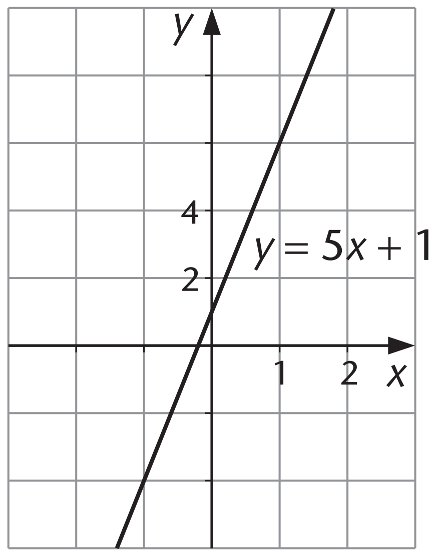
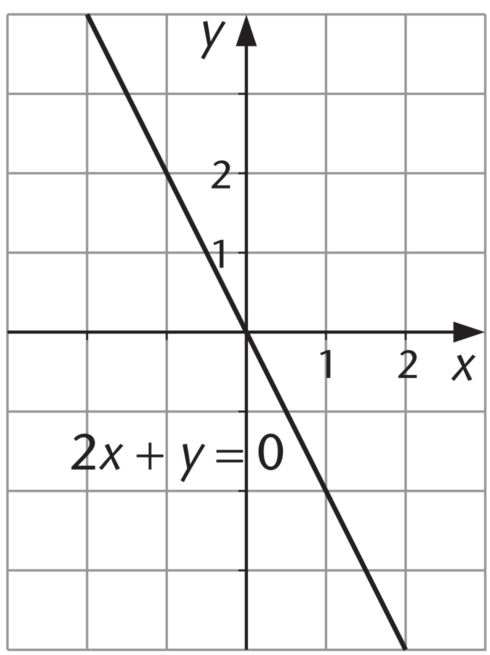
1.1 Kahden muuttujan lineaarinen yhtälö

1. a) $y = 5x + 1$



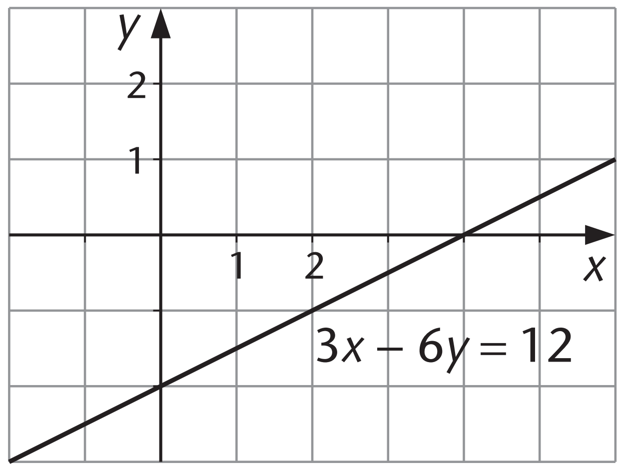
b)

$$2x + y = 0$$
$$y = -2x$$



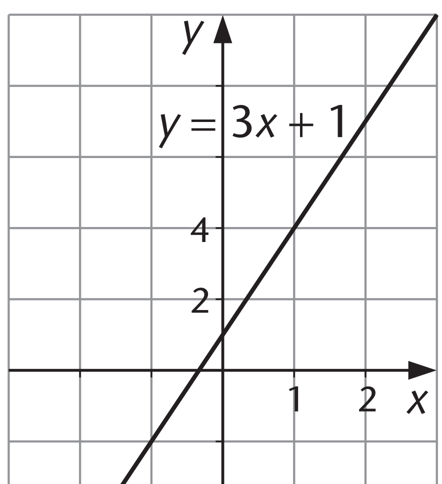
c)

$$
\begin{aligned}
3x - 6y &= 12 \\
-6y &= -3x + 12 \quad \Big| :(-6) \\
y &= \frac{1}{2}x - 2
\end{aligned}
$$



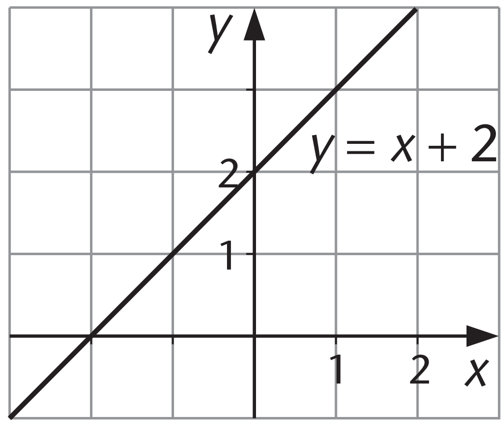
2. a)

$$
\begin{aligned}
y - 3x &= 1 \\
y &= 3x + 1
\end{aligned}
$$



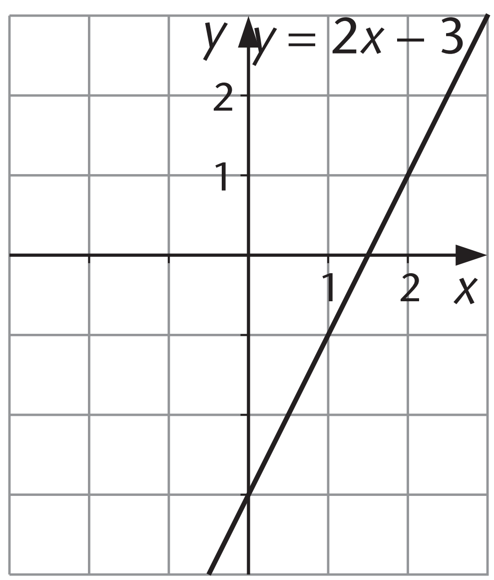
b)

$$-5x+5y=10$$
$$5y=5x+10 \qquad \Big| :5$$
$$y=x+2$$



c)

$$4x=2y+6$$
$$2y=4x-6 \qquad \Big| :2$$
$$y=2x-3$$

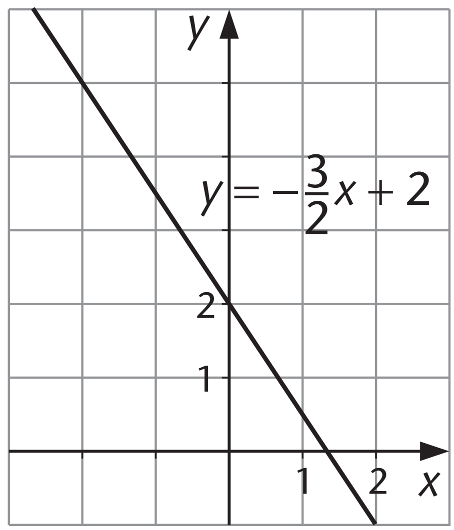


3. a)

$$3x + 2y - 4 = 0$$

$$2y = -3x + 4 \qquad \Big| :2$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 2$$

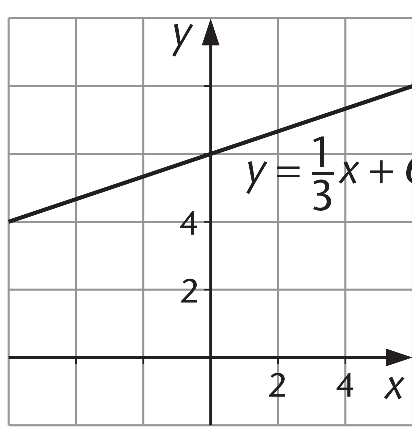


b)

$$-x + 3y - 18 = 0$$

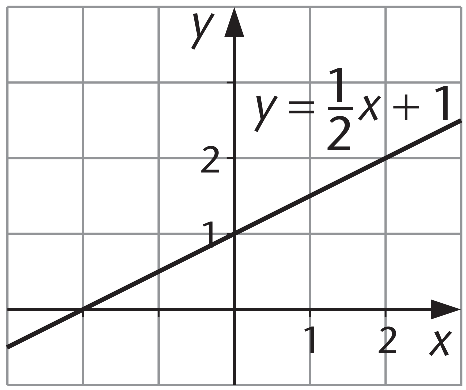
$$3y = x + 18 \qquad \Big| :3$$

$$y = \frac{1}{3}x + 6$$



c)

$$\begin{aligned}6-4y+2x&=2\\-4y&=-2x-4 \quad \Big|:(-4)\\y&=\frac{1}{2}x+1\end{aligned}$$



4. Suoran ratkaistu muoto on

$$\begin{aligned}5x-3y-6&=0\\-3y&=-5x+6 \,\Big|:(-3)\\y&=\frac{5}{3}x-2\end{aligned}$$

y- akselin leikkauspiste nähdään vakiotermistä. Piste on siis (0, -2).
x- akselin leikkauskohta on nollakohta. Kun y =0, niin

$$\begin{aligned}\frac{5}{3}x-2&=0 \,\Big|:\frac{5}{3}\\x&=2\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{5}\end{aligned}$$

x- akselin leikkauskohta on siis piste $\left(\frac{6}{5}, 0\right)$

Vastaus: (0, -2) ja $\left(\frac{6}{5}, 0\right)$

5. x- akselin leikkauskohdassa y =0, joten

$$
\begin{aligned}
3x - 0 + 4 &= 0 \\
3x &= -4 \,|: 3 \\
x &= \frac{-4}{3}
\end{aligned}
$$

Leikkauspiste on siis $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$.

y- akselin leikkauskohdassa x =0, joten

$$
\begin{aligned}
3 \cdot 0 - y + 4 &= 0 \\
-y &= -4 \,|: (-1) \\
y &= 4
\end{aligned}
$$

Leikkauspiste on siis $(0,4)$

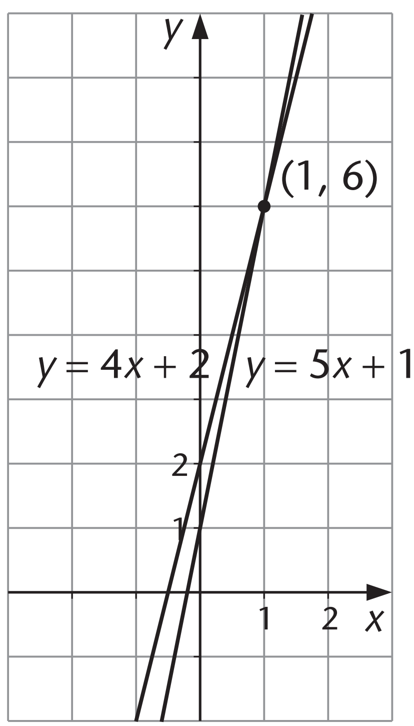
Vastaus: Leikkauspisteet ovat $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ ja $(0,4)$

6. Jos suora leikkaa x- akselin pisteessä (12, 0), niin piste kuuluu suoralle ja pisteen koordinaatit siis oteuttavat yhtälön $y = kx - 8$.

$$
\begin{aligned}
0 &= k \cdot 12 - 8 \\
12k &= 8 \quad |:12 \\
k &= {}^{4)}\frac{8}{12} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Vastaus: $k = \dfrac{2}{3}$

7. Leikkauspiste voidaan ratkaista graafisesti piirämällä suorat $y = 5x + 1$ ja $y = 4x + 2$.



Vastaus: (1, 6)

8. Piirretään ensin suorat.

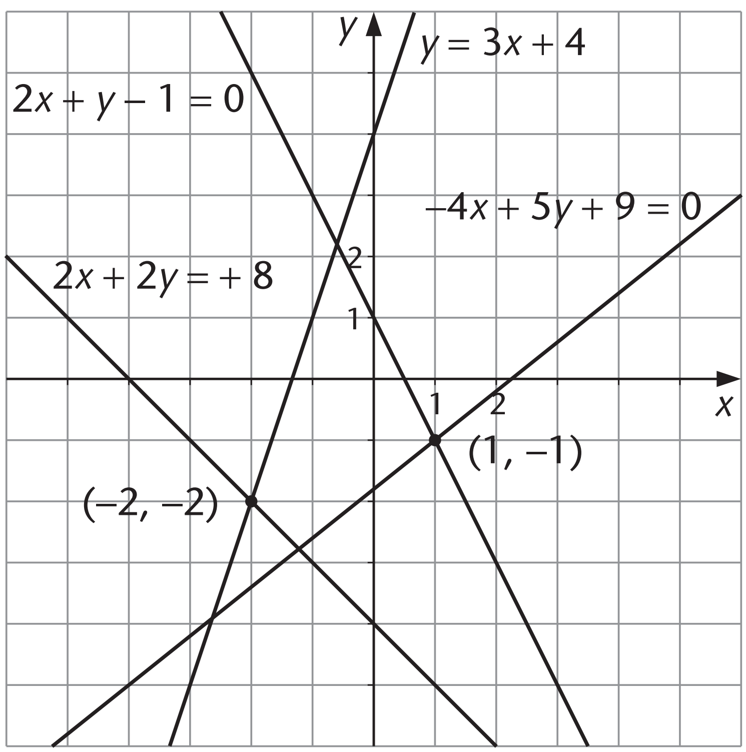
Suorat ovat $y = 3x + 4$ ja

$$2x + 2y = -8$$
$$2y = -2x - 8 \quad \Big| :2$$
$$y = -x - 4$$

Suorat ovat $-4x + 5y + 9 = 0$ ja $2x + y - 1 = 0$

$$5y = 4x - 9 \quad \Big| :5$$
$$y = \frac{4}{5}x - \frac{9}{5}$$

$$y = -2x + 1$$



a) Piste (-2, -2) toteuttaa molemmat yhtälöt.

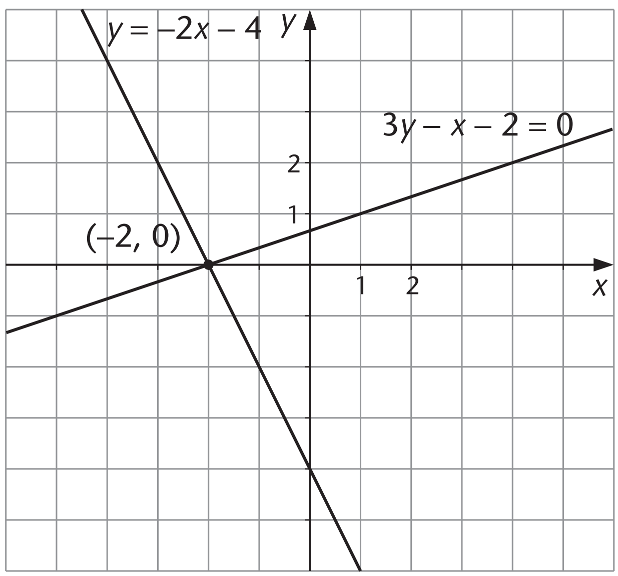
b) Piste (1, -1) toteuttaa molemmat yhtälöt.

Vastaus: a) (-2, - 2) b) (1, - 1)

9. Ensimmäinen suora on $y = -2x - 4$. Toisen suoran ratkaistu muoto on

$$3y - x - 2 = 0$$
$$3y = x + 2 \quad \Big| :3$$
$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Piirretään suorat koordinaatistoon.



Ratkaistaan leikkauspiste graafisesti katsomalla piste kuvasta.
Leikkauspiste on (-2, 0).

Tutkitaan, toteuttaako leikkaupiste yhtälön $y = x + 2$. Sijoitetaan pisteen koordinaatit yhtälöön.

$y = x + 2$ sij. $x = -2, y = 0$

$0 = -2 + 2$

$0 = 0$ Tosi

Piste (-2, 0) siis toteuttaa yhtälön.

Vastaus: Leikkaupiste on (-2, 0). Piste toteuttaa yhtälön.

10. Olkoon x = lyhytkarvaiset
y = pitkäkarvaiset

24 koiraa yhteensä, joten

$$\begin{aligned} x + y &= 24 \\ y &= -x + 24 \end{aligned}$$

11. Olkoon x = 6 pullan pakkaus (lkm.)
y = 4 pullan pakkaus (lkm.)

Pullia yhteensä 240, joten

$$\begin{aligned} 6x + 4y &= 240 \\ 4y &= -6x + 240 \quad \Big| :4 \\ y &= -\frac{3}{2}x + 60 \end{aligned}$$

12. Olkoon x = ankat (kpl) 2 jalkaa/ankka
y = vuohet (kpl) 4 jalkaa/vuohi

a) Jalkoja yhteensä 48, joten

$$2x + 4y = 48$$
$$4y = -2x + 48 \quad \big| :4$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 12$$

b) Jos vuohia on 6 kpl, niin sijoitetaan $y = 6$.

$$6 = -\frac{1}{2}x + 12 \quad \big| \cdot 2$$
$$12 = -x + 24$$
$$x = 12$$

Ankkoja siis 12 kpl.

13. Olkoon x = 2,00 € arpojen lkm.
y = 2,50 € arpojen lkm.

a) Arpoja myydään 200,00 €:lla, joten

$$2{,}00x + 2{,}50y = 200{,}00$$
$$2{,}50y = -2{,}00x + 200{,}00 \quad \big| :2{,}50$$
$$y = -0{,}80x + 80{,}00$$

b) Jos 2,00 € arpoja myydään 60 kpl, niin $x = 60$.

$$y = -0{,}80 \cdot 60 + 80{,}00 = 32$$

Kalliimpia arpoja myydään siis 32 kpl.

14. Olkoon x = 50 m² kaksioiden lkm.
y = 100 m² kolmioiden lkm.

a) Rakennuslupa on 1600 m², joten

$$\begin{aligned} 50x + 100y &= 1600 \\ 100y &= -50x + 1600 \quad |:100 \\ y &= -0{,}50x + 16 \end{aligned}$$

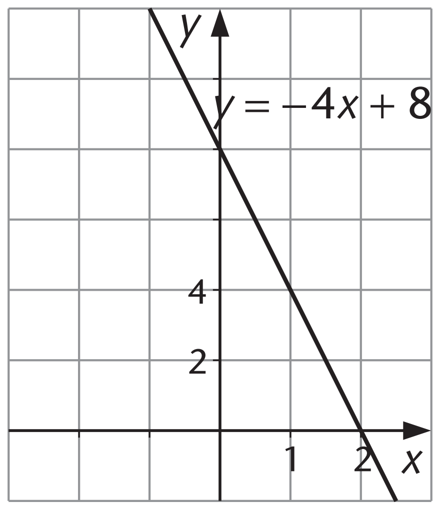
b) Jos kaksioita halutaan rakentaa 10 kpl, niin $x = 10$.

$$\begin{aligned} 50 \cdot 10 + 100y &= 1600 \\ 100y &= 1600 - 500 \quad |:100 \\ y &= 11 \end{aligned}$$

Kolmioita rakennetaan 11 kpl.

15.

$$\begin{aligned} 8x + 2y - 16 &= 0 \\ 2y &= -8x + 16 \\ y &= -4x + 8 \end{aligned}$$



16. y- akselin leikkauspisteessä $x = 0$ eli

$$\begin{aligned} -2y - 4 \cdot 0 + 12 &= 0 \\ -2y &= -12 \;|:(-2) \\ y &= 6 \end{aligned}$$

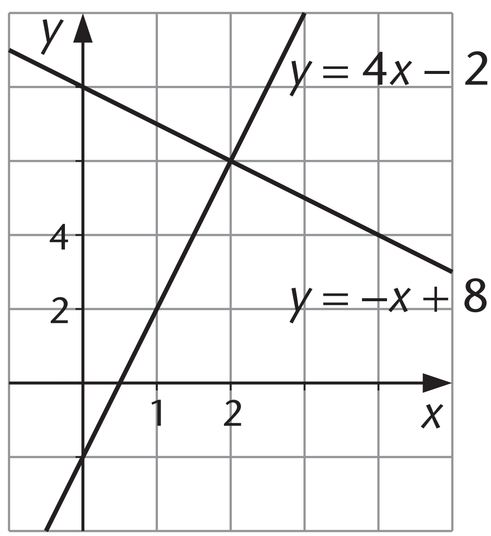
y-akselin leikkauspiste on siis (0, 6).

x- akselin leikkauspisteessä $y = 0$ eli

$$
\begin{aligned}
-2\cdot 0-4x+12&=0\\
-4x&=-12 \quad |:(-4)\\
x&=3
\end{aligned}
$$

x – akselin leikkauspiste on siis (3, 0).

17. a) $y=-x+8$
$y=4x-2$

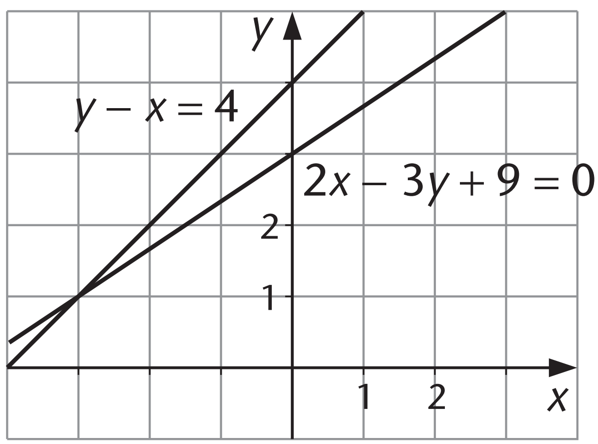


Leikkauspiste on (2, 6).

b)

$$2x-3y+9=0$$
$$-3y=-2x-9 \quad \big|:(-3)$$
$$y=\frac{2}{3}+3$$

$$y-x=4$$
$$y=x+4$$



Leikkauspiste on (-3, 1).

18. Olkoon x = taksit, joihin mahtuu 8 hlö (kpl)
y = taksit, joihin mahtuu 4 hlö (kpl)

Koska vieraita on 120 henkilöä, niin

$$8x+4y=120$$
$$4y=-8x+120 \quad \big|:4$$
$$y=-2x+30$$

19. Olkoon x = kuuden munan pakkaukset (lkm.)
y = kymmenen munan pakkaukset (lkm.)

a) Koska munia yhteensä 900, niin

$$\begin{aligned} 6x + 10y &= 900 \\ 10y &= -6x + 900 \quad |:10 \\ y &= -0{,}6x + 90 \end{aligned}$$

b) Jos $y = 18$, niin

$$\begin{aligned} 18 &= -0{,}6x + 90 \\ 0{,}6x &= 72 \quad |:0{,}6 \\ x &= 120 \end{aligned}$$

Kuuden munan pakkauksia on siis 120 kpl.

1.2 Yhtälöpari

20.

a) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -2x - 3 \end{cases}$

Sijoitetaan $y = -2x - 3$ yhtälöön $y = 2x + 1$.

$$\begin{aligned} -2x - 3 &= 2x + 1 \\ -4x &= 4 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y = 2x + 1, \ \text{sij. } x = -1 \\ &y = 2 \cdot (-1) + 1 = -1 \end{aligned}$$

Siis x = -1 ja y = -1.

b) $\begin{cases} x = 3y + 2 \\ x = 5y - 8 \end{cases}$

Sijoitetaan $x = 3y + 2$ yhtälöön $x = 5y - 8$.

$$\begin{aligned} 3y + 2 &= 5y - 8 \\ -2y &= -10 \qquad \Big| :(-2) \\ y &= 5 \end{aligned}$$

$$x = 3y + 2, \text{ sij. } y = 5$$
$$x = 3 \cdot 5 + 2 = 17$$

Siis $x = 17$ ja $y = 5$.

21. a)

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 3y + x = 5 \\ -3y - 5x = -1 \end{cases} \\ \hline -4x = 4 \\ x = -1 \end{array}$$

$$3y + x = 5, \text{ sij. } x = -1$$
$$3y - 1 = 5$$
$$3y = 6 \qquad |:3$$
$$y = 2$$

b)

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} y + 4x = 8 \\ -2y - 4x = -4 \end{cases} \\ \hline -y = 4 \\ y = -4 \end{array}$$

$$y + 4x = 8, \text{ sij. } y = -4$$
$$-4 + 4x = 8$$
$$4x = 12 \qquad |:4$$
$$x = 3$$

Vastaus: a) $x = -1$, $y = 2$ b) $x = 3$, $y = -4$

22.

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ 2x + 3y + 23 = 0 \end{cases}$$

Sijoitetaan $y = 3x - 4$ jälkimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned} 2x + 3(3x - 4) + 23 &= 0 \\ 2x + 9x - 12 + 23 &= 0 \\ 11x &= -11 \quad |:11 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan x = -1 yhtälöön $y = 3x - 4$.
$y = 3 \cdot (-1) - 4 = -7$

Siis x = - 1 ja y = -7.

23. Muodostetaan yhtälöistä yhtälöpari.

a) $\begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$

Sijoitetaan $y = x + 1$ yhtälöön $3x - 6y = 0$.

$$\begin{aligned} 3x - 6(x + 1) &= 0 \\ 3x - 6x - 6 &= 0 \\ -3x &= 6 \quad |:(-3) \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$y = x + 1,\ $ sij. $x = -2$

$y = -2 + 1 = -1$

b) $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ y = x - 3 \end{cases}$

Sijoitetaan $y = x - 3$ yhtälöön $4x - y = 3$.

$$\begin{aligned} 4x - (x - 3) &= 3 \\ 4x - x + 3 &= 3 \\ 3x &= 0 \qquad \mid :3 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$y = x - 3,\ $ sij. $x = 0$

$y = 0 - 3 = -3$

Vastaus: a) $x = -2, y = -1$ b) $x = 0, y = -3$

24. Muodostetaan yhtälöpari.

a) $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$

Sijoitetaan $y = 3x + 1$ yhtälöön $y = -x + 1$.

