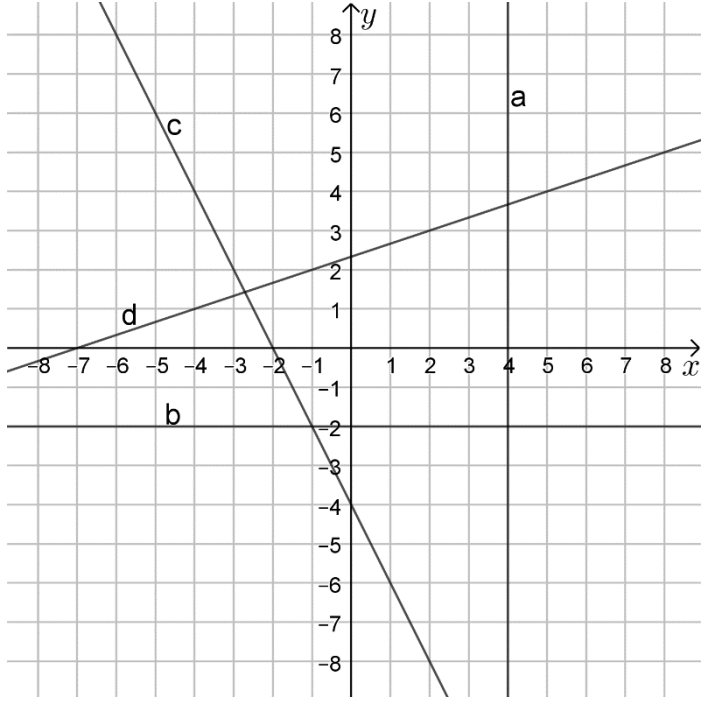
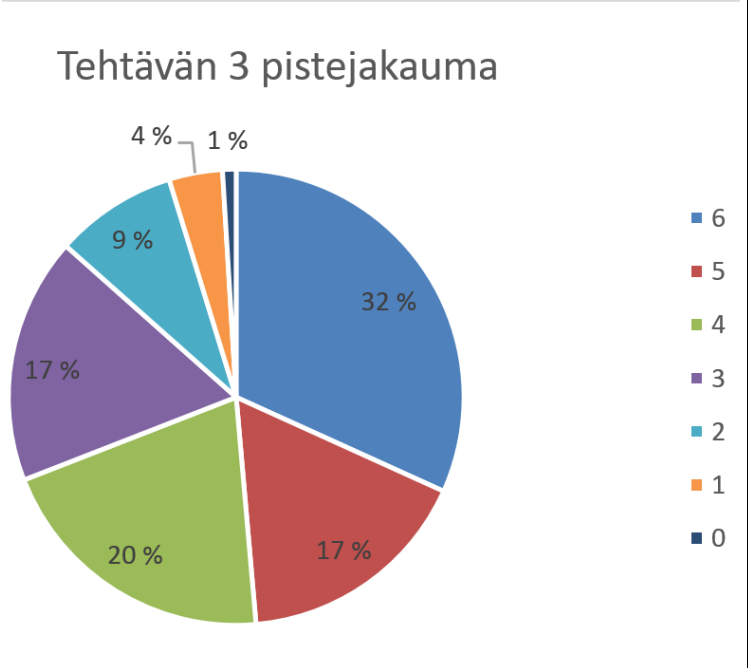
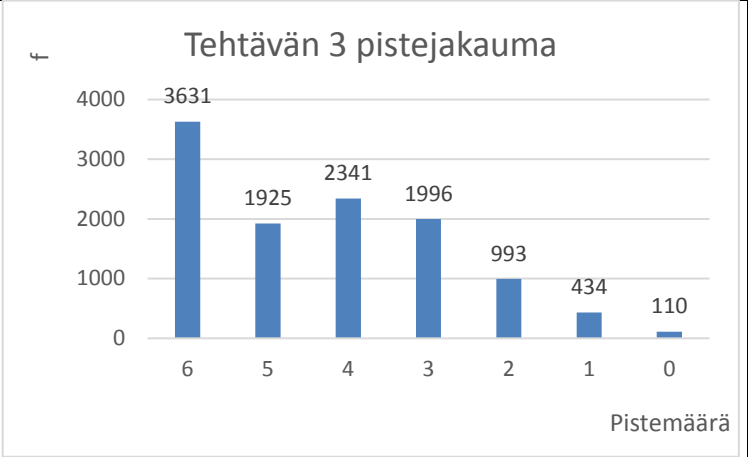


<p>1.</p>	<p>a) 3,50 €                  b) 56                  c) 43300 km                  d) 15                  e) 21.08                  f) 23.9.</p>	<p>kukin oikea vastaus → 1 p</p> <p>a-kohdassa pelkkä 3,50 ilman yksikköä kelpuutetaan, samoin c-kohdassa pelkkä 43300</p>
<p>2.</p>		<p>a- ja b-kohdat selviä, kunhan kutakuinkin tarkka, niin a-kohta → 1 p                  b-kohta → 1 p</p> <p>c-kohdan suoran leikattava akselit kohdissa <math>x = -2</math> ja <math>y = -4</math>, jos max noin 1 mm virhe niin → 2 p                  jos suurempi virhe mutta selvästi idea oikein → 1 p</p> <p>d-kohdan suoran leikattava x-akseli kohdassa <math>x = -7</math> ja kuljettava (esim.) pisteen (2,3) kautta, jos näissä max noin 1 mm virhe, niin → 2 p                  jos suurempi virhe mutta selvästi idea oikein → 1 p</p>
<p>3.</p>	<p>a) <math>1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2</math>, täten                  A0-arkin ala <math>10\,000 \text{ cm}^2</math> (<math>100 \text{ dm}^2</math>)                  A1-arkin ala <math>5000 \text{ cm}^2</math> (<math>50 \text{ dm}^2</math>)                  A2-arkin ala <math>2500 \text{ cm}^2</math> (<math>25 \text{ dm}^2</math>)                  A3-arkin ala <math>1250 \text{ cm}^2</math> (<math>12,5 \text{ dm}^2</math>)                  A4-arkin ala <math>625 \text{ cm}^2</math> (<math>6,25 \text{ dm}^2</math>)                  Vastaus täten <math>625 \text{ cm}^2</math> tai <math>6,25 \text{ dm}^2</math></p> <p>b) Koska <math>29 - 5 = 24</math>, niin erotusluvun on oltava sellainen, että luku 24 on sillä jaollinen. Sopivia ovat täten 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 ja 24. Näistä muodostuvat jonot ovat  <math>a_n = 5 + (n - 1) \cdot 1 = n + 4</math>  <math>a_n = 5 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 3</math>  <math>a_n = 5 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 2</math>  <math>a_n = 5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 1</math>  <math>a_n = 5 + (n - 1) \cdot 6 = 6n - 1</math>  <math>a_n = 5 + (n - 1) \cdot 8 = 8n - 3</math>  <math>a_n = 5 + (n - 1) \cdot 12 = 12n - 7</math>  <math>a_n = 5 + (n - 1) \cdot 24 = 24n - 19</math></p>	<p>Jompikumpi yksikönmuunnos joko heti tai myöhemmin → 1 p</p> <p>idea, että edetään kertomalla puolikkaalla / jakamalla kahdella → 1 p</p> <p>Oikea vastaus → 1 p</p> <p>Jonkinlainen dokumentoitu ajatus ratkaisusta tai suora aloitus → 1 p</p> <p>Keksitty kaksi eri lukujonoa → 1 p                  sievennetyt oikeat vastaukset → 1 p</p> <p>Jos vain yksi oikea (sievennetty) vastaus, niin max 2 p</p>

4.	<p> <math>P(\text{valot vihreällä niihin saavuttaessa}) = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}</math>, jolloin  <math>P(\text{valot punaisella niihin saavuttaessa}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}</math>. </p> <p> a) <math>P(\text{kaikki vihreällä}) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1^3}{4^3} = \frac{1}{64}</math>  b) <math>P(\text{kaikki punaisella}) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}</math>  c) <math>P(\text{täsmälleen kahdet punaiset})</math>  <math>= \binom{3}{2} \binom{3}{4}^2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = 3 \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{64}</math> </p>	<p>Kussakin kohdassa</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• jollain tavalla dokumentoitu ajatus → 1 p</li> <li>• oikea vastaus → 1 p</li> </ul> <p>tai pelkkä lasku ja vastaus oikein → 2 p</p> <p>Jos alun murtoluvut <math>\frac{1}{4}</math> ja <math>\frac{3}{4}</math> saatu jonkinlaisine selityksineen, mutta ei muuta, niin yhteensä 1 p</p>																											
5.	<p> a) Muutosprosentti = <math>\frac{\text{uusi-vanha}}{\text{vanha}} \cdot 100\%</math> (tai osissa)  <math>= \frac{35\,151\,728 - 33\,476\,688}{33\,476\,688} \cdot 100\%</math>  <math>= 0,050036 \dots \cdot 100\% = 5,0036 \dots\%</math>  Kasvuprosentti 5,0 on siis pyöristetty alaspäin. </p> <p> b) Todellinen kasvuprosentti vuosille 2006–2011 on välillä 5,85 – 5,95 (puoliavoin väli), rajat täten  <math>1,0585x = 33\,476\,688</math>  <math>x = 31\,626\,535,66 \dots \Rightarrow</math> yläraja 31 626 535  <math>1,0595y = 33\,476\,688</math>  <math>y = 31\,596\,685,22 \dots \Rightarrow</math> alaraja 31 596 686  Väkiluku oli välillä 31 596 686 – 31 626 535. </p>	<p>lauseke → 1 p</p> <p>kasvuprosentti → 1 p vastaus → 1 p</p> <p>oikeat rajat kasvuprosentille → 1 p väkiluvut 1 p + 1 p</p> <p>Laskettu vain yksi väkiluku (31 611 603) käyttäen kasvuprosenttia 5,9 yht. 1 p</p>																											
6.	<p> Ellipsin pinta-ala <math>A = \pi ab</math>  Puoliakselit <math>a = \frac{34\text{ cm}}{2} = 17\text{ cm}</math>, <math>b = \frac{30\text{ cm}}{2} = 15\text{ cm}</math>  Lieriön tilavuus  <math>V = A_p \cdot h = \pi abh = \pi \cdot 17\text{ cm} \cdot 15\text{ cm} \cdot 50\text{ cm}</math>  <math>= 40055,3 \dots\text{ cm}^3 \approx 40,1\text{ l}</math>  Ilmoitetun tilavuuden poikkeama  <math>\frac{50\text{ l} - 40,055 \dots\text{ l}}{40,055 \dots\text{ l}} = 0,2482 \dots \approx 25\%</math>  Tilavuus siis ilmoitettu 25 % liian suureksi. </p>	<p>puoliakselit → 1 p ellipsin pinta-ala → 1 p kassin tilavuus yksikkönä <math>\text{cm}^3</math> tai <math>\text{dm}^3</math> → 1 p kassin tilavuus litroina → 1 p lauseke prosentuaaliselle poikkeamalle → 1 p vastaus (suunta mukana) → 1 p</p>																											
7.	<p> <math>M_o = 6</math>  <math>M_d = 4</math>  <math>\bar{x} = 4,3</math> </p> <p>Keskuskulmat sektoridiagrammia varten:</p> <table border="1" data-bbox="331 1675 903 2018"> <thead> <tr> <th>Pistemäärä</th> <th>Frekvenssi</th> <th>Keskuskulma</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6</td> <td>3631</td> <td>114°</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>1925</td> <td>61°</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>2341</td> <td>74°</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>1996</td> <td>63°</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>993</td> <td>31°</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>434</td> <td>14°</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>110</td> <td>3°</td> </tr> <tr> <td>Yhteensä</td> <td>11430</td> <td>360°</td> </tr> </tbody> </table>	Pistemäärä	Frekvenssi	Keskuskulma	6	3631	114°	5	1925	61°	4	2341	74°	3	1996	63°	2	993	31°	1	434	14°	0	110	3°	Yhteensä	11430	360°	<p>moodi → 1 p mediaani → 1 p keskiarvo → 1 p eivät vaadi perusteluja, voi laskea käsin tai koneella</p> <p>keskuskulmat → 1 p sektoridiagrammi otsikoineen → 2 p</p> <p>TAI</p> <p>pylväsdiagrammi otsikoineen → 3 p</p>
Pistemäärä	Frekvenssi	Keskuskulma																											
6	3631	114°																											
5	1925	61°																											
4	2341	74°																											
3	1996	63°																											
2	993	31°																											
1	434	14°																											
0	110	3°																											
Yhteensä	11430	360°																											

7.  
(jatk)



8.

$$A_{\text{iso neliö}} = A_{\text{pieni neliö}} + 4 \cdot A_{\text{kolmio}}$$

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

$$(a + b)(a + b) = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + ab + ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \quad || - 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

jonkinlainen aloitusidea → 1 p  
 idea konkretisoitu yhtälöksi tai lausekkeiksi → 1 p  
 sijoitettu oikeat pinta-alojen lausekkeet → 1 p  
 binomin neliö onnistunut → 1 p  
 sievennetty kolmioiden yhteinen pinta-ala → 1 p  
 saatu Pythagoraan lause → 1 p

9.

100 % + 3,4 % = 103,4 % ⇒ kerroin 1,034  
 Diskontataan jaettavat stipendit kevääseen 2018  
 Talletettava summa on

$$1,034^{-1} \cdot 150 \text{ €} + 1,034^{-2} \cdot 150 \text{ €} + 1,034^{-3} \cdot 150 \text{ €}$$

$$+ 1,034^{-4} \cdot 150 \text{ €} + 1,034^{-5} \cdot 150 \text{ €} +$$

$$1,034^{-6} \cdot 150 \text{ €} + 1,034^{-7} \cdot 150 \text{ €} + 1,034^{-8} \cdot 150 \text{ €}$$

$$+ 1,034^{-9} \cdot 150 \text{ €} + 1,034^{-10} \cdot 150 \text{ €}$$

$$= 1253,80 \text{ €}$$

prosenttikerroin → 1 p  
 käytetty diskonttausta → 1 p  
 lauseke → 2 p  
 vastaus → 2 p

<p>10.</p>	<p><i>10-kulmio ympyrän sisäpuolella:</i> säännöllisen 10-kulmion vierekkäisiin kärkipisteisiin keskipisteestä piirretyt yhdysjanat rajaavat 10-kulmion vastaavan sivun kanssa tasakylkisen kolmion, jonka kyljen pituus on ympäri piirretyn ympyrän säde eli 12 cm. Kolmion huippukulma on <math>\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ</math>.</p> <p>Yhden tasakylkisen kolmion pinta-ala on <math>42,3205 \dots \text{cm}^2</math>, joten koko 10-kulmion ala on <math>A_s = 423,205 \dots \text{cm}^2</math>. Muutamia mahdollisesti tarvittavia mittoja: korkeus <math>12 \cos 18^\circ = 11,41 \dots</math>, kannan puolikas <math>12 \sin 18^\circ = 3,70 \dots</math>, joten kanta <math>24 \sin 18^\circ = 7,41 \dots</math></p> <p><i>10-kulmio ympyrän ulkopuolella:</i> nyt muodostuvien tasakylkisten kolmioiden korkeus on ympyrän säde 12 cm, joten yhden kolmion pinta-ala on <math>46,7884 \dots \text{cm}^2</math>. Koko 10-kulmion ala on täten <math>A_u = 467,884 \dots \text{cm}^2</math>. Mahdollisesti tarvittavat mitat: kannan puolikas <math>12 \tan 18^\circ = 3,89 \dots</math>, joten kanta <math>24 \tan 18^\circ = 7,79 \dots</math></p> <p>Pinta-alojen suhde on täten <math>\frac{A_s}{A_u} = \frac{423,205 \dots \text{cm}^2}{467,884 \dots \text{cm}^2} = 0,9045 \dots \approx 0,90</math></p> <p>Toisin: Säännölliset 10-kulmiot ovat keskenään yhdenmuotoiset, pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö; mittakaava saadaan vastinjanojen pituuksien suhteena. Valitaan vastinjanoiksi osakolmioiden korkeudet: <math>k = \frac{12 \cdot \cos 18^\circ}{12} = \cos 18^\circ</math>, joten alojen suhde on <math>k^2 = (\cos 18^\circ)^2 = 0,9045 \dots \approx 0,90</math></p>	<p>Ajatus pinta-alan laskemiseksi sisäpuolella olevan 10-kulmion tapauksessa → 1 p Onnistunut lasku → 1 p</p> <p>Ajatus pinta-alan laskemiseksi ulkopuolella olevan 10-kulmion tapauksessa → 1 p Onnistunut lasku → 1 p</p> <p>Suhteen muodostaminen → 1 p Oikea vastaus → 1 p</p> <p>Hyväksytään myös <math>\frac{A_u}{A_s} = \frac{467,884 \dots \text{cm}^2}{423,205 \dots \text{cm}^2} = 1,1055 \dots \approx 1,11</math></p> <p>Toisin: yhdenmuotoisuuden toteaminen → 1 p mittakaava <math>k</math> perustellen → 2 p alojen suhde on <math>k^2</math> → 1 p onnistunut lasku ja vastaus → 2 p</p>
<p>11.</p>	<p>Tampereen vuotuinen kasvuprosentti: <math>\frac{228\,274 - 225\,118}{225\,118} \cdot 100\% = 1,4019 \dots\%</math>, siis prosenttikerroin 1,014019 ...</p> <p>Vantaan vuotuinen kasvuprosentti: <math>\frac{219\,341 - 214\,605}{214\,605} \cdot 100\% = 2,2068 \dots\%</math>, siis prosenttikerroin 1,022068 ...</p> <p>Päivästä 31.12.2016 laskettu aika, jossa Vantaa saavuttaa Tampereen (<math>x</math>): <math>1,014019 \dots^x \cdot 228\,274 = 1,022068 \dots^x \cdot 219\,341</math> <math>\left(\frac{1,014019 \dots}{1,022068 \dots}\right)^x = \frac{219\,341}{228\,274}</math></p> <p>logaritmin avulla <math>x = \frac{\lg \frac{219\,341}{228\,274}}{\lg \frac{1,014019 \dots}{1,022068 \dots}} = 5,04888 \dots</math></p> <p>eli aikaa menee hieman yli 5 vuotta. Täten ohitus tapahtuisi vuoden 2022 alkupuolella. Vastaus on siis vuonna 2022.</p>	<p>Tampereen kasvu% → 1 p</p> <p>Vantaan kasvu% → 1 p</p> <p>Yhtälön muodostaminen → 1 p</p> <p>Yhtälön ratkaiseminen käsin tai koneella → 1+1 p</p> <p>Vastauksen oikea tulkinta → 1 p</p> <p>Jos vastaus 2021 niin max 5 p</p> <p>Myös prosenttilukujen laskemisen jälkeen tehty täydellinen taulukointi kelpuutetaan</p>

<p>12.</p>	<p>Erän ostohinta <math>17\,000 \cdot 1,96 \text{ €} = 33\,320 \text{ €}</math>  Merkitään <math>x</math>:llä 20 sentin alennusten lukumäärää  Kun siis myyntihinta on <math>(3,99 - 0,20x) \text{ €/kpl}</math>, niin  menekki on <math>(12\,000 + 1000x) \text{ kpl}</math> ja myyntitulo on  <math>(3,99 - 0,20x)(12\,000 + 1000x) \text{ €}</math>  <math>= (-200x^2 + 1590x + 47\,880) \text{ €}</math>  Voitto on "myyntitulo miinus ostohinta":  <math>-200x^2 + 1590x + 47\,880 - 33\,320</math>  <math>= -200x^2 + 1590x + 14\,560</math>  Kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten suurin  arvo saavutetaan huipussa, joka on derivaatan ainoa  nollakohta. Derivaatta on <math>-400x + 1590</math>, ja sen  nollakohta <math>x = 3,975</math>. Tällöin myyntihinta (€/kpl) olisi  <math>3,99 - 0,20x = 3,99 - 0,20 \cdot 3,975 = 3,195 \approx 3,20</math>  ja kappalemääräinen myynti  <math>12\,000 + 1000x = 12\,000 + 1000 \cdot 3,975</math>  <math>= 15\,975</math>  Myyntivoitto olisi <math>15\,975 \cdot 3,20 - 33\,320 \text{ €}</math>  <math>= 17\,800 \text{ €}</math>  Jos derivaatan nollakohdan <math>x = 3,975</math> sijoittaa suoraan  myyntivoiton lausekkeeseen <math>-200x^2 + 1590x +</math>  <math>14\,560</math> saa tulokseksi <math>17\,720,125 \text{ €} \approx 17\,720 \text{ €}</math>.  Molemmat vastaukset (17 800 € ja 17 720 €)  kelpuutetaan.</p>	<p>ostohinta → 1 p</p> <p>osattu valita muuttuja kuvaamaan muutosten lukumäärää, ja muuttuneet arvot sen kanssa saatu oikein → 1 p</p> <p>Lauseke → 1 p</p> <p>Derivointi + derivaatan nollakohdan käyttö → 1+1 p</p> <p>Myyntivoitto → 1 p</p>
------------	--	---

13.	<p>a) <math>-1 \leq \sin \alpha \leq 1</math> ja <math>f(t)</math> saa suurimman arvonsa, kun <math>\sin \alpha = 1</math>. Suurin arvo on täten <math>20 \cdot 1 + 20 = 40</math>. Käydään siis 40 metrin korkeudella.</p> <p>b) Lähtökorkeus on 0. Lasketaan, milloin korkeus on seuraavan kerran 0:  <math display="block">20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 20 = 0</math> <math display="block">\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) = -1</math> <math display="block">\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)</math> <math display="block">\frac{\pi}{6}(t-3) = -\frac{\pi}{2} + n2\pi</math> <math display="block">t-3 = -3 + n \cdot 12</math> <math display="block">t = n \cdot 12</math> Korkeus on 0 m ajanhetkillä <math>t = 0, 12, 24, \dots</math> Siis kierros kestää 12 min</p> <p>c) <math>20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 20 = 10</math>  <math display="block">\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) = -\frac{1}{2}</math> <math display="block">\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)</math> tai  <math display="block">\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) = \sin\left(\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)</math> <math display="block">\frac{\pi}{6}(t-3) = -\frac{\pi}{6} + n2\pi</math> tai <math>\frac{\pi}{6}(t-3) = \frac{7\pi}{6} + n2\pi</math>  <math display="block">\pi(t-3) = -\pi + n12\pi</math> tai <math>\pi(t-3) = 7\pi + n12\pi</math>  <math display="block">t-3 = -1 + n \cdot 12</math> tai <math>t-3 = 7 + n \cdot 12</math>  <math display="block">t = 2 + n \cdot 12</math> tai <math>t = 10 + n \cdot 12</math>  vast. Korkeus on 10 m, kun kierroksen alusta on kulunut 2 min tai 10 min</p>	<p>ymmärretty sinin suurin ja pienin arvo → 1 p saatu oikea korkeus → 1 p</p> <p>laadittu oikea yhtälö ja ratkaistu siitä sinit pois → 1 p</p> <p>vastaus → 1 p</p> <p>laadittu oikea yhtälö ja ratkaistu siitä sinit pois → 1 p</p> <p>vastaus → 1 p</p> <p>Graafinen tarkastelu laskimella: (ilmeisesti) piirretty käyrä ja luettu tulokset kuviosta kelpuutetaan, kunhan täysin oikein. Jos virhettä tarkkuudessa mutta muuten oikein, niin sellaisesta kohdasta 1 p</p>
-----	--	---