

**A-osa**

Ratkaise kaikki tämän osan tehtävät 1–4. Tehtävät arvostellaan pistein 0–6. Kunkin tehtävän ratkaisu kirjoitetaan tehtävän alla olevaan ruudukkoon. Vastausta voi tarvittaessa jatkaa erillisellä puoliarkilla. Apuvälineenä saat käyttää taulukkokirjaa. Laskimen käyttö ei ole sallittua sinä aikana, kun tämä koevihko on hallussasi. Koevihko ja mahdolliset A-osan erilliset vastausarkit on palautettava viimeistään kolmen tunnin kuluttua kokeen alkamisesta lukion määräämällä tavalla.

Lukion numero Lukion nimi

Kokelaan sukunimi ja kaikki etunimet selvästi kirjoitettuna

Kokelaan numero Kokelaan nimikirjoitus

1. a) Kumpi on suurempi, $\frac{2}{3}$ vai $\frac{3}{5}$? Perustele.

b) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} y - x + 1 = 0, \\ 4y = 12 - x. \end{cases}$$

c) Ratkaise yhtälö $2^{3x+1} = 8$.



3. a) Hannele on ratkaissut yhtälön

$$2(x^2 + x + 3) = 8(x + 1) + 2x^2,$$

mutta välivaiheet ovat menneet sekaisin.

Merkitse välivaiheet (B)–(F) alla olevaan taulukkoon niin, että ne muodostavat yhtälön loogisesti etenevän ratkaisun. Vastausta ei tarvitse perustella.

(A) $2(x^2 + x + 3) = 8(x + 1) + 2x^2$

(B) $-3x = 1$

(C) $x + 3 = 4(x + 1)$

(D) $x + 3 - 4 - x = 4x + 4 - 4 - x$

(E) $x + 3 = 4x + 4$

(F) $x^2 + x + 3 = 4(x + 1) + x^2$

(G) $x = -\frac{1}{3}$

Välivaiheen järjestysnumero	1	2	3	4	5	6	7
Välivaihe	A						G

b) Myös Pauliinan laskun välivaiheet ovat menneet sekaisin, ja lisäksi mukaan on tullut yksi johonkin muuhun laskuun kuuluva välivaihe.

Tehtävänä on valita alla olevista kohdista (B)–(F) neljä ja järjestää ne niin, että niistä muodostuu yhtälön

$$20 + 4x = x^2 + 8$$

ratkaisu. Vastausta ei tarvitse perustella.

(A) $20 + 4x = x^2 + 8$

(B) $x^2 - 4x = 12$

(C) $x^2 + 4x + 16 = 0$

(D) $x - 2 = \pm 4$

(E) $x^2 - 4x + 4 = 16$

(F) $(x - 2)^2 = 4^2$

(G) $x = -2$ tai $x = 6$

Välivaiheen järjestysnumero	1	2	3	4	5	6
Välivaihe	A					G

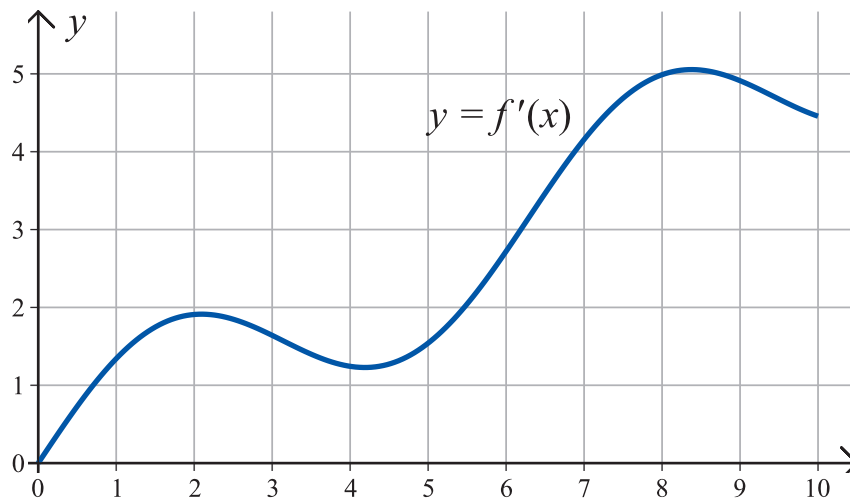
4. Oheisessa kuvassa on funktion $f(x)$ kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 10$. Arvioi kuvaajan perusteella yhden desimaalin tarkkuudella

a) missä kohdissa $f(x) = 1,5$

b) millä väleillä funktio $f(x)$ on vähenevä

c) mikä on funktion $f(x)$ suurin ja pienin arvo välillä $2 \leq x \leq 7$.

Kuvioon tehdyt merkinnät eivät riitä vastaukseksi. Vastauksia ei tarvitse perustella.




B-osa

B-osan tehtävät arvostellaan pistein 0–6. Jos teet tehtävän 5, kirjoita sen ratkaisu kokoarkille. Muussa tapauksessa kirjoita kokoarkille vain nimitietosi. Muiden tehtävien ratkaisut kirjoitetaan jokainen omalle puoliarkille. Puoliarkit kootaan kokoarkin sisään. Apuvälineinä saat käyttää taulukkokirjaa ja laskinta. Laskimen saat kuitenkin haltuusi vasta sitten, kun olet palauttanut A-osan tehtävävihkosi. Sekä B1- että B2-osassa ratkaistaan kolme tehtävää.

B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5–9.

5. Tavaratalossa jokainen kanta-asiakas saa alennuskupongin, jonka voi käyttää yhden ostoksen yhteydessä. Ostos voi sisältää useamman tuotteen. Alennus määräytyy ostoksen kokonaissumman perusteella alla olevan taulukon mukaisesti.

Ostos (€)	Alennus (€)
50,00– 99,99	5
100,00–239,99	15
240,00–499,99	40
500,00–	100

- a) Tee taulukko alennusprosentteista, kun ostoksen kokonaissumma on 50, 100, 300 ja 600 euroa.
- b) Risto ostaa vaatteita 80 eurolla ja hänen isänsä Mauri 200 eurolla. Kuinka monta prosenttiyksikköä suurempi on Maurin alennusprosentti verrattuna Riston alennusprosenttiin?
- c) Mikä olisi ollut Riston ja Maurin yhteinen alennusprosentti, jos he olisivat yhdistäneet ostoksensa?
6. Suomalaisen liigajoukkueen johto pohtii vuotuisen päätapahtumansa lippujen hinnoittelua. Aikaisempien vuosien perusteella he arvioivat, että katsojia tulee 3000, jos lipun hinta on 15 euroa. Jokaista yhden euron hinnankorotusta kohti katsojien määrä vähenee sadalla, ja vastaavasti yhden euron hinnanalennuksesta katsojamäärä kasvaa sadalla. Millä lipun hinnalla saadaan suurimmat lipputulot? Kuinka paljon lipputuloja tällöin saadaan? Anna vastaukset yhden sentin tarkkuudella.
7. Pienestä lukiosta valmistui 22 ylioppilasta vuonna 2007. Kymmenen vuoden kuluttua valmistumisesta kaksi heistä päättää järjestää luokkakokouksen ja valitsee itselleen sopivan päivämäärän. Oletetaan, että jokaiselle muulle luokkakaverille tämä päivä sopii kuitenkin vain 85 % todennäköisyydellä.
- a) Kuinka suurella todennäköisyydellä kaikki pääsevät paikalle?
- b) Kuinka suurella todennäköisyydellä täsmälleen yksi ei pääse paikalle?

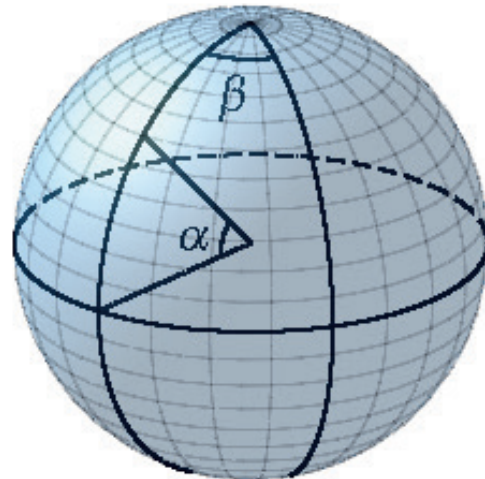
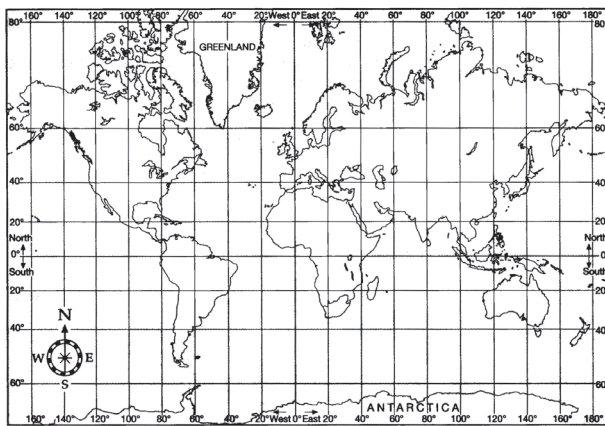
8. Monet hallinnolliset rajat seuraavat luonnollisia maaston piirteitä, kuten jokia ja vuoristoja. Sen sijaan Yhdysvalloissa Coloradon osavaltion rajat määräytyvät Maapallon leveys- ja pituusasteiden avulla seuraavista ehdoista:

$$\begin{aligned} 37^\circ \text{ N} &\leq \text{leveysaste} \leq 41^\circ \text{ N}, \\ 102^\circ \text{ W} &\leq \text{pituusaste} \leq 109^\circ \text{ W}. \end{aligned}$$

- a) Laske Coloradon osavaltion länsirajan pituus.
b) Kumpi on pitempi, Coloradon osavaltion eteläraja vai pohjoisraja? Perustele.

Tässä tehtävässä Maa oletetaan palloksi, jonka säde on $R = 6371$ km.

Tilanteen hahmottamisen helpottamiseksi on oikean puolen kuvaan merkitty päiväntasaajan suhteen mitattava leveysaste α ja Greenwichin meridiaanin suhteen mitattava pituusaste β .



Lähde: (vasen) <<https://cnx.org>>. Luettu 10.3.2016. (oikea) YTL.

9. Säätiö haluaa tukea internet-turvallisuutta seitsemän vuoden aikana yhteensä 800 000 eurolla. Rahat jaetaan niin, että jaettava summa kasvaa edellisestä vuodesta aina yhtä monta prosenttia.
- a) Oletetaan, että jaettavan summan vuotuinen kasvuprosentti on 10. Mikä pitää ensimmäisenä vuonna jaettavan summan olla, jotta koko 800 000 tulee seitsemässä vuodessa jaetuksi?
- b) Oletetaan, että ensimmäisenä vuonna jaetaan 70 000 euroa. Mikä pitää vuotuisen kasvuprosentin olla, jotta koko 800 000 euroa tulee seitsemässä vuodessa jaetuksi? Muodosta kysymykseen liittyvä yhtälö ja ratkaise se esimerkiksi kokeilemalla. Anna vastaus yhden prosenttiyksikön tarkkuudella.

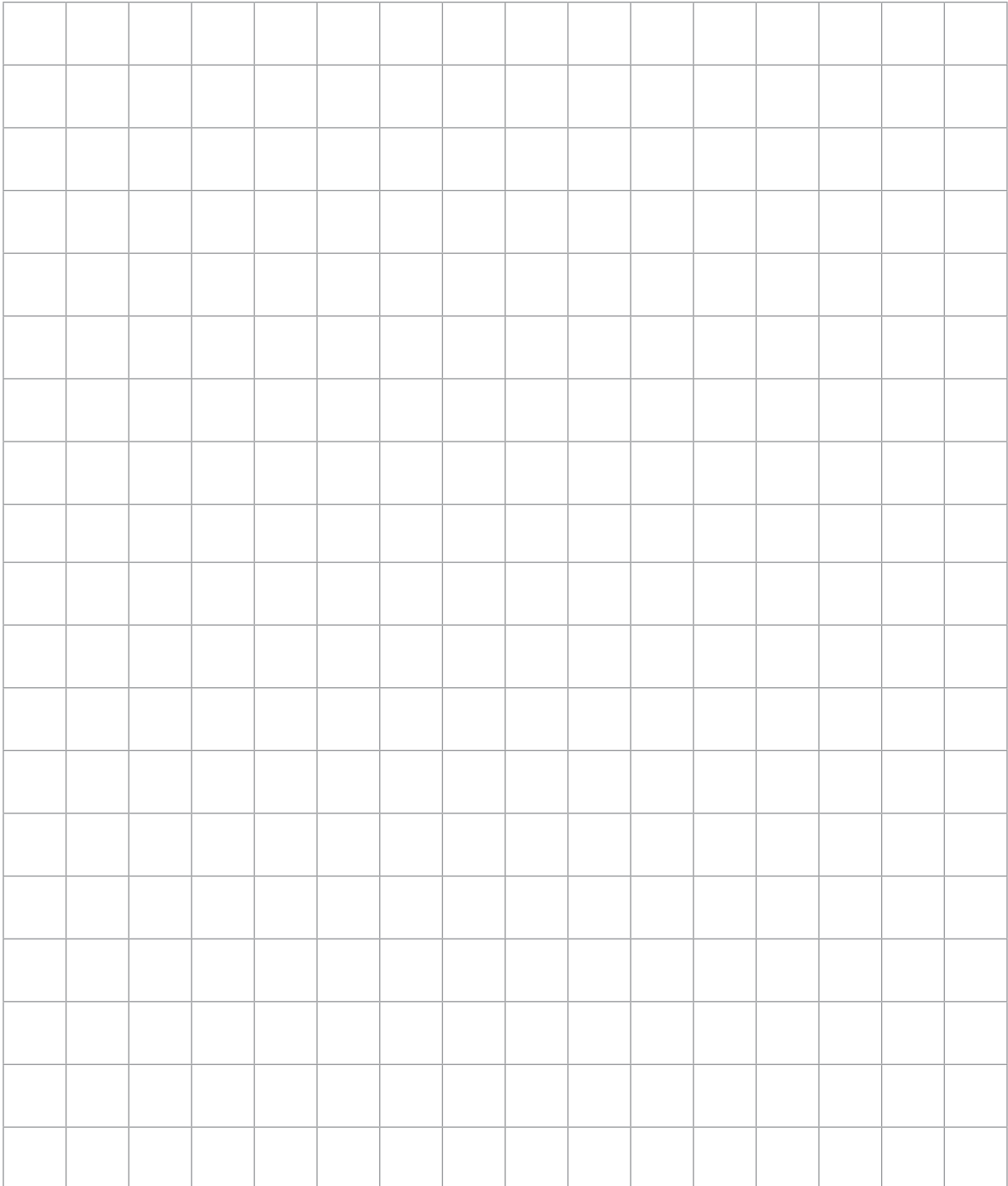
B2-osa Ratkaise kolme tehtävistä 10–13.

10. Katariina ostaa vaelluskäyttöön vedensuodattimen, joka poistaa 96 % suodatettavassa vedessä olevista bakteereista.
- Katariina suodattaa veden kaksi kertaa. Kuinka monta prosenttia bakteereista saadaan tällä tavalla pois?
 - Katariinan vaelluskaveri Nikke haluaa, että bakteereista saadaan pois 99,9995 %. Kuinka monta kertaa vesi pitää tällöin suodattaa?
 - Aikaa säästääkseen Katariina ajattelee ostavansa paremman suodattimen. Kuinka monta prosenttia bakteereista vedensuodattimen pitäisi poistaa yhdellä suodatuskerralla, jotta kahdella suodatuskerralla saataisiin poistettua 99,9995 % bakteereista?
11. a) Selitä omin sanoin mitä tarkoitetaan todennäköisyyslaskennassa vastatapahtumalla eli komplementtitapahtumalla. (2 p.)
- b) Kuuluisassa 1970-luvulla tehdyssä psykologian koesarjassa Tversky ja Kahneman osoittivat, ettei ihmisten intuitio todennäköisyysarviointista ole erityisen luotettava. Eräässä näistä kokeista he esittivät koehenkilöille seuraavan kertomuksen:
- Linda on 31-vuotias, naimaton, sanavalmis ja hyvin fiksu. Hän valmistui yliopistosta pääaineenaan filosofia. Opiskelijana hän oli hyvin kiinnostunut syrjintäkysymyksistä ja sosiaalisesta oikeudenmukaisuudesta, ja hän osallistui myös ydinvoimaa vastustaviin mielenosoituksiin.
- Koehenkilöitä pyydettiin tämän perusteella arvioimaan, kumpi seuraavista väitteistä on todennäköisempi:
- Linda on pankkivirkailija.
 - Linda on pankkivirkailija ja hän on aktiivinen feministiliikkeessä.
- Kokeessa 85 % vastaajista oli sitä mieltä, että väittämä (B) on todennäköisempi. Perustele todennäköisyyslaskennan keinoin ja merkinnöin, että nämä vastaajat ovat väärässä. (4 p.)
12. Rahtilaiva lähtee Hangon satamasta Saksan Rostockiin. Laivan navigointijärjestelmä kertoo reitin vektorimuodossa. Laiva kulkee ensin vektorin $\vec{a} = 3,5\vec{i} - 3,5\vec{j}$ verran, sitten vektorin $\vec{b} = -5,0\vec{i}$ verran ja lopuksi vektorin $\vec{c} = -4,1\vec{j}$ verran. Yksikkönä on kilometri. Kuinka kaukana laiva on tällöin lähtöpisteestä? Anna vastaus sadan metrin tarkkuudella. Maan pinnan kaareutumista ei tarvitse tässä tehtävässä ottaa huomioon.