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= -x + 1 \\ 4x &= 0 \qquad \mid :4 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$y = -x + 1,$ sij. $x = 0$
$y = 0 + 1 = 1$

b) $\begin{cases} y = 5x - 4 \\ y = x + 4 \end{cases}$

Sijoitetaan $y = 5x - 4$ yhtälöön $y = x + 4$.

$$\begin{aligned} 5x - 4 &= x + 4 \\ 4x &= 8 \qquad \Big| :4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$y = x + 4,$ sij. $x = 2$
$y = 2 + 4 = 6$

Vastaus: a) (0, 1) b) (2, 6)

25. Muodostetaan yhtälöpari.

a) $\begin{cases} -2s+5t=0 & \mid \cdot 5 \\ 5s-8t=9 & \mid \cdot 2 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -10s+25t=0 \\ 10s-16t=18 \end{cases} \\ \hline 9t=18 \\ t=2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} -2s+5t&=0, \text{ sij. } t=2 \\ -2s+5\cdot 2&=0 \\ -2s&=-10 \quad \mid :(-2) \\ s&=5 \end{aligned}$$

b) $\begin{cases} 2s+t=2 & \mid \cdot 2 \\ -4s+t=1 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 4s+2t=4 \\ -4s+t=1 \end{cases} \\ \hline 3t=5 \\ t=\dfrac{5}{3} \end{array}$$

$$4s + 2t = 4, \text{ sij. } t = \frac{5}{3}$$

$$4s + 2 \cdot \frac{5}{3} = 4$$

$$4s + \frac{10}{3} = 4 \qquad \Big| :(-2)$$

$$4s = {}^{3)}4 - \frac{10}{3}$$

$$4s = \frac{2}{3} \qquad \Big| :4$$

$$s = \frac{1}{6}$$

Vastaus: a) $t = 2,\ s = 5$ b) $t = \frac{5}{3},\ s = \frac{1}{6}$

26. a) $\begin{cases} 5x - 3y = 6 \\ -x + 2y = 3 \end{cases} \qquad \Big| \cdot 5$

$$+\begin{cases} 5x - 3y = 6 \\ -5x + 10y = 15 \end{cases}$$

$$7y = 21$$

$$y = 3$$

$$-x + 2y = 3, \text{ sij. } y = 3$$

$$-x + 2 \cdot 3 = 3$$

$$-x + 6 = 3$$

$$-x = -3 \qquad \Big| :(-1)$$

$$x = 3$$

b) $\begin{cases} 7x + 5y = 3 & \mid \cdot(-2) \\ 3x + 2y = 3 & \mid \cdot 5 \end{cases}$

$$
\begin{array}{r}
+\begin{cases} -14x - 10y = -6 \\ 15x + 10y = 15 \end{cases} \\
\hline
x = 9
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
3x + 2y &= 3, \text{ sij. } x = 9 \\
3 \cdot 9 + 2y &= 3 \\
27 + 2y &= 3 \\
2y &= -24 \quad \mid :2 \\
y &= -12
\end{aligned}
$$

Vastaus: a) $x = 3, y = 3$ b) $x = 9, y = -12$

27. a) $\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 2x - y = -3 \quad \mid \cdot 2 \end{cases}$

$$
\begin{array}{r}
+\begin{cases} x + 2y = -4 \\ 4x - 2y = -6 \end{cases} \\
\hline
5x = -10 \quad \mid :5 \\
x = -2
\end{array}
$$

Sijoitetaan x = -2 yhtälöön $x + 2y = -4$.

$$-2+2y=-4$$
$$2y=-2 \;|:2$$
$$y=-1$$

b) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=8 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2x-y=1 \\ x+y=8 \end{cases} \\ \hline 3x=9 \;|:3 \\ x=3 \end{array}$$

Sijoitetaan $x = 3$ yhtälöön $x+y=8$.

$$3+y=8$$
$$y=5$$

Vastaus: a) x = -2, y = -1 b) x = 3, y = 5

28. a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 4x = 12 - 4y \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y = 3 & \big| \cdot (-4) \\ 4x + 4y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -4x - 4y = -12 \\ 4x + 4y = 12 \end{cases} \\ + \qquad\qquad\qquad \\ \hline 0 = 0 \\ \text{Tosi} \end{array}$$

Yhtälöparilla ääretön määrä ratkaisuja. Nämä ratkaisut toteuttavat molemmat yhtälöt:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= -x + 3 \end{aligned} \qquad \text{ja} \qquad \begin{aligned} 4x + 4y &= 12 \\ 4y &= -4x + 12 \quad \big| :4 \\ y &= -x + 3 \end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisuja ovat siis kaikki pisteet, jotka toteuttavat suoran $y = -x + 3$ yhtälön.

b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y + 6 = 0 \quad |:2 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 3 \quad |\cdot(-1) \\ x + y = -3 \end{cases}$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} -x - y = -3 \\ x + y = -3 \end{cases} \\ + & \\ \hline & 0 = -6 \quad \text{Epätosi} \end{array}$$

Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

Vastaus: a) Kaikki suoran $y = -x + 3$ pisteet
b) Ei ratkaisua

29. Muodostetaan yhtälöpari.

a) $\begin{cases} 10y = 4x + 50 \\ y = \frac{2}{5}x + 3 \end{cases}$

Sijoitetaan $y = \frac{2}{5}x + 3$ yhtälöön $10y = 4x + 50$.

$$10\left(\frac{2}{5}x + 3\right) = 4x + 50$$
$$4x + 30 = 4x + 50$$
$$0 = 20 \qquad \text{Epätosi, ei ratkaisua}$$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -6x - 9y + 3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & |\cdot 3 \\ -6x - 9y = -3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 6x + 9y = 3 \\ -6x - 9y = -3 \end{cases} \\ + \\ \hline 0 = 0 \quad \text{Tosi} \end{array}$$

Yhtälöparilla ääretön määrä ratkaisuja. Nämä ratkaisut toteuttavat molemmat yhtälöt:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 3y &= -2x + 1 \,|: 3 \\ y &= -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \end{aligned} \qquad \text{ja} \qquad \begin{aligned} -6x - 9y &= -3 \\ -9y &= 6x - 3 \quad |:(-9) \\ y &= -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisuja ovat siis kaikki pisteet, jotka toteuttavat suoran $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ yhtälön.

Vastaus: a) Ei leikkauspistettä

b) Leikkauspisteinä kaikki suoran $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ pisteet.

30. $\begin{cases} 5(x+y)-2(x-y)=15 \\ 7(x+y)-3(x-y)=21 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x+5y-2x+2y=15 \\ 7x+7y-3x+3y=21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+7y=15 & \big| \cdot(-4) \\ 4x+10y=2 & \big| \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} -12x-28y=-60 \\ \quad 12x+30y=63 \end{cases} \\ \hline 2y=3 \\ y=\dfrac{3}{2} \end{array}$$

$$3x+7y=15, \text{ sij. } y=\frac{3}{2}$$

$$3x+7\cdot\frac{3}{2}=15$$

$$3x+\frac{21}{2}=15$$

$$3x={}^{2)}15-\frac{21}{2}$$

$$3x=\frac{9}{2} \qquad \big| :3$$

$$x=\frac{3}{2}$$

Vastaus: $x=\dfrac{3}{2},\ y=\dfrac{3}{2}$

31. Merkitään lukuja x = suurempi luku
y = pienempi luku

Saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} x + y = 46 \quad | \cdot (-2) \\ 2x + 3y = 103 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} -2x - 2y = -92 \\ 2x + 3y = 103 \end{cases} \\ + & \\ \hline & y = 11 \end{array}$$

Jos $y = 11$, niin

$$x + 11 = 46$$
$$x = 46 - 11 = 35$$

Vastaus: Luvut ovat 11 ja 35.

32. Merkitään x = autojen lkm.
y = polkupyörien lkm.

Saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} x + y = 53 \quad | \cdot (-2) \\ 4x + 2y = 136 \end{cases}$$

$$
+\begin{cases} -2x-2y=-106 \\ 4x+2y=136 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned} 2x &= 30 \quad \mid :2 \\ x &= 15 \end{aligned}
$$

Jos $x = 15$, niin

$$
\begin{aligned} 15+y &= 53 \\ y &= 53-15 = 38 \end{aligned}
$$

Vastaus: 15 kpl autoja, 38 kpl polkupyöriä

33. Merkitään x = aikuisten liput (kpl)
y = lasten liput (kpl)

Saadaan yhtälöt:

$$
\begin{cases} x+y=180 & \mid \cdot(-8) \\ 8x+5y=1269 \end{cases}
$$

$$
+\begin{cases} -8x-8y=-1440 \\ 8x+5y=1269 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned} -3y &= -171 \\ y &= 57 \end{aligned}
$$

Kun $y = 57$, niin

$$\begin{aligned} x + 57 &= 180 \\ x &= 180 - 57 = 123 \end{aligned}$$

Vastaus: 123 aikuista, 57 lasta

34. Merkitään x = mansikkatäytteiset (kpl)
y = appelsiinitäytteiset (kpl)

Saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} x + y = 40 & \big| \cdot (-5) \\ 5x + 6{,}5y = 224 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -5x - 5y = -200 \\ 5x + 6{,}5y = 224 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1{,}5y &= 24 \quad \big| : 1{,}5 \\ y &= 16 \end{aligned}$$

Kun $y = 16$, niin

$$\begin{aligned} x + 16 &= 40 \\ x &= 40 - 16 = 24 \end{aligned}$$

Vastaus: 24 kpl mansikkatäytteisiä, 16 kpl appelsiinitäytteisiä

35. Merkitään Bach eli x vuotta
Beethoven eli y vuotta
Mozart eli z vuotta

Muodostetaan tehtävässä annetuista tiedoista yhtälöt.

$$\begin{cases} x+y+z=156 \\ x=y+9 \\ z=y-21 \end{cases}$$

Koska kaikkien iät yhteensä oli 156 vuotta, niin

$$\begin{aligned} (y+9)+y+(y-21)&=156 \\ y+9+y+y-21&=156 \\ 3y&=168 \quad |:3 \\ y&=56 \end{aligned}$$

$x = y + 9 = 56+9 = 65$
$z = y - 21 = 56 - 21 = 35$

Vastaus: Bach 65 v, Beethoven 56 v, Mozart 35 v

36. Merkitään x = paidan hinta (€)
y = housujen hinta (€)

Saadaan yhtälöt

$$\begin{cases} 0{,}6x + 0{,}75y = 60{,}60 & \text{alennetut hinnat} \\ \qquad x + y = 88 & \text{norm. hinnat} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}6x + 0{,}75y = 60{,}60 \\ \qquad x + y = 88 \quad \left| \cdot (-0{,}6) \right. \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 0{,}6x + 0{,}75y = 60{,}60 \\ -0{,}6x - 0{,}6y = -52{,}80 \end{cases}$$

$$0{,}15y = 7{,}8$$

$$y = 52$$

Jos $y = 52$, niin

$$x + 52 = 88$$

$$x = 88 - 52 = 36$$

Vastaus: Paita 36 €, housut 52 €.

37. Merkitään x = laimea liuos (kg)
y = väkevä liuos (kg)

Saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} x+y=2{,}0 & \text{liuoksen määrä} \\ 0{,}050x+0{,}15y=0{,}08(x+y) & \text{suolan määrä} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=2{,}0 \mid \cdot 0{,}03 \\ -0{,}03x+0{,}07y=0 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 0{,}03x+0{,}03y=0{,}06 \\ -0{,}03x+0{,}07y=0 \end{cases}$$

$$0{,}1y=0{,}06$$

$$y=0{,}6$$

Jos $y=0{,}6$, niin

$$x+0{,}6=2{,}0$$

$$x=2{,}0-0{,}6=1{,}4$$

Vastaus: Laimeaa liousta 1,4 kg, väkevämpää liuosta 0,60 kg

38. Merkitään x = etanoli (kg)
y = vesi (kg)

Saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} x + y = 1{,}80 & \big| :(-0{,}88) \\ 0{,}88x + 0{,}94y = 1{,}65 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -0{,}88x - 0{,}88y = -1{,}584 \\ 0{,}88x + 0{,}94y = 1{,}65 \end{cases} \\ \hline 0{,}06y = 0{,}066 \quad \big| :0{,}06 \\ y = 1{,}1 \end{array}$$

Jos $y = 1{,}1$, niin

$$x + 1{,}1 = 1{,}80$$
$$x = 1{,}80 - 1{,}1 = 0{,}70$$

Montako prosenttia alkuperäisen liuoksen massasta (1,80 kg) oli etanolia?

$$\frac{\text{etanoli}}{\text{alkuperäinen liuos}} = \frac{0{,}70}{1{,}80} = 0{,}388...$$

Siis prosentteina $0{,}3888...\cdot 100\,\% = 38{,}88...\,\% \approx 38{,}9\,\%$.

Vastaus: 38,9 %

39. a) $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ x + y = -2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x + (3x + 2) &= -2 \\ 4x &= -4 \quad \Big| :4 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$y = 3x + 2 = 3 \cdot (-1) + 2 = -3 + 2 = -1$$

b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \;\Big|\cdot(-2) \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -4x - 2y = -8 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \\ + \\ \hline -5x = -7 \;\Big|:(-5) \\ x = \dfrac{7}{5} \end{array}$$

Sijoitetaan $x = \dfrac{7}{5}$ yhtälöön $2x + y = 4$.

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{7}{5} + y &= 4 \\ y &= 4 - \frac{14}{5} = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Vastaus: a) $x = -1, y = -1$ b) $x = \frac{7}{5},\ y = \frac{6}{5}$

40. Muodostetaan yhtälöpari

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 6x = 3y + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \,|\cdot 3 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} 6x + 3y = 6 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases} \\ + & \\ \hline & 12x = 12 \,|:12 \\ & x = 1 \end{array}$$

Sijoitetaan $x = 1$ yhtälöön $2x + y = 2$.

$$2 \cdot 1 + y = 2$$
$$y = 2 - 2 = 0$$

Vastaus: $x = 1, y = 0$

41. a) $\begin{cases} 5x+7y=-1 & \Big| \cdot 2 \\ 6x+2y=2 & \Big| \cdot(-7) \end{cases}$

$$
\begin{array}{r}
+\begin{cases} 10x+14y=-2 \\ -42x-14y=-14 \end{cases} \\
\hline
-32x=-16
\end{array}
$$

$$x=\frac{-16}{-32}=\frac{1}{2}$$

$6x+2y=2$, sij. $x=\frac{1}{2}$

$$6\cdot\frac{1}{2}+2y=2$$

$$3+2y=2$$

$$2y=-1 \quad \Big|:2$$

$$y=-\frac{1}{2}$$

b) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 6y=4x-6 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \;\Big|\cdot 2 \\ -4x+6y=-6 \end{cases}$$

$$
\begin{array}{r}
+\begin{cases} 4x-6y=2 \\ -4x+6y=-6 \end{cases} \\
\hline
0=-4
\end{array}
\quad \text{Epätosi}
$$

Siis ei leikkauspistettä.

Vastaus: a) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ b) Ei leikkauspistettä

42. Merkitään x = kahvin hinta (€)
y = munkin hinta (€)

Saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8{,}40 & \big| \cdot 3 \\ 3x + 5y = 13{,}40 & \big| \cdot (-2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 6x + 9y = 25{,}2 \\ -6x - 10y = -26{,}8 \end{cases} \\ \hline -y = -1{,}6 \\ y = 1{,}6 \end{array}$$

Jos $y = 1{,}6$, niin

$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot 1{,}6 &= 8{,}40 \\ 2x + 4{,}8 &= 8{,}40 \\ 2x &= 3{,}6 \quad \big| :2 \\ x &= 1{,}8 \end{aligned}$$

Vastaus: kahvi 1,80 €, munkki 1,60 €

43. Merkitään x = piirakka (kpl)
y = kakku (kpl)

$$2{,}5\ \text{dl} = 0{,}25\ \text{l}$$
$$5\ \text{dl} = 0{,}5\ \text{l}$$

Saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} 0{,}25x + 0{,}5y = 62 & \text{jauhot yht.} \\ 2x + 2y = 352 & \text{munat yht.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0{,}25x + 0{,}5y = 62 & \big| \cdot(-4) \\ 2x + 2y = 352 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -x - 2y = -248 \\ 2x + 2y = 352 \end{cases} \\ \hline x = 104 \end{array}$$

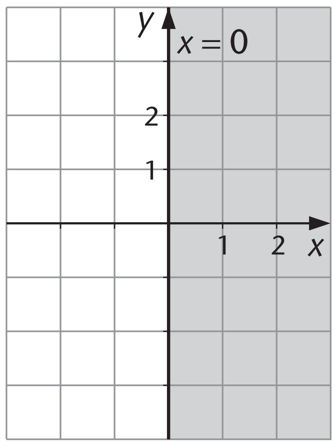
Jos $x = 104$, niin

$$\begin{aligned} 2 \cdot 104 + 2y &= 352 \\ 208 + 2y &= 352 \\ 2y &= 144 \quad \big| :2 \\ y &= 72 \end{aligned}$$

Vastaus: 104 piirakkaa, 72 kakkua

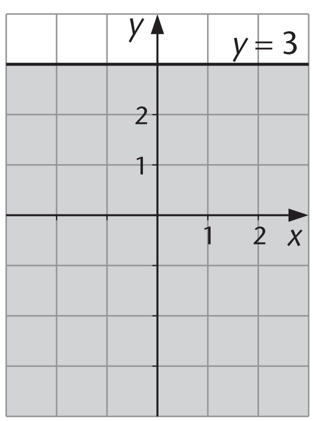
1.3 Kahden muuttujan lineaarinen epäyhtälö

44. a) Suora $x = 0$ ei kuulu mukaan.



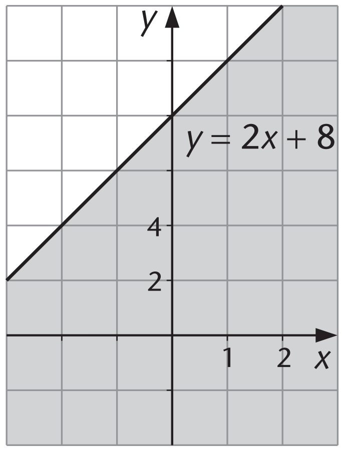
$x > 0$

b) Suora $y = 3$ ei kuulu mukaan.



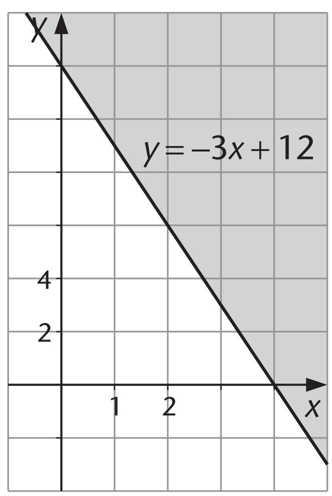
$y < 3$

45. a) Suora $y = 2x + 8$ kuuluu mukaan.



$y \leq 2x + 8$

b) Suora $y = -3x + 12$ kuuluu mukaan.

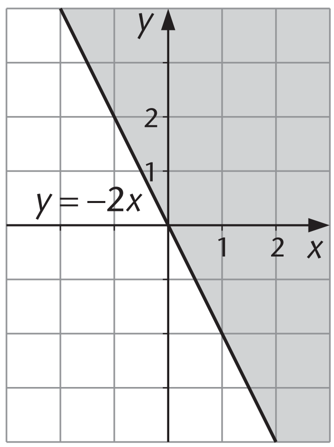


$y \geq -3x + 12$

46. a)

$$4x + 2y > 0$$
$$2y > -4x \quad |:2$$
$$y > -2x$$

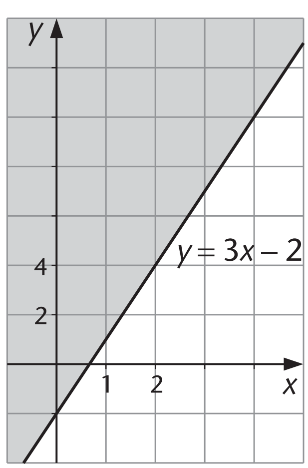
Piirretään suora $y = -2x$. Suora ei kuulu mukaan.



b)

$$3x - y < 2$$
$$-y < -3x + 2 \quad |:(-1)$$
$$y > 3x - 2$$

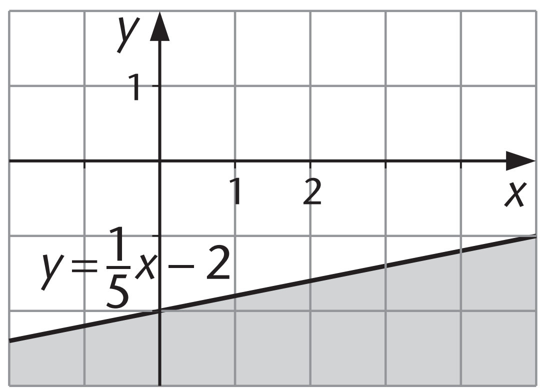
Piirretään suora $y = 3x - 2$. Suora ei kuulu mukaan.



47. a)

$$x - 5y > 10$$
$$-5y > -x + 10 \quad \Big| :(-5)$$
$$y < \frac{1}{5}x - 2$$

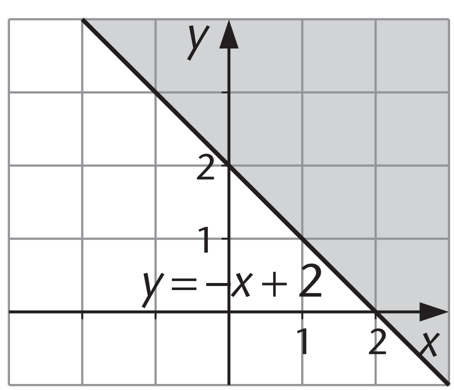
Piirretään suora $y = \frac{1}{5}x - 2$. Suora ei kuulu mukaan.



b)

$$x \geq 2 - y$$
$$y \geq -x + 2$$

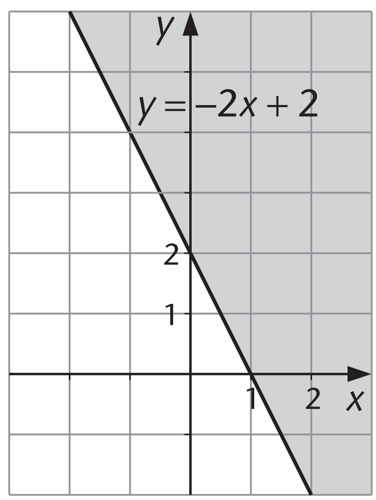
Piirretään suora $y = -x + 2$. Suora kuuluu mukaan.



48. a)

$$
\begin{aligned}
6x + y &\geq 6 - 2y \\
3y &\geq -6x + 6 \qquad \Big| :3 \\
y &\geq -2x + 2
\end{aligned}
$$

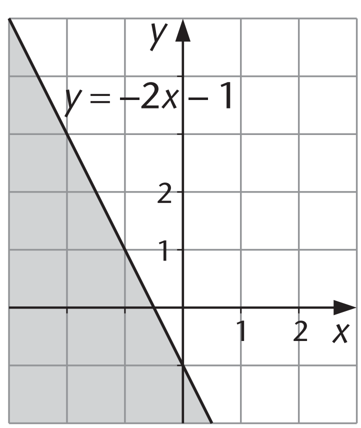
Piirretään suora $y - 2x + 2$. Suora kuuluu mukaan.



b)

$$
\begin{aligned}
x - 4y &\geq 4 + 9x \\
-4y &\geq 8x + 4 \qquad \Big| :(-4) \\
y &\leq -2x - 1
\end{aligned}
$$

Piirretään suora $y = -2x - 1$. Suora kuuluu mukaan.



49. a) $y \leq 5$

b) $x \leq 3$

50. a)

$$y - 2x = 2$$
$$y = 2x + 2$$

Tasoalue:

$$y < 2x + 2$$
$$y - 2x < 2$$

b)

$$x + y = 4$$
$$y = -x + 4$$

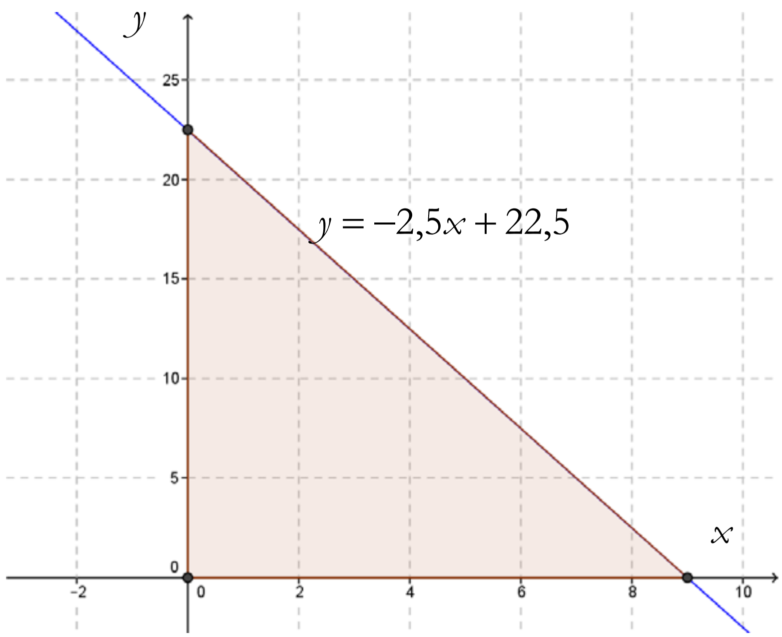
Tasoalue:

$$y < -x + 4$$
$$y + x < 4$$

51. Merkitään 5000 € apurajoja x kpl ja 2000 € apurahoja y kpl.
Koska apurahoihin käytetään korkeintaan 45000 €, niin

$$\begin{aligned} 5000x + 2000y &\le 45000 \quad |:2000 \\ 2{,}5x + y &\le 22{,}5 \\ y &\le -2{,}5x + 22{,}5 \end{aligned}$$

Lisäksi kappalemäärät $x \ge 0$ ja $y \ge 0$.

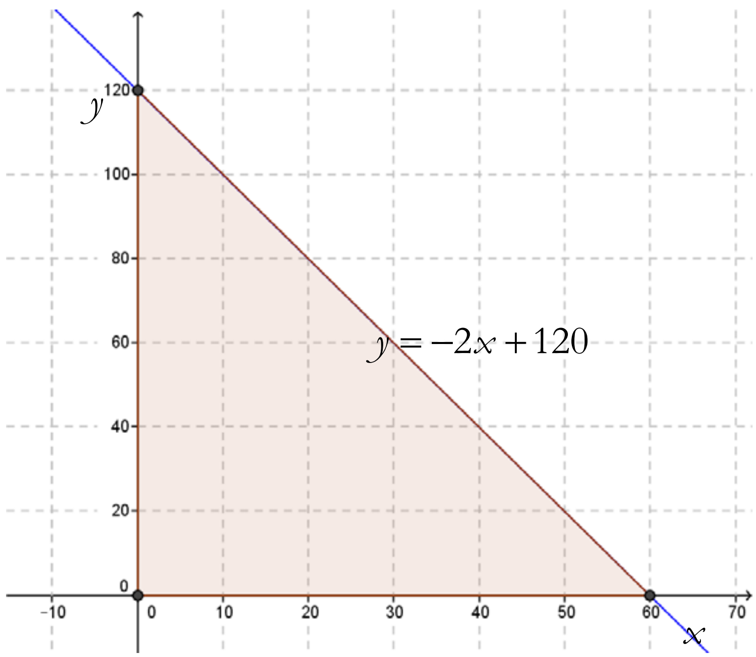


Suorat $x = 0$, $y = 0$ ja $y = -2{,}5x + 22{,}5$ kuuluvat mukaan.

52. Merkitään uunilohiannoksia x kpl ja lohipasta-annoksia y kpl
Koska lohta on tilattu 12 kg, niin

$$0{,}2x + 0{,}1y \le 12$$
$$0{,}1y \le -0{,}2x + 12 \quad |:0{,}1$$
$$y \le -2x + 120$$

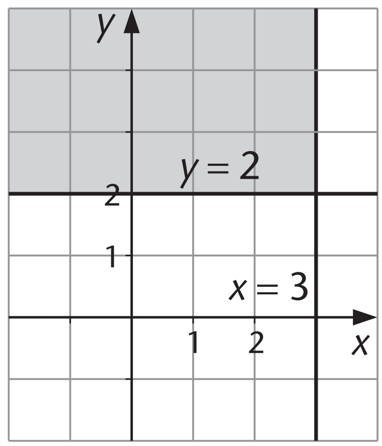
Lisäksi kappalemäärät $x \ge 0$ ja $y \ge 0$.



Suorat $x = 0$, $y = 0$ ja $y = -2x + 120$ kuuluvat mukaan.

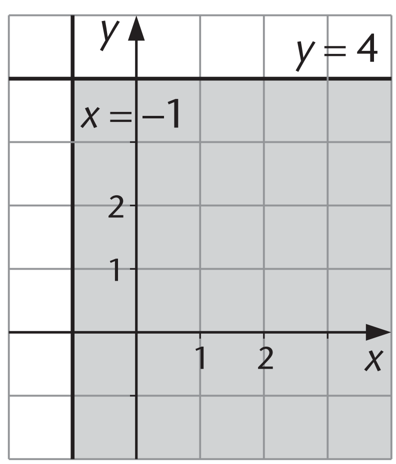
53. a) $\begin{cases} y \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$

Suorat kuuluvat mukaan.



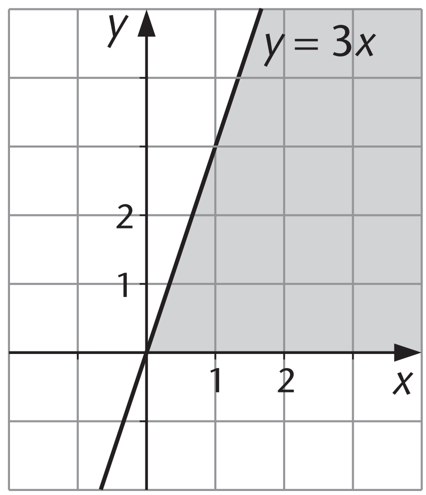
b) $\begin{cases} y < 4 \\ x > -1 \end{cases}$

Suorat eivät kuulu mukaan.



c) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 3x \end{cases}$

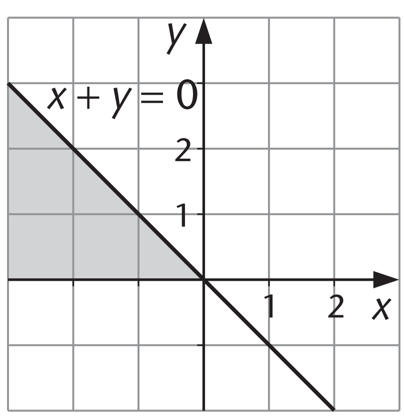
Suorat kuuluvat mukaan.



54. a) $\begin{cases} x + y \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y \leq -x \\ y \leq 0 \end{cases}$

Suorat kuuluvat mukaan.

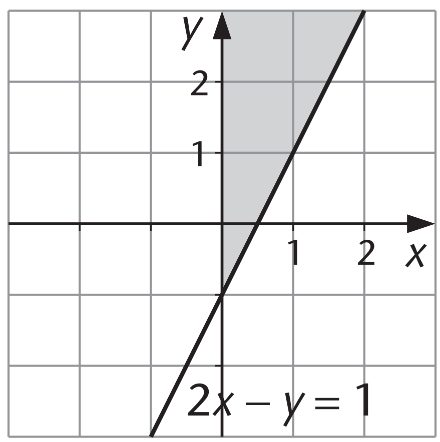


b)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 2x - 1 \end{cases}$$

Suorat kuuluvat mukaan.

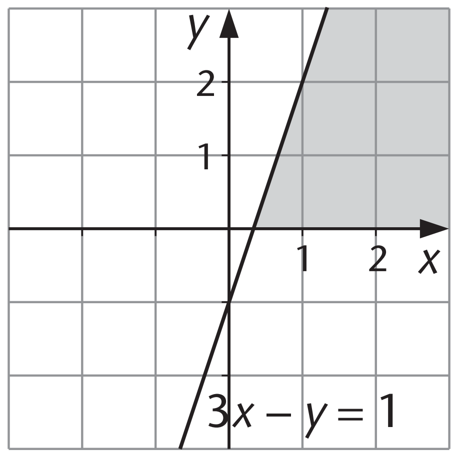


c)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x - y \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3x - 1 \end{cases}$$

Suorat kuuluvat mukaan.



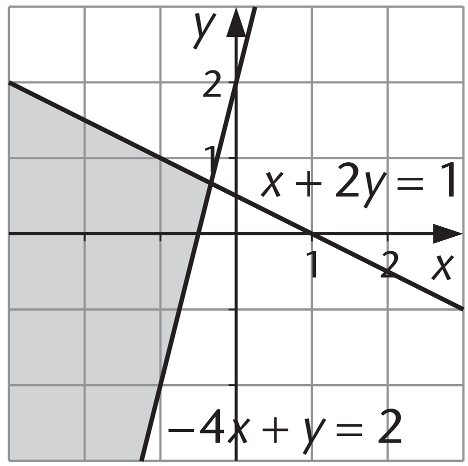
55. a)

$$\begin{cases} -4x + y \geq 2 \\ x + 2y \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 4x + 2 \\ 2y \leq -x + 1 \qquad \big| :2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 4x - 2 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Suorat kuuluvat mukaan.



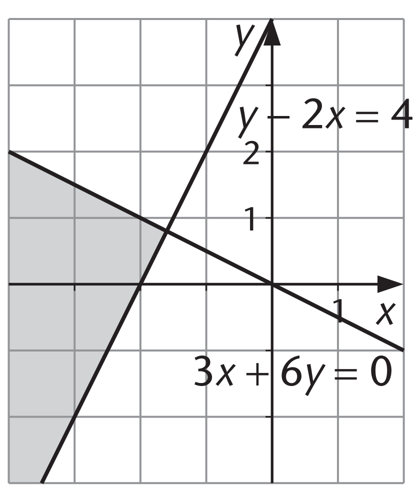
b)

$$\begin{cases} 3x + 6y < 0 \\ y - 2x > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6y < -3x & \big|:6 \\ y > 2x + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < -\dfrac{1}{2}x \\ y > 2x + 4 \end{cases}$$

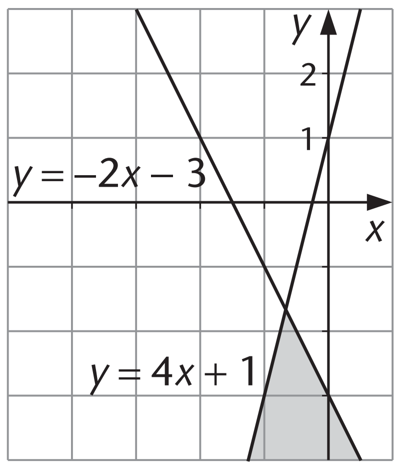
Suorat eivät kuulu mukaan.



c)

$$\begin{cases} y \le 4x+1 \\ y \le -2x-3 \end{cases}$$

Suorat kuuluvat mukaan.



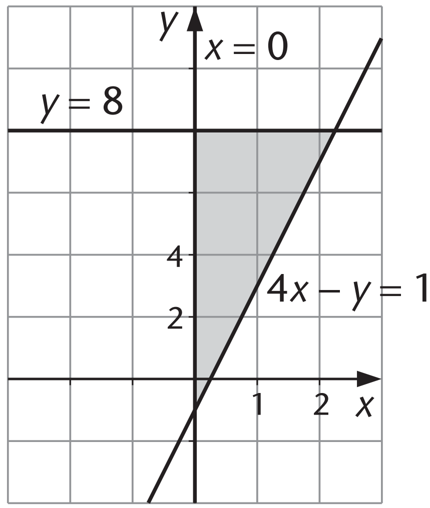
56. a)

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \le 8 \\ 4x - y \le 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \le 8 \\ -y \le -4x+1 \;|:(-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \le 8 \\ y \ge 4x-1 \end{cases}$$

Suorat kuuluvat mukaan.

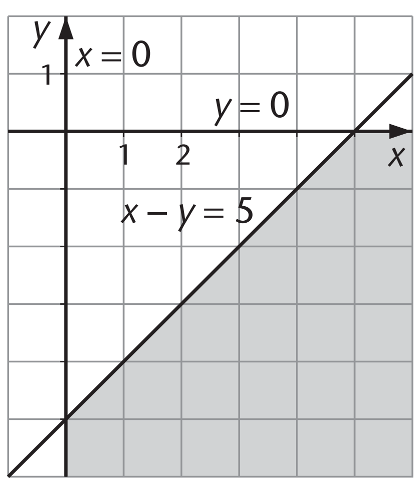


b)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ x - y \geq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ y \leq x - 5 \end{cases}$$

Suorat kuuluvat mukaan.

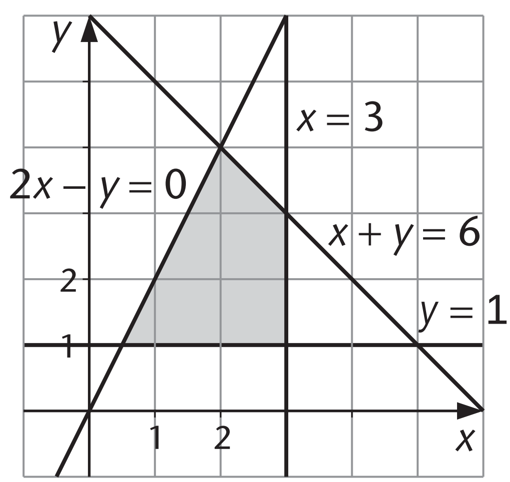


c)

$$\begin{cases} x < 3 \\ y > 1 \\ x + y < 6 \\ 2x - y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3 \\ y > 1 \\ y < -x + 6 \\ y < 2x \end{cases}$$

Suorat eivät kuulu mukaan.



57. a)

$$\begin{cases} y < 5 \\ x < 6 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} y < 1{,}5x \\ x < 3 \\ y > 0 \end{cases}$$

58. a)

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \leq -\dfrac{1}{2}x + 5 \\ y \leq 7 - x \end{cases}$$

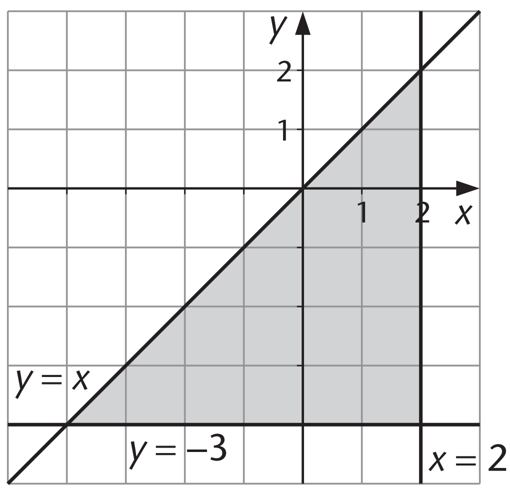
b)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -x + 3 \\ y \geq x - 2 \end{cases}$$

59. $x = 2$, $y = x$, $y + 3 = 0$ eli $y = -3$

Suorat rajoittavat tasoalueen (ei reunoja).

$$\begin{cases} y < x \\ y > -3 \\ x < 2 \end{cases}$$



60. Merkitään x = pyöreät ruukut (kpl)
y = neliöruukut (kpl)

	pyöreä x	**neliö** y	**yhteensä** max
kivet (kg)	1,0	1,8	40
multa (l)	6	8	200

Saadaan epäyhtälöt (rajoittavat ehdot):

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1{,}0 \cdot x + 1{,}8 \cdot y \leq 40 & \text{kivien määrä} \\ 6x + 8y \leq 200 & \text{mullan määrä} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1{,}8y \leq -1{,}0x + 40 & \Big| \cdot 10 \\ 8y \leq -6x + 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 18y \leq -10x + 400 & \Big| :18 \\ y \leq -\dfrac{3}{4}x + 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\frac{10}{18}x + 22\frac{2}{9} & \rightarrow y-\text{akselinleikkausk.} \, y = 22\frac{2}{9} \\ y \leq -\frac{3}{4}x + 25 & \rightarrow y-\text{akselinleikkausk.} \, y = 25 \end{cases}$$

Lasketaan piirtämistä varten nollakohdat:

Suora $y = -\frac{10}{18} + 22\frac{2}{9}$

Nollakohta:

$$-\frac{10}{18}x + 22\frac{2}{9} = 0$$

$$-\frac{10}{18}x = -22\frac{2}{9} \qquad \Big| :\left(-\frac{10}{18}\right)$$

$$x = 40$$

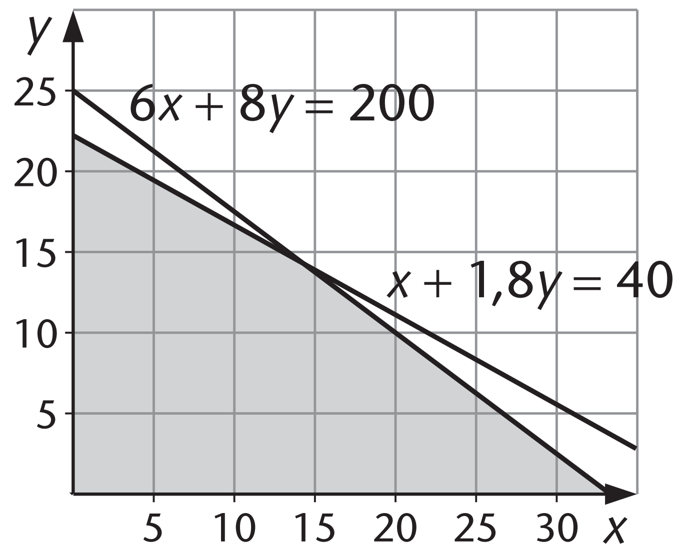
Suora $y = -\frac{3}{4}x + 25$

Nollakohta:

$$-\frac{3}{4}x + 25 = 0$$

$$-\frac{3}{4}x = -25 \qquad \Big| :\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$x = 33\frac{1}{3}$$



61. Merkitään x = isompi laatikko (kpl)
y = pienempi laatikko (kpl)

	iso x	**pieni** y	**yhteensä** max.
messinkivetimet	10	8	200
jalat (puuta)	8	4	150

Saadaan epäyhtälöt (rajoittavat ehdot):

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10x + 8y \leq 200 \\ 8x + 4y \leq 150 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8y \leq -10x + 200 \;\big|:8 \\ 4y \leq -8x + 150 \;\big|:4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\frac{5}{4}x + 25 \qquad \rightarrow y - \text{akselin leikkausk.}\, y = 25 \\ y \leq -2x + 37{,}5 \qquad \rightarrow y - \text{akselin leikkausk.}\, y = 37{,}5 \end{cases}$$

Lasketaan piirtämistä varten nollakohdat:

Suora $y = -\frac{5}{4}x + 25$

Nollakohta:

$$-\frac{5}{4}x + 25 = 0$$

$$-\frac{5}{4}x = -25 \qquad \Big|:\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$x = 20$$

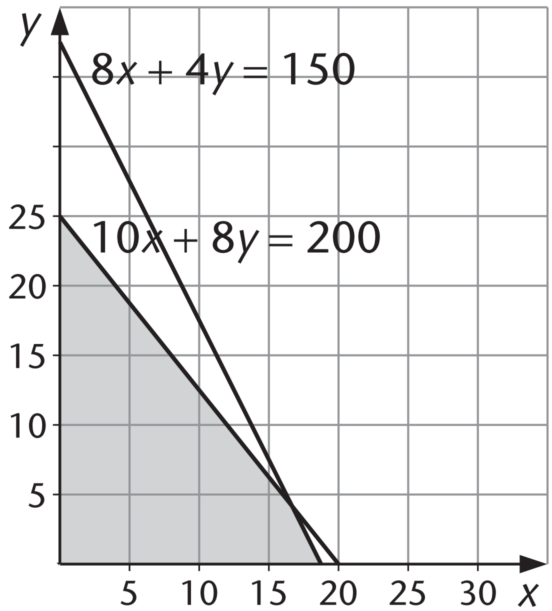
Suora $y = -2x + 37{,}5$

Nollakohta:

$$-2x + 37{,}5 = 0$$

$$-2x = -37{,}5 \qquad \big|:(-2)$$

$$x = 18{,}75$$



62. Merkitään x = kaulakorut (kpl)
y = rannekorut (kpl)

Helmet: punaiset (kpl) siniset (kpl)

$320 - 80 = 240$ $\frac{1}{4} \cdot 320 = 80$

	kaulakoru x	**rannekoru** y	**yhteensä** max.
siniset	5	4	80
punaiset	30	10	240

Saadaan epäyhtälöt (rajoittavat ehdot):

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 4y \leq 80 \\ 30x + 10y \leq 240 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad x \geq 0 \\ \quad y \geq 0 \\ \;4y \leq -5x + 80 & \Big| :4 \\ 10y \leq -30x + 240 & \Big| :10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\frac{5}{4}x + 20 & \rightarrow y - \text{akselin leikkausk. } y = 20 \\ y \leq -3x + 24 & \rightarrow y - \text{akselin leikkausk. } y = 24 \end{cases}$$

Lasketaan piirtämistä varten nollakohdat:

Suora $y = -\frac{5}{4}x + 20$

Nollakohta:

$$-\frac{5}{4}x + 20 = 0$$

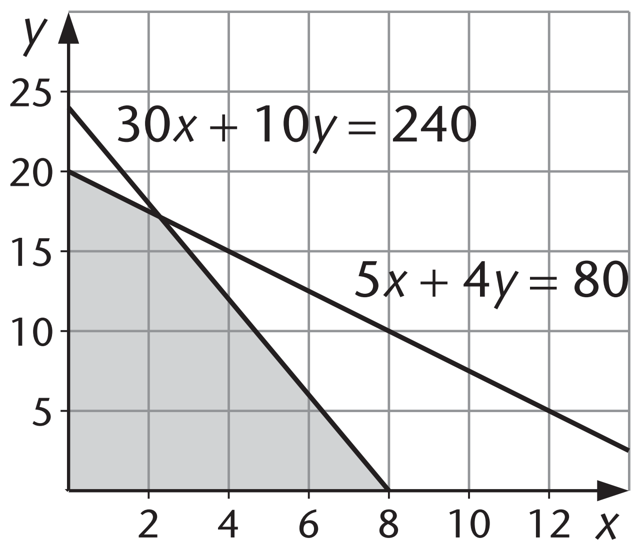
$$-\frac{5}{4}x = -20 \qquad \Big| :\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$x = 16$$

Suora $y=-\frac{5}{4}x+20$

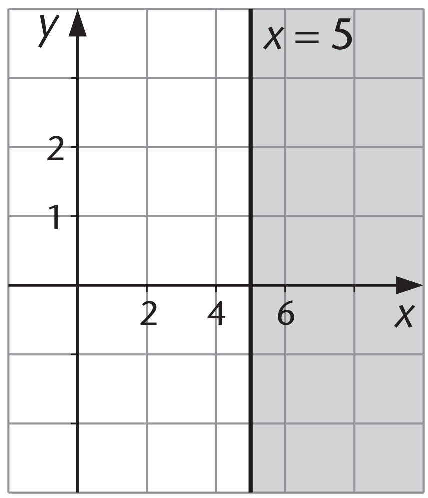
Nollakohta:

$$-3x+24=0$$
$$-3x=-24 \quad \big|:(-3)$$
$$x=8$$



63. a) $x > 5$

Suora $x = 5$ ei kuulu mukaan.



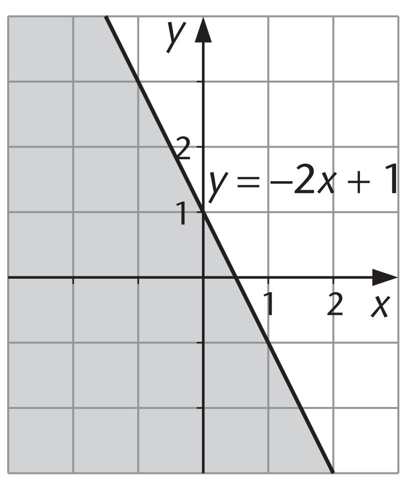
b)

$$4x + 2y < 2$$

$$2y < -4x + 2 \quad \big| :2$$

$$y < -2x + 1$$

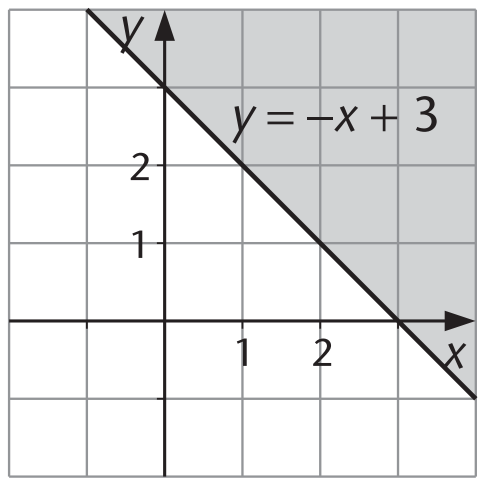
Suora $y = -2x + 1$ ei kuulu mukaan.



c)

$$\begin{aligned} 5x + y &\geq 7x + 3y - 6 \\ y - 3y &\geq -5x + 7x - 6 \\ -2y &\geq 2x - 6 \qquad \Big| :(-2) \\ y &\geq -x + 3 \end{aligned}$$

Suora $y = -x + 3$ kuuluu mukaan.

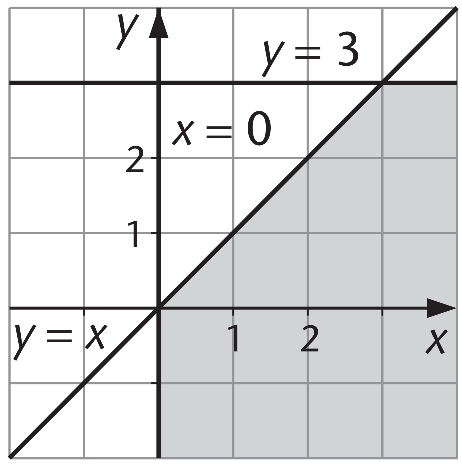


64. a)

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 3 \\ x > y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 3 \\ y < x \end{cases}$$

Suorat eivät kuulu mukaan.

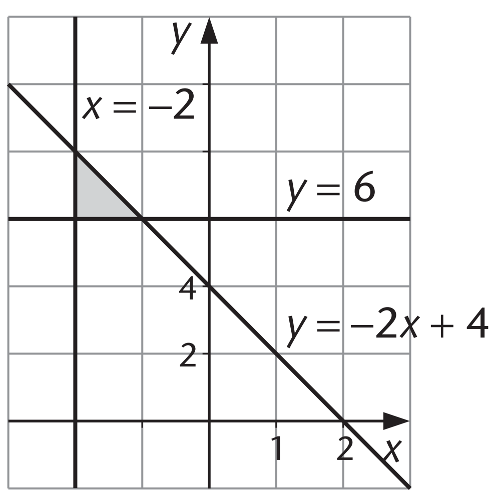


b)

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq 6 \\ 2x + y - 3 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq 6 \\ y \leq -2x + 4 \end{cases}$$

Suorat kuuluvat mukaan.



65. Suorat eivät kuulu mukaan.

a) $2x + y = 5$ alapuoli

$$2x + y < 5$$
$$y < -2x + 5$$

b) Suorat:

$x = 0$ oikea puoli

$x > 0$

$3x - 2y = 4$ yläpuoli

$$-2y = -3x + 4 \quad \big| :(-2)$$
$$y = \frac{3}{2}x - 2$$

$$y > \frac{3}{2}x - 2$$

$x + 2y = 14$ alapuoli

$$2y = -x + 14 \quad \big| :2$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 7$$

$$y < -\frac{1}{2}x + 7$$

Tasoalue on siis:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > \frac{3}{2}x - 2 \\ y < -\frac{1}{2}x + 7 \end{cases}$$

66. Merkitään x = isompien pakkausten lkm. (25 tablettia/pakkaus)
y = pienempien pakkausten lkm. (10 tablettia/pakkaus)

Koska tabletteja valmistetaan päivässä enintään 6000 kpl, niin

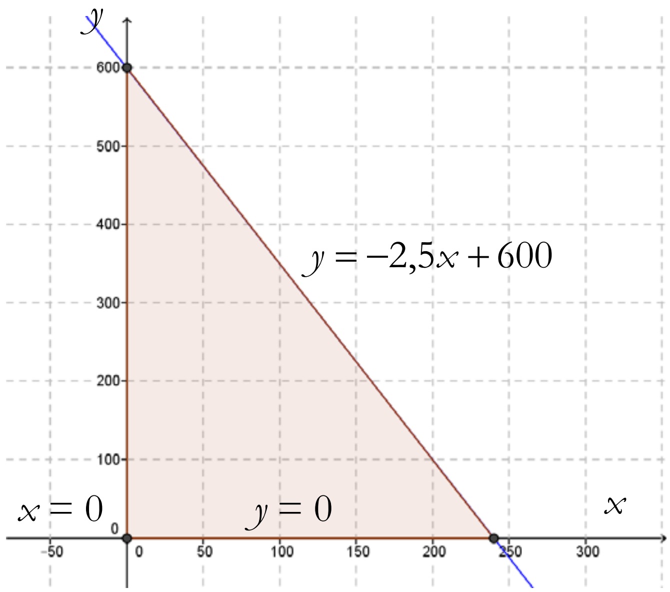
$$\begin{aligned} 25x + 10y &\le 6000 \\ 10y &\le -25x + 6000 \quad |:10 \\ y &\le -2{,}5x + 600 \end{aligned}$$

Lisäksi kappalemäärät $x \ge 0$ ja $y \ge 0$.

Ratkaisuna on tasoalue:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ y \le -2{,}5x + 600 \qquad \rightarrow y - \textit{akselin leikkauskohta} \;\; y = 600 \end{cases}$$

Piiretään suorat $y = -2{,}5x + 600$, $x = 0$ ja $y = 0$.
Suorat kuuluvat mukaan tasoalueeseen.



67. Merkitään x = tasavoimakentälliset (kpl)
y = alivoimakentälliset (kpl)

	tasavoima x	**alivoima** y	**yhteensä** max.
hyökkääjät	3	2	80
puolustajat	2	2	60

Saadaan epäyhtälöt (rajoittavat ehdot):

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 80 \\ 2x + 2y \leq 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2y \leq -3x + 80 & \Big| :2 \\ 2y \leq -2x + 60 & \Big| :2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\dfrac{3}{2}x + 40 & \rightarrow y - \text{akselin leikkausk. } y = 40 \\ y \leq -x + 30 & \rightarrow y - \text{akselin leikkausk. } y = 30 \end{cases}$$

Lasketaan piirtämistä varten nollakohdat:

Suora $y = -\dfrac{3}{2}x + 40$

Nollakohta:

$$-\frac{3}{2}x + 40 = 0$$

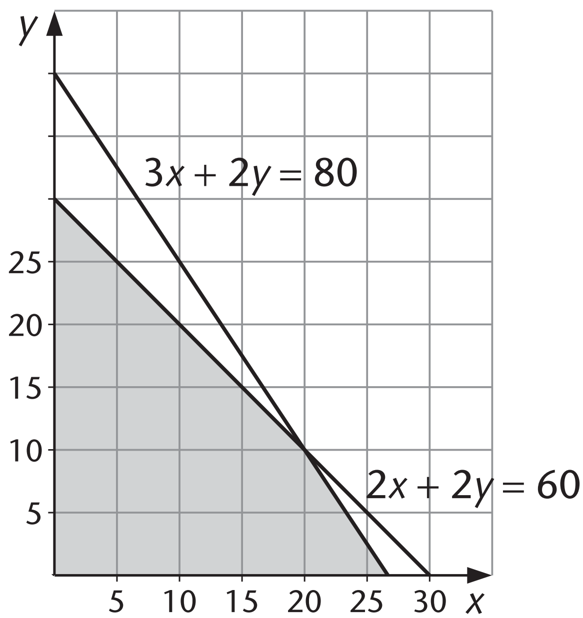
$$-\frac{3}{2}x = -40 \qquad \Big| :\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$x = 26\frac{2}{3}$$

Suora $y = -\frac{3}{2}x + 30$

Nollakohta:

$$-x + 30 = 0$$
$$-x = -30 \quad \Big| :(-1)$$
$$x = 30$$



1.4 Lausekkeen arvo tasoalueessa

68. Optimoitava lauseke saa suurimman ja pienimmän arvonsa tarkasteltavan monikulmion kärkipisteissä.

a)

Kärkipiste	**Lausekkeen** $3x+5y$ **arvo**
(0, 9)	$3\cdot 0+5\cdot 9=45$
(0, -1)	$3\cdot 0+5\cdot(-1)=-5$
(2, 3)	$3\cdot 2+5\cdot 3=21$

b)

Kärkipiste	**Lausekkeen** $3x+5y$ **arvo**
(0, 6)	$3\cdot 0+5\cdot 6=30$
(2, 4)	$3\cdot 2+5\cdot 4=26$
(2, 0)	$3\cdot 2+5\cdot 0=6$
(0, -2)	$3\cdot 0+5\cdot(-2)=-10$

Vastaus: a) Pienin arvo -5, suurin arvo 45
b) Pienin arvo -10, suurin arvo 30

69. Optimoitava lauseke saa suurimman ja pienimmän arvonsa tarkasteltavan monikulmion kärkpisteissä.

a)

Kärkipist e	**Lausekkeen** $6x-8y$ **arvo**
(0, 2)	$6\cdot 0-8\cdot 2=-16$
(1, 4)	$6\cdot 1-8\cdot 4=-26$
(2, 3)	$6\cdot 2-8\cdot 3=-12$
(0, 1)	$6\cdot 0-8\cdot 1=-8$

b)

Kärkipist e	**Lausekkeen** $6x-8y$ **arvo**
(0, 10)	$6\cdot 0-8\cdot 10=-80$
(4, 6)	$6\cdot 4-8\cdot 6=-24$
(2, 0)	$6\cdot 2-8\cdot=12$
(0, 0)	$6\cdot 0-8\cdot 0=0$

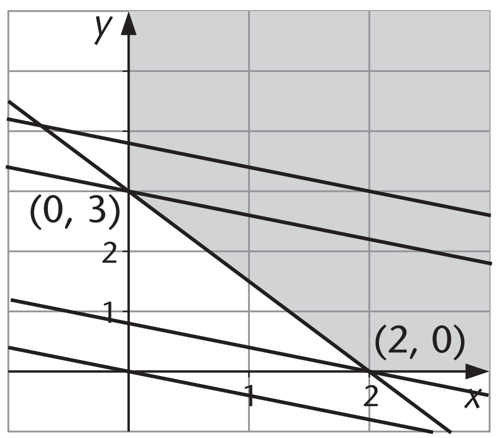
Vastaus: a) Pienin arvo -26, suurin arvo -8
b) Pienin arvo -80, suurin arvo 12

70. Koska tasoalue on rajoittamaton, tutkitaan suorien $2x+5y=c$ joukkoa. Kaikki tällaiset suorat ovat yhdensuuntaisia suoran $2x+5y=0$ kanssa.

$$
\begin{aligned}
2x+5y&=0\\
5y&=-2x\\
y&=-\frac{2}{5}x
\end{aligned}
$$

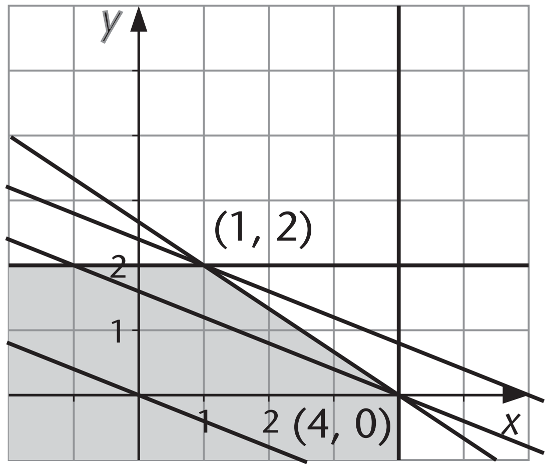
Piirretään muutamia tämän suoran kanssa yhdensuuntaisia suoria, jotka leikkaavat tasoaluetta.

a)



Pienin vakiotermin c arvo on suoralla, joka sivuaa tasoaluetta pisteessä (2, 0). Lauseke saa tällöin arvon $2x+5y=2\cdot 2+5\cdot 0=4$. Vakiotermi voi suurentua rajatta, joten lausekkeella ei ole suurinta arvoa.

b)



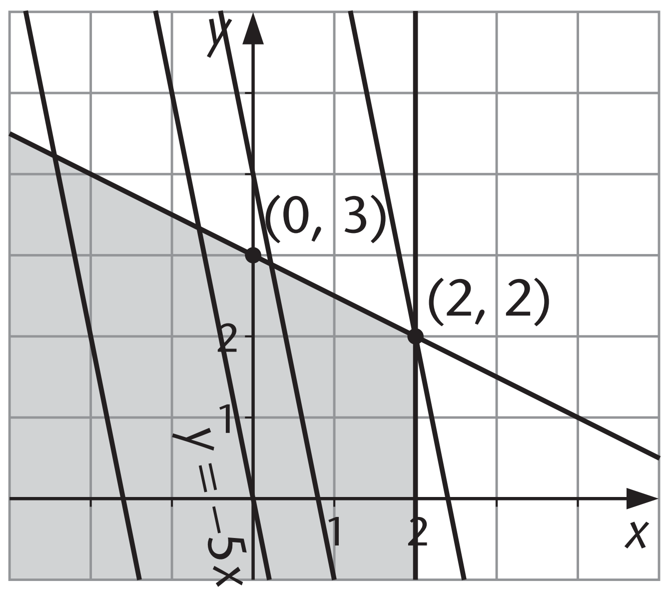
Suurin vakiotermin arvo on suoralla, joka sivuaa tasoaluetta pisteessä (1, 2). Lauseke saa tällöin arvon $2x+5y=2\cdot1+5\cdot2=12$. Vakiotermi voi pienentyä rajatta, joten pienintä arvoa ei ole.

Vastaus: a) Pienin arvo 4, suurinta arvoa ei ole.
b) Pienintä arvoa ei ole, suurin arvo 12.

71. Tutkitaan suorien $5x + y = c$ joukkoa. Kaikki tällaiset suorat ovat yhdensuuntaisia suoran $5x + y = 0$ kanssa.

$$5x + y = 0$$
$$y = -5x$$

Piirretään koordinaatistoon tämän suoran kanssa yhdensuuntaisia suoria, jotka leikkaavat tasoaluetta.



Suurin vakiotermi c on suoralla, joka kulkee pisteen (2, 2) kautta. Lauseke saa tässä pisteessä arvon $5x + y = 5 \cdot 2 + 2 = 10 + 2 = 12$

Vakiotermi voi pienentyä rajatta, joten lausekkeella ei ole pienintä arvoa.

Vastaus: Suurin arvo 12, pienintä arvoa ei ole.

72. Piirretään koordinaatistoon suorat:
$y = 2x$, $y = x + 3$ ja y – akseli eli suora $x = 0$.

Hahmotellaan tasoalue, joka on kolmion muotoinen. Lasketaan kärkipisteiden koordinaatit.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x + 3 \end{cases}$$

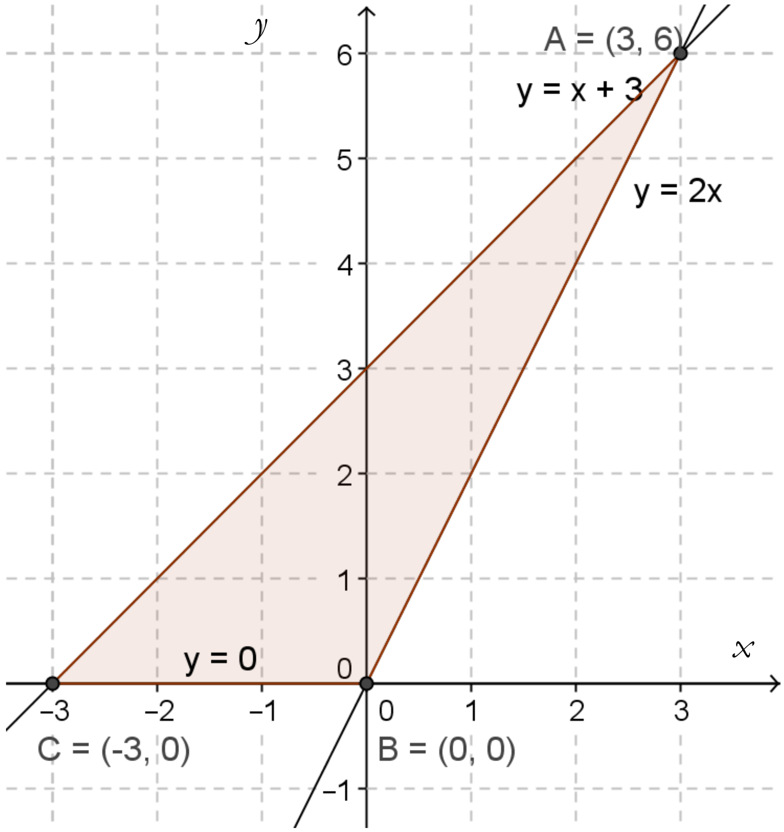
$$2x = x + 3$$
$$x = 3$$

Leikkauspisteen y – koordinaatti saadaan sijoittamalla $x = 3$ yhtälöön $y = 2x = 2 \cdot 3 = 6$. Leikkauspiste on siis $A = (3, 6)$.
Toinen leikkauspiste saadaan suoran $y = x + 3$ x- akselin leikkauskohdasta

$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$

Leikkauspiste on siis $B =(-3, 0)$

Kolmas leikkauspiste on suoran $y = 2x$ y – akselin leikkauskohta eli piste $C = (0, 0)$.



Koska tasoalue on rajoitettu, riittää laskea lausekkeen $2y-4x$ arvot kolmion muotoisen tasoalueen kärkipisteissä.

Kärkipiste	**Lausekkeen $2y-4x$ arvo**
(0, 0)	$2\cdot 0-4\cdot 0=0$
(-3, 0)	$2\cdot 0-4\cdot(-3)=12$
(3, 6)	$2\cdot 6-4\cdot 3=0$

Vastaus: Suurin arvo 12, pienin arvo 0.

73. Piirretään suorat: $y+2x=10$

$$y=-2x+10$$

x – akseli: suora $y = 0$
y – akseli: suora $x = 0$

Suorat rajoittavat kolmion muotoisen tasoalueen.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -2x+10 \end{cases}$$

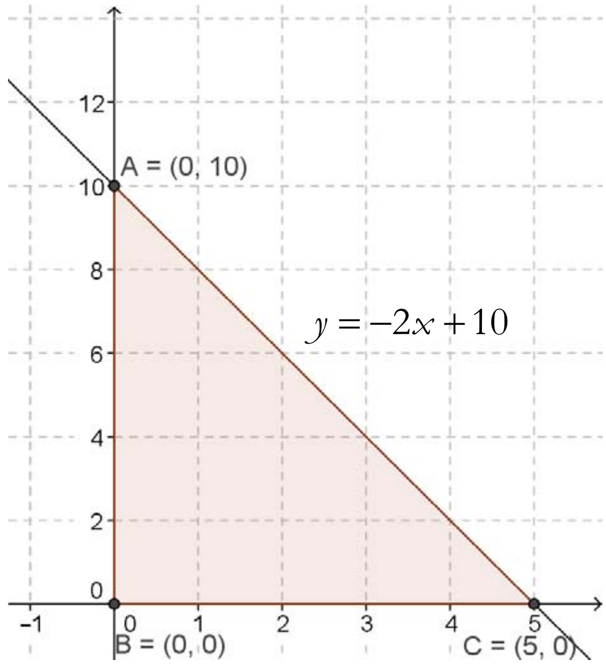
Tasoalueen kärkipisteet ovat:

A = (0, 10), koska se on suoran y = -2x +10 y – akselin leikkauskohta.

B = (0, 0), koska se on x- ja y – akselin leikkauskohta.

C = (5, 0), koska suoran y = -2x +10 nollakohta on

$$\begin{aligned} -2x+10&=0 \\ -2x&=-10 \quad |:(-2) \\ x&=5 \end{aligned}$$



Koska tasoalue on rajoitettu, riittää laskea lausekkeen $-2x+3y$ arvot kolmion muotoisen tasoalueen kärkipisteissä.

Kärkipiste	**Lausekkeen $-2x+3y$ arvo**
(0, 0)	$-2\cdot 0+3\cdot 0=0$
(0, 10)	$-2\cdot 0+3\cdot 10=30$
(5, 0)	$-2\cdot 5+3\cdot 0=-10$

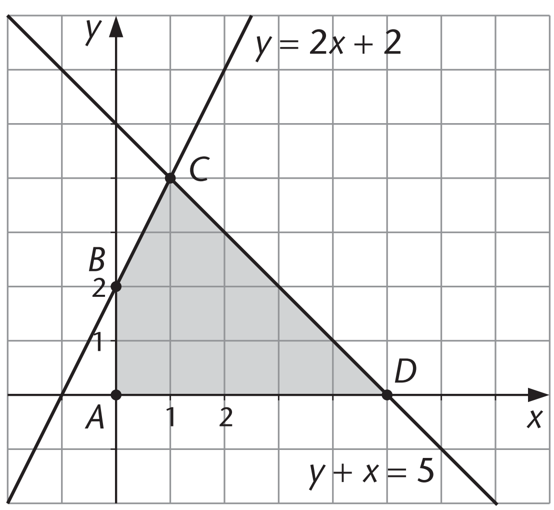
Vastaus: a) suurin arvo pisteessä (0,10)
b) pienin arvo pisteessä (5, 0)

74. Tasoalue on:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2x + 2 \\ y + x \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2x + 2 \\ y \leq -x + 5 \end{cases}$$

Piirretään tasoalue:



Lasketaan kärkipisteet:

$A = (0, 0)$

B: Suoran $y = 2x + 2$ y-akselin leikkauskohta $y = 2$. Siis $B = (0, 2)$

C: Suorien $y = 2x + 2$ ja $y = -x + 5$ leikkauspiste.

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -x + 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= -x + 5 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Jos $x = 1$, niin $y = -1 + 5 = 4$. Siis $C = (1, 4)$

D: Suoran $y = -x + 5$ nollakohta on $x = 5$. Siis $D = (5, 0)$

Kärkipiste	**Lausekkeen** $5x - y$ **arvo**
(0, 0)	$5 \cdot 0 - 0 = 0$
(0, 2)	$5 \cdot 0 - 2 = -2$ pienin
(1, 4)	$5 \cdot 1 - 4 = 1$
(5, 0)	$5 \cdot 5 - 0 = 25$ suurin

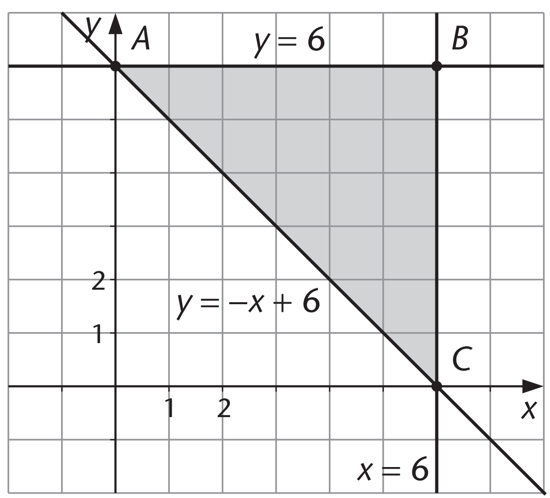
Vastaus: Suurin arvo 25, pienin arvo -2.

75. Tasoalue on:

$$\begin{cases} y \le 6 \\ y + x \ge 6 \\ x \le 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \le 6 \\ y \ge -x + 6 \\ x \le 6 \end{cases}$$

Piirretään tasoalue:



Lasketaan kärkipisteet A, B, C:

A: Suoran $y = -x + 6$ y-akselin leikkauskohta on $y = 6$. Siis $A = (0,6)$

C: Suoran $y = -x + 6$ nollakohta on $x = 6$. Siis $C = (6, 0)$

B: Suorien $y = 6$ ja $x = 6$ leikkauspiste on $B = (6, 6)$.

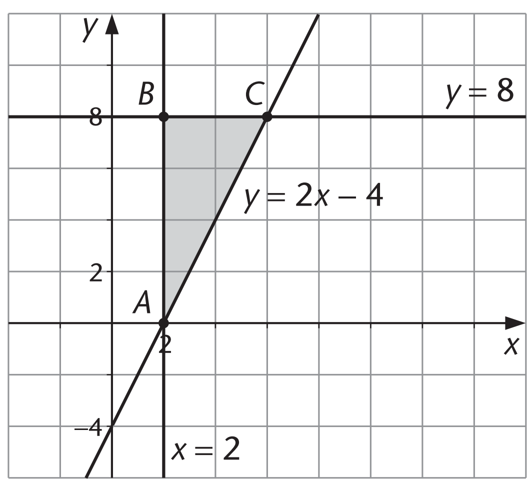
Kärkipiste	Lausekkeen $x+9y$ arvo
(0, 0)	$0+9\cdot 6=54$
(6, 0)	$6+9\cdot 0=6$ pienin
(6, 6)	$6+9\cdot 6=60$ suurin

Vastaus: Suurin arvo 60, pienin arvo 6.

76. Tasoalue on:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y \leq 8 \\ y \geq 2x-4 \end{cases}$$

Piirretään tasoalue.



Lasketaan muodostuneen monikulmion kärkipisteet A, B, C.

$A = (2, 0)$

B: Suoran $x = 2$ ja $y = 8$ leikkauspiste. Siis $B = (2, 8)$

C: Suorien $y = 8$ ja $y = 2x - 4$ leikkauspiste.

$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 8 \\ 2x &= 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Siis $C = (6, 8)$

a)

Kärkipiste	**Lausekkeen** $9{,}1x - 8{,}4y$ **arvo**
(2, 0)	$9{,}1 \cdot 2 - 8{,}4 \cdot 0 = 18{,}2$
(2, 8)	$9{,}1 \cdot 2 - 8{,}4 \cdot 8 = -49$ pienin
(6, 8)	$9{,}1 \cdot 6 - 8{,}4 \cdot 8 = -12{,}6$

b)

Kärkipiste	**Lausekkeen** $1{,}4x + 6{,}7y$ **arvo**
(2, 0)	$1{,}4 \cdot 2 + 6{,}7 \cdot 0 = 2{,}8$ pienin
(2, 8)	$1{,}4 \cdot 2 + 6{,}7 \cdot 8 = 56{,}4$
(6, 8)	$1{,}4 \cdot 6 + 6{,}7 \cdot 8 = 62$

Vastaus: a) Pienin arvo -49 b) Pienin arvo 2,8

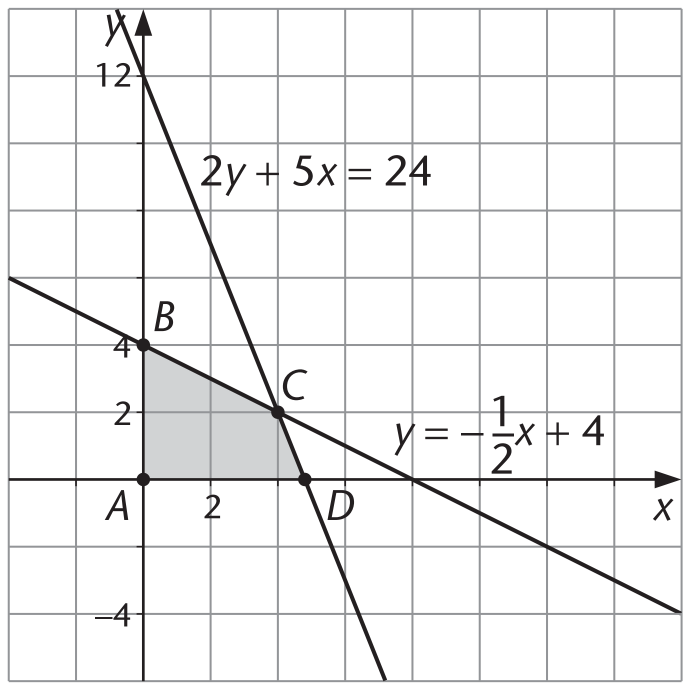
77. Tasoalue on:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\dfrac{1}{2}x + 4 \\ 2y + 5x \leq 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\dfrac{1}{2}x + 4 \\ 2y \leq -5x + 24 \qquad \Big| :2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\dfrac{1}{2}x + 4 & \rightarrow y-\text{akselin leikkausk. } y = 4 \\ y \leq -\dfrac{5}{2}x + 12 & \rightarrow y-\text{akselin leikkausk. } y = 12 \end{cases}$$

Piirretään tasoalue:



Lasketaan muodostuneen monikulmion kärkipisteet: *A*, *B*, *C*, *D*.

$A = (0, 0)$

B: Suoran $y=-\dfrac{1}{2}x+4$ *y*-akselin leikkauskohta $y=4$. Siis $B = (0, 4)$

C: Suorien $y=-\dfrac{1}{2}x+4$ ja $y=-\dfrac{5}{2}x+12$ leikkauspiste

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}x+4&=-\frac{5}{2}x+12 \\
2x&=8 \qquad \Big| :2 \\
x&=4
\end{aligned}
$$

Jos $x = 4$, niin $y = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 4 = -2 + 4 = 2$. Siis $C = (4, 2)$

D: Suoran $y = -\frac{5}{2}x + 12$ nollakohta.

$$-\frac{5}{2}x + 12 = 0$$

$$-\frac{5}{2}x = -12 \quad \Big| : \left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$x = 4\frac{4}{5}$$

Siis $D = \left(4\frac{4}{5}, 0\right) = (4{,}8; 0)$

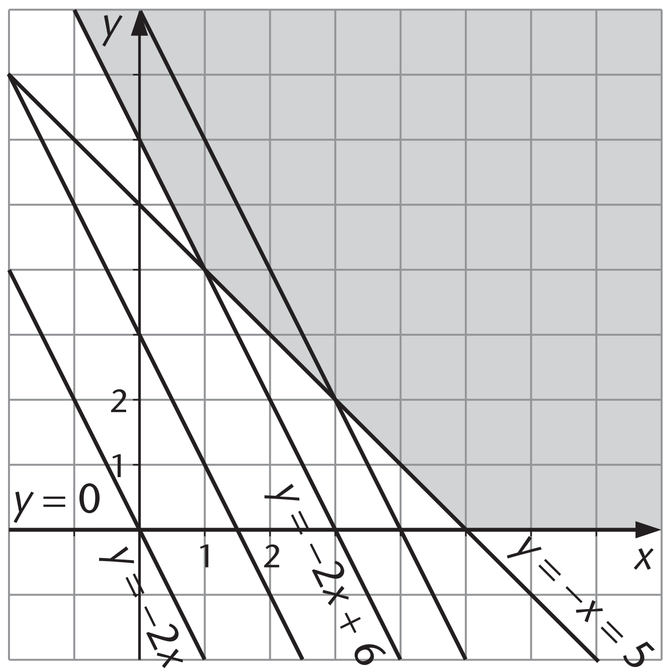
Kärkipiste	**Lausekkeen** $-0{,}25x + 2{,}15y$ **arvo**
(0, 0)	$-0{,}25 \cdot 0 + 2{,}15 \cdot 0 = 0$
(0, 4)	$-0{,}25 \cdot 0 + 2{,}15 \cdot 4 = 8{,}6$ suurin
(4, 2)	$-0{,}25 \cdot 4 + 2{,}15 \cdot 2 = 3{,}3$
(4,8; 0)	$-0{,}25 \cdot 4{,}8 + 2{,}15 \cdot 0 = -1{,}2$ pienin

Vastaus: Suurin arvo 8,6 pisteessä (0, 4)
Pienin arvo -1,2 pisteessä (4,8; 0)

78. Tasoalue on:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \geq -2x+6 \\ y \geq -x+5 \end{cases}$$

Piirretään tasoalue:



Tutkitaan suorien $4x+2y=c$ joukkoa. Kaikki tällaiset suorat ovat yhdensuuntaisia suoran $4x+2y=0$ kanssa.

$$2y = -4x \quad \big| :2$$
$$y = -2x$$

Piirretään suora koordinaatistoon sekä tämän suoran kanssa yhdensuuntaisia suoria, jotka leikkaavat tasoalueen.

Pienin vakiotermin c arvo on suoralla $= -2x + 6$, joka sivuaa tasoaluetta pisteessä (0, 6), jolloin lauseke $4x + 2y = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = 12$.

Vakiotermi voi suurentua rajatta, joten suurinta arvoa ei siis ole.

Vastaus: Pienin arvo 12,suurinta arvoa ei ole.

79. a)

Kärkipiste	**Lausekkeen $4x - 5y$ arvo**
(0, 3)	$4 \cdot 0 - 5 \cdot 3 = -15$ pienin
(0, 0)	$4 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0$
(4, 0)	$4 \cdot 4 - 5 \cdot 0 = 16$ suurin

b)

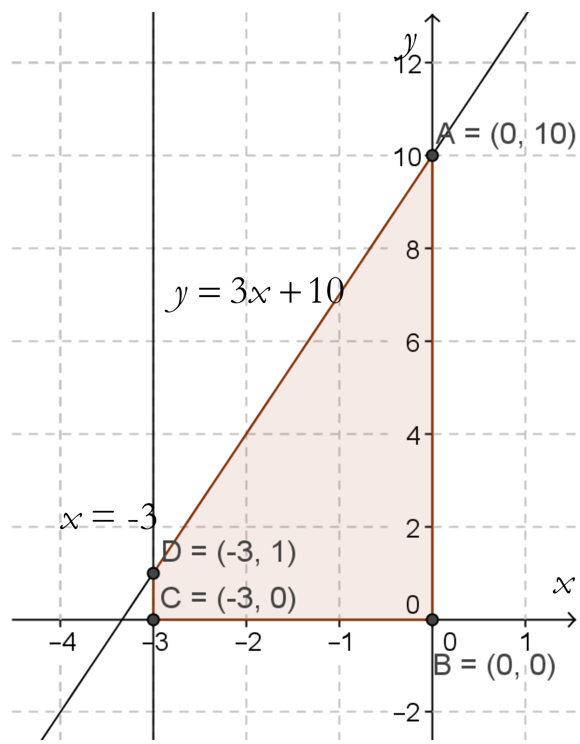
Kärkipiste	**Lausekkeen $4x - 5y$ arvo**
(2, 5)	$4 \cdot 2 - 5 \cdot 5 = -17$ pienin
(4, 2)	$4 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 6$
(3, 0)	$4 \cdot 3 - 5 \cdot 0 = 12$ suurin
(0, 0)	$4 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 0$
(0, 1)	$4 \cdot 0 - 5 \cdot 1 = -5$

Vastaus: a) Suurin arvo 16, pienin arvo -15
b) Suurin arvo 12, pienin arvo -17

80. Piirretään suorat ja lasketaan tasoalueen kärkipisteet.
A = (0, 10), koska suoran $y = 3x + 10$ y- akselin leikkauskohta on $y = 10$.
B = (0, 0) , koska koordinaattiakseleiden leikkauspiste on origo.
C = (-3, 0), koska suora x = -3 leikkaa x – akselin pisteessä (-3, 0).
D on suorien x = -3 ja $y = 3x + 10$ leikkauspiste eli

$$y = 3 \cdot (-3) + 10 = 1$$

Siis D = (-3, 1).



Kärkipiste	**Lausekkeen $-y-4x$ arvo**
(0, 3)	$-3-4\cdot 0=-3$
(0, 10)	$-10-4\cdot 0=-10$ pienin
(-3, 0)	$-0-4\cdot(-3)=12$ suurin
(-3, 1)	$-1-4\cdot(-3)=11$

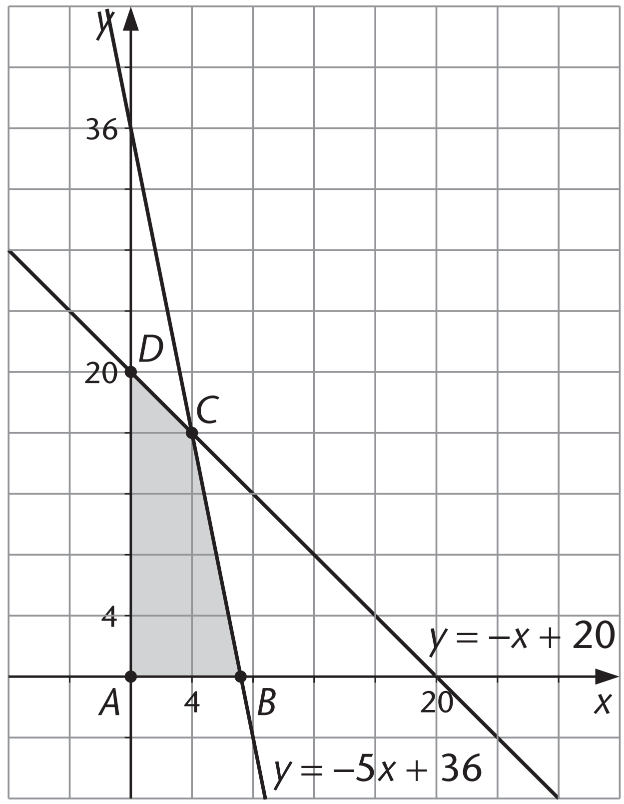
Vastaus: Pienin arvo – 10, suurin arvo 12

81. Tasoalue on:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 20 \\ y+5x \leq 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -x+20 \\ y \leq -5x+36 \end{cases}$$

Piirretään tasoalue:



Lasketaan muodostuneen monikulmion kärkipisteet. Optimoitavan lausekkeen suurin ja pienin arvo saadaan näissä pisteissä.

$A = (0, 0)$

B: Suoran $y = -5x + 36$ nollakohta:

$$-5x + 36 = 0$$

$$-5x = -36 \quad \big| :(-5)$$

$$x = 7\frac{1}{5} = 7{,}2$$

Siis $B = (7{,}2; 0)$

C: Suorien $y=-x+20$ ja $y=-5x+36$ leikkauspiste:

$$\begin{aligned} -x+20 &= -5x+36 \\ 4x &= 16 \quad \big| :4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Kun $x=4$, niin $y=-4+20=16$. Siis *C* = (4, 16)

D: Suoran $y=-x+20$ *y*-akselin leikkauskohta $y=20$. Siis *D* = (0, 20)

Kärkipiste	**Lausekkeen** $15x+24y$ **arvo**
(0, 0)	$15\cdot 0+24\cdot 0=0$ pienin
(7,2; 0)	$15\cdot 7{,}2+24\cdot 0=108$
(4, 16)	$15\cdot 4+24\cdot 16=444$
(0, 20)	$15\cdot 0+24\cdot 20=480$ suurin

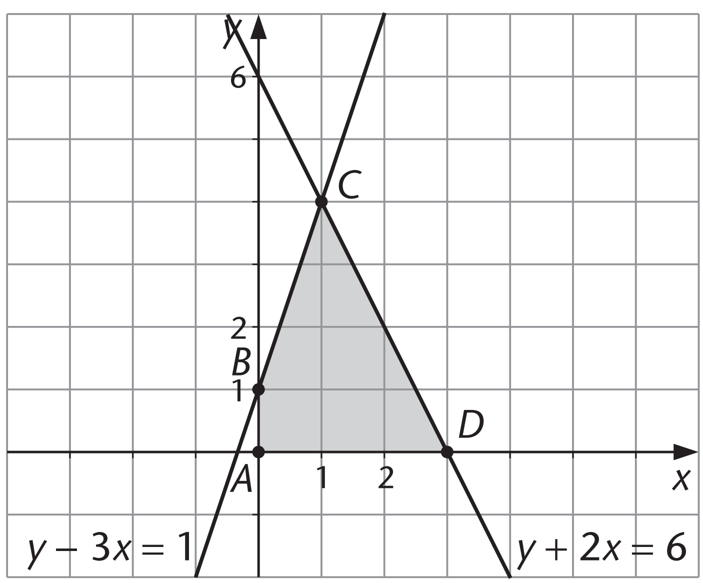
Vastaus: Suurin arvo 480 pisteessä (0, 20).
Pienin arvo 0 pisteessä (0, 0).

82. Tasoalue on:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y - 3x \leq 1 \\ y + 2x \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3x + 1 \\ y \leq -2x + 6 \end{cases}$$

Piirretään tasoalue.



Lasketaan kärkipisteet. Optimoitava lauseke saa suurimman ja pienimmän arvonsa kärkipisteissä.

$A = (0, 0)$

B: Suoran $y = 3x + 1$ y-akselin leikkauskohta $y = 1$. Siis $B = (0, 1)$.

C: Suorien $y = -2x + 6$ ja $y = 3x + 1$ leikkauspiste.

$$\begin{aligned} -2x + 6 &= 3x + 1 \\ -5x &= -5 \quad \Big| :(-5) \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Jos $x = 1$, niin $y = 3 \cdot 1 + 1 = 4$. Siis $C = (1, 4)$

D: Suoran $y = -2x + 6$ nollakohta:

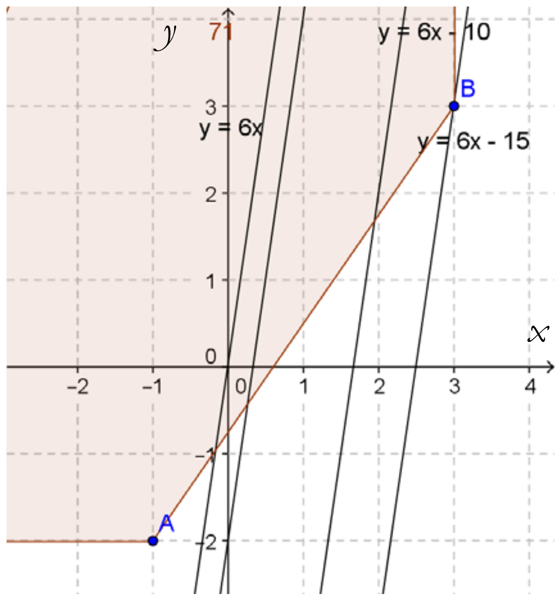
$$\begin{aligned} -2x + 6 &= 0 \\ -2x &= -6 \quad \Big| :(-2) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Siis $D = (3, 0)$

Kärkipiste	**Lausekkeen $7x + 16y$ arvo**
(0, 0)	$7 \cdot 0 + 16 \cdot 0 = 0$ pienin
(0, 1)	$7 \cdot 0 + 16 \cdot 1 = 16$
(1, 4)	$7 \cdot 1 + 16 \cdot 4 = 71$ suurin
(3, 0)	$7 \cdot 3 + 16 \cdot 0 = 21$

Vastaus: Suurin arvo 71, pienin arvo 0

83. Alue on vasemmalta, ylhäältä rajoittamaton. Tutkitaan lausekkeen $y-6x$ arvoja tutkimalla suorien $y-6x=c$ joukkoa. Kaikki nämä suorat ovat yhdensuuntaisia origon kautta kulkevan suoran $y=6x$ kanssa ($c=0$). Piirretään kuvaan joitakin yhdensuuntaisia suoria.



Pienin vakiotermin c arvo näyttäisi olevan suoralla $y=6x-15$, joka sivuaa tasoalauetta pisteessä (3, 3). Pienin arvo on siis – 15.

Kaikki tämän suoran yläpuolelle jäävät suorat kulkevat tasoalueen poikki. Näin vakiotermi voi suurentua rajatta eikä lausekkeella voi olla suurinta arvoa tässä tasoalueessa.

Vastaus: Pienin arvo -15, suurinta arvoa ei ole

1.5 Sovelluksia lineaarisesta optimoinnista

84. Merkitään x = salaattiannos
y = keittoannos

a) Salaattiannos maksaa 5,90 € ja keittolounas 4,10 €. Myyntituloja kuvaa siis lauseke $5{,}90x + 4{,}10y$.

b) Kootaan tehtävässä annetut tiedot taulukkoon ja muodostetaan rajoitusehdot (epäyhtälöt).

	salaattiannos x	**keittoannos** y	**yhteensä** max.
tomaattia (g)	300	150	240000
sipulia (g)	200	300	300000

$$\begin{cases} 300x + 150y \le 240000 \\ 200x + 300y \le 300000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \le -2x + 1600 \\ y \le -\dfrac{2}{3}x + 1000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

85. Merkitään x = t-paita
y = shortsit

a) t-paita 15 €/kpl tulot $15x$
shortsit 20 €(kpl tulot $20y$

Optimoitava lauseke on siis: $15x + 20y$

b) Kootaan tehtävän tiedot taulukkoon.

	t-paita *x*	**shortsit *y***	**yhteensä**
raitakangas (m)	0,80	0,20	52,00
yksivärinen (m)	0,30	0,50	29,70

Rajoitusehdot (taulukosta):

$$\begin{cases} 0{,}80x + 0{,}20y \le 52{,}00 \\ 0{,}30x + 0{,}50y \le 29{,}70 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

86. Merkitään x = pienemmät perhot (kpl) tulot (€) $4{,}00x$
y = suuremmat perhot (kpl) tulot (€) $9{,}50\,y$

a) Myyntitulot ovat siis: $4{,}00x + 9{,}50\,y$

b) Rajoittavat ehdot ovat:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 70 - \dfrac{1}{3}x \\ y \leq 100 - x \end{cases}$$

Rajoittavat ehdot mupdpstavat tasoalueen, jota rajoittavat suorat:
$x = 0$, $y = 0$, $y = -\dfrac{1}{3}x + 70$, $y = -x + 100$.

Piirrtään suorat ja lasketaan leikkauspisteet.

A: Suoran $y = -\dfrac{1}{3}x + 70$ y – akselin leikkauspiste on (0, 70).
B: Koordinaattiakselien leikkauspiste on origo eli piste (0, 0)
E: Suoran $y = -x + 100$ nollakohta on

$$-x + 100 = 0$$
$$-x = -100 \quad |:(-1)$$
$$x = 100$$

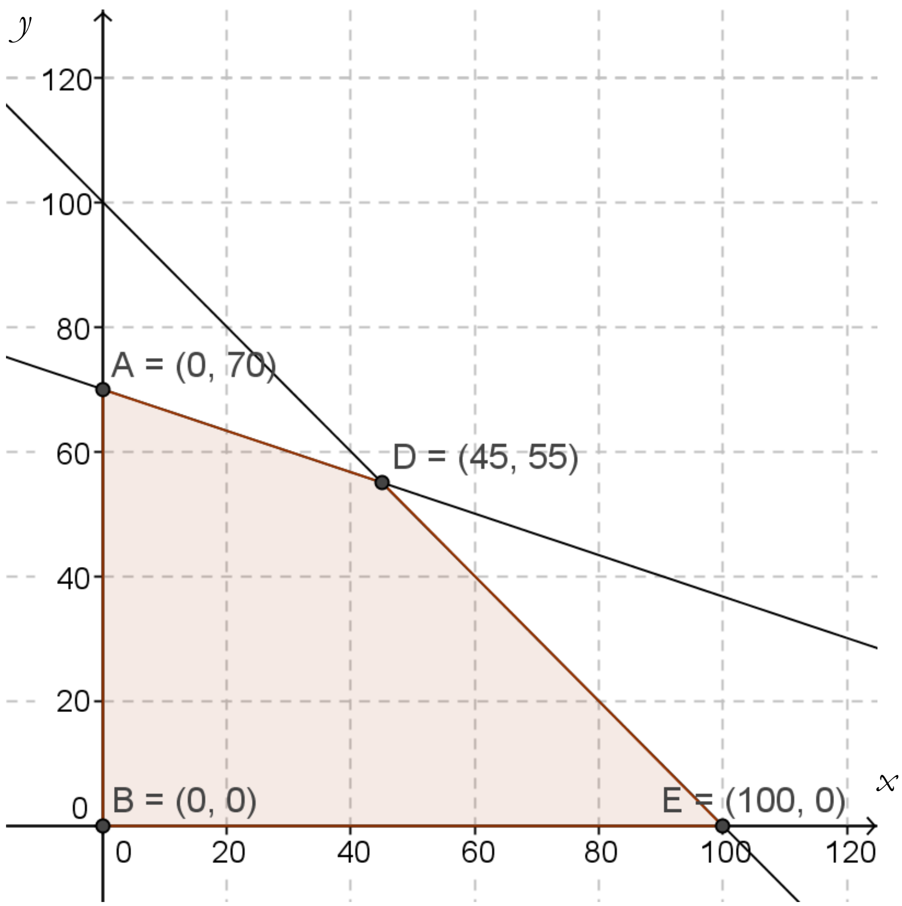
Siis piste E = (100, 0).

D: Suorien $y = -x + 100$ ja $y = -\frac{1}{3}x + 70$ leikkauspiste on

$$\begin{aligned} -x + 100 &= -\frac{1}{3}x + 70 \\ -\frac{2}{3}x &= -30 \quad \Big| : \left(-\frac{2}{3}\right) \\ x &= 45 \end{aligned}$$

$$y = -x + 100 = -45 + 100 = 55$$

Siis $D = (45, 55)$



Optimoitava lauseke on $4{,}00x + 9{,}50y$.

Lasketaan optimoitavan lausekkeen arvo tasoalueen kärkipisteissä.

Kärkipiste	**Lausekkeen** $4{,}00x + 9{,}50y$ **arvo (€)**
(0, 0)	$4{,}00 \cdot 0 + 9{,}50 \cdot 0 = 0$ pienin
(0, 70)	$4{,}00 \cdot 0 + 9{,}50 \cdot 70 = 665$
(45, 55)	$4{,}00 \cdot 45 + 9{,}50 \cdot 55 = 10422{,}50$ suurin
(100, 0)	$4{,}00 \cdot 100 + 9{,}5 \cdot 0 = 400$

Koska pieniä perhoja myytiin x kpl, niin kun $x = 45$, myyntitulot ovat suurimmat.

Vastaus: a) $4{,}00x + 9{,}50y$ (€) b) 45 kpl

87. Merkitään x = 2 hlö asunto 25000 €/asunto
y = perheasunto (4 hlö) 40000 €/asunto

a) Rakennuskustannukset $25000x + 40000y$ (€)

a) Rajoittavat epäyhtälöt:

$$\begin{cases} y \geq -\frac{1}{2}x + 15 \\ y \geq -x + 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Tasoalueen piirtämistä varten lasketaan ensin suorien nollakohdat. Sitten lasketaan tasoalueen kärkipisteet.

Nollakohdat:

$$-\frac{1}{2}x+15=0$$

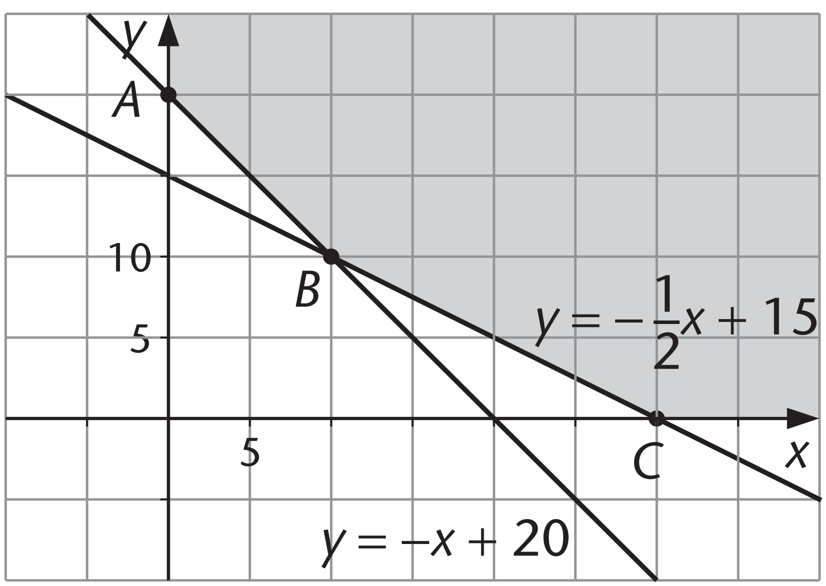
$$-\frac{1}{2}x=-15 \qquad \Big|:\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x=30$$

$$-x+20=0$$

$$x=20$$

Lisäksi suoran $y=-\frac{1}{2}x+15$ y – akselin leikkauskohta on y = 15 ja suoran $y=-x+20$ leikkauskohta on y = 20.



Piste $A = (0, 20)$

Piste B: suorien leikkauspiste

$$-\frac{1}{2}x + 15 = -x + 20$$
$$\frac{1}{2}x = 5 \quad \left| : \frac{1}{2} \right.$$
$$x = 10$$

$$y = -10 + 20 = 10$$

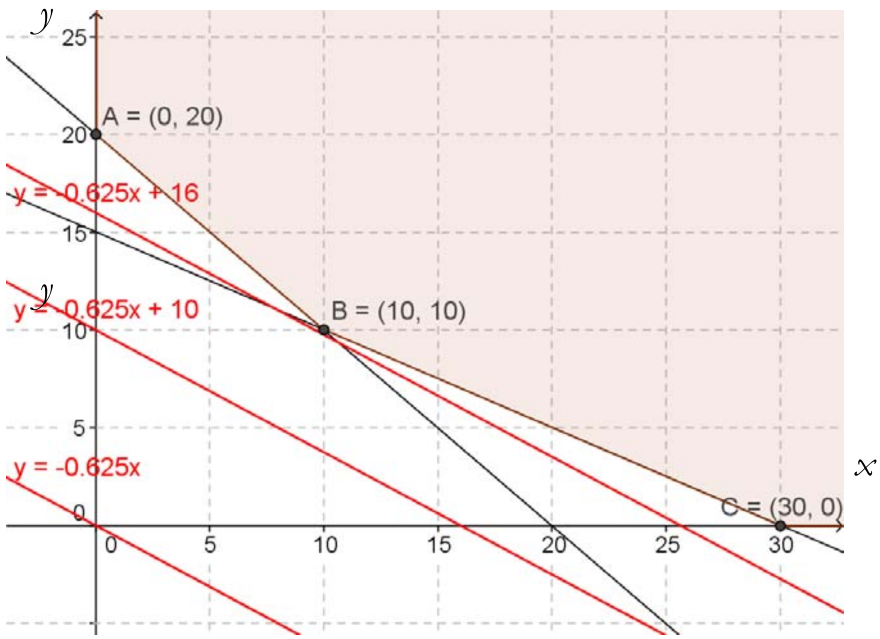
Siis $B = (10, 10)$

Piste $C = (30, 0)$

Tutkitaan suorien $25000x + 40000y = c$ joukkoa. Suoran yhtälö on siis

$$40000y = -25000x + c \quad |: 40000$$
$$y = -0{,}625x + \frac{c}{40000}$$

Piirretään koordinaatistoon suoran kanssa yhdensuuntaisia suoria, jotta voidaan määrittää pienimmät kustannukset.



Tasoalueetta leikkaavan suoran pienin vakiotemin arvo saadaan pisteessä $B = (10,10)$. Kustannukset ovat siis pienimmät, kun perheasuntoja y valmistetaan 10 kpl.

Vastaus: a) $25000x + 40000y$ (€) b) 10 kpl

88. Merkitään x = henkilöauto (kpl) tulot 50 €/auto
y = rekka (kpl) tulot 140 €/rekka

a) Myyntitulot $50x + 140y$ (€)

b) $1 \cdot x + 25y \leq 550$ (tn)

c) $10x + 25y \leq 1000$ (m^2)

d) Piirretään rajoitusehtojen avulla tasoalue koordinaatistoon.

Rajoitusehdot ovat:

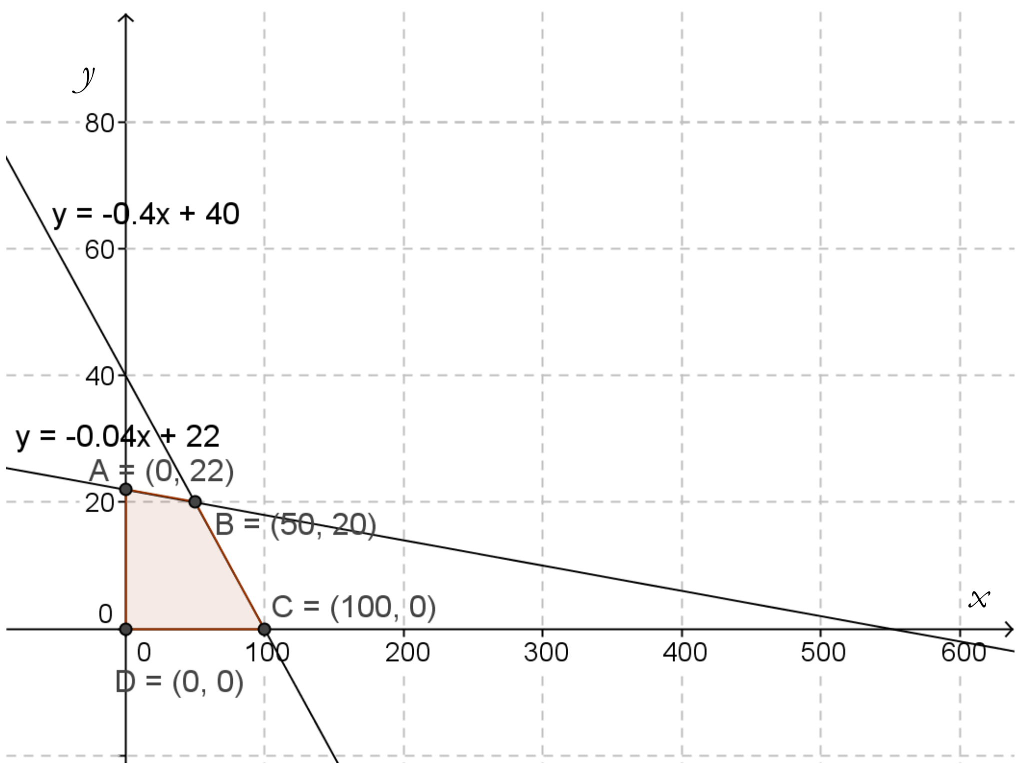
$$\begin{cases} 25y \leq -x + 550 & |:25 \\ 25y \leq -10x + 1000 & |25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq -\dfrac{1}{25}x + 22 \\ y \leq -0{,}4x + 40 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Lasketaan piirtämistä varten suorien nollakohdat:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{25}x + 22 &= 0 \\
-\frac{1}{25}x &= -22 \qquad \Big| :(-\frac{1}{25}) \\
x &= 550
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-0{,}4x + 40 &= 0 \\
-0{,}4x &= -40 \qquad \big| :(-0{,}4) \\
x &= 100
\end{aligned}
$$



Määritetään tasoalueen kärkipisteet.

Piste A = (0, 22), koska suoran $y=-\frac{1}{25}x+22$ y- akselin leikkauskohta on y = 22.

Leikkauspiste B:

$$-\frac{1}{25}x+22=-0{,}4x+40$$
$$0{,}36x=18 \quad |:0{,}36$$
$$x=50$$

$$y=-0{,}4\cdot 50+40=20$$

Siis B = (50, 20).

Piste C = (100, 0)

Piste D = (0, 0)

Tutkitaan myyntitulojen arvoja kärkipisteissä.

Kärkipiste	Lausekkeen $50x+140y$ arvo
D (0, 0)	$50\cdot 0+140\cdot 0=0$
C (100, 0)	$50\cdot 100+140\cdot 0=5000$
A (0, 22)	$50\cdot 0+140\cdot 22=3080$
B (50, 20)	$50\cdot 50++140\cdot 20=5300$ suuri n

Suurimmat myyntitulot, kun lastataan henkilöautoja x = 50 kpl ja rekkoja y= 20 kpl.

Vastaus: 20 rekkaa, 50 henkilöautoa

89. Merkitään x = pikkukimppu
y = iso kimppu

Myyntitulot ovat $3{,}50x + 4{,}80y$ (optimoitava lauseke)

Rajoittavat ehdot ovat:

$$\begin{cases} 5x + 10y \le 120 \\ 6x + 8y \le 100 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \le -\frac{1}{2}x + 12 \\ y \le -\frac{3}{4}x + \frac{10}{8} \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Lasketaan suorien piirtämistä varten nollakohdat ja leikkauspiste:

$$-\frac{1}{2}x + 12 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x = -12 \qquad \big| \cdot(-2)$$

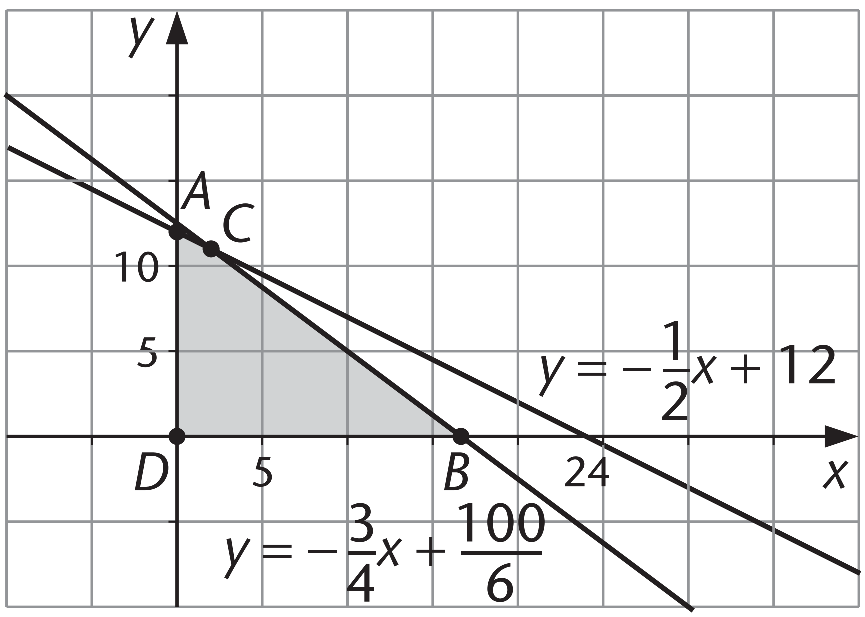
$$x = 24$$

$$-\frac{3}{4}x + 12\frac{1}{2} = 0$$

$$-\frac{3}{4}x = -12\frac{1}{2} \quad \Big| \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$x = \frac{100}{6} \approx 16{,}7$$

Suorien y – akselin leikkauskohdat ovat $y = 12$ ja $y = 12\frac{1}{2}$



Leikkauspiste *C*:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 12 \\ y = -\frac{3}{4}x + \frac{100}{8} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}x+12=-\frac{3}{4}x+12\frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}x=12\frac{1}{2}-12$$
$$\frac{1}{4}x=\frac{1}{2} \quad \Big| \cdot 4$$
$$x=\frac{4}{2}=2$$

$y=-\frac{1}{2}\cdot 2+12=-1+12=11$, siis $C=(2, 11)$

Saadaan siis tasoalueen kärkipisteet:

$A=(0, 12)$, $B=(\frac{100}{6},0)$, $C=(2, 11)$ ja $D=(0, 0)$.

Lasketaan optimoitavan lausekkeen arvot tasoalueen kärkipisteissä:

Kärkipiste	**Lausekkeen** $3{,}50x+4{,}80y$ **arvo (€)**
A (0, 12)	$3{,}50\cdot 0+4{,}80\cdot 12=57{,}6$
$B\left(\frac{100}{6},0\right)$	$3{,}50\cdot\frac{100}{6}+4{,}80\cdot 0=58\frac{1}{3}$
C (2, 11)	$3{,}50\cdot 2+4{,}80\cdot 11=59{,}8$ **suurin**
D (0, 0)	$3{,}50\cdot 0+4{,}80\cdot 0=0$

Vastaus: 2 pientä kimppua, 11 isoa kimppua

90. Merkitään x = terveyspulla / 10 kpl
y = terveyssämpylä / 10 kpl

Tuotto eli optimoitava lauseke on: $0,45x + 0,25y$

Rajoittavat ehdot ovat:

$$\begin{cases} 0,3x + 0,1y \leq 30 \text{ (vehnä)} \\ 0,15x + 0,4y \leq 36 \quad\quad \text{(ohra)} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

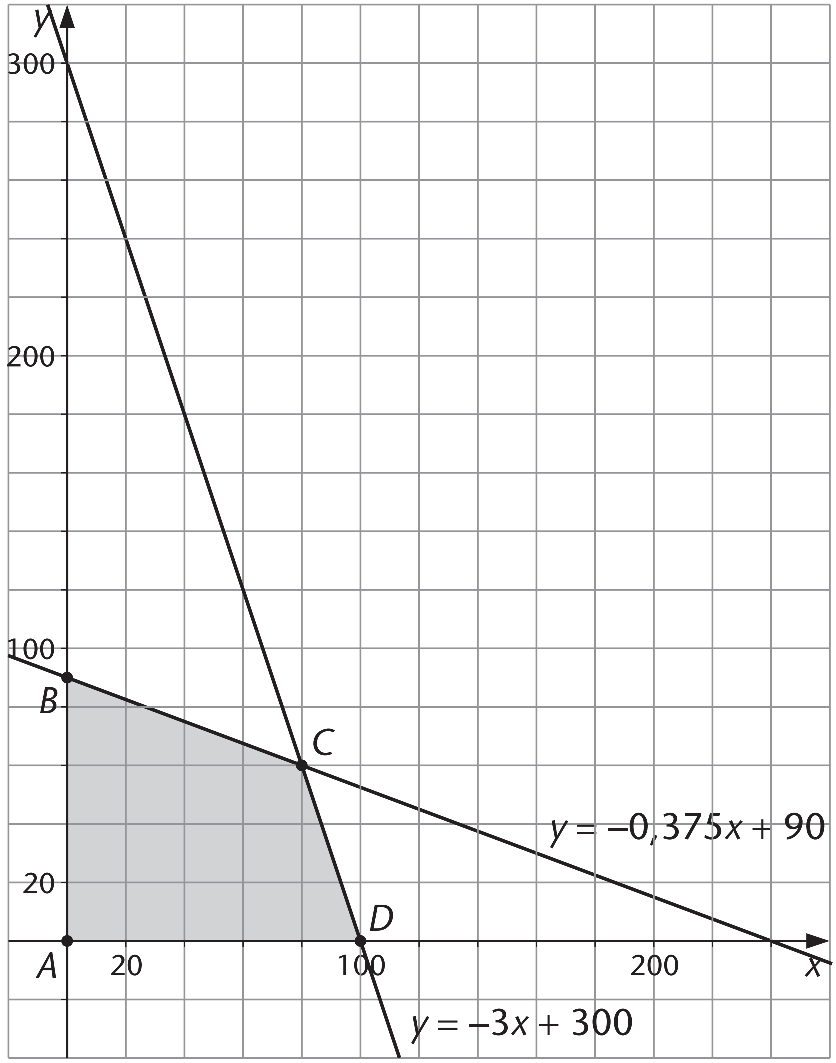
$$\begin{cases} y \leq -3x + 300 \\ y \leq -0,375x + 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Lasketaan suorien piirtämistä varten nollakohdat:

$$\begin{aligned} -3x + 300 &= 0 \\ -3x &= -300 \quad \Big| :(-3) \\ x &= 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0,375x + 90 &= 0 \\ -0,375x &= -90 \quad \Big| :(-0,375) \\ x &= 240 \end{aligned}$$

Lisäksi suorien y- akselin leikkauskohdat ovat y = 300 ja y = 90.



Leikkauspiste C:

$$\begin{cases} y = -0{,}375x + 90 \\ y = -3x + 300 \end{cases}$$

$$-0{,}375x + 90 = -3x + 300$$

$$2{,}625x = 210 \qquad \big| : 2{,}625$$

$$x = 80$$

$y = -3 \cdot 80 + 300 = 60$, siis C = (80, 60)

Rajoitetun alueen kärkispiteet ovat siis:

A= (0, 0), B = (0, 90), C = (80, 60) ja D = (0, 100)

Lasketaan optimoitavan lausekkeen arvot kärkipisteissä.

Kärkipiste	**Lausekeen** $0{,}45x + 0{,}25y$ **arvo (€)**
A (0, 0)	$0{,}45 \cdot 0 + 0{,}25 \cdot 0 = 0$
B (0, 90)	$0{,}45 \cdot 0 + 0{,}25 \cdot 90 = 22{,}5$
C (80, 60)	$0{,}45 \cdot 80 + 0{,}25 \cdot 60 = 51$ **suurin**
D (100, 0)	$0{,}45 \cdot 100 + 0{,}25 \cdot 0 = 45$

Tuotto on suurin, kun valmistetaan $80 \cdot 10\,\text{kpl} = 800\,\text{kpl}$ terveyspullaa ja $60 \cdot 10\,\text{kpl} = 600\,\text{kpl}$ terveyssämpylää.

Jos valmistetaan vain terveyssämpylöitä, niin niitä voidaan valmistaa max. 90 kpl, koska kärkispiste B = (0,90). Jauhoja kuluu tällöin:

vehnä: $0{,}3 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 90 = 9$
ohra: $0{,}15 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 90 = 36$

Vehnäjauhoja jää siis yli $30 - 9 = 21$ (kg).
Ohrajauhot kuluvat kaikki.

Jos valmistetaan pelkkiä sämpylöitä, niin ohrajauhojen loputtua vehnäjauhoja jää yli 21 kg.

Vastaus: 800 terveyspullaa, 600 terveyssämpylää. Jos valmistetaan pelkkiä sämpylöitä, vehnäjauhoja jää yli 21 kg, kun ohrajauhot loppuvat.

91. Merkitään x = puolukkapiirakka
y = mustikkapiirakka

Kootaan annetut tiedot taulukkoon.

	Puolukka $\boldsymbol{x}$	**Mustikka** $\boldsymbol{y}$	**yht.**
Taikina (kg)	0,20	0,35	7,5
Aika (min)	15	20	$8 \cdot 60 = 480$
Myyntitulot (€)	8,50	12,50	$8{,}50x + 12{,}50y$

a) Optimoitava lauseke on siis $8{,}50x + 12{,}50y$ (myyntitulot, €)

b) Rajoitusehdot ovat (taulukosta):

$$\begin{cases} 0{,}20x + 0{,}35y \le 7{,}5 \\ 15x + 20y \le 480 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

92. Merkitään y = turistipaikka
x = liikemiespaikka

Kustannukset $500y + 800x$ (optimoitava lauseke)

Rajoittavat ehdot ovat:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -x + 70 \\ y \geq -\dfrac{3}{2}x + 75 \end{cases}$$

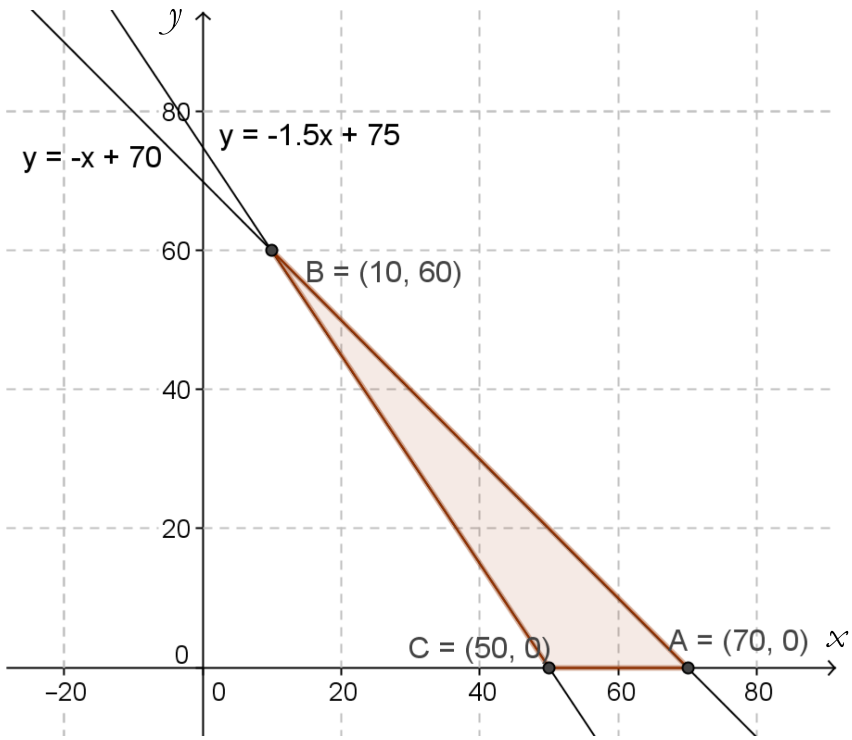
Lasketaan suorien piirtämistä varten nollakohdat:

$$\begin{aligned} -x + 70 &= 0 \\ x &= 70 \end{aligned}$$

Lisäksi y-akselin leikkauskohta $y = 70$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}x + 75 &= 0 \\ -\frac{3}{2}x &= -75 \quad \Big| :\left(-\frac{3}{2}\right) \\ x &= 50 \end{aligned}$$

Lisäksi y-akselin leikkauskohta $y = 75$



Suotuisan tasoalueen kärkipisteet ovat:

$A = (70, 0)$

B: suorien leikkauspiste

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 75 \\ y = -x + 70 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}x + 75 &= -x + 70 \\ -\frac{1}{2}x &= -5 \quad \Big| : \left(-\frac{1}{2}\right) \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Jos $x = 10$, niin $y = -10 + 70 = 60$. Siis B = (10, 60)

C = (50,0)

Lasketaan kustannusten arvot tasoalueen kärkipisteissä.

Kärkipiste	**Lausekkeen** $500y + 800x$ **arvo (€)**
A (70, 0)	$500 \cdot 0 + 800 \cdot 70 = 56000$
B (10, 60)	$500 \cdot 60 + 800 \cdot 10 = 38000$ **pienin**
C (50, 0)	$500 \cdot 0 + 800 \cdot 50 = 40000$

Pienin arvo saadaan pisteessä (10, 60).
Pienimmät kustannukset saadaan siis, kun rakennetaan 60 turistipaikkaa ja 10 liikemiespaikkaa.

Vastaus: a) $500y + 800x$ b) 60 turistipaikkaa, 10 liikemiespaikkaa

93. Merkitään x = uusikuosinen
y = vanhakuosinen

Myyntitulot ovat $120x + 100y$ (€)

Rajoitusehdot ovat:

$$\begin{cases} 0{,}4x + 0{,}6y \le 7{,}2 \\ 0{,}4x + 0{,}2y \le 4{,}8 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

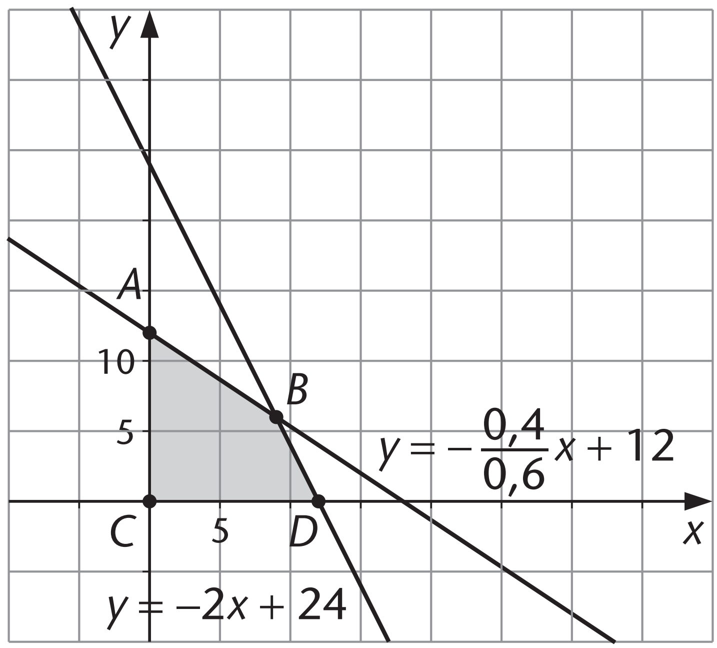
$$\begin{cases} y \le -\dfrac{0,4}{0,6}x + 12 \\ y \le -2x + 24 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Lasketaan suorien piirtämistä varten nollakohdat:

$$\begin{aligned} -\frac{0,4}{0,6}x + 12 &= 0 \\ -\frac{0,4}{0,6}x &= -12 \quad \left| :\left(-\frac{0,4}{0,6}\right)\right. \\ x &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2x + 24 &= 0 \\ -2x &= -24 \ \big| :(-2) \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Suorien y- akselin leikkauskohdat ovat $y = 12$ ja $y = 24$.



Määritetään tasoalueen kärkipisteet:

A= (0, 12)

Suorien leikkauspiste B:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{0,4}{0,6}x + 12 \\ y = -2x + 24 \end{cases}$$

$$-\frac{0,4}{0,6}x + 12 = -2x + 24$$

$$1\frac{1}{3}x = 12 \quad \Big|:1\frac{1}{3}$$

$$x = 9$$

$$y = -2 \cdot 9 + 24 = 6$$

Siis $B = (9, 6)$

$D = (12, 0)$

Tutkitaan optimoitavan lausekkeen arvoa kärkipisteissä:

Kärkipiste	**Lausekkeen** $120x + 100y$ **arvo (€)**
A (0, 12)	$120 \cdot 0 + 100 \cdot 12 = 1200$
B (9, 6)	$120 \cdot 9 + 100 \cdot 6 = 1680$ **suurin**
C (0, 0)	$120 \cdot 0 + 100 \cdot 0 = 0$
D (12, 0)	$120 \cdot 12 + 100 \cdot 0 = 1440$

Suurin myyntitulo on 1680 €, kun myydään 9 kpl uusikuosisia villapaitoja ja 6 kpl vanhakuosisia villapaitoja.

Vastaus: uusikuosisia 9 kpl, vanhakuosisia 6 kpl, tulot 1680 €

2.1 Lukujono

94. a) $a_n = -4n + 32$

$$a_{25} = -4 \cdot 25 + 32 = -68$$

b) $a_n = \dfrac{n^2 - 8n}{4}$

$$a_{25} = \frac{25^2 - 8 \cdot 25}{4} = 106{,}25$$

95. Yleinen jäsen on $a_n = 3n^2 - 7n$

a) $a_1 = 3 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 = -4$

b) $a_3 = 3 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 = 6$

c) $a_{100} = 3 \cdot 100^2 - 7 \cdot 100 = 29300$

96. a)

$$a_n = -6n + 5$$
$$a_1 = -6 \cdot 1 + 5 = -1$$
$$a_2 = -6 \cdot 2 + 5 = -7$$
$$a_3 = -6 \cdot 3 + 5 = -13$$

b)

$$a_n = n^2 - n$$
$$a_1 = 1^2 - 1 = 0$$
$$a_2 = 2^2 - 2 = 2$$
$$a_3 = 3^2 - 3 = 6$$

c)

$$a_n = 3^n$$
$$a_1 = 3^1 = 3$$
$$a_2 = 3^2 = 9$$
$$a_3 = 3^3 = 27$$

97. a)

$$a_n = 100 \cdot 0{,}5^{n-1}$$
$$a_1 = 100 \cdot 0{,}5^0 = 100$$
$$a_2 = 100 \cdot 0{,}5^1 = 50$$
$$a_3 = 100 \cdot 0{,}5^2 = 25$$
$$a_4 = 100 \cdot 0{,}5^3 = 12{,}5$$

b)

$$a_n = -4 \cdot (-1)^{n+1}$$
$$a_1 = -4 \cdot (-1)^2 = -4$$
$$a_2 = -4 \cdot (-1)^3 = 4$$
$$a_3 = -4 \cdot (-1)^4 = -4$$
$$a_4 = -4 \cdot (-1)^5 = 4$$

98. a)

$$a_1 = 4 \ \ \text{(kpl)}$$
$$a_2 = 4 + 2 = 6 \ \ \text{(kpl)}$$
$$a_3 = 4 + 2 + 2 = 4 + 2 \cdot 2 = 8 \ \ \text{(kpl)}$$
$$a_4 = 4 + 2 + 2 + 2 = 4 + 3 \cdot 2 = 10 \ \ \text{(kpl)}$$

b)

$$a_1 = 5{,}0 \ \ \text{(l)}$$
$$a_2 = 5{,}0 - 0{,}5 = 4{,}5 \ \ \text{(l)}$$
$$a_3 = 5{,}0 - 2 \cdot 0{,}5 = 4{,}0 \ \ \text{(l)}$$
$$a_4 = 5{,}0 - 3 \cdot 0{,}5 = 3{,}5 \ \ \text{(l)}$$

c)

$$a_1 = 20000 \ \ \text{(€)}$$
$$a_2 = 1{,}20 \cdot 20000 = 24000 \ \ \text{(€)}$$
$$a_3 = 1{,}20^2 \cdot 20000 = 28800 \ \ \text{(€)}$$
$$a_4 = 1{,}20^3 \cdot 20000 = 34560 \ \ \text{(€)}$$

99. Jos massa puolittuu joka tunti, niin se 0,5 – kertaistuu tunnissa.

a) tunnin kuluttua $a_1 = 100 \cdot 0{,}5^1 = 100 \cdot 0{,}5 = 50$ (g)
kahden tunnin kuluttua $a_2 = 100 \cdot 0{,}5^2 = 25$ (g)
kolmen tunnin kuluttua $a_3 = 100 \cdot 0{,}5^3 = 12{,}5$ (g)

b) Yleinen jäsen on $a_n = 100 \cdot 0{,}5^n$ (g).

c) $a_{15} = 100 \cdot 0{,}5^{15} = 0{,}00305$ (g)
0,00305 g= 3,05 mg

100. Joelin lainan määrä oli 1400 €
Lyhennys oli 200 € kuukaudessa.

a) 1. lyhennyksen jälkeen:
$a_1 = 1400 - 200 = 1200$ (€)

2. lyhennyksen jälkeen: $a_2 = 1400 - 200 - 200 = 1400 - 2 \cdot 200 = 1000$ (€)

3. lyhennyksen jälkeen: $a_3 = 1400 - 3 \cdot 200 = 800$ (€)

4. lyhennyksen jälkeen: $a_4 = 1400 - 4 \cdot 200 = 600$ (€)

5. lyhennyksen jälkeen: $a_5 = 1400 - 5 \cdot 200 = 400$ (€)

6. lyhennyksen jälkeen: $a_6 = 1400 - 6 \cdot 200 = 200$ (€)

7. lyhennyksen jälkeen: $a_7 = 1400 - 7 \cdot 200 = 0$ (€)

Laina on maksettu takaisin.

b) Edellä olevan taulukoinnin perusteella

$$a_n = 1400 - n \cdot 200 = 1400 - 200n, \ n = 1, 2, 3, ..., 7$$

Vastaus: a) 1200, 1000, 800, 600, 400, 200, 0 (euroa)
b) $a_n = 1400 - 200n$

101. Tutkitaan, onko $a_n = 926$.

a) $a_n = 6n - 4$

$$\begin{aligned} a_n &= 926 \\ 6n - 4 &= 926 \\ 6n &= 930 \quad |:6 \\ n &= 155 \end{aligned}$$

Koska n on positiivinen kokonaisluku, luku 926 kuuluu jonoon.

b) $a_n = 4n^2 + 26$

$$\begin{aligned} a_n &= 926 \\ 4n^2 + 26 &= 926 \\ 4n^2 &= 900 \quad |:4 \\ n^2 &= 225 \\ n &= \pm 15 \end{aligned}$$

Koska $n = 15$ on positiivinen kokonaisluku, luku 926 kuuluu jonoon.

Vastaus: a) kyllä b) kyllä

102. Tutkitaan, onko $a_n = 120$.

a) $a_n = 180 - 12n$

$$\begin{aligned} 180 - 12n &= 120 \\ -12n &= -60 \qquad \big| :(-12) \\ n &= 5 \end{aligned}$$

Koska n on positiivinen kokonaisluku, 120 on jonon jäsen.

b) $a_n = -12(n - 15)$

$$\begin{aligned} -12(n - 15) &= 120 \qquad \big| :(-12) \\ n - 15 &= -10 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

Koska n on positiivinen kokonaisluku, joten 120 on jonon jäsen.

c) $a_n = 12(15 + n)$

$$\begin{aligned} 12(15+n) &= 120 \quad \big| :12 \\ 15 + n &= 10 \\ n &= -5 \end{aligned}$$

Koska *n* ei ole positiivinen kokonaisluku, joten luku 120 ei ole jonon jäsen.

Vastaus: a) on b) on c) ei ole

103. Tutkitaan, millä *n*:n arvolla $a_n = 20$, kun *n* on positiivinen kokonaisluku.

a) $a_n = 6n - 22$

$$\begin{aligned} 6n - 22 &= 20 \\ 6n &= 42 \quad \big| :6 \\ n &= 7 \end{aligned}$$

Siis $a_7 = 20$ eli 7. jäsen.

b) $a_n = n^2 - 19n$

$$n^2 - 19n = 20$$
$$n^2 - 19n - 20 = 0$$

$$n = \frac{-(-19) \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1}$$
$$n = \frac{19 \pm 21}{2}$$
$$n = \frac{19 + 21}{2} = 20 \quad \text{tai} \quad n = \frac{19 - 21}{2} = -1$$

$n = -1$ ei käy, sillä $n > 0$.

Siis $a_{20} = 20$ eli 20. jäsen.

c) $a_n = n^2 - n + 8$

$$n^2 - n + 8 = 20$$
$$n^2 - n - 12 = 0$$

$$n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1}$$
$$n = \frac{1 \pm 7}{2}$$
$$n = \frac{1 + 7}{2} = 4 \quad \text{tai} \quad n = \frac{1 - 7}{2} = -3$$

$n = -3$ ei käy, sillä $n > 0$

Siis $a_4 = 20$ eli 4. jäsen.

Vastaus: a) 7. jäsen b) 20. jäsen c) 4. jäsen

104. Yleinen jäsen on $a_n = cn + 6$.

Lisäksi tiedetään, kun $n = 9$, niin $a_9 = -120$.

$$\begin{aligned} c \cdot 9 + 6 &= -120 \\ 9c &= -126 \quad |:9 \\ c &= -14 \end{aligned}$$

105. Katsomon *n*. rivillä olevien penkkien määrä on $a_n = 20n + 110$

a) 10. rivillä on penkkejä $a_{10} = 20 \cdot 10 + 110 = 310$

b) Lasketaan, millä arvolla n on voimassa $a_n = 510$.

$$\begin{aligned} 20n + 110 &= 510 \\ 20n &= 400 \quad |:20 \\ n &= 20 \end{aligned}$$

Siis 20. rivillä on 510 penkkiä.

b) Lasketaan, millä arvolla *n* on voimassa $a_n = 630$.

$$\begin{aligned} 20n + 110 &= 630 \\ 20n &= 520 \;|: 20 \\ n &= 26 \end{aligned}$$

Siis 26. rivillä on 630 penkkiä.

Vastaus: a) 310 b) 20. rivissä c) 26. rivi

106. a) $a_1 = 3{,}0$ (l)

Seuraavat saadaan lisäämällä edelliseen 0,4 (l).

$$\begin{aligned} a_2 &= 3{,}0 + 0{,}4 \text{ (l)} = 3{,}4 \text{ (l)} \\ a_3 &= 3{,}0 + 0{,}4 + 0{,}4 = 3{,}0 + 2 \cdot 0{,}4 \text{ (l)} = 3{,}8 \text{ (l)} \\ a_4 &= 3{,}0 + 0{,}4 + 0{,}4 + 0{,}4 = 3{,}0 + 3 \cdot 0{,}4 \text{ (l)} = 4{,}2 \text{ (l)} \end{aligned}$$

Jono on siis 3,0; 3,4; 3,8; … (litraa)

b) Edellisen kohdan perusteella havaitaan,

$$\begin{aligned} a_n &= 3{,}0 + (n-1)\cdot 0{,}4 \\ &= 3{,}0 + 0{,}4n - 0{,}4 \\ &= 0{,}4n + 2{,}6 \end{aligned}$$

c) $a_n = 11{,}0\ (l)$

$$\begin{aligned} 0{,}4n + 2{,}6 &= 11{,}0 \\ 0{,}4n &= 8{,}4 \quad \Big|:0{,}4 \\ n &= 21 \end{aligned}$$

Siis 21. kerralla.

Vastaus:a) 3,0; 3,4; 3,8; … b) $a_n = 0{,}4n + 2{,}6$ c) 21. kerralla

107. a) Yleinen jäsen on $a_n = 42 - 17n$

$$a_{12} = 42 - 17 \cdot 12 = -162$$

b) Yleinen jäsen on $a_n = -n^3 + n^2 + n$

$$a_{12} = -12^3 + 12^2 + 12 = -1572$$

108. Tutkitaan, milloin $a_n = 8$.

a) $a_n = \dfrac{3n+1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{3n+1}{2} &= 8 \quad \Big| \cdot 2 \\ 3n+1 &= 16 \\ 3n &= 15 \quad \Big| :3 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

Siis $a_5 = 8$

b) $a_n = n^2 - 7n$

$$n^2 - 7n = 8$$
$$n^2 - 7n - 8 = 0$$

$$n = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$
$$n = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2}$$
$$n = \frac{7+9}{2} = 8 \quad \text{tai} \quad n = \frac{7-9}{2} = -1$$

$n = -1$ ei käy, koska $n > 0$

Siis $a_8 = 8$

c) $a_n = 2 + 3n^2$

$$
\begin{aligned}
2 + 3n^2 &= 8 \\
3n^2 &= 6 \qquad \big| :3 \\
n^2 &= 2 \\
n &= \pm\sqrt{2} = \pm 1{,}414...
\end{aligned}
$$

Koska *n* ei ole positiivinen kokonaisluku, niin luku 8 ei ole jonossa.

Vastaus: a) 5. jäsen b) 8. jäsen c) ei ole jonossa

109. a) 5, 10, 15, 20
Huomataan, että seuraava jäsen saadaan lisäämällä edelliseen luku 5.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 5 \\
a_2 &= 5 + 5 = 2 \cdot 5 = 10 \\
a_3 &= 5 + 5 + 5 = 3 \cdot 5 = 15 \\
a_4 &= 5 + 5 + 5 + 5 = 4 \cdot 5 = 20 \\
&\vdots \\
a_n &= 5n
\end{aligned}
$$

b) 100, 97, 94, 91

Huomataan, että seuraava jäsen saadaan vähentämällä edellisestä luku 3.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 100 \\
a_2 &= 100-3=97 \\
a_3 &= 100-3-3=100-2\cdot 3=94 \\
a_4 &= 100-3-3-3=100-3\cdot 3=91 \\
&\vdots \\
a_n &= 100-(n-1)\cdot 3=100-3n+3=-3n+103
\end{aligned}$$

c) $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$

Huomataan, että seuraava jäsen saadaan jakamalla edellinen luvulla 10 eli kertomalla luvulla $\frac{1}{10}$.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 1\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{10} \\
a_3 &= 1\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\left(\frac{1}{10}\right)^2=\frac{1}{100} \\
a_4 &= 1\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\left(\frac{1}{10}\right)^3=\frac{1}{1000} \\
&\vdots \\
a_n &= \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}=\frac{1}{10^{n-1}}
\end{aligned}$$

d) -3, 3, -3, 3

Huomataan, että seuraava saadaan kertomalla edellinen jäsen luvulla -1.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -3 \\
a_2 &= -3\cdot(-1) = 3 \\
a_3 &= -3\cdot(-1)\cdot(-1) = -3\cdot(-1)^2 \\
a_4 &= -3\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -3\cdot(-1)^3 \\
&\vdots \\
a_n &= -3\cdot(-1)^{n-1} \\
&\text{tai} \\
a_n &= 3\cdot(-1)\cdot(-1)^{n-1} = 3\cdot(-1)^{n-1+1} = 3\cdot(-1)^n
\end{aligned}
$$

110. Asiakasmäärä

- alussa $a_1 = 150$
- kuukauden kuluttua $a_2 = 1{,}02\cdot 150$
- 2 kuukauden kuluttua $a_3 = 1{,}02^2\cdot 150$
- 3 kuukauden kuluttua $a_4 = 1{,}02^3\cdot 150$

$\vdots$

- 12 kk kuluttua $a_{13} = 1{,}02^{12}\cdot 150 = 190{,}236... < 200$

Siis asiakasmäärä ei ylitä 200 asiakkaan rajaa.

Vastaus: Ei ylitä

111. Elektronikuorella olevien elektronien määrä on $a_n = 2n^2$.

a) Sisimmällä kuorella on elektroneja $a_1 = 2 \cdot 1^2 = 2$ (kpl).

b) Lasketaan milloin $a_n = 98$.

$$
\begin{aligned}
2n^2 &= 98 \quad |:2 \\
n^2 &= 49 \\
n &= \pm 7
\end{aligned}
$$

Koska n on positiivinen kokonaisluku, niin $n = 7$.
Siis 7. kuorella on elektroneja 98.

Vastaus: 7. kuorelle

2.2 Aritmeettinen lukujono

112. a) Differenssi d on peräkkäisten jäsenten erotus eli
$d = a_2 - a_1 = 6 - (-8) = 14$

b) $a_{11} = a_6 + (11 - 6)d$

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= 42 + 5d = 22 \\
42 + 5d &= 22 \\
5d &= -20 \quad |: 5 \\
d &= -4
\end{aligned}
$$

Vastaus: a) 14 b) -4

113. a) 3, 7, 11
Huomataan, että peräkkäisten jäsenten erotus on 4 eli $d = 4$, joten jono on aritmeettinen.

b) -2, -8, -14
Huomataan, että peräkkäisten jäsenten erotus on -6 eli $d = -6$, joten jono on aritmeettinen.

c) 28, 22, 18
Huomataan, että peräkkäisten jäsenten erotus ei ole aina sama ($22 - 28 = -6$, $18 - 22 = -4$), joten jono ei ole aritmeettinen.

d) -15, 3, 21
Huomataan, että peräkkäisten jäsenten erotus on 18 eli $d = 18$, joten jono on aritmeettinen.

Vastaus: a) kyllä b) kyllä c) ei d) kyllä

114. Differenssi $d = a_2 - a_1 = \frac{22}{35} - {}^{5)}\frac{3}{7} = \frac{22-15}{35} = \frac{7}{35}{}^{(7} = \frac{1}{5}$

115. a) $a_1 = 3$, $d = 2$

Yleinen jäsen:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 3 + (n-1)\cdot 2 \\ &= 3 + 2n - 2 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

b) $a_1 = 4$, $d = 5$

Yleinen jäsen:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 4 + (n-1)\cdot 5 \\ &= 4 + 5n - 5 \\ &= 5n - 1 \end{aligned}$$

116. Aritmeettinen jono -32, -27, -22, …
a) Lasketaan yleistä jäsentä varten differenssi

$$d = -22 - (-27) = -27 - (-32) = 5$$

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ &= -32 + (n-1)\cdot 5 \\ &= -32 + 5n - 5 \\ &= 5n - 37 \end{aligned}$$

b) 34. jäsen on $a_{34} = 5 \cdot 34 - 37 = 133$

117. a) $a_1 = 8$ ja $a_2 = -1$
Saadaan, että $d = a_2 - a_1 = -1 - 8 = -9$

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 8 + (n-1)\cdot(-9) \\ &= 8 - 9n + 9 \\ &= -9n + 17 \end{aligned}$$

b) $a_1 = -3$ ja $a_2 = -5$
Saadaan, että $d = a_2 - a_1 = -5 - (-3) = -2$

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= -3 + (n-1)\cdot(-2) \\ &= -3 - 2n + 2 \\ &= -2n - 1 \end{aligned}$$

118. a) Aritmeettinen jono 15, 19, 23, …

Määritetään ensin yleinen jäsen, jonka avulla saadaan 120. jäsen.

Differenssi $d = 23 - 19 = 19 - 15 = 4$
Ensimmäinen jäsen $a_1 = 15$

Saadaan yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 15 + (n-1)\cdot 4 \\ &= 15 + 4n - 4 \\ &= 4n + 11 \end{aligned}$$

120. jäsen: $a_{120} = 4\cdot 120 + 11 = 491$

b) $a_1 = -17$ ja $a_2 = -19$
Määritetään ensin yleinen jäsen, joka avulla saadaan 120. jäsen.

Differenssi $d = -19 - (-17) = -2$

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= -17 + (n-1) \cdot (-2) \\ &= -17 - 2n + 2 \\ &= -2n - 15 \end{aligned}$$

120. jäsen: $a_{120} = -2 \cdot 120 - 15 = -255$

119. Aritmeettisen jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat 211, 204, 197.
Määritetään yleinen jäsen. Lasketaan ensin differenssi *d*.

$$d = 197 - 204 = 204 - 211 = -7$$
$$a_1 = 211$$

Yleinen jäsen on siis

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_n &= 211 + (n-1) \cdot (-7) \\ &= 211 - 7n + 7 \\ &= -7n + 218 \end{aligned}$$

a) Lasketaan, millä arvolla n saadaan $a_n = -2029$

$$\begin{aligned} -7n + 218 &= -2029 \\ -7n &= -2247 \quad |:(-7) \\ n &= 321 \end{aligned}$$

Luku on siis 321. jäsen.

b) Luvut ovat positiivisia, kun $a_n > 0$.

$$\begin{aligned} -7n + 218 &> 0 \\ -7n &> -218 \quad |:(-7) \\ n &< 31{,}142... \end{aligned}$$

Siis kun $n \leq 31$, jonon jäsenet ovat positiivisia. Positiivisia lukuja on siis 31 kpl.

Vastaus: a) 321. jäsen b) 31

120. a) 5, 10, 15, 20

Aritmeettinen jono: $a_1 = 5$ ja $d = 5$

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 5 + (n-1)\cdot 5 \\ &= 5 + 5n - 5 \\ &= 5n \end{aligned}$$

Lasketaan, milloin $a_n = 885$.

$$\begin{aligned} a_n &= 885 \\ 5n &= 885 \quad \big| :5 \\ n &= 177 \end{aligned}$$

Siis $a_{177} = 885$

b) 17, 24, 31, 38

Aritmeettinen jono: $a_1 = 17$ ja $d = 7$

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 17 + (n-1)\cdot 7 \\ &= 17 + 7n - 7 \\ &= 7n + 10 \end{aligned}$$

Lasketaan, milloin $a_n = 885$.

$$\begin{aligned} a_n &= 885 \\ 7n + 10 &= 885 \\ 7n &= 875 \qquad \big| :7 \\ n &= 125 \end{aligned}$$

Siis $a_{125} = 885$.

Vastaus: a) 177. jäsen b) 125. jäsen

121. a) $a_1 = 4$ ja $d = -4$

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 4 + (n-1)\cdot(-4) \\ &= 4 - 4n + 4 \\ &= -4n + 8 \end{aligned}$$

Lasketaan, milloin $a_n = -520$.

$$\begin{aligned} -4n + 8 &= -520 \\ -4n &= -528 \qquad \big| :(-4) \\ n &= 132 \end{aligned}$$

Siis $a_{132} = -520$.

b) $a_1 = -1000$ ja $d = 3$

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= -1000 + (n-1)\cdot 3 \\ &= -1000 + 3n - 3 \\ &= 3n - 1003 \end{aligned}$$

Lasketaan milloin $a_n = -520$.

$$\begin{aligned} 3n - 1003 &= -520 \\ 3n &= 483 \quad \big| :3 \\ n &= 161 \end{aligned}$$

Siis $a_{161} = -520$.

Vastaus: a) 132. jäsen b) 161. jäsen

122. Aritmeettinen lukujono $a_1 = 95$ ja $d = -7$

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= 95 + (n-1) \cdot (-7) \\ &= 95 - 7n + 7 \\ &= -7n + 102 \end{aligned}$$

a) Lasketaan, milloin $a_n = 0$.

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ -7n + 102 &= 0 \\ -7n &= -102 \quad \big| :(-7) \\ n &= 14{,}57... \end{aligned}$$

Koska *n* ei ole positiivinen kokonaisluku, niin luku 0 ei kuulu jonoon.

b) Lasketaan, milloin $a_n = -346$.

$$\begin{aligned} a_n &= -346 \\ -7n + 102 &= -346 \\ -7n &= -448 \qquad \Big| :(-7) \\ n &= 64 \end{aligned}$$

Koska *n* on positiivinen kokonaisluku, niin luku -346 kuuluu jonoon.

Vastaus: a) ei ole b) kyllä

123. Aritmeettinen jono $d = 4$, $a_{15} = 44$

a) Yleinen jäsen on $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$.

Sijoitetaan $n = 15$ ja $d = 4$

$$\begin{aligned} a_{15} = a_1 + (15-1)\cdot 4 &= 44 \\ a_1 + 14\cdot 4 &= 44 \\ a_1 + 56 &= 44 \\ a_1 &= -12 \end{aligned}$$

b) Edellisen kohdan perusteella tiedetään, että $a_1 = -12$. Lisäksi tiedetään, että $d = 4$.

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= -12 + (n-1)\cdot 4 \\ &= -12 + 4n - 4 \\ &= 4n - 16 \end{aligned}$$

Vastaus: a) -12 b) $a_n = 4n - 16$

124. Aritmeettinen jono, jossa $a_{50} = -278$ ja $a_{55} = -308$

a) Annettujen tietojen perusteella saadaan

$$\begin{aligned} a_{50} + 5d &= a_{55} \\ -278 + 5d &= -308 \\ 5d &= -30 \quad \Big| :5 \\ d &= -6 \quad \text{(differenssi)} \end{aligned}$$

Koska $a_n = a_1 + (n-1)d$, niin esimerkiksi

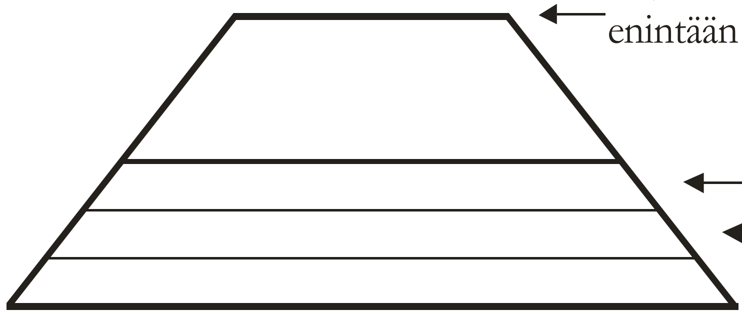
$$\begin{aligned} a_{50} = a_1 + (50-1)\cdot(-6) &= -278 \\ a_1 + 49\cdot(-6) &= -278 \\ a_1 - 294 &= -278 \\ a_1 &= 16 \end{aligned}$$

b) Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ &= 16 + (n-1)\cdot(-6) \\ &= 16 - 6n + 6 \\ &= -6n + 22 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $a_1 = 16$, $d =$ - 6 b) $a_n = 4n - 16$

125. Hahmotellaan tilannekuva.



Kivien lukumäärät muodostavat aritmeettisen jonon:
$a_1 = 1480$ ja $d = -50$

Jonon yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 1480 + (n-1)\cdot(-50) \\ &= 1480 - 50n + 50 \\ &= -50n + 1530 \end{aligned}$$

Ylimmässä kerroksessa on enintään 50 kiveä, koska silloin kerrosten muodostumista ei voida enää jatkaa ($d = -50$).

Lasketaan siis, milloin $a_n = 50$.

$$
\begin{aligned}
a_n &= 50 \\
-50n + 1530 &= 50 \\
-50n &= -1480 \qquad \big| :(-50) \\
n &= 29{,}6
\end{aligned}
$$

Jos $n = 29$, niin ylimmässä kerroksessa on kiviä

$$a_{29} = -50 \cdot 29 + 1530 = 80 > 50.$$

Jos $n = 30$, niin ylimmässä kerroksessa on kiviä

$$a_{30} = -50 \cdot 30 + 1530 = 30 < 50.$$

Tällöin seuraavaa kerrosta ei voida enää muodostaa. Päällimmäisessä 30. kerroksessa on siis 30 kiveä.

Vastaus: Ylin kerros on 30. kerros. Siinä on 30 kiveä.

126. Laina 4200 €, lyhennys 200 €

Tutkitaan jäljellä olevaa lainamäärää.

Lyhennys	**Lainaa jäljellä (€)**
1. lyhennys	$4200 - 200 = 4000$
2. lyhennys	$4200 - 2 \cdot 200 = 3800$
3. lyhennys	$4200 - 3 \cdot 200 = 3600$
$\vdots$	$\vdots$
n. lyhennys	$4200 - n \cdot 200$

Lasketaan, milloin laina lyhennetty loppuun eli jäljellä 0 €.

$$\begin{aligned} 4200 - 200n &= 0 \\ -200n &= -4200 \qquad \big| :(-200) \\ n &= 21 \end{aligned}$$

Siis 21. lyhennyksen jälkeen.

Yleinen jäsen on siis $a_n = 4200 - 200n$, $n = 1, 2, 3, \ldots, 21$

b) Edellä käy ilmi, että 21 kuukauden (lyhennyksen) jälkeen laina on maksettu takaisin.

Vastaus: a) $a_n = 4200 - 200n$ b) 21 kuukauden kuluttua

127. Aritmeettinen jono: $a_1 = 50$ ja $a_6 = 40$

Yleinen jäsen on $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ eli saadaan

$$a_6 = a_1 + (6-1) \cdot d = 50 + 5d\,.$$

$$\begin{aligned} a_6 &= 40 \\ 50 + 5d &= 40 \\ 5d &= -10 \quad \big| :5 \\ d &= -2 \end{aligned}$$

15. kerroksessa on halkoja

$$\begin{aligned} a_{15} &= a_1 + (15-1) \cdot d \\ &= 50 + 14 \cdot (-2) \\ &= 22 \ \text{(halkoa)} \end{aligned}$$

Vastaus: 22 halkoa

128. Tutkitaan Kroisoksen sijoitusten kehitystä.

Kuukaudet	**Sijoitettu summa (€)**
1	100
2	$100+30=130$
3	$100+30+30=100+2\cdot 30=160$
4	$100+3\cdot 30=190$
5	$100+4\cdot 30=220$
$\vdots$	$\vdots$
n	$100+(n-1)\cdot 30$

a) Taulukon perusteella saadaan yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= 100+(n-1)\cdot 30 \\ &= 100+30n-30 \\ &= 30n+70 \text{ (€)} \end{aligned}$$

b) 4 vuoden eli $4\cdot 12=48$ kuukauden kuluttua

$$a_{48}=30\cdot 48+70=1510 \text{ (€)}$$

Vastaus: a) $a_n=30n+70$ b) 1510 €

129. Määritetään jonon yleinen jäsen Tutkitaan lääkeannoksen vähenemistä, kun $a_1 = 400\,\text{mg}$ ja $d = -25\,\text{mg}$.

Päivät	**Lääkeannos (mg)**
1	400
2	$400 - 25 = 375$
3	$400 - 2 \cdot 25 = 350$
4	$400 - 3 \cdot 25 = 325$
$\vdots$	$\vdots$
n	$400 - (n-1) \cdot 25$

Taulukon perusteella saadaan yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= 400 - (n-1) \cdot 25 \\ &= 400 - 25n + 25 \\ &= -25n + 425 \end{aligned}$$

a) 10. päivän kuluttua annos on $a_{10} = -25 \cdot 20 + 425 = 175$ (mg)

b) Lääkekuuri loppuu, kun viimeinen annos on 25 (mg).

$$\begin{aligned} a_n &= 25 \\ -25n + 425 &= 25 \\ -25n &= -400 \qquad \Big| :(-25) \\ n &= 16 \end{aligned}$$

17. päivänä ei enää oteta lääkettä eli kuuri kestää 16 päivää.

Vastaus: a) 175 mg　　　　b) 16 päivää

130. a) -10, -4 ja 2

Aritmeettinen jono: $a_1 = -10$ ja $d = 6$ $\left(2-(-4) = -4-(-10)\right)$

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \left(n-1\right)\cdot d \\ &= -10 + \left(n-1\right)\cdot 6 \\ &= -10 + 6n - 6 \\ &= 6n - 16 \end{aligned}$$

b) 130, 119 ja 108

Aritmeettinen jono: $a_1 = 130$ ja $d = -11$ $\left(108-119 = 119-130\right)$

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \left(n-1\right)\cdot d \\ &= 130 + \left(n-1\right)\cdot (-11) \\ &= 130 - 11n + 11 \\ &= -11n + 141 \end{aligned}$$

c) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{6}$ ja $\dfrac{7}{6}$

Aritmeettinen jono: $a_1 = \dfrac{1}{2}$ ja $d = \dfrac{2}{6}$ $\left(\dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{6} - \dfrac{5}{6}\right)$

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{2}{6} \\ &\overset{3)}{=} \frac{1}{2} + \frac{2}{6}n - \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3}n + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

131. a) -26, -10, 6

Aritmeettinen jono: $a_1 = -26$ ja $d = 6 - (-10) = -10 - (-26) = 16$

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= -26 + (n-1) \cdot 16 \\ &= -26 + 16n - 16 \\ &= 16n - 42 \end{aligned}$$

Tutkitaan, onko $a_n = 102$.

$$\begin{aligned} a_n &= 102 \\ 16n - 42 &= 102 \\ 16n &= 144 \quad \big| :16 \\ n &= 9 \end{aligned}$$

Siis $a_9 = 102$.

b) 999, 995, 991

Aritmeettinen jono: $a_1 = 999$ ja $d = 991 - 995 = 995 - 999 = -4$

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= 999 + (n-1) \cdot (-4) \\ &= 999 - 4n + 4 \\ &= -4n + 1003 \end{aligned}$$

Tutkitaan, onko $a_n = 102$.

$$\begin{aligned} a_n &= 102 \\ -4n + 1003 &= 102 \\ -4n &= -901 \quad \big| :(-4) \\ n &= 225{,}25 \end{aligned}$$

Koska *n* ei ole positiivinen kokonaisluku, niin luku 102 ei ole jonon jäsen.

Vastaus: a) 9. jäsen b) ei ole

132. Aritmeettinen jono: $d = -7$ ja $a_9 = -51$

Yleinen jäsen $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Sijoitetaan $n = 9$, $d = -7$ ja $a_9 = -51$, jolloin saadaan

$$
\begin{aligned}
a_9 = a_1 + (9-1) \cdot (-7) &= -51 \\
a_1 + 8 \cdot (-7) &= -51 \\
a_1 &= 5
\end{aligned}
$$

Lasketaan 1500. jäsen yleisen jäsenen avulla

$$
\begin{aligned}
a_{1500} &= a_1 + (1500-1) \cdot d \\
&= 5 + 1499 \cdot (-7) \\
&= -10488
\end{aligned}
$$

Vastaus: $a_{1500} = -10488$

133. Koska juoksulenkki kasvaa joka viikko saman verran, *d*, muodostuu aritmeettinen jono.

1. viikko: $a_1 = 3{,}2\,\text{km} = 3200\,\text{m}$
differenssi d vakio
3. viikko: $a_3 = 4{,}0\,\text{km} = 4000\,\text{m}$

Yleinen jäsen on muotoa $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$, joten

$$a_3 = a_1 + (3-1)\cdot d = 3200 + 2d$$

$$\begin{aligned} 3200 + 2d &= 4000 \\ 2d &= 800 \quad \Big| :2 \\ d &= 400 \text{ (m)} = 0{,}4 \text{ (km)} \end{aligned}$$

Siis yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= 3{,}2 + (n-1)\cdot 0{,}4 \\ &= 3{,}2 + 0{,}4n - 0{,}4 \\ &= 0{,}4n + 2{,}8 \end{aligned}$$

Lasketaan yleisen jäsenen avulla, milloin $a_n = 15$ (km).

$$\begin{aligned} 0{,}4n + 2{,}8 &= 15 \\ 0{,}4n &= 12{,}2 \,\Big|:0{,}4 \\ n &= 30{,}5 \end{aligned}$$

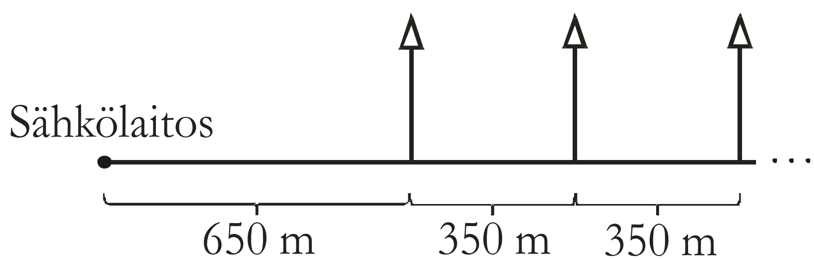
Jos $n = 30$, niin lenkin pituus on $a_{30} = 0{,}4\cdot 30 + 2{,}8 = 14{,}8 < 15$ (km)

Jos $n = 31$, niin lenkin pituus on $a_{31} = 0{,}4 \cdot 31 + 2{,}8 = 15{,}2 > 15$ (km).

Lenkin pituus ylittää 15 km 31. viikolla.

Vastaus: 31. viikolla

134. Hahmotellaan tilannekuva.



Tutkitaan pylväiden etäisyyksiä sähkölaitoksesta taulukon avulla.

Pylväs	**Etäisyys (m)**
1	650
2	$650 + 350$
3	$650 + 2 \cdot 350$
$\vdots$	$\vdots$
n	$650 + (n-1) \cdot 350$

Aritmeettinen jono: $a_1 = 650$ ja $d = 350$, jolloin yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= 650 + (n-1)\cdot 350 \\ &= 650 + 350n - 350 \\ &= 350n + 300 \end{aligned}$$

a) Lasketaan jonon 50. jäsen yleisen jäsenen avulla

$$a_{50} = 350\cdot 50 + 300 = 17800\,(\mathrm{m}) = 17{,}8\,(\mathrm{km})$$

b) Tutkitaan, milloin $a_n = 45{,}1\ \mathrm{km} = 45100\ \mathrm{m}$.

$$\begin{aligned} a_n &= 45100 \\ 350n + 300 &= 45100 \\ 350n &= 44800 \quad \big| :350 \\ n &= 128 \end{aligned}$$

Siis $a_{128} = 45100\ \mathrm{m}$ eli 128. pylväs on 45,1 km etäisyydellä.

Vastaus: a) 17,8 km päässä b) 128. pylväs

2.3 Aritmeettinen summa

135. Aritmeettinen summa

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

a)

$n = 11,\ a_1 = 2,\ a_{11} = 52$ aritmeettinen summa

$$S_{11} = 11 \cdot \frac{2+52}{2} = 11 \cdot \frac{54}{2} = 297$$

b)

$n = 7,\ a_1 = -90,\ a_7 = -60$ aritmeettinen summa

$$S_7 = 7 \cdot \frac{-90+(-60)}{2} = 7 \cdot \frac{-150}{2} = -525$$

c)

$n = 9999,\ a_1 = 1,\ a_{9999} = 9999$

$$S_{9999} = 9999 \cdot \frac{1+9999}{2} = 49995000$$

d)

$n = 100,\ a_1 = 1,\ a_{100} = 100$

$$S_{100} = 100 \cdot \frac{1+100}{2} = 100 \cdot \frac{101}{2} = 5050$$

136. a) yleinen jäsen $a_n = 5n - 2$ ja $a_1 = 5 \cdot 1 - 2 = 3$
Yleisen jäsenen avulla saadaan $a_{25} = 5 \cdot 25 - 2 = 123$

$$S_{25} = 25 \cdot \frac{3+123}{2} = 25 \cdot \frac{126}{2} = 1575$$

b) yleinen jäsen $a_n = 17 - 6n$ ja $a_1 = 17 - 6 \cdot 1 = 11$
Yleisen jäsenen avulla saadaan $a_{25} = 17 - 6 \cdot 25 = -133$

$$s_{25} = 25 \cdot \frac{11 + (-133)}{2} = 25 \cdot \frac{-122}{2} = -1525$$

137. a) Aritmeettinen jono 12, 15, 18, 21

$a_1 = 12$ ja $d = 15 - 12 = 21 - 18 = 3$

Lasketaan ensin jonon 50. jäsen a_{50}.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$
$$a_{50} = 12 + 49 \cdot 3 = 159$$

$$S_{50} = 50 \cdot \frac{12+159}{2} = 4275$$

b) Aritmeettinen jono 240, 227, 214, 201

$$a_1 = 240 \text{ ja } d = 227 - 240 = 201 - 214 = -13$$

Lasketaan ensin jonon 50. jäsen a_{50}.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$
$$a_{50} = 240 + 49 \cdot (-13) = -397$$

$$S_{50} = 50 \cdot \frac{240 + (-397)}{2} = -3925$$

138. a) $-32 + (-28) + (-24) + ... + 96$

Aritmeettinen summa $a_1 = -32$ ja $d = 4$

Lasketaan ensin yleisen jäsenen avulla, monesko jäsen luku 96 on.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ -32 + (n-1) \cdot 4 &= 96 \\ -32 + 4n - 4 &= 96 \\ 4n &= 132 \quad \Big| :4 \\ n &= 33 \end{aligned}$$

Siis $a_{33} = 96$

$$S_{33} = 33 \cdot \frac{-32 + 96}{2} = 33 \cdot \frac{64}{2} = 1056$$

b) $3+19+35+51+...+1507$

Aritmeettinen summa, jossa $a_1 = 3$ ja $d = 16$.

Lasketaan ensin yleisen jäsenen avulla, monesko jäsen luku 1507 on.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$
$$3+(n-1)\cdot 16 = 1507$$
$$3+16n-16 = 96$$
$$16n = 1520 \quad |:16$$
$$n = 95$$

Siis $a_{95} = 1507$.

$$S_{95} = 95 \cdot \frac{3+1507}{2} = 95 \cdot \frac{1510}{2} = 71725$$

139. a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+...+10\frac{1}{2}$

Aritmeettinen summa, jossa $a_1 = \frac{1}{3}$ ja $d = \frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}-\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Lasketaan ensin yleisen jäsenen avulla, monesko jäsen luku $10\frac{1}{2}$ on.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ \frac{1}{3} + (n-1)\cdot\frac{1}{6} &= 10\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6}n - \frac{1}{6} &= 10\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}n &= 10\frac{1}{3} \quad \Big| :\frac{1}{6} \\ n &= 62 \end{aligned}$$

Siis $a_{62} = 10\frac{1}{2}$

$$S_{62} = 62\cdot\frac{\frac{1}{3}+10\frac{1}{2}}{2} = 62\cdot\frac{10\frac{5}{6}}{2} = 335\frac{5}{6}$$

140. Lukujono 2, 26, 50, … on aritmeettinen, koska

$$d = 26-2 = 50-26 = 24$$

Lisäksi $a_1 = 2$, joten yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ a_n &= 2 + (n-1)\cdot 24 \\ &= 2 + 24n - 24 \\ &= 24n - 22 \end{aligned}$$

Merkitään tarvittavien lukujen lukumäärää kirjaimella *n*. Tällöin

$$s_n = n \cdot \frac{2 + a_n}{2} = 25000$$

$$n \cdot \frac{2 + 24n - 22}{2} = 25000$$

$$n \cdot \frac{24n - 20}{2} = 25000 \quad \big| \cdot 2$$

$$n(24n - 20) = 50000$$

$$24n^2 - 20n - 50000 = 0 \quad \big| :4$$

$$6n^2 - 5n - 12500 = 0$$

$$n = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-12500)}}{2 \cdot 6}$$

$$n = \frac{5 \pm \sqrt{300025}}{12}$$

$$n = 46{,}062... \quad \text{tai} \quad n = -45{,}228...$$

$n = -45{,}228...$ ei käy, koska $n > 0$.

Lukujen määrä *n* on positiivinen kokonaisluku.

Edellä saatiin, että summa $S_n = n \cdot \dfrac{24n - 20}{2}$

Jos $n = 46$, niin

$$S_{46} = 46 \cdot \frac{24 \cdot 46 - 20}{2} = 24932 < 25000$$

Jos $n = 47$, niin summa

$$S_{47} = 47 \cdot \frac{24 \cdot 47 - 20}{2} = 26038 > 25000$$

Lukuja täytyy siis olla vähintään 47 kpl. jotta summa **ylittää** 25000.

Vastaus: Jäseniä jonossa vähintään 47.

141. $1+2+3+...+m \leq 462241$

Epäyhtälön vasen puoli on aritmeettinen summa, jossa

$$a_1 = 1,\ d = 1,\ m \text{ kpl lukuja},\ m > 0$$

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{1+m}{2} &\leq 462241 \qquad \Big| \cdot 2 \\ m(1+m) &\leq 924482 \\ m + m^2 - 924482 &\leq 0 \end{aligned}$$

Ratkaistaan ensin vastaava yhtälö: $m^2 + m - 924482 = 0$

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-924482)}}{2 \cdot 1}$$

$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{3697929}}{2}$$

$$m = \frac{-1+1923}{2} = 961 \text{ tai } m = \frac{-1-1923}{2} = -962$$

$m = -962$ ei käy, koska $m > 0$

Lukuja on siis $m = 961$ (kpl), jolloin $S_{961} = 462241$.

Tämä on samalla suurin luku m, sillä tätä pienemmillä arvoilla summa $s < 462241$.

Vastaus: $m = 961$

142. Aritmeettinen jono, jonka yleinen jäsen on $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$.
Tiedetään, että

$$\begin{aligned} S_{99} &= 17919 \\ a_{99} &= 524 \end{aligned}$$

a) Yleisen jäsenen avulla saadaan $a_{99} = a_1 + (99-1)\cdot d = a_1 + 98d$

$$a_{99} = a_1 + 98d = 524$$

Aritmeettisen summan avulla saadaan

$$S_{99} = 99 \cdot \frac{a_1 + a_{99}}{2} = 17919$$

Sijoitetaan yhtälöön $a_{99} = 524$

$$\begin{aligned} 99 \cdot \frac{a_1 + 524}{2} &= 17919 \,\Big|\cdot 2 \\ 99(a_1 + 524) &= 35838 \\ 99a_1 + 51876 &= 35838 \\ 99a_1 &= -16038 \,\Big|: 99 \\ a_1 &= -162 \end{aligned}$$

b) Yleiseen jäseneen tarvitaan vielä differenssi.

Edellä saatiin $a_{99} = a_1 + 98d = 524$. Sijoitetaan $a_1 = -162$ -

$$\begin{aligned} -162 + 98d &= 524 \\ 98d &= 686 \quad |:98 \\ d &= 7 \end{aligned}$$

Yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= -162 + (n-1)\cdot 7 \\ &= -162 + 7n - 7 \\ &= 7n - 169 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $a_1 = -162$ b) $a_n = 7n - 169$

143. Aritmeettinen jono: $d = 11$ ja $S_{40} = 8700$

Jonon 40. jäsen (viimeinen jäsen) on muotoa

$$a_{40} = a_1 + (40-1)\cdot 11 = a_1 + 429$$

Summan lausekkeen avulla saadaan

$$
\begin{aligned}
S_{40} &= 8700 \\
40 \cdot \frac{a_1 + a_{40}}{2} &= 8700 \\
20(a_1 + a_1 + 429) &= 8700 \qquad |:20 \\
2a_1 + 429 &= 435 \\
2a_1 &= 6 \qquad |:2 \\
a_1 &= 3
\end{aligned}
$$

Yleinen jäsen on siis:

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\
&= 3 + (n-1) \cdot 11 \\
&= 3 + 11n - 11 \\
&= 11n - 8
\end{aligned}
$$

144. $a_1 = 125$

Myynti kasvoi viikoittain 25 kpl eli $d = 25$.

a) Yleinen jäsen (tuotteita myytiin viikolla *n*)

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_n + (n-1) \cdot d \\
&= 125 + (n-1) \cdot 25 \\
&= 125 + 25n - 25 \\
&= 25n + 100 \ \text{(kpl)}
\end{aligned}
$$

10. viikolla myytiin $a_{10} = 25 \cdot 10 + 100 = 350$ (kpl)

b) Laskettava 18 viikon myynti yhteensä.

$$\begin{aligned} S_{18} &= 18 \cdot \frac{a_1 + a_{18}}{2} \qquad \mid a_{18} = 25 \cdot 18 + 100 = 550,\ a_1 = 125 \\ &= 18 \cdot \frac{125 + 550}{2} \\ &= 18 \cdot \frac{675}{2} \\ &= 6075 \end{aligned}$$

Vastaus: a) 350 kpl b) 6075 kpl

145. a) Kolmella jaolliset, kolminumeroiset luonnolliset luvut: ensimmäinen tällainen luku on 102. $\left(\frac{102}{3} = 34\right)$

Luvut muodostavat aritmeettisen jonon, jossa $d = 3$. Viimeinen luku on 999. $\left(\frac{999}{3} = 333\right)$

Lasketaan lukujen lukumäärä *n* yleisen jäsenen avulla.

Yleinen jäsen:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 102 + (n-1)\cdot 3 \\ &= 102 + 3n - 3 \\ &= 3n + 99 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3n + 99 &= 999 \quad \text{(viimeinen luku)} \\ 3n &= 900 \quad \Big| :3 \\ n &= 300 \end{aligned}$$

Siis $a_{300} = 999$

Summaksi saadaan

$$\begin{aligned} S_{300} &= 300 \cdot \frac{a_1 + a_{300}}{2} \\ &= 300 \cdot \frac{102 + 999}{2} \\ &= 165150 \end{aligned}$$

b) Neljällä jaolliset, kolminumeroiset luonnoliset luvut: ensimmäinen tällainen luku on 100. $\left(\frac{100}{4} = 25\right)$

Luvut muodostavat aritmeettisen jonon, jossa $d = 4$. Viimeinen luku on 996. $\left(\frac{999}{3} = 249\right)$

Lasketaan lukujen lukumäärä n yleisen jäsenen avulla

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 100 + (n-1)\cdot 4 \\ &= 100 + 4n - 4 \\ &= 4n + 96 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3n + 96 &= 996 \quad \text{(viimeinen luku)} \\ 4n &= 900 \quad \Big| :3 \\ n &= 225 \end{aligned}$$

Siis $a_{225} = 996$

Summaksi saadaan

$$\begin{aligned} S_{225} &= 225 \cdot \frac{a_1 + a_{225}}{2} \\ &= 225 \cdot \frac{100 + 996}{2} \\ &= 225 \cdot \frac{1096}{2} \\ &= 123300 \end{aligned}$$

Vastaus: a) 165150 b) 123300

146. $a_1 = 50\ \text{m}$, $d = 100\ \text{m}$, aritmeettinen jono

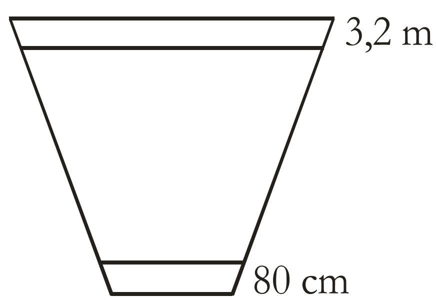
Lasketaan aluksi, kuinka pitkän matkan henkilö kävelee 30. päivänä.

$$\begin{aligned} a_{30} &= a_1 + (30-1)\cdot d \\ &= 50 + 29 \cdot 100 = 2950\ \text{(m)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{50} &= 30 \cdot \frac{a_1 + a_{30}}{2} = 30 \cdot \frac{50 + 2950}{2} = 30 \cdot \frac{3000}{2} \\ &= 45000\ \text{(m)} = 45\ \text{(km)} \end{aligned}$$

Vastaus: 45 km

147. Hahmotellaan tilannekuva.



a) Lyhin lauta on 80 cm, joten lasketaan monesko lauta se on.

Määritetään aluksi yleinen jäsen.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 320 + (n-1)\cdot(-5{,}0) \\ &= 320 - 5n + 5 \\ &= -5n + 325 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 80 \text{ (cm)} \\ -5n + 325 &= 80 \\ -5n &= -245 \qquad \big| :(-5) \\ n &= 49 \end{aligned}$$

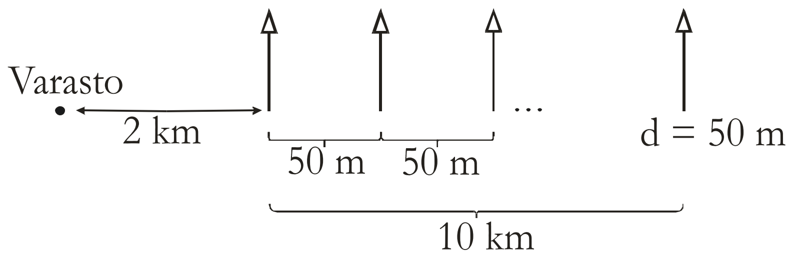
Laituriin tarvitaan siis 49 lautaa.

b) $a_1 = 320 \text{ cm}$
$a_{49} = 80 \text{ cm}$
$n = 49 \text{ (lautaa)}$

$$S_{49} = 49\cdot\frac{a_1 + a_{49}}{2} = 49\cdot\frac{80+320}{2} = 9800 \text{ (cm)} = 98 \text{ (m)}$$

Vastaus: a) 49 lautaa b) 98 m

148. Hahmotellaan tilannekuva.



Lasketaan, montako pylvästä 10 km osuudelle mahtuu. Jos oletetaan, että valaistavan osuuden molempiin päihin tulee pylväät, tarvitaan niitä

$$\frac{10000\ \text{m}}{50\ \text{m}}+1=201\ \ (\text{kpl})$$

Lyhin kuljetus voidaan suorittaa siten, että ensin viedään lähimmät kolme pylvästä. Edestakainen matka on $2(2000+100)\ \text{m}=4200\ \text{m}$.

Seuraavien kolmen pylvään kuljetusmatka on $2\cdot 150\ \text{m}=300\text{m}$ pidempi. Matka pitenee näin aina seuraavien kolmen pylvään mukaan 300 m.

Matkoja tehdään $\frac{201}{3}=67$.

1. matka: $a_1=4200\ \text{m}$
2. matka: $a_2=4200\ \text{m}+300\ \text{m}=4500\ \text{m}$
3. matka: $a_3=4200\ \text{m}+2\cdot 300\ \text{m}=4800\ \text{m}$

$\vdots$

67. matka: $a_{67}=4200\,\text{m}+(67-1)\cdot 300\,\text{m}=24000\text{m}$

Kokonaismatka on siis

$$\begin{aligned} S_{67} &= 67 \cdot \frac{a_1 + a_{67}}{2} = 67 \cdot \frac{4200 + 24000}{2} \text{ m} \\ &= 944700 \text{ m} \\ &\approx 945 \text{ km} \end{aligned}$$

Vastaus: 945 km

149. Ananastölkkien kappalemäärät noudattavat aritmeettista jonoa:

$a_1 = 1$
$a_2 = 4$
$d = 3$

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= 1 + (n-1) \cdot 3 \\ &= 1 + 3n - 3 \\ &= 3n - 2 \end{aligned}$$

n. kerroksessa siis tölkkejä $3n - 2$ kpl.

a) Tölkkejä on 230 kpl, joten $S_n = 230$.

$$\begin{aligned}
S_n &= 230 \\
n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} &= 230 \\
n \cdot \frac{1 + 3n - 2}{2} &= 230 \qquad \Big| \cdot 2 \\
n(3n-1) &= 460 \\
3n^2 - n - 460 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-460)}}{2 \cdot 3} \\
n &= \frac{1 \pm \sqrt{5521}}{6} \\
n &= 12{,}55\ldots \quad \text{tai} \quad n = -12{,}217\ldots
\end{aligned}$$

$n = -12{,}217\ldots$ ei käy, koska $n > 0$

Tölkeistä ei siis saada 13. kerrosta täyteen, joten kerroksia jää 12.

b) Lasketaan, montako tölkkiä on 12. kerroksessa.

$$a_{12} = 3 \cdot 12 - 2 = 34 \ \text{(kpl)}$$

c) $S_{12} = 12 \cdot \frac{a_1 + a_{12}}{2} = 12 \cdot \frac{1+34}{2} = 210$ (kpl)

Tölkkejä oli 230 kpl, joten yli jää $230 - 210 = 20$ (kpl)

Vastaus: a) 12 kerrosta b) 34 tölkkiä c) 20 tölkkiä

150. Merkitään n = 1. päivänä syötyjen kalojen lkm /kissa

Päivä	Yksi kissa syö kaloja (kpl)	8 kissaa syö kaloja (kpl)
1.	n	$8n$
2.	$n+1$	$8(n+1)$
3.	$n+2$	$8(n+2)$
4.	$n+3$	$8(n+3)$
5.	$n+4$	$8(n+4)$
		yht. 160

Saadaan siis yhtälö:

$$8n + 8(n+1) + 8(n+2) + 8(n+3) + 8(n+4) = 160$$

$$8\underbrace{[n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4)]}_{\substack{\text{Aritmeettinen summa} \\ a_1 = n,\ d = 1,\ a_5 = n+4}} = 160$$

$$8 \cdot \left(5 \cdot \frac{a_1 + a_5}{2}\right) = 160$$

$$8 \cdot \left(5 \cdot \frac{n + n + 4}{2}\right) = 160 \quad |:8$$

$$5 \cdot \frac{(2n + 4)}{2} = 20 \quad | \cdot 2$$

$$10n + 20 = 40$$

$$10n = 20 \quad |:10$$

$$n = 2$$

Siis kukin kissa söi 2 kalaa 1. päivänä eli yhteensä kissat söivät $8 \cdot 2 = 16$ (kalaa).

Vastaus: 16 kalaa

151. Tutkitaan auditorion istuimien lukumääriä eri riveillä.

Rivi	**Paikat (lkm.)**
1.	12
2.	$12 + 4$
3.	$12 + 2 \cdot 4$
$\vdots$	$\vdots$
n.	$12 + (n-1) \cdot 4 = 12 + 4n - 4 = 4n + 8$

Istuinpaikkojen lukumäärät muodostavat aritmeettisen jono $a_1 = 12$, $d = 4$.

Paikkoja yhteensä 352 eli $S_n = 352$.

$$
\begin{aligned}
S_n &= 352 \\
n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} &= 352 \\
n \cdot \frac{12 + 4n + 8}{2} &= 352 \qquad \Big| \cdot 2 \\
n(4n + 20) &= 704 \\
4n^2 + 20n - 704 &= 0 \qquad \Big| :4 \\
n^2 + 5n - 176 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-176)}}{2 \cdot 1} \\
n &= \frac{-5 \pm 27}{2} \\
n &= \frac{-5 + 27}{2} = 11 \quad \text{tai} \quad n = \frac{-5 - 27}{2} = -16
\end{aligned}
$$

$n = -16$ ei käy, koska $n > 0$

Auditoriossa on siis 11 penkkiriviä.

Vastaus: 11 penkkiriviä

152. a) $a_1 = 90$
$d = 82 - 90 = 74 - 82 = -8$
$n = 9$
$a_9 = 9$

Aritmeettinen summa:

$$S_9 = 9 \cdot \frac{90 + 26}{2} = 9 \cdot \frac{116}{2} = 522$$

b) $a_1 = -15$
$d = -12 - (-15) = -9 - (-12) = 3$
$n = 9$
$a_9 = 9$

Aritmeettinen summa:

$$S_9 = 9 \cdot \frac{-15 + 9}{2} = 9 \cdot \frac{-6}{2} = -27$$

153. a) $100+95+90+...+(-30)$, aritmeettinen summa, jossa

$$a_1 = 100$$
$$a_n = -30$$
$$d = 95-100 = 90-95 = -5$$

Lasketaan ensin, montako lukua (n) aritmeettisessa summassa on.

$$\begin{aligned} a_n = a_1 + (n-1)\cdot d &= -30 \\ 100+(n-1)\cdot(-5) &= -30 \\ 100-5n+5 &= -30 \\ -5n &= -135 \qquad \Big|:(-5) \\ n &= 27 \end{aligned}$$

$$S_{27} = 27\cdot\frac{100+(-30)}{2} = 945$$

b) $\frac{1}{4}+\frac{13}{36}+\frac{17}{36}+...+3\frac{17}{36}$, aritmeettinen summa, jossa

$$a_1 = \frac{1}{4}$$
$$a_n = 3\frac{17}{36}$$
$$d = \frac{13}{36}-\frac{1}{4} = \frac{17}{36}-\frac{13}{36} = \frac{1}{9}$$

Lasketaan ensin, montako lukua (n) aritmeettisessa summassa on.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d = -30 \\ \frac{1}{4} + (n-1)\cdot\frac{1}{9} &= 3\frac{17}{36} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{9}n - \frac{1}{9} &= \frac{125}{36} \\ \frac{1}{9}n &= 3\frac{1}{3} \qquad \Big| : \frac{1}{9} \\ n &= 30 \end{aligned}$$

$$S_{30} = 30\cdot\frac{\frac{1}{4} + 3\frac{17}{36}}{2} = 30\cdot\frac{3\frac{13}{18}}{2} = 55\frac{5}{6}$$

154. Aritmeettinen jono -5, -7, -9, …, jossa

$$\begin{aligned} a_1 &= -5 \\ d &= -7-(-5) = -9-(-7) = -2 \end{aligned}$$

Määritetään yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= -5 + (n-1)\cdot(-2) \\ &= -5 - 2n + 2 \\ &= -2n - 3 \end{aligned}$$

Aritmeettinen summa $S_n < -600$

Lasketaan ensin, montako lukua (*n*) tarvitaan, että $S_n = 600$.

$$
\begin{aligned}
n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} &= -600 \\
n \cdot \frac{-5 - 2n - 3}{2} &= -600 \qquad \Big| \cdot 2 \\
n(-2n - 8) &= -1200 \\
-2n^2 - 8n + 1200 &= 0 \qquad \Big| :(-2) \\
n^2 + 4n - 600 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-600)}}{2 \cdot 1} \\
n &= \frac{-4 \pm \sqrt{2416}}{2} \\
n &= 22{,}576... \quad \text{tai} \quad n = -26{,}576...
\end{aligned}
$$

$n = -26{,}576...$ ei käy, koska $n > 0$

Jos $n = 22$, niin

$$
\begin{aligned}
S_{22} &= 22 \cdot \frac{a_1 + a_{22}}{2} \\
&= 22 \cdot \frac{-5 + (-2 \cdot 22 - 3)}{2} \\
&= 22 \cdot \frac{-52}{2} \\
&= -572 > -600
\end{aligned}
$$

Jos $n = 23$, niin

$$\begin{aligned} S_{23} &= 23 \cdot \frac{a_1 + a_{23}}{2} \\ &= 23 \cdot \frac{-5 + (-2 \cdot 23 - 3)}{2} \\ &= 23 \cdot \frac{-54}{2} \\ &= -621 < -600 \end{aligned}$$

Summassa on siis oltava vähintään 23 lukua, että summa alittaa -600.

Vastaus: vähintään 23 lukua

155. Tutkitaan lääkkeen määriä eri päivinä.

Päivä	Annos (mg)
1.	125
2.	$125 - 5$
3.	$125 - 2 \cdot 5$
$\vdots$	$\vdots$
n.	$125 - (n-1) \cdot 5 = 125 - 5n + 5$
	$= 130 - 5n$

Lääkeen määrät noudattavat siis aritmeettista jonoa, jonka yleinen jäsen $a_n = 130 - 5n$.

a) