4} - 3 = 2 - 3 = -1$$

Funktion arvo $g(-1)$:

$$g(-1) = \sqrt{-1} - 3$$

Koska negatiivisen luvun neliöjuurta ei ole määritelty, ei funktion arvoa $g(-1)$ ei voida laskea.

Funktiota ei ole määritelty kohdassa -1 .

Vastaus: a) $g(x) = \sqrt{x} - 3$ b) $g(1) = -2$, $g(4) = -1$, $g(-1)$ ei ole määritelty

185.

a) $f(2) = 2^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

$$g(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$h(2) = f(2) + g(2) = 1 + 5 = 6$$

b) Muodostetaan funktion $h(x)$ lauseke:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) + g(x) \\ &= (x^2 - 3) + (2x + 1) \\ &= x^2 + 2x - 2 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $f(2) = 1$, $g(2) = 5$, $h(2) = 6$ b) $h(x) = x^2 + 2x - 2$

186.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(12) &= 3 + 3(12 - 2) \\ &= 3 + 36 - 6 \\ &= 3 + 30 \\ &= 33 \end{aligned}$$

b) Ratkaistaan, millä muuttujan x arvolla funktion arvo $f(x)$ on 12.

$$\begin{aligned} f(x) &= 12 \\ 3 + 3(x - 2) &= 12 \\ 3 + 3x - 6 &= 12 \\ 3x &= 12 - 3 + 6 \\ 3x &= 15 && | :3 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $f(12) = 33$ b) $x = 5$

187.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= 4 \\ 8 - 2x &= 4 \\ -2x &= 4 - 8 \\ -2x &= -4 && | :(-2) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &= 4 \\ 2(x + 4) - 2 &= 4 \\ 2x + 8 - 2 &= 4 \\ 2x &= 4 - 8 + 2 \\ 2x &= -2 && | :2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $x = 2$ b) $x = -1$

188.

$$g(x) = 6$$

$$2^{x-1} - 2 = 6$$

$$2^{x-1} = 6 + 2$$

$$2^{x-1} = 8$$

$$2^{x-1} = 2^3$$

$$x - 1 = 3$$

$$x = 3 + 1$$

a) $x = 4$

$$g(x) = 6$$

$$2 \cdot 3^{2x} - 12 = 6$$

$$2 \cdot 3^{2x} = 6 + 12$$

$$2 \cdot 3^{2x} = 18 \quad | : 2$$

$$3^{2x} = 9$$

$$3^{2x} = 3^2$$

$$2x = 2 \quad | : 2$$

b) $x = 1$

Vastaus: a) $x = 4$ b) $x = 1$

189.

a) Muodostetaan funktio $h(x)$:

Lasketaan funktioon syötetyn luvun puolikas:

$$\frac{x}{2}.$$

Saadusta arvosta vähennetään syötetyn luvun neljäsosa:

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{4}.$$

$$\text{Siis } h(x) = \frac{x}{2} - \frac{x}{4}.$$

$$\text{b) } h(4) = \frac{4}{2} - \frac{4}{4} = 2 - 1 = 1$$

$$h(-1) = \frac{(-1)}{2} - \frac{(-1)}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{c) } h(x) = 4$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 4 \quad | \cdot 4$$

$$2x - x = 16$$

$$x = 16$$

$$\text{d) } h(x) = -1$$

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{4} = -1 \quad | \cdot 4$$

$$2x - x = -4$$

$$x = -4$$

Vastaus: a) $h(x) = \frac{x}{2} - \frac{x}{4}$ b) $h(4) = 1$, $h(-1) = -\frac{1}{4}$ c) $x = 16$ d) $x = -4$

190.

a) Ratkaistaan, millä muuttujan x arvoilla funktioiden arvot $f(x)$ ja $g(x)$ ovat yhtä suuret.

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x) \\6 - 6x &= 6 - 7x \\-6x + 7x &= 6 - 6 \\x &= 0\end{aligned}$$

b) Ratkaistaan, millä muuttujan x arvoilla funktioiden arvot $f(x)$ ja $g(x)$ ovat yhtä suuret.

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x) \\4(x - 1) &= 3(2x + 1) \\4x - 4 &= 6x + 3 \\4x - 6x &= 3 + 4 \\-2x &= 7 && | :(-2) \\x &= -\frac{7}{2}\end{aligned}$$

c) Ratkaistaan, millä muuttujan x arvoilla funktioiden arvot $f(x)$ ja $g(x)$ ovat yhtä suuret.

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x) \\6 - 3x &= 3(4 - 2x) \\6 - 3x &= 12 - 6x \\-3x + 6x &= 12 - 6 \\3x &= 6 && | :3 \\x &= 2\end{aligned}$$

Vastaus: a) $x = 0$ b) $x = -\frac{7}{2}$ c) $x = 2$

191.

a) Lasketaan ensin funktion g arvo $g(3)$.

$$g(3) = 3 + 2 \cdot 3 = 3 + 6 = 9$$

Ratkaistaan millä muuttujan x arvolla funktion f arvo $f(x)$ on 9.

$$f(x) = 9$$

$$3x - 6 = 9$$

$$3x = 9 + 6$$

$$3x = 15 \quad | :3$$

$$x = 5$$

b) Lasketaan ensin funktion f arvo $f(4)$.

$$f(4) = 3 \cdot 4 - 6 = 12 - 6 = 6$$

Ratkaistaan millä muuttujan x arvolla funktion g arvo $g(x)$ on 6.

$$g(x) = 6$$

$$3 + 2x = 6$$

$$2x = 6 - 3$$

$$2x = 3 \quad | :2$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Vastaus: a) $x = 5$ b) $x = \frac{3}{2}$

192. a) Funktion arvo kohdassa 0 lasketaan sijoittamalla muuttujan x paikalle luku 0.

$$f(0) = 8 \cdot 0 - 16 = -16$$

Funktion nollakohdissa funktion arvo on nolla. Funktion f nollakohdat löydetään ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 8x - 16 &= 0 \\ 8x &= 16 && | :8 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

b) Funktion arvo kohdassa 0 lasketaan sijoittamalla muuttujan x paikalle luku 0.

$$f(0) = -5 \cdot 0 + 2 = 2$$

Funktion nollakohdissa funktion arvo on nolla. Funktion f nollakohdat löydetään ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -5x + 2 &= 0 \\ -5x &= -2 && | :(-5) \\ x &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

c) Funktion arvo kohdassa 0 lasketaan sijoittamalla muuttujan x paikalle luku 0.

$$f(0) = 16 - 2(0 + 4) = 16 - 8 = 8$$

Funktion nollakohdissa funktion arvo on nolla. Funktion f nollakohdat löydetään ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 16 - 2(x + 4) &= 0 \\ 16 - 2x - 8 &= 0 \\ 8 - 2x &= 0 \\ -2x &= -8 && | :(-2) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $f(0) = -16$, nollakohta $x = 2$ b) $f(0) = 2$, nollakohta $x = \frac{2}{5}$ c) $f(0) = 8$, nollakohta $x = 4$

193. a) Funktion arvo kohdassa 0 lasketaan sijoittamalla muuttujan x paikalle luku 0

$$g(0) = 3^0 - 27 = 1 - 27 = -26$$

Funktion g nollakohdat löydetään ratkaisemalla yhtälö $g(x) = 0$.

$$g(x) = 0$$

$$3^x - 27 = 0$$

$$3^x = 27$$

$$3^x = 3^3$$

$$x = 3$$

b) Funktion arvo kohdassa 0 lasketaan sijoittamalla muuttujan x paikalle luku 0.

$$g(0) = 4^{2 \cdot 0 + 1} - 16 = 4 - 16 = -12$$

Funktion g nollakohdat löydetään ratkaisemalla yhtälö $g(x) = 0$.

$$g(x) = 0$$

$$4^{2x+1} - 16 = 0$$

$$4^{2x+1} = 16$$

$$4^{2x+1} = 4^2$$

$$2x + 1 = 2$$

$$2x = 2 - 1$$

$$2x = 1 \quad | :2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

c) Funktion arvo kohdassa 0 lasketaan sijoittamalla muuttujan x paikalle luku 0.

$$g(0) = 8^{0+1} - 64 = 8 - 64 = -56$$

Funktion g nollakohdat löydetään ratkaisemalla yhtälö $g(x) = 0$.

$$g(x) = 0$$

$$8^{x+1} - 64 = 0$$

$$8^{x+1} = 64$$

$$8^{x+1} = 8^2$$

$$x + 1 = 2$$

$$x = 2 - 1$$

$$x = 1$$

Vastaus: a) $g(0) = -26$, nollakohta $x = 3$ b) $g(0) = -12$, nollakohta $x = \frac{1}{2}$

c) $g(0) = -56$, nollakohta $x = 1$

194.

Funktion $f(x) = 3(ax + 2) + 12$ nollakohta on $x = 1$, joten $f(1) = 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a .

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ 3(a \cdot 1 + 2) + 12 &= 0 \\ 3a + 6 + 12 &= 0 \\ 3a + 18 &= 0 \\ 3a &= -18 && | :3 \\ a &= -6 \end{aligned}$$

Vastaus: $a = -6$

195. Pitää laskea Sannan ruumiinlämpö celsiusasteina, kun lämpö tiedetään fahrenheitasteina. Ratkaistaan, millä muuttujan c arvolla funktion arvo $f(c)$ on 100.

$$\begin{aligned} f(c) &= 100 \\ \frac{9}{5}c + 32 &= 100 \\ c &= 37,777\dots \approx 37,8 \end{aligned}$$

Sannalla ruumiinlämpö oli siis $37,8$ °C.

Vastaus: Sannalla oli kuumetta $37,8$ °C.

196.

a) Ratkaistaan, millä muuttujan x arvolla funktion arvo $f(x)$ on 41.

$$f(x) = 41$$

$$0,43x - 27 = 41$$

$$x = 158,1395... \approx 158$$

Nainen oli ollut noin 158 cm pitkä.

b) Ratkaistaan ensin kuinka pitkä sääriluu 175 cm pitkällä miehellä on. Joten lasketaan funktion g arvo kohdassa 175.

$$g(175) = 0,45 \cdot 175 - 31 = 78,75 - 31 = 47,75$$

175 cm pitkällä miehellä on 47,75 cm pitkä sääriluu, joten miehen läheltä löytynyt 42 cm pitkä sääriluu ei ole tämän miehen.

Vastaus: a) 158 cm b) Ei ole.

197.

a) Yhtiön A sähkölasku:

Kuukauden sähkölasku muodostuu perusmaksusta **4,02 €**.

Lisäksi jokainen käytetty kilowattitunti sähköenergiaa maksaa 6,62 senttiä eli 0,0662 euroa. Kun energiaa on käytetty x kilowattituntia, energiamaksu on **0,0662x** euroa.

Sähkölaskun suuruuden ilmaisee funktio $a(x) = 4,02 + 0,0662x$.

Yhtiön B sähkölasku:

Kuukauden sähkölasku muodostuu perusmaksusta **3,75 €**.

Lisäksi jokainen käytetty kilowattitunti sähköenergiaa maksaa 7,99 senttiä eli 0,0799 euroa. Kun energiaa on käytetty x kilowattituntia, energiamaksu on **0,0779x** euroa.

Sähkölaskun suuruuden ilmaisee funktio $b(x) = 3,75 + 0,0799x$.

b) Ratkaistaan muuttuja x , kun $a(x) = b(x)$.

$$a(x) = b(x)$$

$$4,02 + 0,0662x = 3,75 + 0,0799x$$

$$x = 19,708... \approx 19,7$$

Sähkönkulutuksen tulisi olla noin 19,7 kWh.

c) Sähköyhtiön A vuodessa 2000 kWh käytetty sähköenergia maksaa:

$$\begin{aligned} a(2000) &= \overbrace{12 \cdot 4,02}^{12 \text{ kuukauden perusmaksu}} + 0,0662 \cdot 2000 \\ &= 48,24 + 132,4 \\ &= 180,64 \end{aligned}$$

Sähköyhtiön B vuodessa 2000 kWh käytetty sähköenergia maksaa:

$$\begin{aligned} b(2000) &= \overbrace{12 \cdot 3,75}^{12 \text{ kuukauden perusmaksu}} + 0,0799 \cdot 2000 \\ &= 45 + 159,8 \\ &= 204,8 \end{aligned}$$

Sähköyhtiö B on $204,8 \text{ €} - 180,64 \text{ €} = 24,16 \text{ €}$ kalliimpi.

Vastaus: a) $a(x) = 4,02 + 0,0662x$ ja $b(x) = 3,75 + 0,0799x$ b) 19,7 kWh c) 24,16 €

198. a) Taksimatkan hinta muodostuu aloitusmaksusta **5,50 euroa**. Lisäksi jokainen kilometri maksaa 1,43 euroa. Kun matka on x kilometriä pitkä, kilometrien hinnaksi tulee **1,43x** euroa.

Taksimatkan hinnan suuruuden ilmaisee funktio $f(x) = 5,50 + 1,43x$.

b) Taksikyydin hinta muodostuu aloitusmaksusta **5,50 euroa**. Lisäksi jokainen kilometri maksaa 1,72 euroa. Kun matka on x kilometriä pitkä, kilometrien hinnaksi tulee **1,72x** euroa.

Taksimatkan hinnan suuruuden ilmaisee funktio $g(x) = 5,50 + 1,72x$.

c) Kun 2 matkustajaa matkustaa 5 km, on taksimaksun hinta funktion $f(x) = 5,5 + 1,43x$ arvo kohdassa 5.

$$f(5) = 5,5 + 1,43 \cdot 5 = 5,5 + 7,15 = 12,65$$

2 matkustajan 5 km taksimatka maksaa siis 12,65 €.

Kun 4 matkustajaa matkustaa 10,4 km, on taksimaksun hinta funktion $g(x) = 5,50 + 1,72x$ arvo kohdassa 10,4.

$$g(10,4) = 5,50 + 1,72 \cdot 10,4 = 5,50 + 17,888 = 23,388 \approx 23,39$$

4 matkustajan 10,4 km taksimatka maksaa siis 23,39 €.

d) Ratkaistaan, millä muuttujan x arvolla funktion arvo $f(x)$ on 30,10.

$$f(x) = 30,10$$

$$5,50 + 1,43x = 30,10$$

$$x = 17,2027... \approx 17,2$$

Mico on matkustanut taksilla 17,2 km.

e) Ratkaistaan, millä muuttujan x arvolla funktion arvo $g(x)$ on 30,10.

$$g(x) = 30,10$$

$$5,50 + 1,72x = 30,10$$

$$x = 14,3023... \approx 14,3$$

Mico pääsisi Miljan ja Samun kanssa taksilla 14,3 km 30,10 eurolla.

Vastaus: a) $f(x) = 5,50 + 1,43x$ b) $g(x) = 5,50 + 1,72x$

c) 2 matkustajaa, 5 km: 12,65€, 4 matkustajaa, 10,4 km; 23,39 € d) 17,2 km e) 14,3 km

199.

Myyntihinta (m) muodostuu verottomasta hinnasta (h) ja siihen lisätystä arvolisäverosta 24 %.

Arvonlisävero euroina on $0,24 \cdot h = 0,24h$

Tuotteen myyntihinnan suuruuden ilmaisee funktio $m(h) = h + 0,24h = 1,24h$.

b) Muuttujan h arvo on 125. Lasketaan funktion arvo $m(125)$.

$$m(125) = 1,24 \cdot 125 = 155$$

Tuotteen myyntihinta on siis 155 €.

c) Funktion $m(h)$ arvo on 359. Kysytään muuttujan h arvoa. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\begin{aligned} m(h) &= 359 \\ 1,24h &= 359 && | :1,24 \\ h &= 289,516\dots \approx 289,52 \end{aligned}$$

Tuotteen veroton hinta on siis 289,52€.

Vastaus: a) $m(h) = 1,24h$ b) 155€ c) 289,52€

200.

a) 5 % palkankorotus:

Prosenttikerroin on $100\% + 5\% = 105\% = 1,05$. Uusi palkka saadaan siis kertomalla alkuperäinen palkka x luvulla 1,05.

Uuden palkan suuruuden ilmaisee funktio $f(x) = 1,05x$.

50 € palkankorotus:

Palkkaan x euroa tulee lisää 50 euroa.

Uuden palkan suuruuden ilmaisee funktio $g(x) = x + 50$.

b) Ratkaistaan mikä alkuperäinen palkka x tuottaa samat korotetut palkat.

$$f(x) = g(x)$$

$$1,05x = x + 50$$

$$x = 1000$$

Matiaksen alkuperäinen palkka oli 1 000 €, joten uusi palkka on $1\ 000\ € + 50\ € = 1\ 050\ €$.

Vastaus: a) prosenttikorotus $f(x) = 1,05x$, eurokorotus $g(x) = x + 50$ b) 1 050 €

201.

a) Jakolasku $\frac{2}{4-x}$ on määritelty vain, kun jakaja $4-x$ ei ole nolla. Siten luvun x tulee olla erisuuri kuin neljä.

Funktion f määrittelyjoukon muodostavat luvut x , jotka toteuttavat ehdon $x \neq 4$.

b) Neliöjuuren $\sqrt{x-5}$ arvo on määritelty vain, kun luku $x-5$ on suurempi tai yhtä suuri kuin nolla. Siten luvun x tulee olla vähintään 5.

Funktion g määrittelyjoukon muodostavat luvut x , jotka toteuttavat ehdon $x \geq 5$.

Vastaus: a) Luvut, jotka toteuttavat ehdon $x \neq 4$. b) Luvut, jotka toteuttavat ehdon $x \geq 5$.

202.

a) Neliöjuuren $\sqrt{25-x}$ arvo on määritelty vain, kun luku $25-x$ on suurempi tai yhtä suuri kuin nolla. Siten $x \leq 25$.

Jakolasku $\frac{5}{\sqrt{25-x}}$ on määritelty vain, kun jakaja $\sqrt{25-x}$ ei ole nolla. Siten $x \neq 25$

Funktion f määrittelyjoukon muodostavat luvut x , jotka toteuttavat ehdon $x < 25$.

b) Funktio g on määritelty kaikilla luvuilla.

Vastaus: a) Luvut, jotka toteuttavat ehdon $x < 25$. b) Kaikki luvut.

203.

Funktion $f(x) = a \cdot x^2 + 3(a-1)x + 6$ nollakohta on $x = -2$ eli $f(-2) = 0$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a .

$$\begin{aligned} f(-2) &= 0 \\ a \cdot (-2)^2 + 3(a-1)(-2) + 6 &= 0 \\ 4a - 6(a-1) + 6 &= 0 \\ 4a - 6a + 6 + 6 &= 0 \\ -2a + 12 &= 0 \\ -2a &= -12 && | :(-2) \\ a &= 6 \end{aligned}$$

Vastaus: $a = 6$

204.

a) $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$

b) $f(a) = 2 \cdot a + 1 = 2a + 1$

c) $f(4a) = 2 \cdot 4a + 1 = 8a + 1$

d) $f(a+1) = 2 \cdot (a+1) + 1 = 2a + 2 + 1 = 2a + 3$

Vastaus: a) $f(1) = 3$ b) $f(a) = 2a + 1$ c) $f(4a) = 8a + 1$ d) $f(a+1) = 2a + 3$

205.

a) $g(3) = c$ ja $g(10) = j$

b) Kirjain s on aakkosissa 19. kirjain, joten $g(n) = s$, kun $n = 19$.

c) Aakkosissa on 29 kirjainta, joten määrittelyjoukko on kokonaisluvut 1, 2, 3, ..., 28, 29.

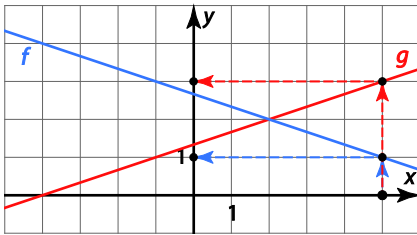
d) Funktio g voi saada arvoksi kaikki suomalaiset aakkoset.

Luku 4.2

206.

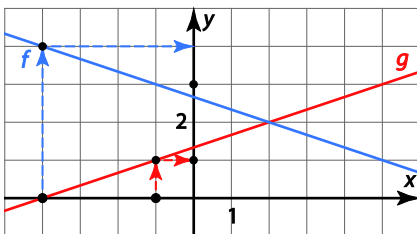
a) Kohdassa $x=5$ funktion f kuvaajan pisteen y -koordinaatti on 1, joten funktion f arvo kohdassa 5 on 1: $f(5)=1$.

Kohdassa $x=5$ funktion g kuvaajan pisteen y -koordinaatti on 3, joten funktion g arvo kohdassa 5 on 3: $g(5)=3$.



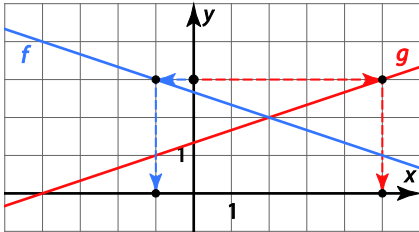
b) Kohdassa $x=-4$ funktion f kuvaajan pisteen y -koordinaatti on 4, joten funktion f arvo kohdassa -4 on 4: $f(-4)=4$.

Kohdassa $x=-1$ funktion g kuvaajan pisteen y -koordinaatti on 1, joten funktion g arvo kohdassa -1 on 1: $g(-1)=1$.

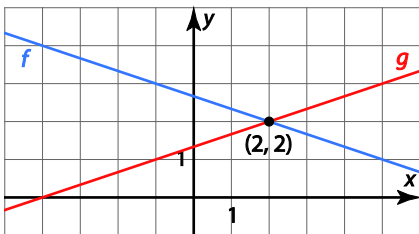


c) Pitää etsiä ne funktion f kuvaajan pisteet, joiden y -koordinaatti on 3. Pisteitä löytyy yksi, ja sen x -koordinaatti on -1 . Siis $f(x) = 3$, kun $x = -1$.

Pitää etsiä ne funktion g kuvaajan pisteet, joiden y -koordinaatti on 3. Pisteitä löytyy yksi, ja sen x -koordinaatti on 5. Siis $g(x) = 3$, kun $x = 5$.



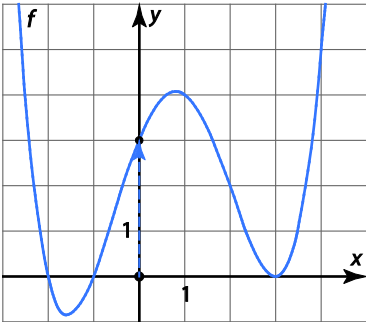
d) Kuvaajien leikkauspisteen x -koordinaatti on 2 ja y -koordinaatti on 2. Leikkauspiste on $(2, 2)$.



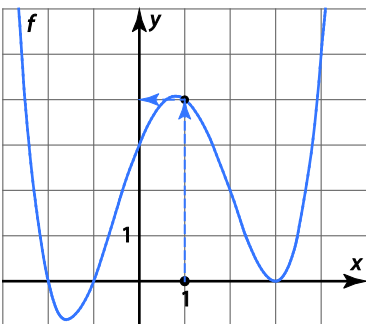
Vastaus: a) $f(5) = 1$, $g(5) = 3$ b) $f(-4) = 4$, $g(-1) = 1$ c) $f(x) = 3$, kun $x = -1$ ja $g(x) = 3$, kun $x = 5$ d) $(2, 2)$

207.

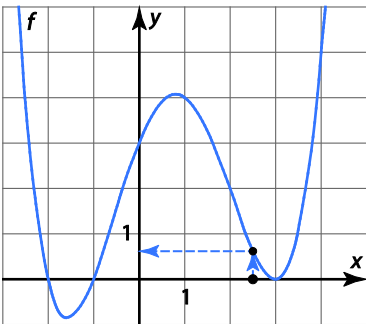
a) Kohdassa $x=0$ funktion kuvaajan pisteen y -koordinaatti on 3. Kysytty piste on $(0, 3)$



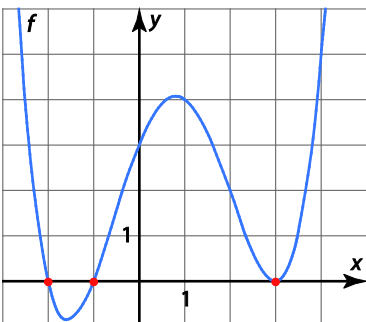
b) Kohdassa $x=1$ funktion f kuvaajan pisteen y -koordinaatti on 4. Kysytty piste on $(1, 4)$.



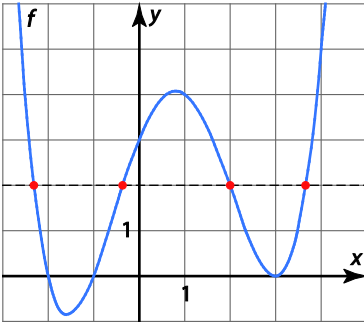
c) Kohdassa $x=2,5$ funktion f kuvaajan pisteen y -koordinaatti on noin 0,7. Kysytty piste on $(2,5; 0,7)$.



d) Funktion arvo on 0 kolmessa kohtaa: $x=-2$, $x=-1$ ja $x=3$. Joten pisteet ovat $(-2, 0)$, $(-1, 0)$ ja $(3, 0)$.



e) Funktion arvo on 2 neljässä kohtaa. Kohdissa $x \approx -2,3$; $x \approx -0,4$; $x = 2$ ja $x \approx 3,7$. Kysytyt pisteet ovat $(-2,3; 2)$, $(-0,4; 2)$, $(2, 2)$ ja $(3,7; 2)$.

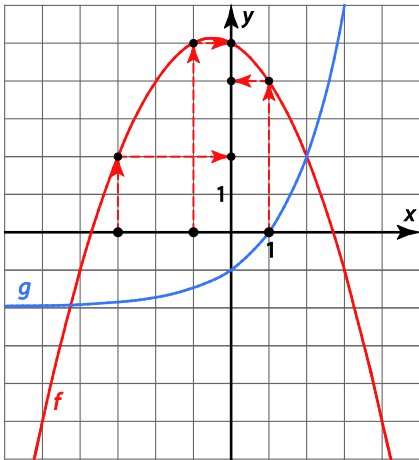


f) Funktion arvo ei ole -2 missään kohdassa.

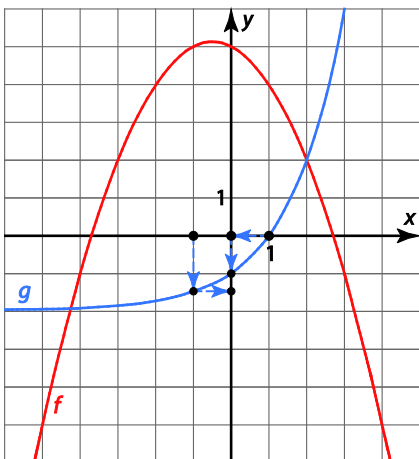
Vastaus: a) $(0, 3)$ b) $(1, 4)$ c) $(2,5; 0,7)$ d) $(-2, 0)$, $(-1, 0)$ ja $(3, 0)$ e) $(-2,3; 2)$, $(-0,4; 2)$, $(2, 2)$ ja $(3,7; 2)$ f) ei pisteitä

208.

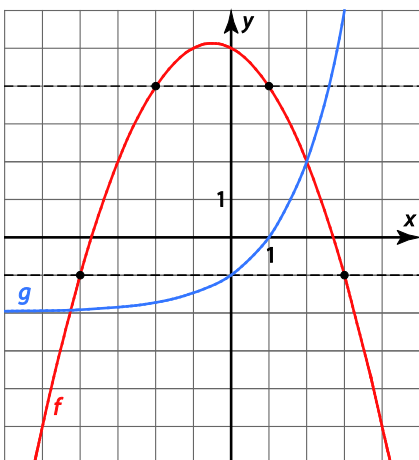
a) $f(-3) = 2$, $f(-1) = 5$ ja $f(1) = 4$.



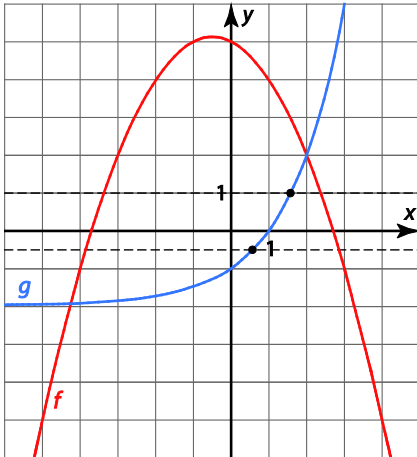
b) $g(-1) \approx -1,5$, $g(0) = -1$ ja $g(1) = 0$



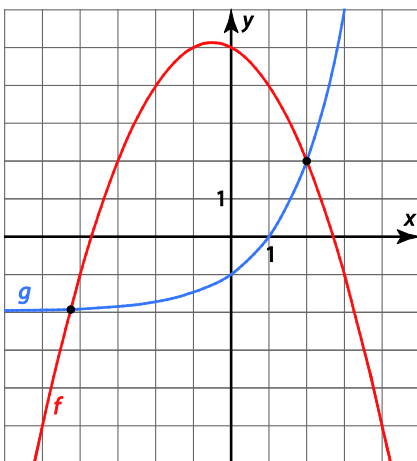
c) $f(x) = -1$, kun $x = -4$ tai $x = 3$ ja $f(x) = 4$, kun $x = -2$ tai $x = 1$



d) $g(x) = 1$, kun $x \approx 1,6$ ja $g(x) = -0,5$; kun $x \approx 0,6$



e) Funktiot f ja g saavat saman arvon kuvaajien leikkauspisteissä. Funktioiden kuvaajat leikkaavat kahdessa pisteessä: $(-4,3; -1,9)$ ja $(2, 2)$.



Vastaus:

a) $f(-3) = 2$, $f(-1) = 5$ ja $f(1) = 4$

b) $g(-1) \approx -1,5$, $g(0) = -1$ ja $g(1) = 0$

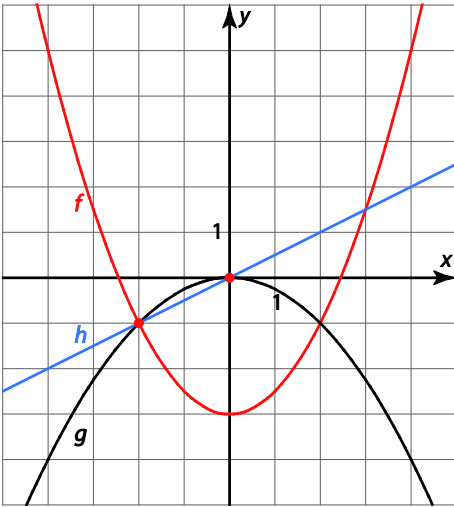
c) $f(x) = -1$, kun $x = -4$ tai $x = 3$ ja $f(x) = 4$, kun $x = -2$ tai $x = 1$

d) $g(x) = 1$, kun $x \approx 1,6$ ja $g(x) = -0,5$; kun $x \approx 0,6$

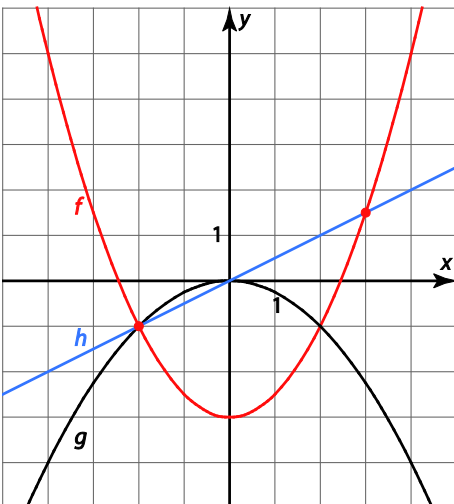
e) $(-4,3; -1,9)$ ja $(2, 2)$

209.

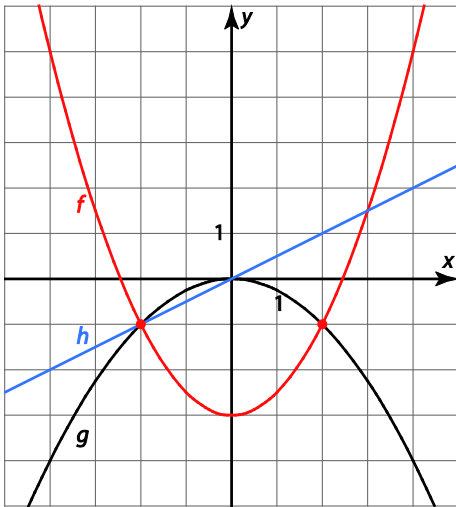
a) Funktioiden g ja h kuvaajat leikkaavat pisteissä $(-2, -1)$ ja $(0, 0)$.



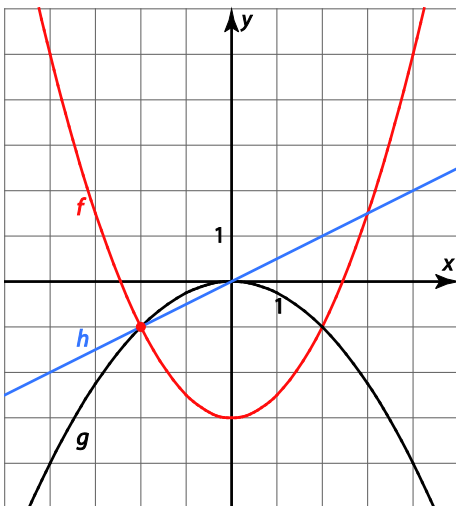
b) Funktiot f ja h saavat saman arvon, kun $x = -2$ tai $x = 3$.



c) Funktiot f ja g saavat saman arvon kohdissa $x = -2$ ja $x = 2$.

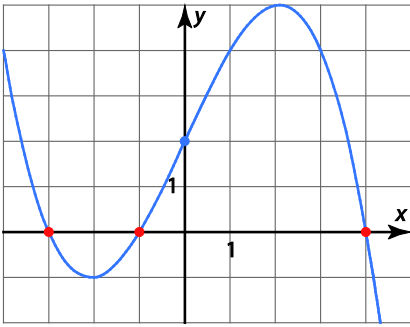


d) Funktiot f , h ja g saavat saman arvon kohdassa $x = -2$.



Vastaus: a) $(-2, -1)$ ja $(0, 0)$ b) $x = -2$ ja $x = 3$ c) $x = -2$ ja $x = 2$ d) $x = -2$

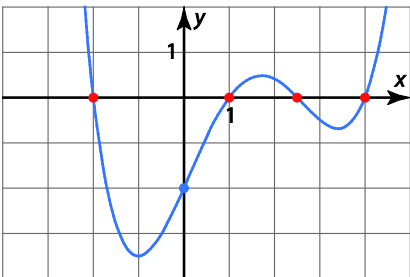
210.



- a) Funktion kuvaaja leikkaa x -akselin nollakohdissa. Funktion nollakohdat ovat $x = -3$, $x = -1$ tai $x = 4$.
- b) Funktion arvo kohdassa nolla on kuvaajan pisteen y -koordinaatti, kun $x = 0$. Kuvaaja kulkee pisteen $(0, 2)$ kautta, joten $f(0) = 2$.
- c) Funktion arvot ovat positiivisia, kun kuvaaja on x -akselin yläpuolella. Funktion arvot ovat siis positiivisia, kun $x < -3$ tai $-1 < x < 4$.

Vastaus: a) $x = -3$, $x = -1$ tai $x = 4$ b) $f(0) = 2$ c) $x < -3$ tai $-1 < x < 4$

211.

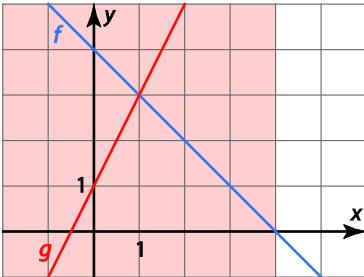


- a) Funktion arvo kohdassa nolla on kuvaajan pisteen y -koordinaatti, kun $x = 0$. Kuvaaja kulkee pisteen $(0, -2)$ kautta, joten $f(0) = -2$.
- b) Funktion kuvaaja leikkaa x -akselin nollakohdissa. Funktion nollakohdat ovat $x = -2$, $x = 1$, $x \approx 2,5$ ja $x = 4$.
- c) Funktion arvot ovat negatiivisia, kun kuvaaja on x -akselin alapuolella. Funktion arvot ovat siis negatiivisia, kun $-2 < x < 1$ tai $2,5 < x < 4$.

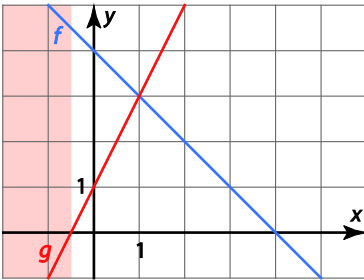
Vastaus: a) $f(0) = -2$ b) $x = -2$, $x = 1$, $x \approx 2,5$ ja $x = 4$ c) $-2 < x < 1$ tai $2,5 < x < 4$

212.

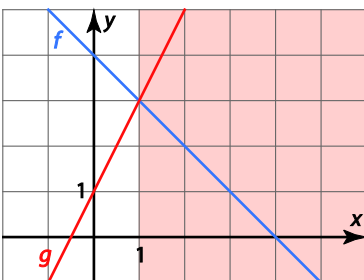
a) Koska funktio $f(x) = 4 - x$, niin tarkastellaan millä muuttujan arvoilla funktion f arvot ovat positiivisia. Funktion f arvot ovat positiivisia, kun kuvaaja on x -akselin yläpuolella eli kun $x < 4$.



b) Koska funktio $g(x) = 2x + 1$, niin tarkastellaan millä muuttujan arvoilla funktion g arvot ovat negatiivisia tai nolla. Funktion g arvot ovat negatiivisia tai nolla, kun kuvaaja on x -akselilla tai sen alapuolella eli kun $x \leq -0,5$.



c) Koska funktio $g(x) = 2x + 1$ ja funktio $f(x) = 4 - x$, niin tarkastellaan millä muuttujan arvoilla funktio g saa suurempia arvoja kuin funktio f . Funktio g saa suurempia arvoja kuin funktio f , kun funktion g kuvaaja on funktion f kuvaajan yläpuolella eli kun $x > 1$.

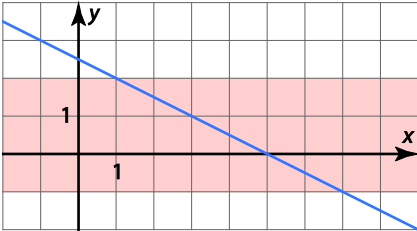


Vastaus: a) $x < 4$ b) $x \leq -0,5$ c) $x > 1$

213.

a) Funktion arvot ovat positiivisia, kun kuvaaja on x -akselin yläpuolella. Funktion arvot ovat siis positiivisia, kun $x < 5$.

b) Funktion arvot ovat lukujen -1 ja 2 välissä, kun $1 < x < 7$.



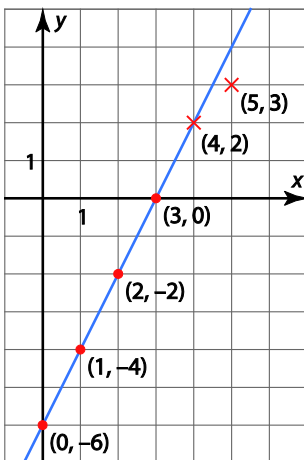
Vastaus: a) $x < 5$ b) $1 < x < 7$

214.

Lasketaan funktion f arvot.

Muuttujan arvo x	Funktion arvo $f(x) = 2x - 6$	Kuvaajan piste (x, y)
0	$2 \cdot 0 - 6 = -6$	$(0, -6)$
1	$2 \cdot 1 - 6 = -4$	$(1, -4)$
2	$2 \cdot 2 - 6 = -2$	$(2, -2)$
3	$2 \cdot 3 - 6 = 0$	$(3, 0)$

Merkitään pisteet koordinaatistoon ja piirretään niiden kautta kulkeva kuvaaja.



a) Kuvaajan perusteella piste $(4, 2)$ on kuvaajalla ja piste $(5, 3)$ on kuvaajan alapuolella.

b) Piste $(4, 2)$:

Lasketaan funktion arvo kohdassa $x = 4$: $f(4) = 4 \cdot 2 - 6 = 2$.

Koska $f(4) = 2$, niin piste $(4, 2)$ on kuvaajalla.

Piste $(5, 3)$:

Lasketaan funktion arvo kohdassa $x = 5$: $f(5) = 2 \cdot 5 - 6 = 4$.

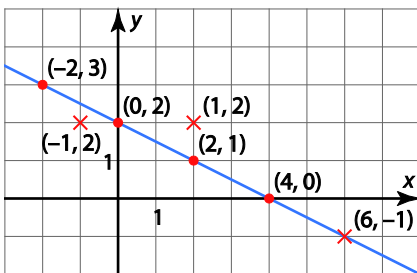
Koska $f(5) = 4$, niin kuvaaja kulkee pisteen $(5, 4)$ kautta. Siten piste $(5, 3)$ on kuvaajan alapuolella.

215.

Lasketaan funktion g arvot.

Muuttujan arvo x	Funktion arvo $g(x) = 2 - 0,5x$	Kuvaajan piste (x, y)
-2	$2 - 0,5 \cdot (-2) = 3$	$(-2, 3)$
0	$2 - 0,5 \cdot 0 = 2$	$(0, 2)$
2	$2 - 0,5 \cdot 2 = 1$	$(2, 1)$
4	$2 - 0,5 \cdot 4 = 0$	$(4, 0)$

Merkitään pisteet koordinaatistoon ja piirretään niiden kautta kulkeva kuvaaja.



- a) Kuvan perusteella piste $(-1, 2)$ on kuvaajan alapuolella.
- b) Kuvan perusteella piste $(1, 2)$ on kuvaajan yläpuolella.
- c) Kuvan perusteella piste $(6, -1)$ on kuvaajalla.

216.

a) Lasketaan funktion arvo kohdassa $x = 3$: $f(3) = 4 \cdot 3 - 10 = 2$.

Koska $f(3) = 2$, niin piste $(3, 2)$ on kuvaajalla.

b) Lasketaan funktion arvo kohdassa $x = 3$: $g(3) = 3 - 2 = 1$.

Koska $g(3) = 1$, niin kuvaaja kulkee pisteen $(3, 1)$ kautta. Siten piste $(3, 2)$ on kuvaajan yläpuolella.

c) lasketaan funktion arvo kohdassa $x = 3$: $h(3) = 9 - 2 \cdot 3 = 3$.

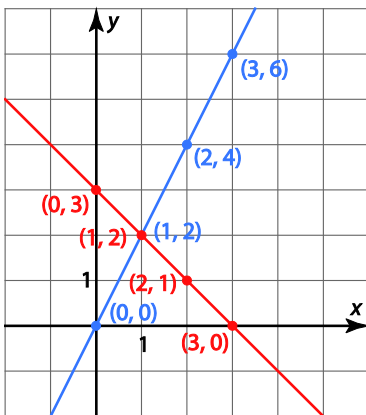
Koska $h(3) = 3$, niin kuvaaja kulkee pisteen $(3, 3)$ kautta. Siten piste $(3, 2)$ on kuvaajan alapuolella.

Vastaus: a) kuvaajalla b) kuvaajan yläpuolella c) kuvaajan alapuolella

217.

Piirretään koordinaatistoon funktioiden $f(x) = 2x$ ja $g(x) = 3 - x$ kuvaajat.

x	$f(x) = 2x$	$g(x) = 3 - x$
0	0	3
1	2	2
2	4	1
3	6	0

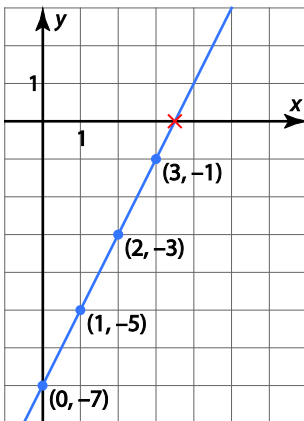


Kuvasta havaitaan, että kuvaajat leikkaavat pisteessä $(1, 2)$.

218.

Piirretään funktion $f(x) = 2x - 7$ kuvaaja.

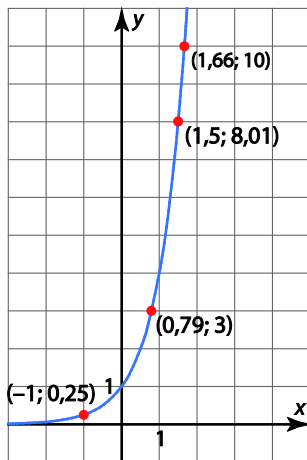
x	$f(x) = 2x - 7$
0	-7
1	-5
2	-3
3	-1



- a) Funktion kuvaaja leikkaa x -akselin nollakohdissa. Funktion f nollakohta on $x \approx 3,5$.
- b) Funktion arvot ovat positiivisia, kun kuvaaja on x -akselin yläpuolella. Funktion f arvot ovat positiivisia, kun $x > 3,5$.
- c) Funktion arvot ovat negatiivisia, kun kuvaaja on x -akselin alapuolella. Funktion f arvot ovat negatiivisia, kun $x < 3,5$.

219.

Piirretään funktion f kuvaaja laskimella.



a) Funktion $f(x) = 4^x$ kuvaaja muodostuu pisteistä $(x, 4^x)$, joissa x -koordinaatti on eksponentti ja y -koordinaatti potenssin arvo.

Kuvaajan perusteella $4^{-1} \approx 0,25$ ja $4^{1,5} \approx 8$.

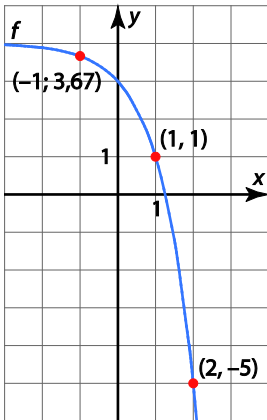
b) Jos $y = 4^x$, niin logaritmin määritelmän mukaan $x = \log_4 y$. Siten funktion $f(x) = 4^x$ kuvaaja muodostuu pisteistä, joissa $y = 4^x$ ja $x = \log_4 y$.

Etsitään kuvaajalta piste, jonka y -koordinaatti on 10. Kuvaajan perusteella $\log_4 10 \approx 1,7$.

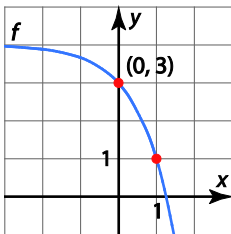
Etsitään kuvaajalta piste, jonka y -koordinaatti on 3. Kuvaajan perusteella $\log_4 3 \approx 0,8$.

220.

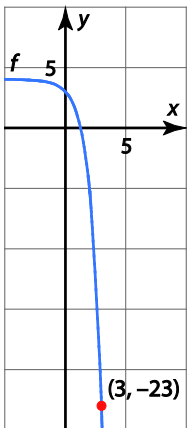
a) $f(1)=1$, $f(2)=-5$ ja $f(-1)\approx 3,7$



b) $f(x)=3$, kun $x=0$

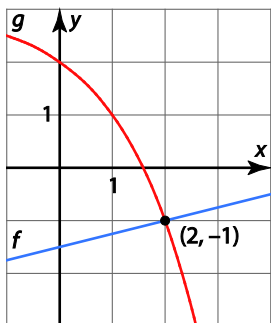


c) $f(x)=-23$, kun $x=3$

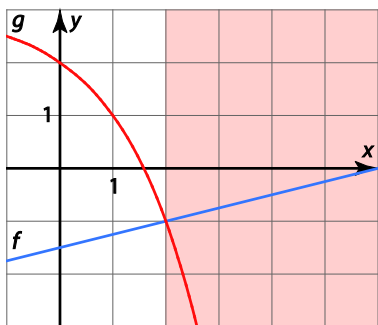


221.

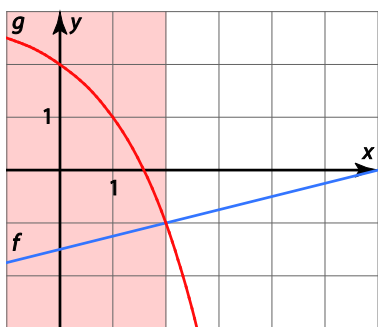
a) Funktiot saavat saman arvon kohdassa $x = 2$.



b) Funktion f arvot ovat suurempia kuin funktion g arvot, kun funktion f kuvaaja on funktion g kuvaajan yläpuolella. Siis $f(x) > g(x)$, kun $x > 2$.



c) Funktion f arvot ovat pienempiä kuin funktion g arvot, kun funktion f kuvaaja on funktion g kuvaajan alapuolella. Siis $f(x) < g(x)$, kun $x < 2$.



Vastaus: a) $x = 2$ b) $x > 2$ c) $x < 2$

222.

a) Lasketaan funktion arvo kohdassa $x = 2$: $f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 3,8 = 4,2$.

Koska $f(2) = 4,2$, niin kuvaaja kulkee pisteen $(2; 4,2)$ kautta. Siten piste $(2, 4)$ on kuvaajan alapuolella.

b) Lasketaan funktion arvo kohdassa $x = 2$: $g(2) = 4^2 - 12 = 4$.

Koska $g(2) = 4$, niin piste $(2, 4)$ on kuvaajalla.

c) Lasketaan funktion arvo kohdassa $x = 2$: $h(2) = \frac{21^2 - 28}{50 \cdot 2} = 4,13$.

Koska $h(2) = 4,13$, niin kuvaaja kulkee pisteen $(2; 4,13)$ kautta. Siten piste $(2, 4)$ on kuvaajan alapuolella.

Vastaus: a) alapuolella b) kuvaajalla c) alapuolella

223.

a) Lasketaan funktion h arvo kohdassa $t = 0$.

$$h(0) = 1,7 + 14,7 \cdot 0 - 4,9 \cdot 0^2 = 1,7$$

Joten pallo on 1,7 m korkeudella lyöntihetkellä.

b) Lasketaan funktion h arvo kohdassa $t = 2$.

$$h(2) = 1,7 + 14,7 \cdot 2 - 4,9 \cdot 2^2 = 11,5$$

Joten pallo on 11,5 m korkeudella 2 sekunnin kuluttua lyönnistä.

c) Lasketaan funktion d arvo kohdassa $t = 1$.

$$d(1) = 31,5 \cdot 1 = 31,5$$

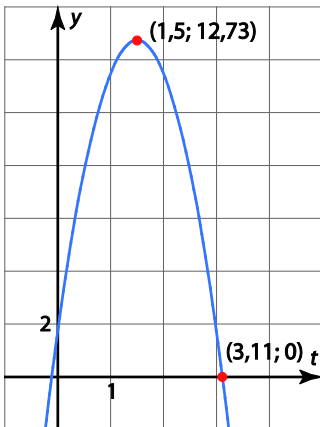
Joten pallo etenee 31,5 m ensimmäisen sekunnin aikana.

Lasketaan funktion d arvo kohdassa $t = 2$.

$$d(2) = 31,5 \cdot 2 = 63$$

Koska pallo eteni ensimmäisen sekunnin aikana 31,5 metriä, niin toisen sekunnin aikana pallo eteni $63 \text{ m} - 31,5 \text{ m} = 31,5 \text{ m}$.

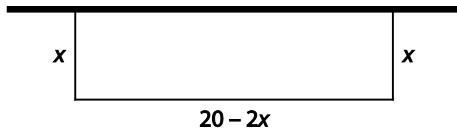
d) Piirretään laskimella funktion h kuvaaja.



Funktion h kuvaajan vaaka-akselilla on muuttuja t eli aika ja pystyakselilta saadaan korkeus. Kuvaajan korkein kohta on likimain 12,7 ja pallo on ilmassa likimain 3,1 sekuntia.

Vastaus: a) 1,7 m b) 11,5 m c) 31,5 m ja 31,5 m
d) Suurin korkeus n. 12,7 m. Pallo on ilmassa n. 3,1 s

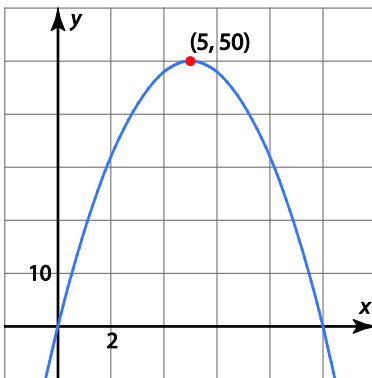
224.



Koska mökin seinää vasten kohtisuoran sivun pituus on x metriä ja aitaa on käytettävissä 20 metriä, niin mökin seinän suuntaisen sivun pituus on $20 - 2x$ metriä. Suorakulmion pinta-ala lasketaan kertomalla sivujen pituudet keskenään, joten pinta-alaa ilmaiseva funktio on $A(x) = x \cdot (20 - 2x) = 20x - 2x^2$.

b) $A(2) = 20 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 = 32$, $A(6) = 20 \cdot 6 - 2 \cdot 6^2 = 48$

c) Piirretään funktion A kuvaaja laskimella.



Funktion A kuvaajan vaaka-akselilla on muuttuja x , eli mökin seinää vasten kohtisuoran sivun pituus ja pystyakseli on aitauksen pinta-ala.

Suurin pinta-ala on 50m^2 ja silloin $x = 5$. Mökin seinää vastaan kohtisuoran sivun pituus on siis 5 m ja seinän suuntaisen sivun $20\text{ m} - 2 \cdot 5\text{ m} = 10\text{ m}$.

Vastaus: a) $A(x) = 20x - 2x^2$ b) $A(2) = 32$ ja $A(6) = 48$ c) Suurin pinta-ala 50 m^2 , jolloin aitauksen seinää vastaan kohtisuoran sivun pituus on 5 m ja seinän suuntaisen sivun pituus 10 m.

225.

a) Voi olla funktion $f(x)$ kuvaaja.

b) Voi olla funktion $f(x)$ kuvaaja.

c) Ei voi olla funktion $f(x)$ kuvaaja, koska samaan muuttujan x arvoon liittyy useampi funktion arvo y .

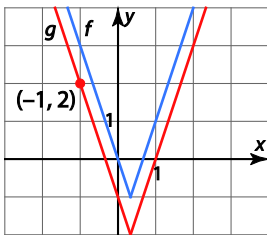
d) Voi olla funktion $f(x)$ kuvaaja.

e) Ei voi olla funktion $f(x)$ kuvaaja, koska samaan muuttujan x arvoon liittyy useampi funktion arvo y (kuvaajan pystysuora osuus).

f) Ei voi olla funktion $f(x)$ kuvaaja, koska samaan muuttujan x arvoon liittyy useampi funktion arvo y .

226.

a)



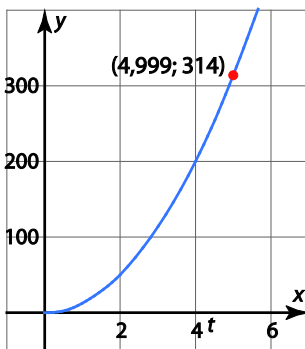
b) Kuvan perusteella $g(-1) = 2$.

227.

a) Koska pallon säde on aina positiivinen, niin funktion $A(r) = 4\pi r^2$ määrittelyjoukko on positiivisten lukujen joukko $r > 0$.

b) $A(2) = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi \approx 50,3$

c) Piirretään funktion A kuvaaja laskimella.

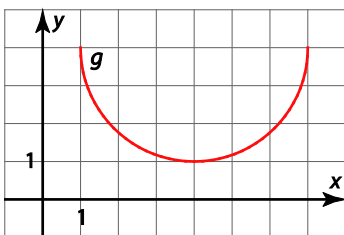


Kuvan mukaan funktio saa arvon 314 kohdassa $r \approx 5$

Joten pinta-ala on 314 cm^2 , kun $r \approx 5,00 \text{ cm}$.

228.

Piirretään laskimella funktion g kuvaaja.



a) Kuvaajasta nähdään, että funktion suurin arvo on 4.

b) Kuvaajasta nähdään, että funktion pienin arvo on 1.

c) Kuvaajasta nähdään, että määrittelyjoukko on luvut x , jotka toteuttavat ehdon $1 \leq x \leq 7$.

Vastaus: a) 4 b) 1 c) Luvut x , jotka toteuttavat ehdon $1 \leq x \leq 7$.

229. a) Liittymä A kuukausimaksu on 14,90 €, joka sisältää 250 minuuttia puheaikaa, eli 250 minuuttiin asti liittymä maksaa 14,90 € kuukaudessa.

Kun puhuttuja minuutteja on yli 250, niin ne maksavat 0,09 €/min. Kun puheaika on x minuuttia kuukaudessa ja $x > 250$, niin yli puhelinlaskun suuruus on $14,90 € + (x - 250) \cdot 0,09 €$

Liittymän A puhelinlaskun suuruuden ilmaisee funktio

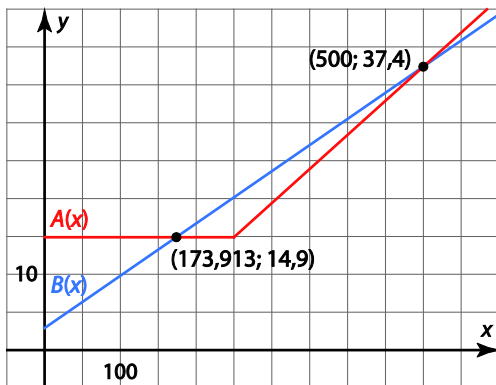
$$A(x) = \begin{cases} 14,90, & \text{kun } x \leq 250 \\ 14,90 + (x - 250) \cdot 0,09, & \text{kun } x > 250 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 14,90, & \text{kun } x \leq 250 \\ 0,09x - 7,6 & \text{kun } x > 250 \end{cases}$$

Liittymän B kuukausimaksu perustuu kuukausimaksuun, joka on 2,90 € ja puhelujen hinta on 0,069 €/min. Kun puheaika on x minuuttia kuukaudessa, niin puhelinlaskun suuruus on $2,90€ + x \cdot 0,069€$.

Liittymän B puhelinlaskun suuruuden ilmaisee funktio $B(x) = 2,90 + 0,069x$.

b) Piirretään funktioiden kuvaajat laskimella.



Kuvasta havaitaan, että funktiot saavat saman arvon kohdissa $x \approx 174$ ja $x = 500$. Joten puhelinlaskut ovat yhtä suuret, jos kuukaudessa puhutaan 174 minuuttia tai 500 minuuttia.