13. Tarkastellaan kahden muuttujan x ja y ensimmäisen asteen yhtälöitä ja niistä muodostettuja yhtälöryhmiä.
- a) Anna esimerkki yhtälöryhmästä, joka koostuu kolmesta eri yhtälöstä ja jolla on täsmälleen yksi ratkaisu.
 - b) Anna esimerkki yhtälöryhmästä, joka koostuu kolmesta eri yhtälöstä ja jolla ei ole yhtään ratkaisua.
 - c) Tulkitse a- ja b-kohdissa antamasi esimerkit graafisesti.

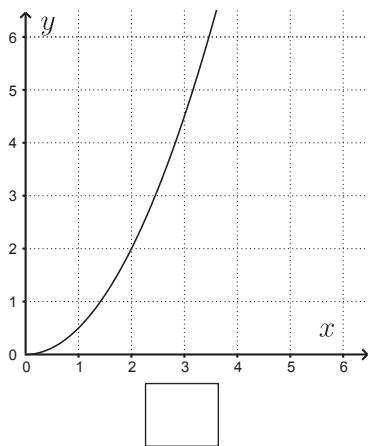
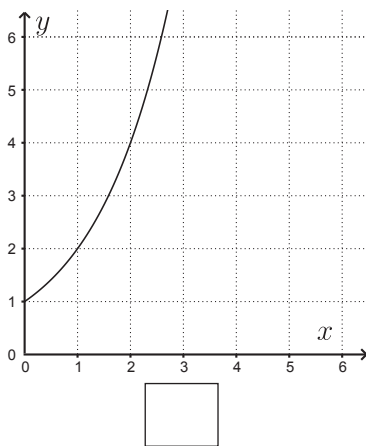
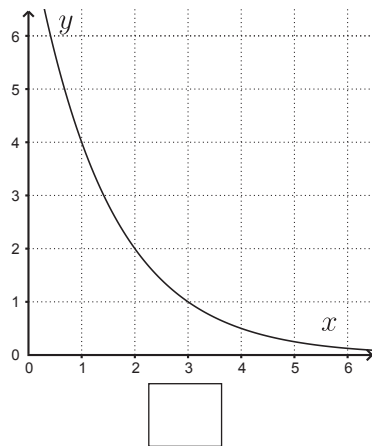
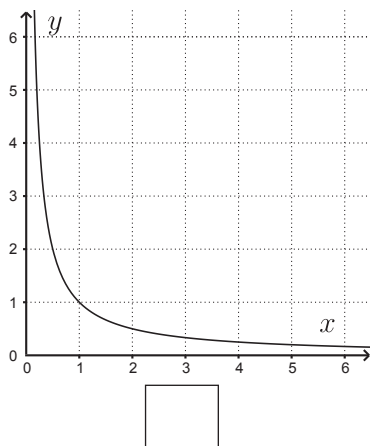
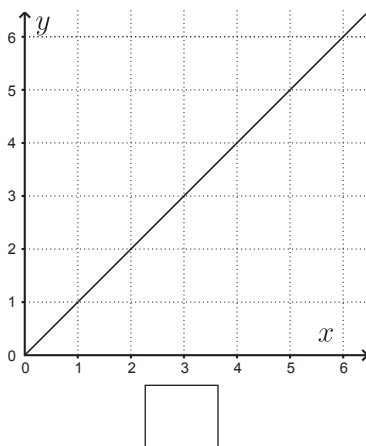
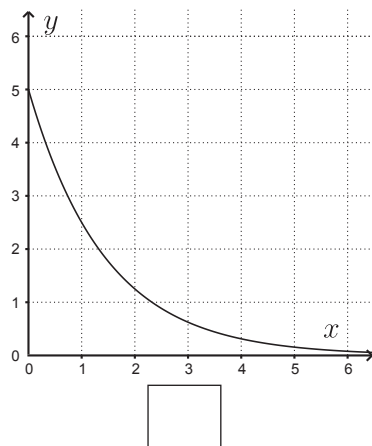
2. a) Eräällä reitillä on 20 matkustajaa. Heistä seitsemän ostaa opiskelijalipun, viisi eläkeläislipun, ja loput kahdeksan maksavat täyden hinnan 20 euroa. Opiskelija-alennus on 50 %, ja eläkeläisalennus on 30 %. Mikä on kaikkien matkustajien maksamien lippujen keskihinta?
- b) Väritä xy -koordinaatistoon se alue, jossa seuraava epäyhtälöryhmä toteutuu:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2y + 3x - 6 \geq 0. \end{cases}$$



3. Alla on viisi väittämää sekä kuusi kuviota. Kirjoita jokaisen kuvion alapuolella olevaan ruutuun sen väittämän kirjain, joka pätee kyseisen kuvion tapauksessa. Yksi kirjaimista tulee kahteen eri ruutuun. Vastauksia ei tarvitse perustella.

- (A) y on suoraan verrannollinen muuttujaan x .
 (B) y on kääntäen verrannollinen muuttujaan x .
 (C) y kaksinkertaistuu aina, kun muuttuja x kasvaa yhdellä.
 (D) y puolittuu aina, kun x kasvaa yhdellä.
 (E) y on suoraan verrannollinen muuttujan x neliöön.




B-osa

B-osan tehtävät arvostellaan pistein 0–6. Jos teet tehtävän 5, kirjoita sen ratkaisu kokoarkille. Muussa tapauksessa kirjoita kokoarkille vain nimitietosi. Muiden tehtävien ratkaisut kirjoitetaan jokainen omalle puoliarkille. Puoliarkit kootaan kokoarkin sisään. Apuvälineinä saat käyttää taulukkokirjaa ja laskinta. Laskimen saat kuitenkin haltuusi vasta sitten, kun olet palauttanut A-osan tehtävävihkosi. Sekä B1- että B2-osassa ratkaistaan kolme tehtävää.

B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5–9.

5. a) Elina on lähdössä työmatkalle Norjaan. Hän vaihtaa aamulla 120 euroa Norjan kruunuiksi alla olevan taulukon kurssilla. Sen jälkeen hän saa kuitenkin tiedon matkan peruuntumisesta. Kuinka monta euroa Elina jää tappiolle, kun hän käy vaihtamassa samassa valuutanvaihtopisteessä kruunut takaisin euroiksi taulukon kurssilla? Yhtiö ei peri vaihtamisesta erillistä palkkiota.



Yhden euron arvo Norjan kruunuina,
setelikurssi

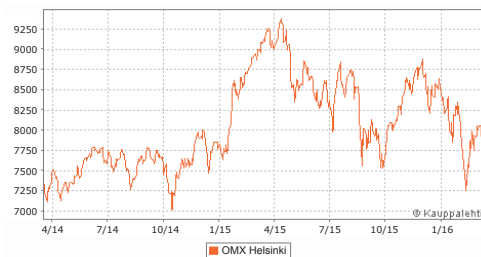
Osto	Myynti
9,8605 NOK	9,3565 NOK



Lähde (kuvat): <wikipedia.org>. Luettu 16.3.2016.

- b) Vuonna 2015 Helsingin pörssi heilahteli voimakkaasti. OMXH-indeksi, joka kuvaa pörssiyhtiöiden kokonaismarkkina-arvoa, vaihteli vuosineljänneksittäin alla olevan taulukon osoittamalla tavalla. Mikä oli indeksin kokonaismuutos vuoden 2015 aikana, ja mihin suuntaan?

Ajanjakso	Muutos prosentteissa
1. neljännes	+16,19
2. neljännes	−8,10
3. neljännes	−7,25
4. neljännes	+11,89



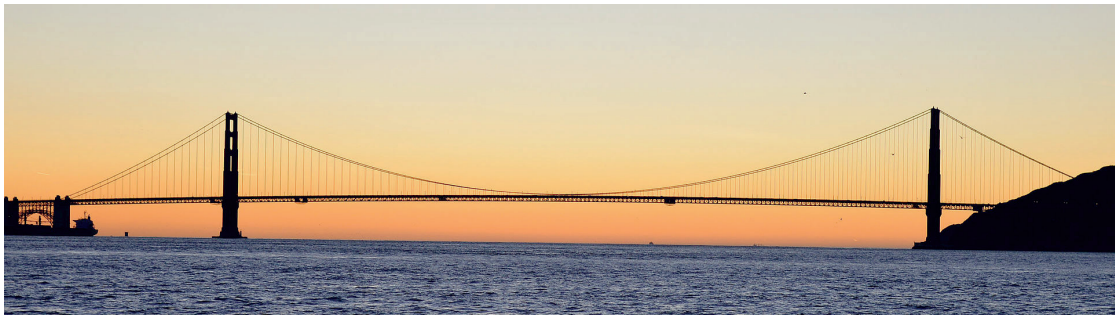
Lähde (kuva): <kauppalehti.fi>. Luettu 16.3.2016.

6. Uima-allas on 25 m pitkä ja 10 m leveä. Se syvenee tasaisesti pituussuunnassa ja on matalassa päässä 1,1 m ja syvässä päässä 3,0 m syvä. Uima-altaan sisäpinta (seinät ja pohja) on tarkoitus laatoittaa 30 cm × 20 cm kokoisilla laatoilla, joita myydään 30 laatan laatikoissa.

Arvioi, kuinka monta laattalaatikkoa täytyy ostaa altaan laatoittamista varten.

Tehtävässä ei tarvitse ottaa huomioon laattojen väliin jäävien saumojen pinta-alaa eikä sitä, että osaa laatoista joudutaan leikkaamaan, jolloin koko laatan pinta-alaa ei voida hyödyntää.

7. a) Lieriön muotoinen Jättikynttilä on 100 cm pitkä, ja se palaa loppuun 450 tunnissa. Määritä sellaiset luvut k ja b , että lauseke $y = kt + b$ esittää kynttilän korkeutta y , kun se on palanut ajan t . Korkeus y ilmaistaan senttimetreinä ja aika t tunteina.
- b) Design-kynttilän korkeus riippuu puolestaan ajasta lausekkeen $y = 120 - 0,005t^2$ mukaisesti, kun y ja t ovat kuten a-kohdassa. Design-kynttilä ja Jättikynttilä sytytetään samanaikaisesti. Milloin ne ovat yhtä pitkiä?
8. Tehtaalla valmistettavien hiustenkuivaajien maksimiteho on normaalijakautunut. Jakouman keskiarvo on 1 453 wattia ja keskihajonta on 37,2 wattia.
- Valmistusprosessin uudistuksen jälkeen vastaavat arvot ovat 1 467 ja 10,5 wattia. Ulkoisesti hiustenkuivaajat eivät ole muuttuneet.
- Tehtaan korjaustyöpajalla mitataan mm. korjattavan hiustenkuivaajan maksimiteho. Millä maksimitehon arvolla on yhtä todennäköistä, että hiustenkuivaaja on tehty vanhalla valmistusprosessilla, kuin se, että se on tehty uudella valmistusprosessilla?
9. Golden Gate -siltaa San Franciscossa kannattaa kaksi sillan päädyissä oleviin torneihin kiinnitettyä kaapelia. Profiilikuvassa (eli sivulta katsottuna) kaapeli on paraabelin muotoinen. Tornien välinen etäisyys on 1 280 m, ja korkeusero vaijerin alimman pisteen ja tornin huipun välillä on 152 m.
- a) Määritä kaapelin muotoa kuvaavan yhtälön $y = ax^2$ kerroin a , kun origo on vaijerin alimmassa pisteessä. (2 p.)
- b) Määritä derivaatan avulla kulma, jossa kaapeli kohtaa tornin. (4 p.)



Lähde: <en.wikipedia.org>. Luettu 10.3.2016.

B2-osa Ratkaise kolme tehtävistä 10–13.

10. Suomalaisten kotitalouksien talletusten kokonaisarvo oli 80 778 000 000 euroa vuoden 2015 lopussa. Näiden talletusten keskimääräinen korko oli 0,32 %. Valtiovarainministeriö yrittää arvioida talletusten koroista saatavan vuoden 2017 lähdeveron suuruutta seuraavien oletusten pohjalta: kotitalouksien talletusten arvo nousee vuoden 2016 loppuun mennessä 1,5 % ja edelleen 1,0 % vuoden 2017 loppuun mennessä. Lisäksi arvioidaan, että keskiporko laskee 0,05 prosenttiyksikköä kumpanakin vuonna.

Kuinka paljon Suomen valtio saa tämän arvion perusteella talletusten koroista perittävää lähdeveroa vuodelta 2017, kun lisäksi oletetaan, että lähdeveroprosentti on koko ajan 30? Anna vastaus miljoonan euron tarkkuudella.

11. Maakellarin sisälämpötila vaihtelee hitaasti vuodenaikojen mukaan. Alin lämpötila $2\text{ }^{\circ}\text{C}$ saavutetaan helmi-maaliskuun vaihteessa, ja ylin lämpötila $8\text{ }^{\circ}\text{C}$ saavutetaan elo-syyskuun vaihteessa. Oletetaan, että lämpötilan vaihtelua voidaan kuvata sinikäyrällä. Määritä selkaiset parametrien A , B , c ja t_0 arvot, että lämpötila T saadaan kaavalla

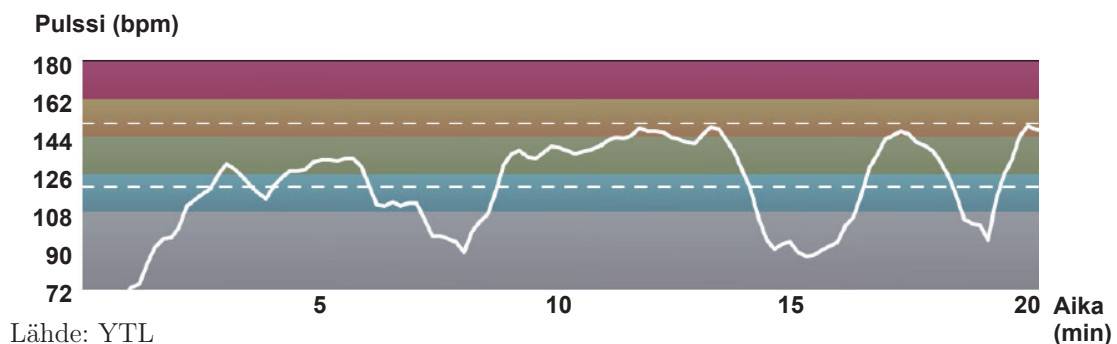
$$T = A + B \sin(c(t + t_0)),$$

kun ajan t yksikkönä on kuukausi. Tehtävässä kaikki kuukaudet voidaan olettaa yhtä pitkiksi.

12. Kalle ja Leena tekevät Biofysiikan perusteet -kurssin harjoitustyötä. He ovat mitanneet koehenkilön pulssin $f(t)$ urheilusuorituksen aikana hetkellä t . Tuloksena on alla oleva käyrä. Mittalaitteisto siirtää tulokset digitaalisessa muodossa langattomasti suoraan Kallen ja Leenan käyttämään tietokoneeseen.

Kallen ja Leenan tehtävänä on ohjelmoida tietokone laskemaan automaattisesti, kuinka monta paikallista minimikohtaa pulssikäyrässä on. Kalle ehdottaa funktion derivaatan nollakohtien etsimistä. Leenan mukaan tämä toimii joskus, kuten tapauksessa $t = 15,2$ min, mutta ei aina, esimerkiksi silloin, kun $t = 19,3$ min.

- Onko $f'(16)$ positiivinen vai negatiivinen? Perustele ja selitä sanallisesti, mitä vastaus tarkoittaa.
- Kuvaile sanallisesti, mitä tiedät derivaatan ja funktion minimin välisestä yhteydestä.
- Arvioi Kallen ehdotusta paikallisten minimikohtien löytämiseksi sekä Leenan esittämää huomiota.



13. Eksponentiaalista mallia voidaan käyttää monien luonnontieteen ilmiöiden kuvaamiseen.

- a) Anna esimerkki ilmiöstä, jonka kuvaamiseen malli soveltuu.
- b) Anna esimerkki ilmiöstä, jonka kuvaamiseen malli ei sovellu.

Mallin soveltuvuus ja soveltumattomuus pitää perustella.

2. a) Sievennä lauseke $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$.
- b) Ratkaise yhtälö $5^{2x+4} = 5^{-x}$.
- c) Ratkaise yhtälö $4^{x+1} = 8^{x-1}$.



3. Mitkä väitteet A–F ja kaavat 1–6 liittyvät toisiinsa? Merkitse vastauksesi alimpaan taulukkoon.

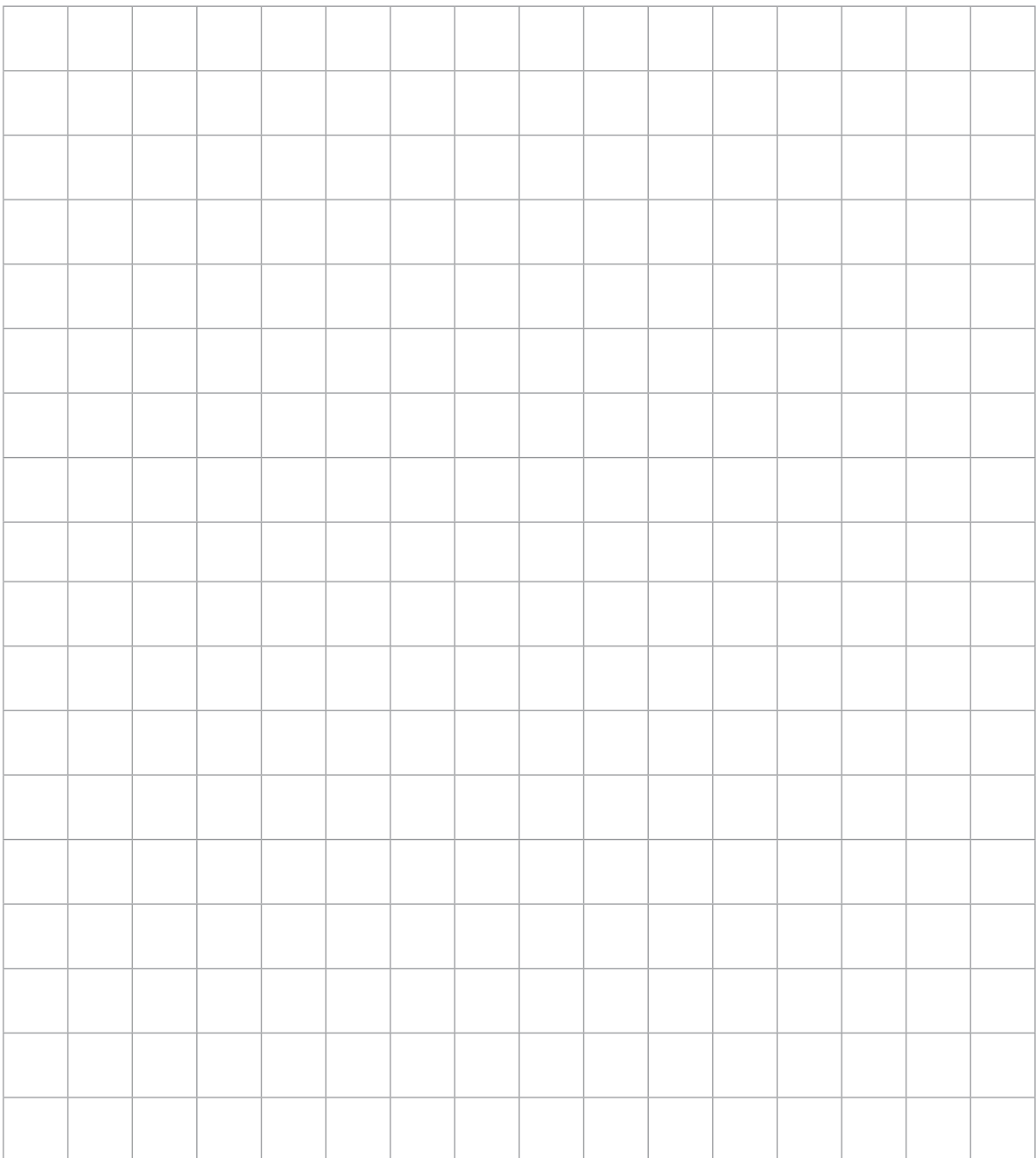
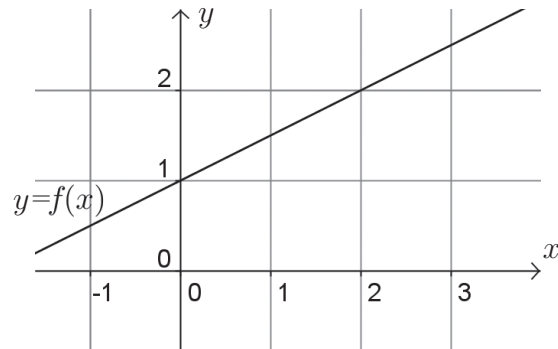
	Sanallinen muoto
A	Luku b on 50 % suurempi kuin luku a .
B	Luku a on neljäsosa luvusta b .
C	Luku b on puolet luvusta a .
D	Luku b on 25 % suurempi kuin luku a .
E	Luku b on kaksinkertainen lukuun a verrattuna.
F	Luku a on nelinkertainen lukuun b verrattuna.

	Kaava
1	$b = 2a$
2	$b = 0,5a$
3	$b = 1,5a$
4	$b = \frac{1}{4}a$
5	$b = 4a$
6	$b = \frac{5}{4}a$

Sanallinen muoto	A	B	C	D	E	F
Kaavan numero						

4. a) Ratkaise yhtälö $t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$.

b) Ratkaise yhtälö $[f(x)]^2 - \frac{5}{2}f(x) + 1 = 0$, missä $f(x)$ on kuvion funktio.

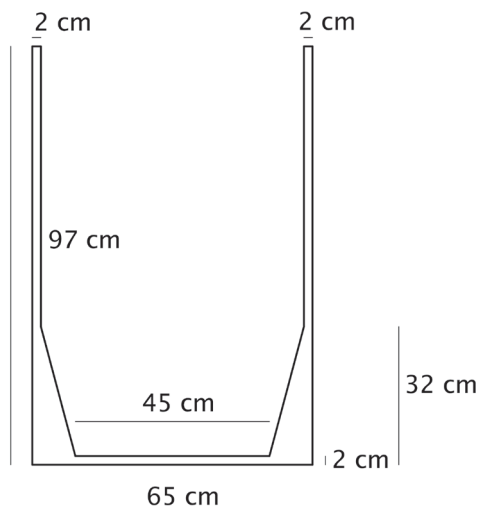



B-osa

B-osan tehtävät arvostellaan pistein 0–6. Tehtävän 5 ratkaisu kirjoitetaan kokoarkille. Muiden tehtävien ratkaisut kirjoitetaan jokainen omalle puoliarkille. Jos et tee tehtävää 5, muut ratkaisut kootaan vain nimitiedot sisältävän kokoarkin sisään. Apuvälineinä saat käyttää taulukkokirjaa ja laskinta. Laskimen saat kuitenkin haltuusi vasta sitten, kun olet palauttanut A-osan tehtävävihkosi. Sekä B1- että B2-osassa ratkaistaan kolme tehtävää.

B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5–9.

5. Pöytäliinan alkuperäinen koko on 2 m kertaa 4 m. Se kutistuu pesussa 5 % sekä pituus- että leveysuunnassa. Kuinka monella prosentilla pöytäliinan pinta-ala pienenee?
6. Tommi ostaa uuden kompostikäymälän, jonka sisäosa on pyörähdyškappale, jolla on kuvan mukainen poikkileikkaus. Laske kompostikäymälän säiliön sisätilavuus.



<<http://sauna.net>>.
Luettu 28.4.2015.

7. Kahden riippumattoman tapahtuman A ja B todennäköisyyksille pätee kaava

$$P(A \text{ ja } B) = P(A)P(B).$$

- a) Anna esimerkki kahdesta riippumattomasta tapahtumasta.
- b) Anna esimerkki kahdesta tapahtumasta, jotka eivät ole riippumattomia.

Esimerkkejä voi hakea esimerkiksi nopanheitosta. Myös muunlaiset esimerkit ovat mahdollisia.

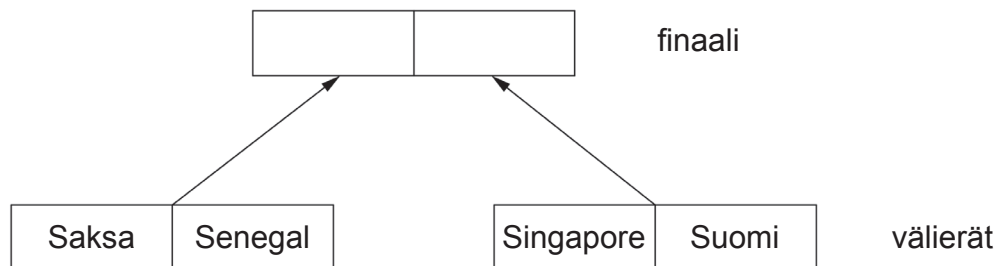
8. Kun kumipallo putoaa korkeudesta h , se ponnahtaa ylöspäin korkeuteen $0,8 \cdot h$ saakka. Pallo pudotetaan yhden metrin korkeudesta. Mikä on pallon kulkema matka, kun se kymmenennen kerran osuu lattiaan?
9. Kolmion kulman puolittaja jakaa kulman vastaisen sivun kulman viereisten sivujen pituuksien suhteessa. Kolmion kärkipisteet ovat $A(0, 0)$, $B(2, 1)$ ja $C(1, 3)$.
- Laske $\frac{|AC|}{|AB|}$,
 - Merkitään kirjaimella D sivun BC ja kulman A puolittajan leikkauspistettä. Laske pisteen D koordinaatit.

B2-osa Ratkaise kolme tehtävistä 10–13.

10. Jalkapalloturnauksen välieriin ovat selvinneet Suomen lisäksi Saksa, Senegal ja Singapore. Kummastakin välieräottelusta voittaja jatkaa finaaliin. Seuraavaan taulukkoon on listattu voittotodennäköisyyksiä prosenteissa. Tasapelejä ei ole, ja sama todennäköisyys pätee sekä välierässä että finaalissa.

Saksa voittaa Senegalin	65 %
Saksa voittaa Singaporen	55 %
Saksa voittaa Suomen	100 %
Senegal voittaa Singaporen	40 %
Senegal voittaa Suomen	60 %
Singapore voittaa Suomen	50 %

a) Mikä on todennäköisyys, että Suomi pelaa finaalissa Saksaa vastaan, jos välieräparit ovat Saksa–Senegal ja Singapore–Suomi? (2 p.)



b) Millä välieräpareilla Suomen todennäköisyys voittaa koko kilpailu on suurin? Mikä on todennäköisyys tässä tapauksessa? (4 p.)

11. Suomessa verotetaan ansiotuloa progressiivisesti oheisen taulukon mukaisin veroastein. Yritysjohtaja Karhu haluaa houkutella maahan rikkaita maahanmuuttajia siirtymällä tasaveroprosenttimalliin, jossa käytetään samaa ansioveroprosenttia tulotasosta riippumatta. Arvioi taulukon ja oheisen lehtileikkeen perusteella, mikä on se tasaveroprosentti, jolla voidaan kerätä yhtä paljon verotuloa kuin nykymallilla. Tee tarvittavat oletukset tulojakaumasta ja kirjaa ne myös näkyviin.

Verotettava ansiotulo, €	Vero alarajan kohdalla, €	Vero alarajan ylit- tävästä tulon osas- ta, %
16 500–24 700	8	6,5
24 700–40 300	541	17,5
40 300–71 400	3 271	21,5
71 400–90 000	9 957,50	29,75
90 000–	15 491	31,75

Kauimmas kärki on karannut Kauniaisissa, missä hyvätuloisin prosentti ansaitsee vähintään 293 362 euroa vuodessa. Naapurikunnassa Espoossa huipun tulot ovat lähes puolet vähemmän, 155 273 euroa vuodessa.

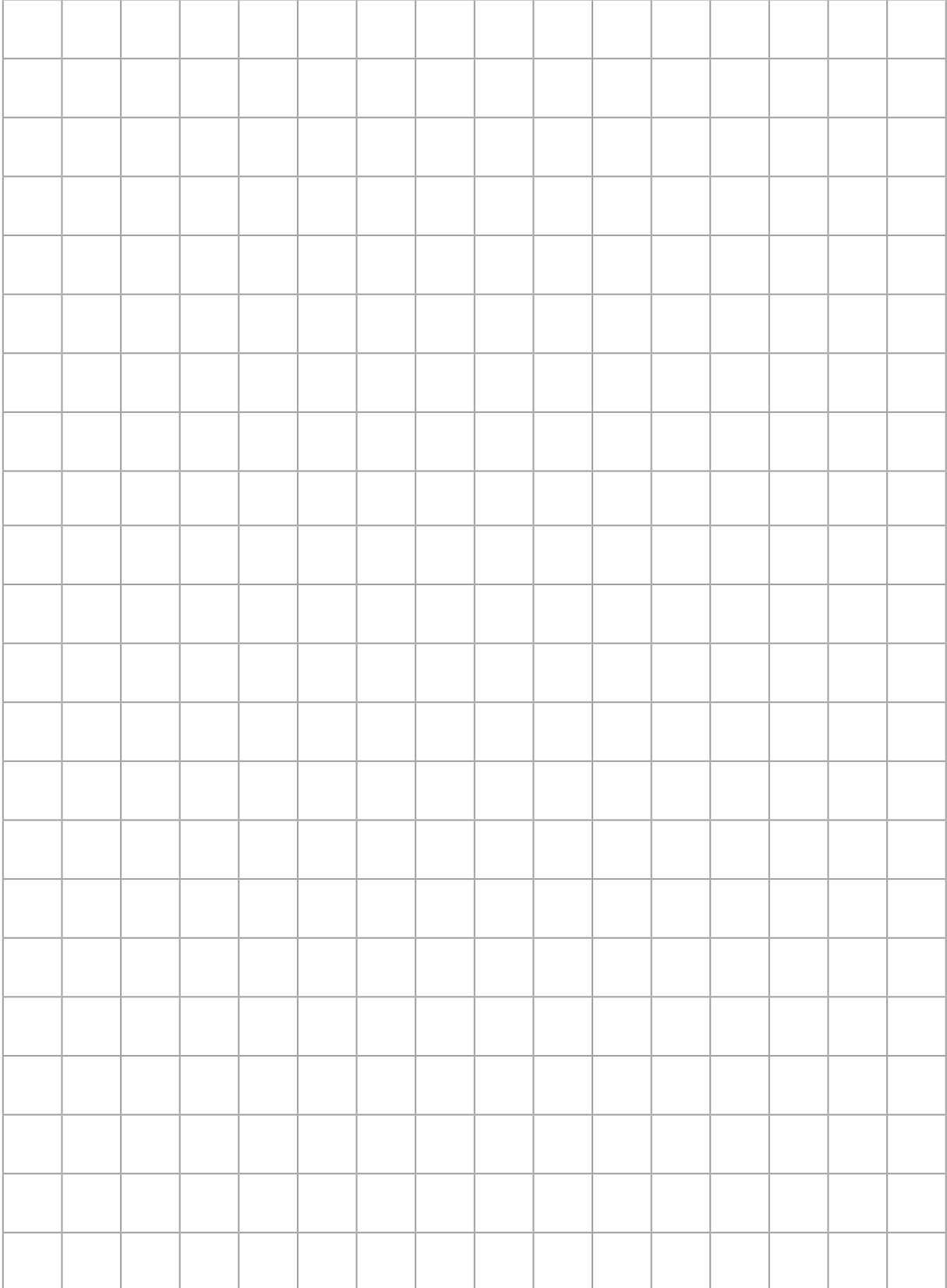
Pienimmillä tuloilla hyvätuloisimman prosentin joukkoon pääsee Rautavaaralla, Sotkamon naapurissa (52 286 e). Eli Kauniaisissa tuloeliittiin pääsemiseen tarvitaan lähes neljännesmiljoona euroa vuodessa enemmän kuin Rautavaaralla.

Myös Suomen vähiten ansaitsevat asuvat Kauniaisissa, missä pienituloisin kymmenys ihmisistä ansaitsee alle 3 073 euroa vuodessa. Seuraavaksi pienituloisin 10 prosenttia löytyy Helsingistä (3 698 euroa vuodessa) ja Joensuusta (4 588 euroa vuodessa).

Suomen Kuvalehti
<<http://suomenkuvalehti.fi>>

12. Sanomme, että derivoituva funktio on *konvekksi*, jos sen derivaatta on kasvava funktio.
- Osoita, että $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ ei ole konvekksi.
 - Tutki, millä vakion $a \in \mathbf{R}$ arvoilla funktio $g(x) = x^4 + ax^2 + 2$ on konvekksi.
13. Allu haluaa ostaa 1 800 € maksavan maastopyörän. Mummo antaa hänelle 700 €. Allu tallettaa mummolta saamansa rahat 30.12.2014 tilille, jonka vuosittainen korkotuotto on 0,6 %. Lisäksi Allu asettaa itselleen kuukausittaisen säästötavoitteen: hän tallettaa jokaisen kuukauden ensimmäisenä päivänä tietyn summan, alkaen helmikuusta 2015. Paljonko Allun tulee kuukausittain säästää, jotta hän saa vuoden 2015 loppuun mennessä kokoon 1 800 €? Oletetaan, että jokaisessa kuussa on 30 päivää ja että lähdevero on 30 %.

2. a) Onko epäyhtälö $\sqrt{7} < 3$ tosi? Perustelee.
- b) Ratkaise epäyhtälö $-x^2 + 3(x - 2) + 9 > 3(x - 2) + 2x^2$.
- c) Jussi laskee päässä kertolaskun seuraavasti: $27 \cdot 31 = 20 \cdot 30 + 7 \cdot 30 + 20 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 600 + 210 + 20 + 7 = 837$. Onko Jussin päättely oikein? Perustelee.



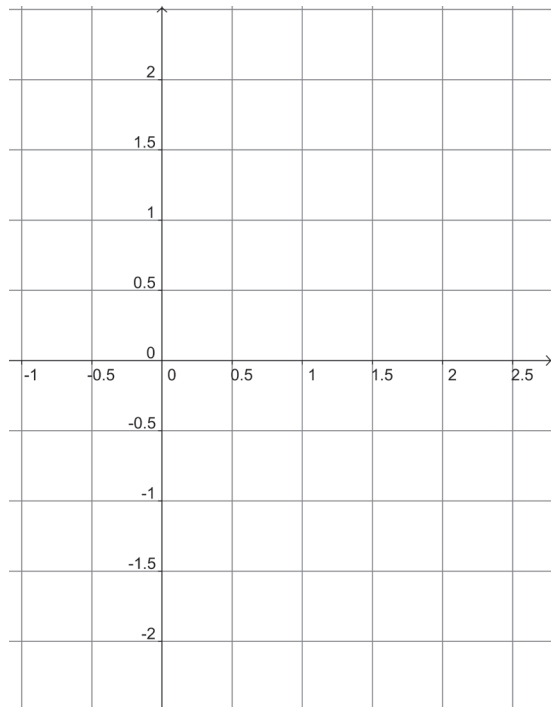
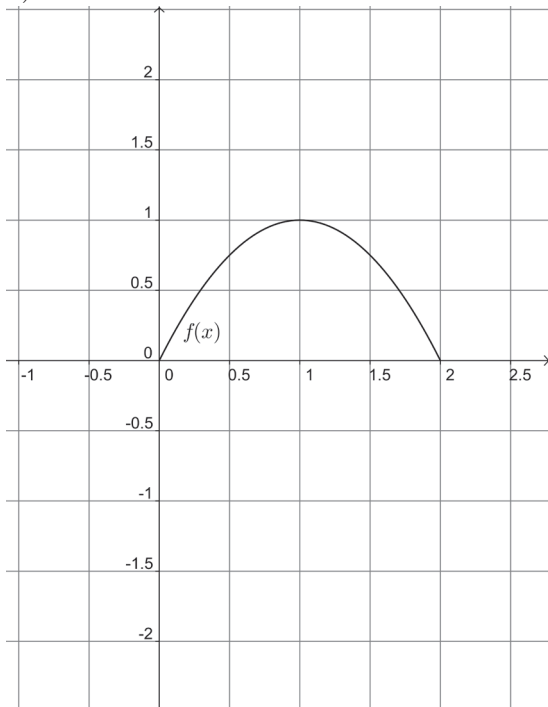
3. Täydennä oikeiden vaihtoehtojen numerot alempaan taulukkoon.

		1	2	3
A	Lausekkeen $1,1^3$ arvo on	1,13	3,3	1,331
B	Tilavuus $0,5 \text{ m}^3$ on sama kuin	50 l	500 l	5 000 l
C	Luvuista $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{7}$ ja $\frac{16}{21}$ suurin on	$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{16}{21}$
D	Luvun $-a + b$ vastaluku on	$b - a$	$a - b$	$-a - b$
E	Yhtälön $x^2 - 3x + 1 = 0$ juurten summa on	3	4	5
F	Tuotteen hinta nousee ensin 10 % ja laskee sitten 10 %, joten lopullinen hinta on ... alkuperäisestä hinnasta.	99 %	100 %	101 %

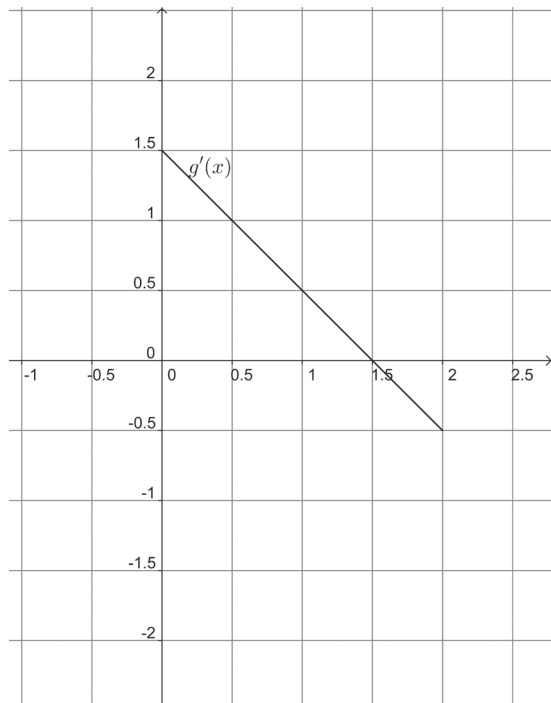
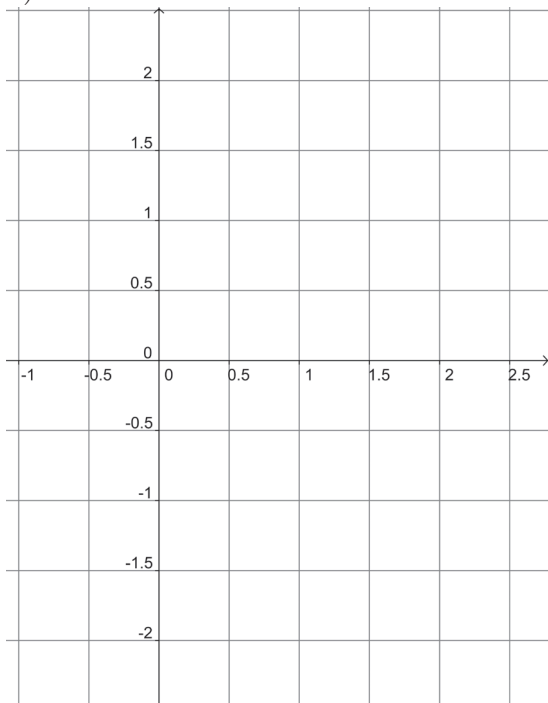
Kohta	A	B	C	D	E	F
Vaihtoehtojen numero						

4. Kuviossa a) on piiretty funktion $f(x)$ kuvaaja ja kuviossa b) funktion $g'(x)$ kuvaaja välillä $[0, 2]$. Hahmottele tyhjiin koordinaatistoihin a)-kohdassa funktion $f'(x)$ ja b)-kohdassa funktion $g(x)$ kuvaaja, kun lisäksi tiedetään, että $g(0) = 0$.

a)



b)




B-osa

B-osan tehtävät arvostellaan pistein 0–6. Kunkin tehtävän ratkaisu kirjoitetaan omalle puoliarkille. Apuvälineinä saat käyttää taulukkokirjaa ja laskinta. Laskimen saat kuitenkin haltuusi vasta sitten, kun olet palauttanut A-osan tehtävävihkosi. Sekä B1- että B2-osassa ratkaistaan kolme tehtävää.

B1-osa Ratkaise kolme tehtävistä 5–9.

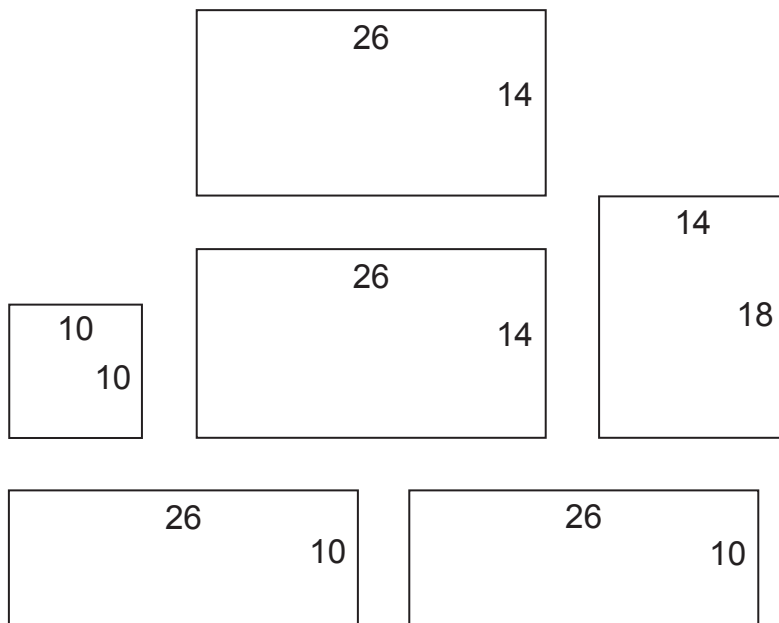
5. Oheinen taulukko kuvaa kuluttajahintaindeksin kehitystä 2000-luvulla.
- Kuinka monta prosenttia kuluttajahinta on noussut kesäkuusta 2006 kesäkuuhun 2010?
 - Petteri on vuokrannut asunnon syyskuussa 2011. Vuokrasopimuksen mukaan vuokranantajalla on oikeus korottaa vuokraa kerran vuodessa niin, että korotus vastaa kuluttajahintaindeksin muutosta. Vuokranantaja käyttää korotusoikeuttaan täysimääräisenä niin, että korotus tulee voimaan tammikuun alusta vuosina 2012, 2013 ja 2014. Kesäkuussa 2014 Petterin vuokra on 542 €/kk. Mikä oli vuokra vuokrasopimusta solmittaessa?

	tammi	helmi	maalis	huhti	touko	kesä	heinä	elo	syys	loka	marras	joulu
2014	119,0	119,3	119,6	119,8	119,5	119,5	119,4	119,6	120,2	120,0	119,8	119,6
2013	117,1	117,8	118,3	118,5	118,5	118,5	118,4	118,2	118,7	118,8	118,6	119,1
2012	115,2	115,9	116,3	116,7	116,7	116,8	116,6	116,8	117,3	117,4	117,0	117,2
2011	111,7	112,4	113,0	113,2	113,3	113,6	113,3	113,7	114,2	114,5	114,5	114,5
2010	108,3	108,7	109,2	109,5	109,4	109,7	109,1	109,6	110,0	110,5	110,7	111,3
2009	108,5	108,6	108,6	108,6	108,4	108,7	108,0	108,3	108,5	107,9	108,0	108,1
2008	106,2	106,7	107,6	107,8	108,4	108,8	108,6	109,1	109,6	109,6	109,1	108,7
2007	102,2	102,9	103,6	104,1	104,0	104,2	104,1	104,2	104,7	105,0	105,3	105,1
2006	99,9	100,7	101,0	101,5	101,6	101,7	101,5	101,9	102,0	102,3	102,3	102,4
2005	99,1	99,8	100,1	100,2	99,9	100,0	99,6	100,0	100,5	100,4	100,2	100,2

Lähde: Tilastokeskus

6. Peppi rakentaa oheisen kuvan mukaisista laudankappaleista linnunpöntön. Yksikkönä on senttimetri.

- a) Paljonko linnunpönttö painaa? Sisääntuloaukkoa ei tarvitse huomioida eikä käytettäviä nauvoja. Laudan tiheys on 550 kg/m^3 ja paksuus $2,0 \text{ cm}$.
- b) Mikä on linnunpöntön sisätilavuus?



<www.bing.com>. Luettu 18.11.2015.



<www.bing.com>. Luettu 18.11.2015.

7. Hajamielinen professori muistaa ystäviensä ovikoodista vain, että se koostuu neljästä erisuuresta parittomasta numerosta.
- Kuinka monta koodia hän joutuu huonoimmassa tapauksessa (enintään) kokeilemaan, jos hän käy systemaattisesti läpi kaikki vaihtoehdot?
 - Parin vuoden käyntien jälkeen professori huomaa koodissa seuraavan ominaisuuden: siinä ei ole numeroa 9 eikä peräkkäin “vierekkäisiä” parittomien numeroiden (1 ja 3, 3 ja 1, 3 ja 5, 5 ja 3, 5 ja 7, 7 ja 5, 7 ja 9 tai 9 ja 7) yhdistelmiä. Kuinka monta koodia pitää huonoimmassa tapauksessa kokeilla, kun otetaan huomioon myös nämä lisätiedot?
8. Alla on ote Wikipedian CRP:tä koskevasta tiedosta. Vastaa sen perusteella seuraaviin kysymyksiin.
- Potilaan CRP-pitoisuus oli 40 klo 12:00. Kuinka suuri pitoisuus voi enintään olla klo 18:00? (2 p.)
 - Potilaan CRP-pitoisuus oli 100 maanantaina klo 12:00. Milloin se voi aikaisintaan laskea arvoon 10? (4 p.)

CRP:n pitoisuus veressä nousee bakteeri-infektioiden, muiden tulehdustilojen ja kudonsvaurion yhteydessä nopeasti, jo muutaman tunnin kuluessa, ja pitoisuus voi kaksinkertaistua kahdeksan tunnin välein jopa 1000-kertaiseksi viitealueeseen verrattuna. Maksimitaso saavutetaan tyypillisesti noin 50 tunnissa. CRP nousee yleensä enemmän bakteerin aiheuttamissa tulehduksissa kuin virustulehduksissa, mutta kohonnut CRP ei ole minkään tietyn tulehdustilan merkki. Lievät tulehdukset ja virusinfektiot nostavat CRP:n tyypillisesti noin tasolle 10–50 mg/l, aktiiviset tulehdukset ja bakteeri-infektiot pitoisuuksiin 50–200 mg/l ja vakavat infektiot tai traumat tasolle >200 mg/l. CRP:n biologinen puoliintumisaika on 19 tuntia, joten tulehduksen rauhoituttua CRP-taso laskee nopeasti. CRP on siis herkkä, mutta epäspesifinen tulehdustilan indeksi.

<fi.wikipedia.org>. Luettu 6.4.2015.

9. Suora L_1 kulkee pisteiden $(3, 0)$ ja $(0, 5)$, suora L_2 pisteiden $(6, 0)$ ja $(0, 3)$, ja suora L_3 pisteiden $(2, 0)$ ja $(2, 2)$ kautta. Nämä kolme suoraa ja koordinaattiakselit rajoittavat monikulmion, jonka yksi kärki on $(0, 0)$. Etsi funktion $f(x, y) = 2x - 4y + 10$ suurin ja pienin arvo tässä monikulmiossa.

B2-osa Ratkaise kolme tehtävistä 10–13.

10. a) Annika sai 58 000 € perintönä. Kuinka monta euroa Annika maksaa perinnöstä veroa? Mikä on hänen perintöveroprosenttinsa?
- b) Piirrä kuvaaja, josta käy ilmi perintöveron suuruus prosentteina perinnön arvon funktiona, kun perinnön suuruus on välillä 0 € ja 60 000 €.

Verotettavan osuuden arvo, €	Veron vakioerä osuuden alarajan kohdalla, €	Vero alarajan ylimenevästä osasta, %
20 000–40 000	100	8
40 000–60 000	1 700	11
60 000–200 000	3 900	14
200 000–1 000 000	23 500	17
1 000 000–	159 500	20

(Perintö- ja lahjaverolaki, 378/1940, § 14)

11. a) Määritellään funktio $f(x) = \cos(x) + 1$. Määritä funktion suurin ja pienin arvo.
- b) Määritellään funktio $g(x) = A \sin(x) + B$, missä $A, B > 0$ ovat vakioita. Mitä kaikkia arvoja tämä funktio voi saada?
12. Vieraalla planeetalla putoavan kappaleen kulkema matka s on suoraan verrannollinen kuluneen ajan t toiseen potenssiin kaavan $s = 10t^2$ mukaisesti.
- a) Kopioi oheinen taulukko vastauspaperiisi ja täydennä tyhjät kohdat. (2 p.)
- b) Merkitse koordinaatistoon a-kohdan taulukosta pisteet, joiden koordinaatit ovat $(\lg t, \lg s)$. Mitä havaitset? Selitä. (4 p.)

t	$\lg t$	$\lg s$
1	0	1
2		
4		
10		
100		

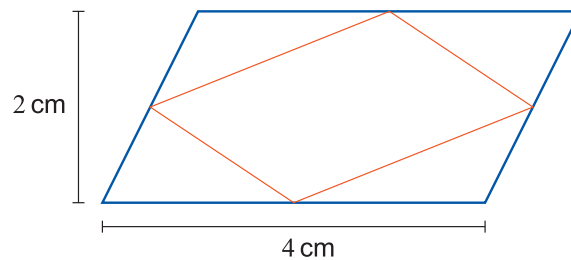
13. Uuteen 20-kerroksiseen tornitaloon asennettiin kolme hissiä. Todennäköisyys, että hissi tilataan johonkin kerroksista 2–20, on 0,025 kullekin. Todennäköisyys, että hissi tilataan kerrokseen 1, on 0,4 ja kellarikerroksessa sijaitsevaan parkkihalliin 0,125. Ruuhkattomina aikoina hissit palaavat seuraavanlaisille odotuspaikoilleen: yksi hissi on kerroksessa 1, yksi hissi on kerroksessa 8 ja yksi hissi on kerroksessa 16. Näistä hissiin haluava voi astua siihen suoraan. Jos tilaa hissien muualta, odotteluun kuluu 10 sekuntia ja lisäksi 5 sekuntia jokaista kerrosta kohden, jonka hissi joutuu kulkemaan. Kuinka suurella todennäköisyydellä tilattua hissiä joutuu odottamaan ruuhkattomana aikana yli 22 sekuntia?



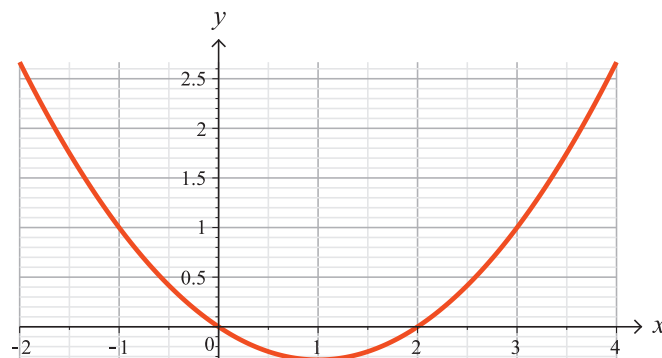
Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. a) Laske luvun -1 vastaluvun ja luvun 5 käänteisluvun keskiarvo.
 b) Neliön sivun pituus on 2 ja ympyrän halkaisijan pituus on myös 2 . Kuinka monta prosenttia neliön pinta-ala on suurempi kuin ympyrän pinta-ala?
 c) Ratkaise yhtälö $2^{3x-2} = 2^{x+1}$.

2. Suunnikkaan sisälle piirretään pienempi suunnikas, jonka kärjet ovat alkuperäisen suunnikkaan sivujen keskipisteissä. Laske pienen suunnikkaan pinta-ala käyttämällä kuvioon merkittyjä pituuksia.



3. Oheisessa kuviossa on erään funktion $f(x)$ kuvaaja. Määritä kuvaajan avulla ne muuttujan x arvot, joille $-2 \leq x \leq 4$ ja
 - a) $f(x) = 1$
 - b) $f(x) \leq 0$
 - c) $f'(x) \leq 0$.

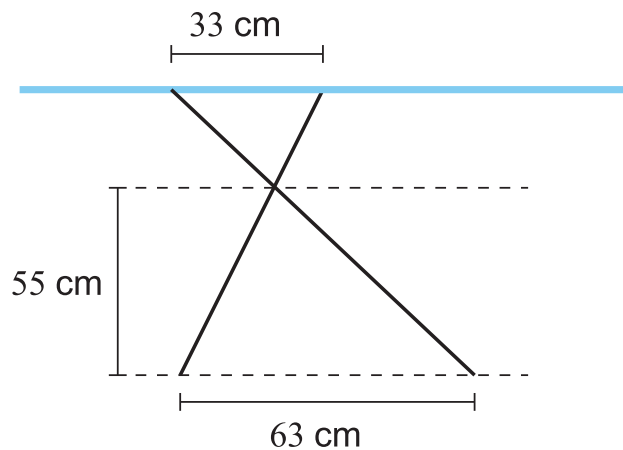


4. Nisäkäslajien aivojen kokoa voidaan verrata kehon kokoon EQ -luvulla, joka lasketaan lajin keskimääräisen edustajan massoista kaavalla

$$EQ = \frac{\text{aivojen massa}}{0,012 \cdot (\text{kehon massa})^{2/3}},$$

kun massat ilmoitetaan kilogrammoina.

- a) Tyypillisen koiran massa on 10 kg, ja lajin EQ -luku on 1,0. Mikä on koiran aivojen massa?
 b) Erään taulukon mukaan ihmisen EQ -luku on 7,5, ja ihmisaivojen massa on keskimäärin 1,35 kg. Mitä lukuarvoa on tällöin käytetty ihmisen keskimääräiselle massalle?
5. Alla olevassa kuviossa on silityslauta sivusta katsottuna. Siihen liittyvät mitat on merkitty kuvioon. Laske silityslaudan korkeus lattiasta.



6. Kahden sähköyhtiön A ja B hinnoittelu perustuu kiinteään kuukausittaiseen perusmaksuun, johon lisätään sähkön kulutuksen mukainen lisämaksu. Yhtiöiden tarjoamat hinnat selviävät alla olevasta taulukosta.

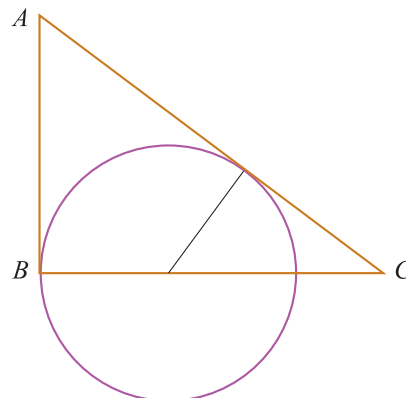
Yhtiö	Perusmaksu €/kk	Yksikköhinta snt/kWh
A	4,02	6,62
B	3,75	7,99

- a) Muodosta lausekkeet $a(x)$ ja $b(x)$ kummankin yhtiön tarjoaman sähkön kokonaishinnalle, kun sähköä kuluu x kWh ja aikavälinä on yksi kuukausi.
 b) Kuinka suuri täytyisi sähkönkulutuksen olla kuukausittain, jotta kokonaishinnat olisivat samat?
 c) Kuinka suuri on sähkön kokonaishintojen välinen ero vuoden aikana, jos sähköä kuluu 2 000 kWh vuodessa?

7. Kotimaisen meetvurstin rasvapitoisuus on 36 painoprosenttia. Kuinka monta prosenttia rasvaa meetvurstista pitää vähentää, jotta tuotteen uudeksi rasvapitoisuudeksi tulee 30 painoprosenttia?
8. Ympyräsektorin pinta-ala A on säteen r ja kaarenpituuden b avulla lausuttuna $A = \frac{br}{2}$. Määritä sellaisen ympyräsektorin säde, jonka piirin pituus on 1,00 metriä ja pinta-ala on mahdollisimman suuri.
9. Suorakulmion muotoisen nurmikentän koko on $20,0 \text{ m} \times 12,0 \text{ m}$. Sen pinta-ala halutaan kaksinkertaistaa lisäämällä kahdelle sivulle yhtä leveää nurmikaistale oheisen kuvion mukaisesti. Määritä näin saadun nurmikentän pituus ja leveys 0,1 metrin tarkkuudella.



10. Suora $y = 3 - 3x$ rajaa positiivisten koordinaattiakselien kanssa kolmion. Millä kulmakertoimen k arvolla suora $y = kx$ jakaa tämän kolmion kahteen pinta-alaltaan yhtä suureen osaan?
11. Uusi puhelinmalli tuli markkinoille tammikuun alussa. Mallia myytiin tammikuun aikana 7 817 kappaletta ja huhtikuun aikana 13 238 kappaletta. Esitä arvio puhelinmallin joulukuun myynnille, kun oletetaan, että myynti kasvaa
- lineaarisesti
 - eksponentiaalisesti.
12. Suorakulmaisen kolmion ABC kateettien pituudet ovat $AB = 3$ ja $BC = 4$. Ympyrän keskipiste sijaitsee pidemmällä kateetilla. Lisäksi ympyrä kulkee pisteen B kautta ja sivuaa kolmion hypotenuusaa. Määritä ympyrän säde.



- 13.** Hiustenkuivaaja toimii vioittumatta ajan, joka on normaalijakautunut odotusarvona 15,2 kuukautta ja keskihajontana 2,5 kuukautta. Kuivaajalla on yhden vuoden takuu.
- Kuinka monta prosenttia kuivaajista joutuu takuukorjaukseen?
 - Kuinka monta prosenttia kuivaajista toimii vioittumatta yli 18 kuukautta?
- 14.** Vuonna 2014 pääomatulojen veroprosentti on 40 000 euroon saakka 30 ja sen yli menevältä osalta veroprosentti on 32.
- Muodosta lauseke $f(x)$ pääomatuloveron suuruudelle, kun pääomatulo x on yli 40 000 euroa vuodessa.
 - Laske veron määrä, kun pääomatuloja on 41 700,23 euroa vuodessa.
 - Kun yksityishenkilö saa osinkotuloa pörssiyhtiön osakkeista, niin veronalainen osuus on 85 % osinkotuloista. Tästä osuudesta maksetaan pääomatuloveroa yllä mainitun säännön mukaisesti. Kuinka monta prosenttia veroa henkilö maksaa osinkotulostaan, kun osingon määrä on 41 700,23 euroa?
- 15.** Aino ja Mikko ovat maailmanpyörän kyydissä. Korin korkeus y merenpinnan tasosta mitattuna on

$$y = 17 \sin\left(\frac{\pi t}{25}\right) + 55 \text{ metriä,}$$

kun ajan t yksikkönä on sekunti ja kulma ilmaistaan radiaaneina.

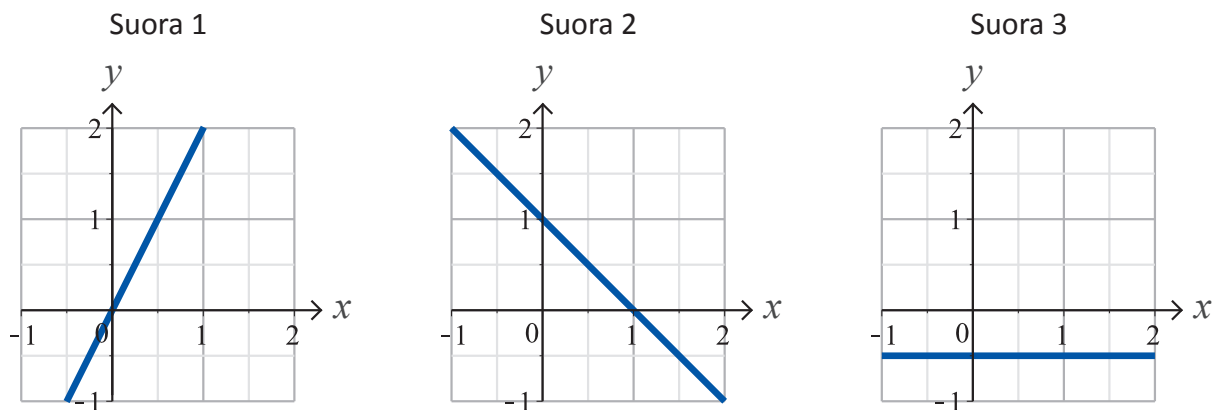
- Laske korin suurin ja pienin korkeus sekä maailmanpyörän halkaisija.
- Kuinka monen sekunnin kuluttua kori saavuttaa ensimmäisen kerran maksimikorkeutensa hetken $t = 0$ jälkeen?
- Kuinka monen sekunnin kuluttua kori on ensimmäisen kerran hetken $t = 0$ jälkeen 45 metrin korkeudella merenpinnan tasosta? Voit ratkaista tämän kohdan joko graafisesti kuvaajan avulla, kun $0 \leq t \leq 50$ sekuntia, tai laskemalla lausekkeiden avulla.





Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. Alla on kolmen suoran kuvaajat. Esitä niiden yhtälöt muodossa $y = kx + b$. Perusteluita ei tarvita.

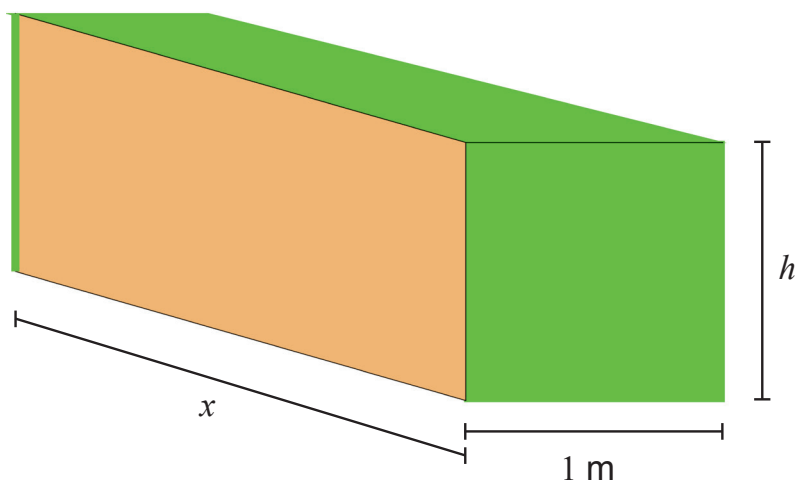


2. a) Määritä lausekkeen $x(4x - 2) - 3x(x - 1) - x$ arvo, kun $x = -1$.
 b) Anna esimerkki toisen asteen yhtälöstä, jonka yksi juuri on $x = 1$.
 c) Muuttujan arvo $x = 2$ toteuttaa yhtälön $x(x - 5) + ax = 2$. Määritä kerroin a .
3. Erään mallin mukaan naisten kuntoharjoittelun maksimisyke lasketaan kaavalla $226 - T$ ja miesten maksimisyke kaavalla $220 - T$, kun T on henkilön ikä vuosina.
- a) Kuinka monta prosenttia 18-vuotiaan naisen maksimisyke on samanikäisen miehen maksimisykettä korkeampi?
 b) Erään suosituksen mukaan kuntoharjoittelussa sykkeen tulisi olla 60–70 % maksimisykkeestä. Määritä nämä rajat 30-vuotiaalle naiselle.

4. Suorakulmaisessa kolmiossa ABC kateetin AB pituus on 4,4 cm ja hypotenuusan AC pituus 8,1 cm.
- Laske kateetin BC pituus.
 - Laske kolmion terävien kulmien suuruudet 0,1 asteen tarkkuudella.
 - Laske kolmion pinta-ala 0,1 neliösenttimetrin tarkkuudella.



5. Yksinkertaistetun mallin mukaan ilman lämpötila laskee lineaarisesti korkeuden h suhteen noin 11 kilometriin saakka. Merenpinnan tasolla $h = 0$ keskilämpötila on +15 celsiusastetta ja 11 kilometrin korkeudella -56 celsiusastetta.
- Kuinka monta astetta ilma jäähtyy, kun nousee 5,0 kilometrin korkeudelta 1,0 kilometriä ylöspäin?
 - Määritä ilman lämpötilan lauseke $T = T(h)$ korkeuden h avulla lausuttuna ja piirrä sen kuvaaja (h, T) -koordinaatistoon, kun $0 \leq h \leq 11$ km.
6. Metrinen pituisista haloista kasataan suorakulmaisen särmiön muotoinen pino. Pino suojataan pressulla sekä päältä että kahdelta vastakkaiselta sivulta kuvion mukaisesti. Määritä halkopinon leveys x ja korkeus h silloin, kun pressun pinta-ala on 10 neliometriä ja pinoon tilavuus on suurin mahdollinen.



7. Eräällä tieosuudella käytetään kesällä ja talvella erilaisia nopeusrajoituksia. Talvinopeudella matkaan kuluu 15 minuuttia ja kesänopeudella 3 minuuttia vähemmän, kun ajetaan maksiminopeuksilla. Mikä talvinopeusrajoitus on silloin, kun kesänopeus on 20 km/h korkeampi kuin talvinopeus?
8. Ravintoliuoksessa kasvatettavan bakteeripopulaation yksilömäärä $N(t)$ kasvaa eksponentiaalisen mallin $N(t) = 1000 \cdot 1,25^t$ mukaisesti, kun aika t ilmoitetaan tunteina.
- a) Mikä on populaation koko 24 tunnin kuluttua? Anna vastaus tuhannen bakteerin tarkkuudella.
- b) Kuinka monta prosenttia populaatio kasvaa jokaisen tunnin aikana?
- c) Kuinka monta tuntia kestää, että populaation koko ylittää miljoonan?
9. Käyrä $y = (x + 1)(x + 3)(x - 4)$ leikkaa x -akselin kolmessa kohdassa. Määritä keskimmaiseen leikkauspisteeseen asetetun käyrän tangentin ja x -akselin välinen terävä kulma.
10. Kokeessa on 10 tehtävää, joissa valitaan kahdesta vaihtoehdosta oikea vastaus. Oikeasta vastauksesta saa yhden pisteen ja väärästä vastauksesta menettää yhden pisteen. Huonosti valmistautunut opiskelija valitsee kaikki vastaukset arvaamalla. Kuinka suurella todennäköisyydellä hän saa kokeesta vähintään 8 pistettä?
11. Teollisuusvakooja löytää lukitsemattoman tietokoneen ja alkaa kopioida tiedostoja. Tietokoneessa on vain 10 kilotavun kokoisia kuvatiedostoja ja 1 kilotavun kokoisia tekstitiedostoja, joista vakoojalle on luvattu vastaavasti 100 euroa tai 8 euroa kappaleelta.
- a) Muodosta vakoojan kokonaispalkkion lauseke kopioitujen kuvatiedostojen lukumäärän x ja tekstitiedostojen lukumäärän y avulla lausuttuna.
- b) Muotoile lukumääriä x ja y koskevat rajoitusehdot, kun vakoojan muistitikulla on vain 1000 kilotavua tilaa jäljellä ja aikaa kopioimiseen on 10 minuuttia. Kuvatiedoston kopioimiseen kuluu 5 sekuntia ja tekstitiedoston kopioimiseen 1 sekunti tiedostoa kohti.
- c) Kuinka monta kuva- ja tekstitiedostoa vakoojan kannattaa kopioida?
12. LED-TV:n suorakulmaisen kuvaruudun leveyden ja korkeuden suhde on 16 : 9. Kuvaruudun lävistäjän pituus on 40 tuumaa; yksi tuuma on 2,54 senttimetriä.
- a) Määritä kuvaruudun leveys ja korkeus millimetrin tarkkuudella.
- b) Määritä kuvaruudun pinta-ala neliösenttimetrin tarkkuudella.

- 13.** Erään koulun matematiikan ylioppilaskokeen arvosanjakauma oli oheisen taulukon mukainen. Määritä arvosanojen keskiarvo ja keskihajonta, kun arvosanoille käytetään taulukkoon merkittyjä numeroarvoja.

Arvosana	Numeroarvo	Lukumäärä
l	7	7
e	6	20
m	5	30
c	4	16
b	3	9
a	2	4
i	0	0

- 14.** Sijoitustilin talletukselle lasketaan vuotuinen korko, josta vähennetään lähdevero. Jäljelle jäänyt tuotto lisätään tilille vuoden lopussa. Hannele talletti vuoden 2010 lopussa 1 000 euroa säästötilille. Vuoden 2013 lopussa tilillä oli 1 086,37 euroa. Kyseisellä aikavälillä kuluttajahintaindeksi nousi arvosta 100,0 arvoon 108,5, toisin sanoen inflaatio oli tällä aikavälillä yhteensä 8,5 %.
- a)** Laske talletuksen nimellinen vuosikorkoprosentti näiden kolmen vuoden aikana.
- b)** Mikä on talletuksen todellinen korko euroina näiden kolmen vuoden aikana?
- 15. a)** Suorakulmion kolme kärkeä ovat origossa, pisteessä $(2,1)$ ja pisteessä $(2,-4)$. Määritä neljännen kärjen koordinaatit.
- b)** Määritä a-kohdan suorakulmion pinta-ala.
- c)** Yhdysjanat origosta pisteisiin $(1,2,1)$, $(1,-1,1)$ ja $(2,0,-2)$ muodostavat suorakulmaisen särmiön kolme särmää. Mihin pisteeseen päättyy origosta alkava särmiön avaruuslävistäjä?



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. a) Ratkaise yhtälö $\frac{x+2}{5} = \frac{x-3}{6}$.
 b) Laske lausekkeen $\frac{x+1}{y-1} + \frac{y-1}{x+1}$ arvo, kun $x = \frac{1}{2}$ ja $y = \frac{3}{2}$.
 c) Missä pisteessä suorat $x + 5y = 1$ ja $x - 5y = 5$ leikkaavat toisensa?

2. Mikä luku x toteuttaa annetun yhtälön?
 a) $2^x = 2$
 b) $2^x = \frac{1}{2}$
 c) $2^x = 8^2$
 d) $3^x = \frac{1}{3^5}$
 e) $10^x = 1000$
 f) $10^x = 0,01$.

3. a) Määritä lausekkeen $(x+1)(2-x) - 2$ nollakohdat.
 b) Millä kokonaisluvuilla $-1 \leq n \leq 4$ lauseke $n^3 - 3n + 1$ saa positiivisia arvoja?
 c) Ympyrän pinta-ala on 520 cm^2 . Laske sen halkaisijan pituus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

4. Hammastahnaputkilon tilavuus on 100 ml ja hinta 1,50 €. Putkilon tilavuutta kasvatetaan 25 %, mutta samalla myyntihintaa korotetaan 40 %. Kuinka monta prosenttia kalliimpaa hammastahna on uudessa putkilossa millilitraa kohden?

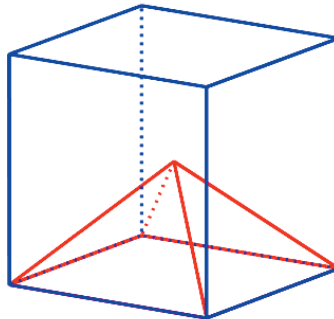
5. Millä muuttujan x arvolla summa $(x-3)^2 + (x-9)^2$ on mahdollisimman pieni?

6. Liito-oravan vaakasuora siirtymä suoraviivaisessa liidossa on parhaimmillaan 3,3-kertainen korkeuden vähenemiseen verrattuna.
- a) Huippukuntoinen liito-orava aikoo liittää 60 metriä leveän aukion yli. Kuinka korkealta puusta sen täytyy ponnistaa, jotta se laskeutuisi aukion toisella puolella olevaan puuhun yhden metrin korkeudelle? Anna vastaus metrin tarkkuudella.
- b) Kuinka suuressa kulmassa vaakatasoon nähden a-kohdan liito-orava liittää? Anna vastaus asteen tarkkuudella.



<http://webbi.meili.fi/kettu/RunotKaunisMetsakauris/Liito_oravaKuvaJaRuno.html>. Luettu 5.3.2013.

7. Kuution sisällä on pyramidi, jonka pohja yhtyy kuution pohjaan ja jonka korkeus on puolet kuution särmän pituudesta. Määritä pyramidin ja kuution tilavuuksien suhde. Kuution särmän pituus on s .



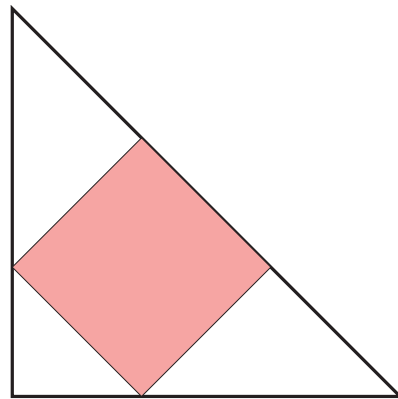
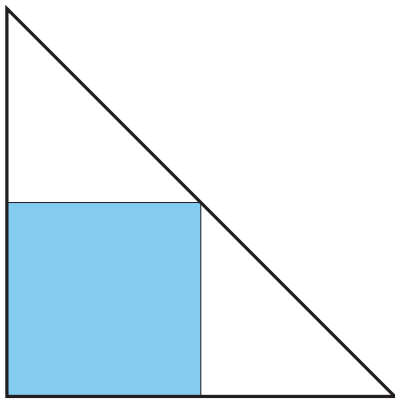
8. Alla olevassa taulukossa ovat jääkiekon SM-liigan kuuden seuratuimman joukkueen keskimääräiset kotiottelujen katsojaluvut liigakaudella 2011–2012.
- a) Laske katsojalukujen keskiarvo ja keskihajonta.
- b) Minkä joukkueiden katsojaluvut poikkeavat keskiarvosta enemmän kuin keskihajonnan verran?

Jokerit	9 173
HIFK	8 266
Kärpät	5 821
TPS	5 534
Tappara	5 359
Ilves	5 177

9. Painonhallintaa varten kehitetty painoindeksi I on laskettu kaavalla $I = \frac{m}{h^2}$ jo 1830-luvulta lähtien. Kaavassa henkilön massan m yksikkönä on kilogramma ja pituuden h yksikkönä metri. Vuonna 2013 Nick Trefethen Oxfordin yliopistosta ehdotti uutta indeksiä J , joka lasketaan kaavalla $J = \frac{1,3m}{h^{2,5}}$.

- Raimo on 193 cm pitkä ja painaa 102 kg. Laske hänen painoindeksinsä I ja J yhden desimaalin tarkkuudella.
- Hannan pituus on 160 cm ja hänen I -indeksinsä on 25. Laske hänen J -indeksinsä.
- Kuinka pitkän henkilön painoindeksit I ja J ovat yhtä suuret?

10. Suorakulmaisen kolmion kummankin kateetin pituus on 5. Sen sisään on piirretty neliö kahdella eri tavalla kuvioden mukaisesti. Kummalla neliön pinta-ala on suurempi?



11. Taikinasta leivotaan pallonmuotoisia munkkeja, joiden pinta sokeroidaan. Tarvittavan sokerin määrä on suoraan verrannollinen pallon pinta-alaan. Vaihtoehtona on leipoa 24 pientä tai 3 isoa munkkia. Laske sokerin kokonaismäärien suhde näille kahdelle vaihtoehdolle.

12. Yhdistyneet kansakunnat asetti vuosituhatosen vaihteessa yhdeksi tavoitteekseen, että maailman hiilidioksidipäästöt olisivat vuonna 2015 merkittävästi pienemmät kuin vuonna 1990. Tavoite ei näytä toteutuvan, sillä vuosina 1990–2008 päästöjen määrä kasvoi 39 %. Oletetaan, että päästöjen vuotuinen kasvuprosentti on ollut aikavälillä 1990–2008 vakio. Kuinka monta prosenttia päästöt kasvavat yhteensä vuosina 1990–2015, jos niiden vuotuinen kasvuprosentti pysyy edelleen samana? Anna vastaus prosenttiyksikön tarkkuudella.
13. a) Epäyhtälöt $x+3y \leq 18$, $3x+2y \leq 19$, $x \geq 0$ ja $y \geq 0$ määrittelevät nelikulmion N . Piirrä sen kuva xy -koordinaatistossa ja laske kärkien koordinaatit.
b) Määritä lausekkeen $2x+y$ suurin ja pienin arvo nelikulmiossa N .
14. Kristian aikoo vaihtaa autoa ja hakee pankilta 8 000 euron lainaa. Pankki tarjoaa hänelle tasaerälainaa, joka maksetaan takaisin kahdessa vuodessa. Lainan vuotuinen korko on 6,6 % koko takaisinmaksukauden ajan. Muita kuluja ei oteta huomioon.
a) Määritä lainan kuukausittaisen tasaerän suuruus.
b) Kuinka paljon lainaa on jäljellä silloin, kun puolet takaisinmaksuajasta on kulunut?
c) Kuinka paljon korkoa Kristian maksaa yhteensä koko kahden vuoden laina-aikana?
15. Jonna ampuu uudenvuodenraketin katolta koordinaatiston pisteestä $(20,10,5)$ vektorin $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ suuntaan. Raketti lentää suoraviivaisesti 105 metriä, kunnes se räjähtää. Koordinaatiston yksikkönä on metri.
a) Missä pisteessä raketti räjähtää?
b) Kuinka kaukana koordinaatiston origossa seisovista katsojista räjähdyspiste on?



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. a) Ratkaise yhtälö $2x^2 = x$.
 b) Laske lausekkeen $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ arvo, kun $a = 1$ ja $b = \frac{1}{2}$.
 c) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{3} = \frac{x-1}{4}$.

2. a) Missä pisteessä suora $x - 5y = 4$ leikkaa y -akselin?
 b) Ratkaise yhtälö $4x^3 = 48$. Anna tarkka arvo ja kolmidesimaalinen likiarvo.
 c) Ratkaise yhtälö $2 \cdot 3^x = 162$.

3. a) Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 5,0 cm ja 8,0 cm. Määritä hypotenuusan pituus millimetrin tarkkuudella ja terävien kulmien suuruus asteen tarkkuudella.
 b) Positiiviset luvut x ja y toteuttavat yhtälön $\frac{x+y}{x-y} = \frac{5}{2}$. Määritä lausekkeen $\frac{x}{y}$ tarkka arvo.

4. Kuution särmän pituus puolittuu. Kuinka monta prosenttia pienenee kuution
 a) tilavuus?
 b) sivutahkojen yhteenlaskettu pinta-ala?

5. Boolimaljassa on 4,0 litraa sekoitusta, jonka tilavuudesta 70 % on kuohuviiniä ja 30 % mansikkamehua. Kuinka paljon siihen täytyy lisätä kuohuviiniä, jotta mehun osuus on 20 %?

6. Kiinalainen arvoitus 5 000 vuoden takaa: Häkissä on fasaaneja ja kaniineja. Niillä on yhteensä 35 päätä ja 94 jalkaa. Kuinka monta fasaania ja kuinka monta kaniinia häkissä on?

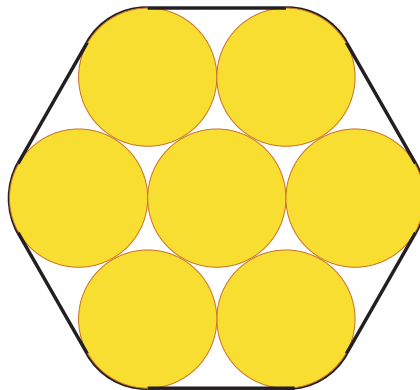


<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Common_Pheasant_RWD2.jpg>.
Luettu 12.3.2013.



<<http://www.hdwallpapersarena.com/rabbit-wallpapers.html>>.
Luettu 12.3.2013.

7. Seitsemän mäntytkkia sidotaan vaijerilla alla olevan poikkileikkauskuvion mukaisesti. Kuinka paljon vaijeria tarvitaan yhteen kierrokseen? Jokaisen tukin halkaisija on 20 cm. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.



8. Pyramidihuijari avaa pankkitilin ja siirtää ensimmäisessä vaiheessa tilille 100 €. Tämän jälkeen hän houkuttelee mukaan kolme sijoittajaa, joista jokainen siirtää toisessa vaiheessa huijarin tilille 100 €. Kolmannessa vaiheessa kukin näistä kolmesta houkuttelee edelleen mukaan kolme uutta sijoittajaa, joista jokainen siirtää 100 € huijarin tilille. Huijaus jatkuu saman kaavan mukaisesti. Kuinka monen vaiheen jälkeen tilillä oleva summa ylittää Suomen valtion vuoden 2013 talousarvion, joka on 54,1 miljardia euroa?
9. Sarjakuvanäyttelyn lipun hinta on 5 €, mutta lipunmyyjä on unohtanut ottaa mukaan vaihtorahaa. Lippujonossa on neljä asiakasta, joista kullakin on vain yksi seteli. Kahdella on 5 €:n seteli ja kahdella muulla 10 €:n seteli. Kuinka suurella todennäköisyydellä asiakkaat ovat sellaisessa järjestyksessä, että lipunmyyjä voi antaa heti jokaiselle oikean vaihtorahan?

10. a) Millä vakion a arvolla funktion $f(x) = ax^2 - 4x + 8$ pienin arvo on 0?
 b) Millä vakion b arvolla funktio $g(x) = bx^2 - 4x + 8$ saa positiivisia arvoja täsmälleen silloin, kun $-2 < x < 1$?

11. Eräs menetelmä luvun $\sqrt[3]{a}$ likiarvojen laskemiseksi perustuu kaavaan

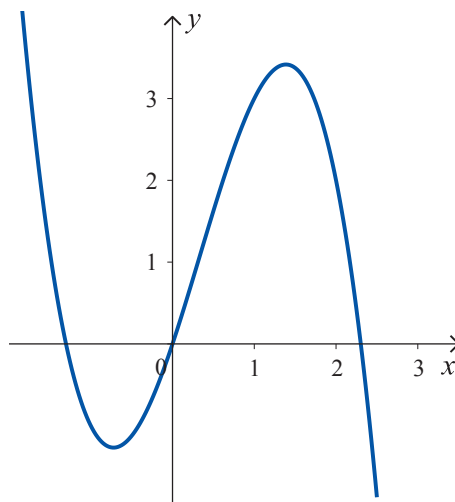
$$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{a}{(x_n)^2} \right),$$

kun $n = 1, 2, \dots$ ja $x_1 = 1$. Tarkastellaan kyseistä jonoa (x_1, x_2, x_3, \dots) , kun $a = 9$. Millä indeksin n arvolla näin lasketut likiarvot toteuttavat ensimmäisen kerran seuraavan ehdon: lukujen x_n ja x_{n+1} seitsemän ensimmäistä desimaalia ovat samat?

12. Tarkastellaan vahingollista tapahtumaa, jonka tilastollinen todennäköisyys on $0 < p \leq 1$. Sen turvallisuusluku T määritellään kaavalla $T = -\lg p$.

- a) Alkoholinkäytöstä johtuvan kuoleman turvallisuusluku on 3,8 ja tapaturmaisen kuoleman turvallisuusluku 3,4. Kumman kuolinsyyn todennäköisyys on suurempi?
 b) Tieliikenteessä loukkaantumisen turvallisuusluku on 3,2. Kuinka monta suomalaista keskimäärin loukkaantuu vuosittain tieliikenteessä? Suomen väkiluku on noin 5,4 miljoonaa. Anna vastaus 100 henkilön tarkkuudella.

13. a) Mihin käyrän $y = -x^3 + x^2 + 3x$ pisteeseen asetetun tangentin kulmakerroin on suurin mahdollinen?
 b) Määritä a-kohdan tangentin yhtälö.



- 14.** Helsingin kaupunki teetti ennusteen kaupungin väestönkasvusta vuodesta 2012 alkaen. Ennusteen mukaan asukasluku kasvaa lineaarisesti aikavälillä 2012–2030 niin, että kaupungissa on 607 417 asukasta vuoden 2014 alussa ja 629 894 asukasta vuoden 2018 alussa. Ennusteessa ei otettu huomioon mahdollisia kuntaliitoksia.

- a) Ennusteen mukaan asukasluku y toteuttaa yhtälön

$$y = a(x - 2014) + b,$$

kun x on vuosiluku. Määritä vakioiden a ja b tarkat arvot käyttämällä yllä mainittuja tietoja.

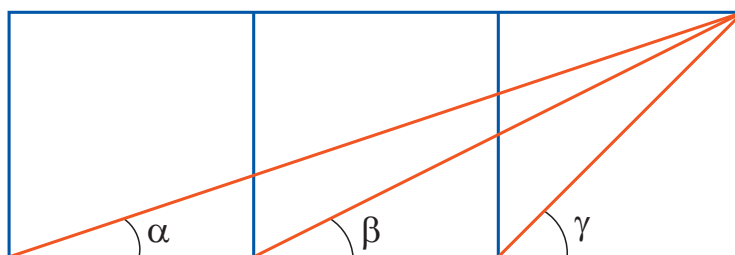
- b) Kuinka paljon asukasluku kasvaa ennusteen mukaan aikavälillä 2014–2030? Anna vastaus 1 000 asukkaan tarkkuudella.
- c) Piirrä asukasluvun y kuvaaja välillä $2014 \leq x \leq 2030$.

- 15. a)** Ratkaise yhtälö $\tan \gamma = 1$, kun $0^\circ \leq \gamma \leq 360^\circ$.

- b) Oheisessa kuvassa on vierekkäin kolme neliötä, joiden sivun pituus on 1. Lisäksi kuvioon on merkitty kulmat α , β ja γ . Laske $\tan(\alpha + \beta)$ käyttämällä tangentin yhteenlaskukaavaa

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

ja perustelee yhtälö $\alpha + \beta = \gamma$.





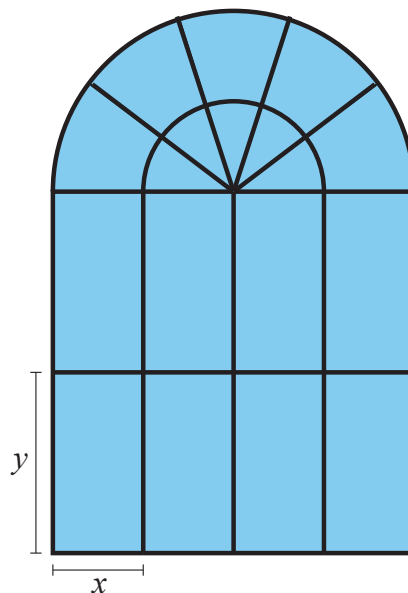
Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. a) Ratkaise yhtälö $(x-2)^2 = 4$.
 b) Millä muuttujan x arvolla lausekkeet $2x+3$ ja $-(x+3)$ saavat saman arvon?
 c) Laske lausekkeen $a(b-2)+(a-b)^2 - b(1-a)$ arvo, kun $a=2$ ja $b=-2$.

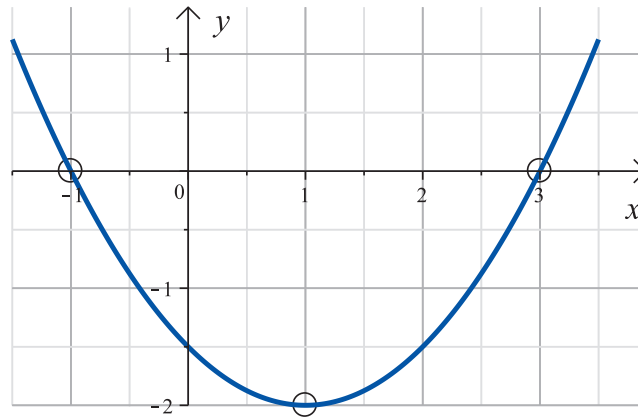
2. a) Missä pisteissä suora $y = -3x+12$ leikkaa koordinaattiakselit?
 b) Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 2x+y=4 \\ -x+2y=1. \end{cases}$
 c) Suorakulmion kanta on 11 cm ja korkeus 7 cm. Sen kanta lyhenee 20 prosenttia, ja korkeus kasvaa 20 prosenttia. Kuinka monta prosenttia suorakulmion pinta-ala pienenee?

3. Tasakylkisen kolmion kylki on 90 m ja kanta 40 m.
 a) Laske kolmion huippukulma asteen tarkkuudella.
 b) Laske kolmion pinta-ala neliömetrin tarkkuudella.

4. Kuvan kaari-ikkunassa on lasin tukena rimoja. Kuinka paljon rimaa tarvitaan kuvan mukaiseen kaari-ikkunaan, kun $x=20$ cm ja $y=40$ cm? Rimaa käytetään kaikkiin kuvion janoihin ja puoliympyröiden kaariin. Anna vastaus senttimetrin tarkkuudella.



5. Oheinen kuvaaja esittää paraabelia $y = ax^2 + bx + c$. Määritä vakiot a , b ja c käyttämällä kuvioon ympyröillä merkittyjä pisteitä.



6. Talouspaperirullan korkeus on 21 cm, täyden rullan ulkohalkaisija on 12 cm ja sen sisähalkaisija 4,5 cm. Mikä on rullan halkaisija silloin, kun paperin tilavuudesta on jäljellä puolet? Anna vastaus millimetrin tarkkuudella.
7. Auton jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Mittauksissa havaittiin, että jarrutusmatka nopeudesta 40 km/h on 11,0 metriä.
- Mikä on auton jarrutusmatka nopeudesta 80 km/h?
 - Auton jarrutusmatkaksi mitattiin 21,3 metriä. Mikä oli auton nopeus jarrutuksen alkaessa? Anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.
8. Pussissa on punaisia ja valkoisia palloja. Todennäköisyys sille, että väriä näkemättä valitsee punaisen pallon, on 0,4. Kuinka monta punaista palloa pussissa on, jos siinä on n kappaletta valkoisia palloja?
9. Määritä funktion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ suurin ja pienin arvo välillä $[-2, 4]$.

10. Maalämpöpumppuja myyvän yrityksen liikevaihto kymmenkertaistui kahdessakymmenessä vuodessa. Kuinka monta prosenttia liikevaihto kasvoi vuodessa, kun vuotuinen kasvuprosentti pysyi koko ajan samana? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.
11. Eräällä matematiikan kurssilla oppilaat saivat vain arvosanoja 10, 9 ja 8. Niitä esiintyi suhteessa 1 : 2 : 3. Laske kurssin arvosanojen keskiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.
12. Korkeushyppääjän eri-ikäisenä saavuttamia tuloksia voidaan vertailla Seppo Sarnan laajasta tilastollisesta aineistosta kehittämän muunnoskaavan

$$T = t + k \lg \frac{a}{35}$$

avulla. Kaavassa t on hyppääjän saavuttama todellinen tulos a vuoden ikäisenä, T on muunnettu tulos ja k tilastomateriaaliin perustuva kerroin, jonka arvo on 201,4 cm. Korkeushypyssä tulokset ilmaistaan senttimetrin tarkkuudella.

- a) Raimo hyppäsi 19-vuotiaana juniorina tuloksen 196 cm, 23-vuotiaana ennätöksensä 200 cm ja 40-vuotiaana veteraanina tuloksen 175 cm. Aseta nämä tulokset paremmuusjärjestykseen, kun niitä verrataan muunnoskaavan avulla.
- b) Missä iässä hypätty tulos 175 cm on muunnettuna 233 cm? (233 cm oli sisäratojen miesten Suomen ennätys vuoden 2012 alussa.)



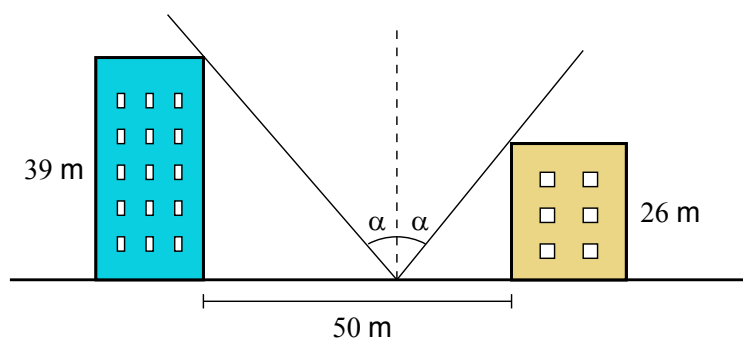
<<http://www.ts.fi/online/urheilu/196683.html>>. Luettu 5.3.2012.

- 13.** Eräessä tosi-TV-sarjassa kilpailijoiden tehtävänä on kerätä kulta- ja hopearahoja. Yhteensä niitä saa kerätä enintään 60 kappaletta. Kultarahan arvo on 25 € ja hopearahan arvo 20 €. Rahat täytyy kuljettaa ohuessa muovipussissa, joka kestää kolikoita vain yhden kilogramman verran. Yksi kultaraha painaa 20 grammaa ja hopearaha 10 grammaa. Kuinka monta kulta- ja hopearahaa kilpailijan kannattaa kerätä, jotta saaliin arvo on mahdollisimman suuri?
- 14.** Abiturientti saa lahjoituksen, jonka suuruus on verojen jälkeen 12 000 €. Hän sijoittaa sen vuodeksi kahteen rahastoon, joiden vuotuiset korot ovat verojen jälkeen 3,5 % ja 5,5 %.
- a)** Lahjoituksesta x euroa sijoitetaan 3,5 % tuoton tarjoavaan rahastoon ja loput toiseen rahastoon. Esitä koko sijoituksen arvo y muuttujan x avulla lausuttuna, kun $0 \leq x \leq 12\,000$.
- b)** Piirrä a-kohdan funktion kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 12\,000$.
- 15.** Olkoot $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ ja $\bar{b} = \bar{j} - 2\bar{k}$.
- a)** Laske $2|\bar{a}|^2 + 2|\bar{b}|^2$.
- b)** Laske $|\bar{a} + \bar{b}|^2 + |\bar{a} - \bar{b}|^2$.



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

- Ratkaise yhtälö $2(x+4) - 3(x-3) = 0$.
 - Laske lukujen $\frac{3}{4}$ ja $\frac{6}{5}$ käänteislukujen keskiarvo.
 - Sievennä lauseke $\frac{3a-6a^2}{3a}$.
- Millä muuttujan x arvoilla $4x+17$ on suurempi kuin $2-x$?
 - Ratkaise yhtälö $x^2 + 14x = -49$.
 - Suora kulkee origon ja pisteen $(2,3)$ kautta. Kulkeeko se myös pisteen $(48,75)$ kautta?
- Laske derivaatta $f'(1)$, kun $f(x) = x(x+2) - 5$.
 - Ratkaise yhtälö $5^{3x-1} = 25^{\frac{x}{2}}$.
- Alpo, Sanna ja Pauli palaavat samalla taksilla ylioppilasjuhlista. Alpon jäädessä pois mittari näyttää 21,90 €, Sannan jäädessä 28,20 € ja matkan loppusumma on 33,50 €. Matkan hinta päätetään jakaa seuraavalla tavalla: Alpo maksaa kolmasosan matkan alkuosuuden hinnasta. Sanna maksaa kolmasosan alkuosuudesta ja puolet keskiosuuden hinnasta. Laskun loppuosa jää Paulille. Kuinka paljon kukin joutuu maksamaan?
- Tähtiharrastaja katselee yöllisiä tähdenlentoja pihalla, joka sijaitsee kahden kerrostalon välissä kuvan mukaisesti. Talojen korkeudet ovat 39 m ja 26 m. Kuinka kaukana korkeammasta talosta molempiin suuntiin avautuu yhtä suuri kulma α maanpinnan tasosta katsottuna?

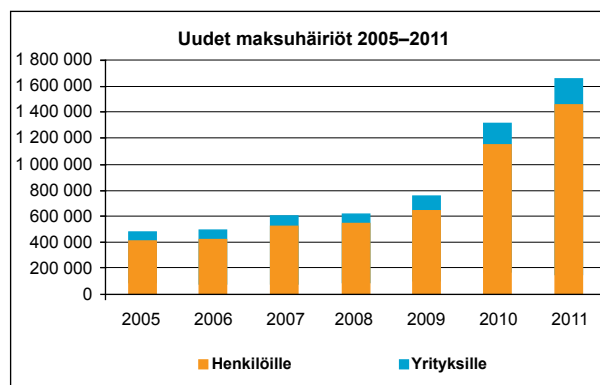


6. Tennispalloja myydään suoran ympyrälieriön muotoisessa pakkauksessa, johon mahtuu neljä palloa tiiviisti päällekkäin pakattuna. Tennispallon halkaisija on 6,68 cm. Kuinka monta prosenttia pakkauksen tilavuudesta pallot täyttävät? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.



<<http://www.fruugo.fi/wilson-tour-davis-cup-official-tennis-balls-12-dozen/p-1431131>>. Luettu 5.3.2012.

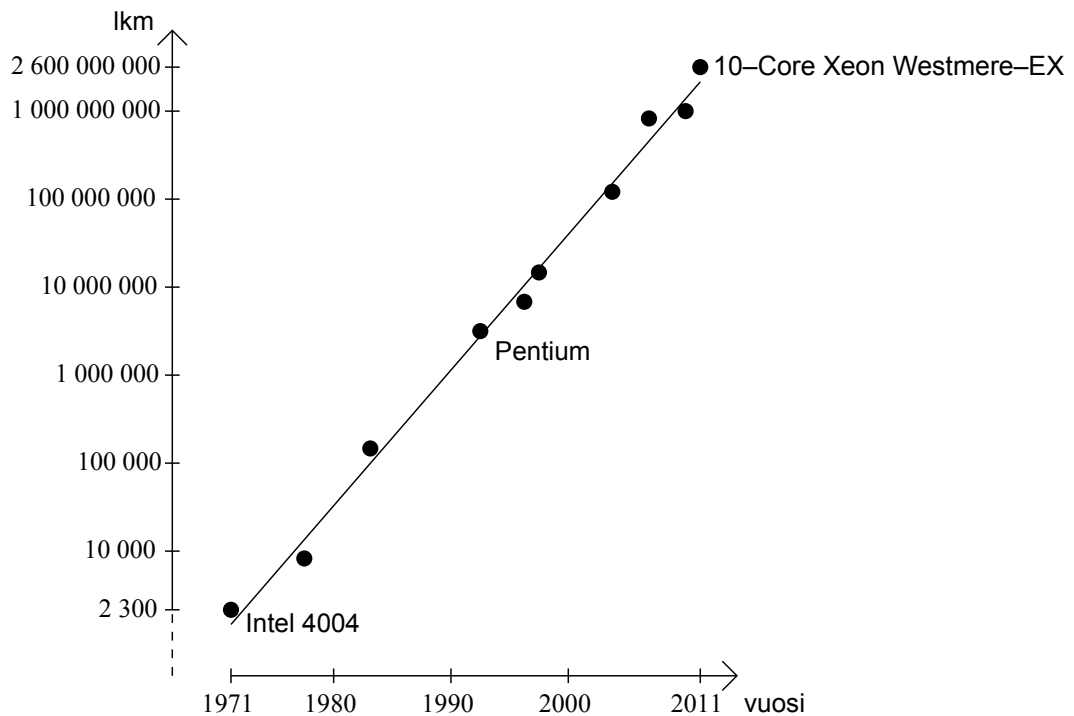
7. Mitä arvoja funktio $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 10x + 5$ saa välillä $[0, 2]$?
8. Vuonna 2005 yksityishenkilöiden maksuhäiriöiden lukumäärä Suomessa oli 422 500, ja vuonna 2011 se oli 1 460 500.
- a) Kuinka monta prosenttia maksuhäiriöiden lukumäärä kasvoi tällä aikavälillä? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.
- b) Vuonna 2011 ministeriö asetti tavoitteeksi vähentää maksuhäiriöiden määrän neljässä vuodessa takaisin vuoden 2005 tasolle. Kuinka monta prosenttia määrä vähenee vuodessa, kun vuotuinen vähenemisprosentti on sama? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.



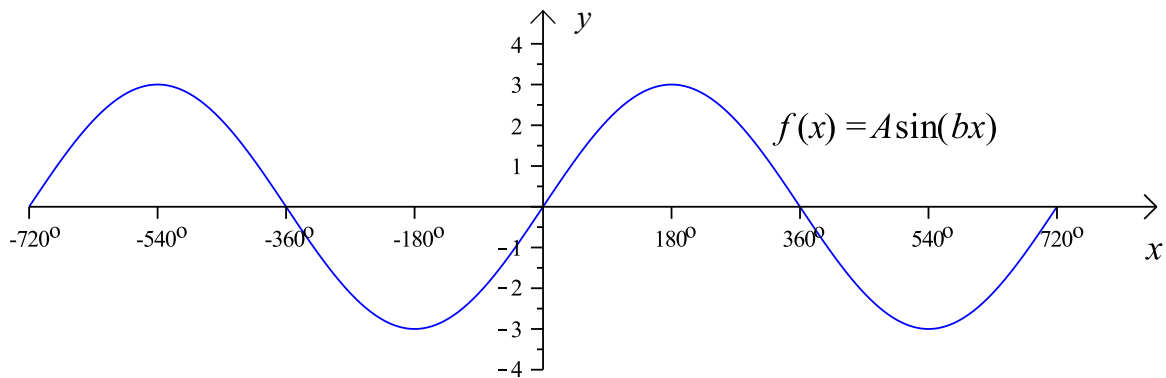
<<http://www.asiakastieto.fi/asiakastieto/tilastot/maksuhairiot/>>. Luettu 5.3.2012.

9. Neliön piiri on yhtä pitkä kuin ympyrän kehä.
- a) Kuinka monta prosenttia neliön pinta-ala on pienempi kuin ympyrän pinta-ala?
- b) Kuinka monta prosenttia ympyrän pinta-ala on suurempi kuin neliön pinta-ala? Anna vastaukset prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

10. Noppaa heitetään kaksi kertaa. Millä todennäköisyydellä
- silmlukujen summa on vähintään kahdeksan?
 - silmlukujen summa on suurempi kuin niiden tulo?
11. Lukujonossa (a_n) on $a_1 = 2$ ja $a_2 = \frac{12}{5}$. Määritä jonon sadan ensimmäisen termin summa, kun jono on
- aritmeettinen
 - geometrinen. Anna tämän kohdan vastaus miljoonan tarkkuudella.
12. Valmistajan tarkistusmittauksissa todettiin, että hajuvesipullon sisällön määrä noudattaa normaalijakaumaa, jonka keskiarvo on 52 millilitraa ja keskihajonta on 1,25 millilitraa. Millä todennäköisyydellä hajuvesipullon sisältö on alle 50 millilitraa?
13. Mikropiirin transistoreiden lukumäärä $N = N(t)$ on kasvanut alla olevan kuvan mukaisesti. Ajanhetkellä $t = 0$ (vuosi 1971) lukumäärä oli 2 300, ja hetkellä $t = 40$ (vuosi 2011) se oli 2 600 000 000. Lukumäärä noudattaa mallia $N(t) = N(0)e^{at}$.
- Määritä vakion a kaksidesimaalinen likiarvo näiden tietojen perusteella.
 - Perustele a-kohdan avulla niin sanottu Mooren laki, jonka mukaan transistoreiden lukumäärä kaksinkertaistuu noin kahden vuoden välein.



- 14.** Yhtiö valmistaa kännykkäkoteloita, joiden valmistuskustannukset ovat 12,30 € kappale. Tämän lisäksi yhtiön kiinteät kustannukset ovat 98 000 euroa. Koteloita myydään aluksi 17,99 eurolla, mutta viimeiset 25 % myydään varaston tyhjentämiseksi 14,00 eurolla kappale. Oletetaan, että yhtiö saa myytyä kaikki kotelot. Tehtävässä ei oteta huomioon verotusta.
- Muodosta lauseke, joka kuvaa yhtiön kokonaiskustannuksia koteloiden valmistusmäärän x avulla lausuttuna.
 - Muodosta lauseke, joka kuvaa yhtiön saamaa voittoa valmistusmäärän x avulla lausuttuna.
 - Kuinka monta koteloita yhtiön täytyy valmistaa, jotta kiinteät kustannukset saadaan katettua yllä mainitulla hinnoittelustrategialla?
- 15.** Alla on funktion $f(x) = A\sin(bx)$ kuvaaja välillä $x \in [-720^\circ, 720^\circ]$. Määritä kuvaajan perusteella
- vakion A arvo
 - vakion b arvo
 - funktion f lyhin jakso L , jolle pätee $L > 0$ ja $f(x+L) = f(x)$ kaikilla x .





Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. a) Ratkaise yhtälö $x^2 - 2x = 0$.
 b) Ratkaise yhtälö $\frac{2}{3}x - 1 = \frac{2}{3}$.
 c) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 2x - y = -3. \end{cases}$$

2. a) Mikä on meetvurstin suolapitoisuus prosentin kymmenesosan tarkkuudella, kun 250 grammassa meetvurstia on 9,0 grammaa suolaa?
 b) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 4,9 m ja kateetin pituus 2,3 m. Laske toisen kateetin pituus 0,1 metrin tarkkuudella.
 c) Määritä pisteiden (0,8) ja (12,0) kautta kulkevan suoran yhtälö.

3. a) Määritä funktion $f(x) = x(x+2)^2$ derivaatta kohdassa $x = 0$.
 b) Ratkaise yhtälö $2^{3x+1} = 32$.
 c) Ratkaise yhtälö $\log_4(3x) = 3$.

4. Tarkastellaan paraabelia $y = x^2 - 12x + 35$.
 a) Missä pisteissä paraabeli leikkaa x -akselin?
 b) Määritä paraabelin huipun koordinaatit.

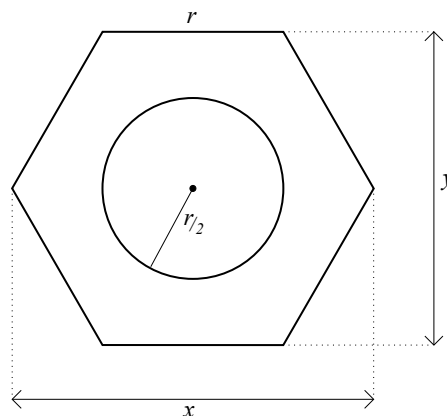
5. Laske summat
 a) $\sum_{n=0}^{22} (3 + 4n)$
 b) $\sum_{n=2}^{15} (-3)^n$

6. Erään japanilaisen auton keskikulutus maantieajossa on 6,8 litraa bensiiniä sadalla kilometrillä. Saman kokoluokan amerikkalaisella autolla voi ajaa 32 mailia yhdellä gallonalla bensiiniä. Kumpi auto kuluttaa vähemmän polttoainetta? Yksi gallona on noin 3,785 litraa, ja yksi maili noin 1,609 kilometriä.

7. Saksalainen tähtitieteilijä Johannes Kepler (1571–1630) keksi planeetan etäisyyden ja kiertoaajan välisen yhteyden. Planeetan kiertoaikaa Auringon ympäri merkitään symbolilla x ja sen etäisyyttä Auringosta symbolilla y . Alla olevassa taulukossa on viiden Aurinkoa lähinnä olevan planeetan kiertoaika vuosina ja etäisyys astronomisen yksikön avulla lausuttuna.

Planeetta	Merkurius	Venus	Maa	Mars	Jupiter
x	0,241	0,615	1,0	1,881	11,861
$\sqrt[3]{x}$					
y	0,387	0,723	1,0	1,523	5,203
\sqrt{y}					

- a) Kopioi taulukko vastauspaperiisi ja täydennä puuttuvat kohdat kolmen desimaalin tarkkuudella.
- b) Päättele, mikä on Keplerin kaava etäisyydelle y kiertoaajan x avulla lausuttuna.
- c) Saturnuksen kiertoaika on 29,457 vuotta. Mikä on sen etäisyys Auringosta?
8. Veetun lounaspaikassa on kolmenlaisia pitsoja: 7,50 euron peruspitsa, 8,50 euron ruispitsa ja 10,50 euron pannupitsa. Pitsoihin valitaan 15 täytteestä kaksi erilaista. Maksamalla euron lisää voi valita vielä kolmannen täytteen. Veetu yrittää syödä aina erilaisen pitsan, joka eroaa kaikista aikaisemmista joko pohjaltaan tai täytteiltään.
- a) Kuinka monta viikkoa hän voi tehdä näin, jos hän syö ravintolassa viisi kertaa viikossa?
- b) Mikä on erilaisten pitsojen keskimääräinen hinta?
9. Tarkastellaan oheisen kuvan mukaista säännöllistä kuusikulmiota, jonka sivun pituus on r .
- a) Johda leveyden x lauseke sivun pituuden r avulla lausuttuna.
- b) Johda korkeuden y lauseke sivun pituuden r avulla lausuttuna.
- c) Laske kuusikulmion ja ympyrän väliin jäävän alueen pinta-ala, kun ympyrän säde on $\frac{r}{2}$.



10. Suoran ympyräkartion sisällä on suora ympyrälieriö, jonka pohja on kartion pohjalla ja yläreuna sivuaa kartion vaippaa. Lieriön pohjan halkaisija on yhtä suuri kuin sen korkeus. Toisaalta lieriön pohjan halkaisija on puolet kartion pohjan halkaisijasta. Kuinka monta prosenttia lieriön tilavuus on kartion tilavuudesta? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

11. Aikuisen ihmisen sääriluun pituus y riippuu henkilön pituudesta x kaavojen

$$y = 0,43x - 27 \text{ (nainen)}$$

$$y = 0,45x - 31 \text{ (mies)}$$

mukaisesti, kun yksikkönä on senttimetri.

a) Arkeologi löytää naisen sääriluun, joka on 41 cm pitkä. Kuinka pitkä nainen oli?

b) Kaivauksissa löytyneen miehen pituudeksi arvioidaan 175 cm. Miehen läheltä löytyy sääriluu, jonka pituus on 42 cm. Onko kyseessä saman henkilön sääriluu?

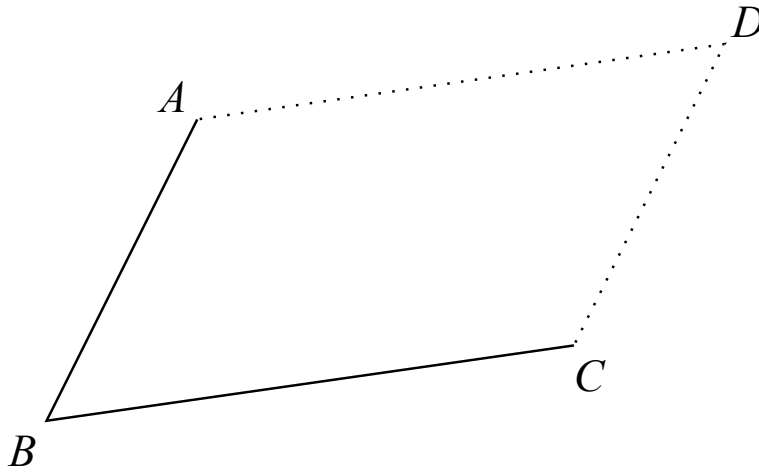


<<http://tieku.fi/kulttuuri-ja-historia/menneisyyden-kulttuurit/joukkohauta-viikingit-menettivat-paansa-englannissa>>. Luettu 29.3.2011.

12. Maailman väkiluvun kasvua kuvataan usein eksponentiaalisen mallin avulla. Vuonna 2004 väkiluku oli 6,4 miljardia ja vuonna 2010 noin 6,8 miljardia. Minä vuonna väkiluku ylittää mallin mukaan 10 miljardin rajan?

13. Karoliina ja Petteri tallettivat kumpikin 10 000 euroa vuodeksi. Karoliina sijoitti rahansa vuoden määräaikaistilille 2,20 %:n vuotuisella korolla. Maksetusta korosta pankki pidätti 30 % lähdeveroa. Petteri sijoitti rahansa ensin puolen vuoden määräaikaistilille, jonka vuosikorko oli 2,35 %. Puolen vuoden kuluttua Petteri sijoitti pääoman korkoineen, josta pankki oli pidättänyt 30 % lähdeveroa, toiselle puolen vuoden määräaikaistilille. Tämän tilin vuosikorko oli 2,00 %. Maksetusta korosta pankki pidätti jälleen 30 % lähdeveroa. Kumpi teki paremman sijoituksen, ja mikä oli sen arvo vuoden kuluttua?

14. Eräessä tutkimuksessa mitattiin tiettyä lisäainepitoisuutta sadassa pullollisessa virvoitusjuomaa. Pitoisuuden keskiarvoksi saatiin $\bar{x} = 0,215 \%$ ja keskihajonnaksi $s = 0,005 \%$. Lisäainepitoisuus noudattaa normaalijakaumaa. Millä todennäköisyydellä lisäaineen pitoisuus pullossa ylittää sallitun rajan $0,225 \%$?
15. Paikkavektorit $\overline{OA} = 4\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$, $\overline{OB} = 6\bar{i} + 5\bar{j} + 2\bar{k}$ ja $\overline{OC} = 7\bar{i} + 9\bar{j} + 3\bar{k}$ määrittävät suunnikkaan kolme kärkipistettä A , B ja C . Määritä neljännen kärjen D paikkavektori \overline{OD} sekä suunnikkaan lävistäjävektorit \overline{AC} ja \overline{BD} .





Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään.

1. a) Ratkaise yhtälö $7x + 3 = 31$.

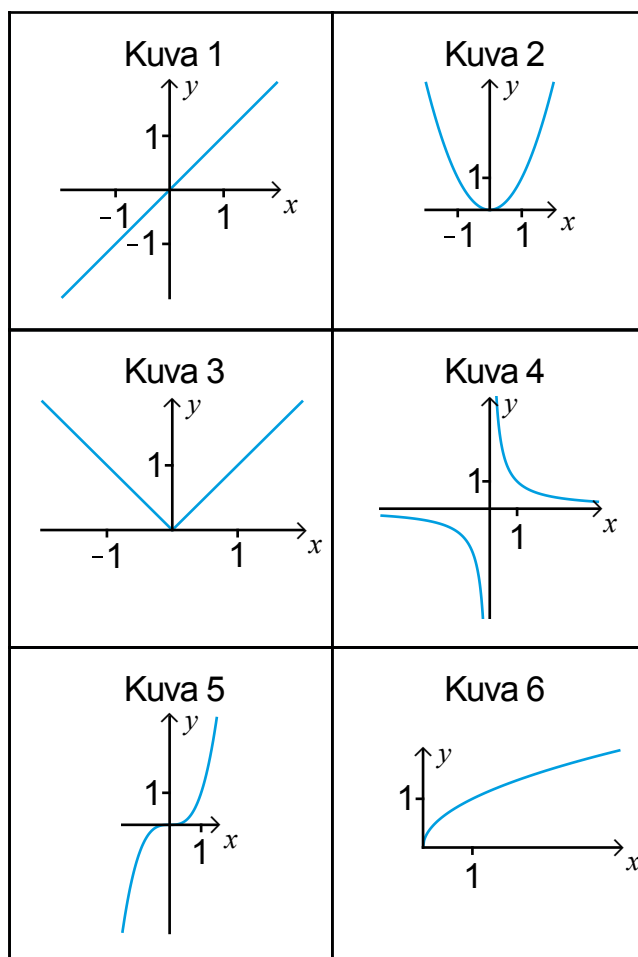
b) Laske lausekkeen $\frac{2a+3b}{a-b}$ arvo, kun $a = \frac{5}{2}$ ja $b = \frac{7}{3}$.

c) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 8. \end{cases}$$

2. Kuvissa 1–6 on oheisessa taulukossa mainittujen funktioiden $y = f(x)$ kuvaajat. Kopioi taulukko vastauspaperiisi ja merkitse siihen, mikä kuvaaja esittää annettua funktiota.

$f(x)$	x^2	$\frac{1}{x}$	x	\sqrt{x}	x^3	$ x $
Kuva						



3. a) Ratkaise yhtälö $\frac{7x + \frac{1}{2}}{3} - \frac{3x - \frac{1}{3}}{2} = 2$.

b) Ratkaise yhtälö $27^{x-2} = 9^{\frac{x}{2}}$.

4. a) Funktion $f(x) = \frac{3}{2}x + b$ nollakohta on 2. Määritä vakion b arvo.

b) Missä pisteessä a-kohdan funktion kuvaaja leikkaa y -akselin?

c) Kuinka suuren terävän kulman a-kohdan funktion kuvaaja muodostaa x -akselin kanssa? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

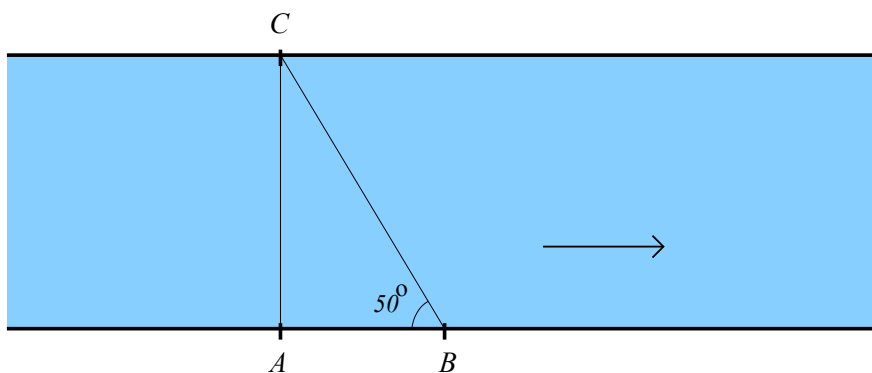
5. Tarkastellaan funktiota $f(x) = (x+3)(x^2-4)$.

a) Laske funktion $f(x)$ nollakohdat.

b) Määritä derivaatta $f'(x)$.

c) Laske derivaatan nollakohdat.

6. Biologi haluaa arvioida joen leveyttä, jotta hän voi asettaa kalojen liikkumista mittaavia laitteita jokeen. Hän katsoo joen rannalla olevasta pisteestä A kohtisuoraan vastarannalla olevaa pistettä C . Pisteestä A hän kävelee 30 metriä alavirtaan pisteeseen B , josta katsottuna vastarannan piste C näkyy 50 asteen kulmassa alla olevan kuvan mukaisesti. Laske joen leveys AC metrin tarkkuudella.



7. Henkilö lähettää sähköpostin kahdelle ystävälleen. Kumpikin näistä lähettää saman viestin 10 minuutin kuluttua edelleen kahdelle uudelle henkilölle, jotka toimivat samoin. Tilanne toistuu kunkin saajan kohdalla aina samalla tavalla, eikä kukaan saa kyseistä sähköpostia toista kertaa. Kuinka kauan kestää, että 20 000 henkilöä on saanut sähköpostin? Anna vastaus 10 minuutin tarkkuudella.

8. Naisten hiusten leikkaus maksaa nyt 45 euroa. Kuinka paljon se maksaa kymmenen vuoden kuluttua, jos hintaa korotetaan vuoden välein 2,5 %?
9. Farao Djoser (hallitsi 2667–2648 eaa.) suunnitteli porrasyramidia, jossa on päällekkäin 100 suorakulmaista neliöpohjaista särmiötä niin, että kaikilla on sama korkeus ja jokaisen pohjasärmä on 10 % lyhyempi kuin alla olevan pohjasärmä. Alimmaisen särmiön tilavuus on $10\,000\text{ m}^3$. Määritä tällaisen porrasyramidin tilavuus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.



Porrasyramidi

<<http://fi.wikipedia.org/wiki/Djoser>>. Luettu 29.3.2011.

10. Maanjäristyksen voimakkuus M lasketaan kaavalla

$$1,44M = \log_{10} E - 5,24,$$

jossa E on järityksessä vapautuva energia.

- a) Sendain lähellä vuonna 2011 sattuneen järityksen voimakkuus oli 9,0. Laske järityksessä vapautunut energia kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.
- b) Kobessa vuonna 1995 sattuneen järityksen voimakkuus oli 6,8. Kuinka moninkertainen oli Sendain järityksessä vapautunut energia Koben järitykseen verrattuna?
11. Levitoimiseen tarvittavassa taikajuomassa on oltava vähintään 20 hyppysellistä jauhettua lepakon siipeä ja vähintään 10 hyppysellistä hämähäkin seittiä. Taikajuomapuodissa on kahta valmissekoitetta Ascensus ja Sursum. Pikarillinen Ascensusta maksaa kaksi kultarahaa, ja siinä on kolme hyppysellistä lepakon siipeä ja kaksi hyppysellistä hämähäkin seittiä. Pikarillinen Sursumia maksaa kolme kultarahaa. Siinä puolestaan on neljä hyppysellistä lepakon siipeä ja yksi hyppysellinen hämähäkin seittiä. Kuinka paljon kumpaakin sekoitetta kannattaa levitoijakokeilaan ostaa, jotta hän saisi taikajuoman mahdollisimman edullisesti?

12. Leonardo Pisano (1170–1250), kutsumanimeltään Fibonacci, määritteli noin vuonna 1210 lukujonon (f_n) kaavoilla

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

a) Määritä luvut f_3, f_4, \dots, f_{10} .

b) Kreikkalaiset kutsuivat lukua $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,618034$ kultaiseksi leikkaukseksi. Sen avulla saadaan Fibonaccin luvuille kaava

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Näytä, että kaava on oikea, kun $n = 1$ ja $n = 2$.

c) Näytä, että yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ juuret ovat φ ja $-\frac{1}{\varphi}$.

13. Simeoni osti Saapasnahkatornin 12 000 eurolla ja teetti siihen myöhemmin 4 000 euron peruskorjauksen. Yksitoista vuotta myöhemmin hän myi sen Juhanille 42 000 eurolla. Voitosta on maksettava 30 % pääomatuloveroa. Verottaja tulkitsee voitoksi summan, joka saadaan, kun myyntihinnasta vähennetään ostohinta ja peruskorjauskulut. Toisaalta Simeoni voi myös halutessaan käyttää ns. hankintameno-olettamaa. Tällöin myyntihinnasta vähennetään 20 %, jos on omistanut tornin alle 10 vuotta, ja 40 %, jos on omistanut yli 10 vuotta. Mitään muita vähennyksiä ei saa tehdä. Jäljelle jääneestä summasta maksetaan 30 % pääomatuloveroa.

- a) Paljonko Simeonille jää myyntihinnasta verotuksen jälkeen, kun hän valitsee edullisemman vaihtoehdon?
- b) Mikä olisi sellainen myyntihinta, että Simeoni maksaisi kummassakin verotusvaihtoehdossa yhtä suuren veron?

14. Vuorokauden keskilämpötila maaliskuussa on eräällä paikkakunnalla normaalijakautunut niin, että odotusarvo on $4,0^\circ\text{C}$ ja 90 % vuorokautisista keskilämpötiloista on $2,0^\circ\text{C} - 6,0^\circ\text{C}$. Laske keskilämpötilan keskihajonta.

15. a) Määritä yhtälön

$$\sin(2x + 4^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ratkaisut välillä $x \in [0^\circ, 90^\circ]$.

- b) Määritä a-kohdan yhtälön kaikki ratkaisut.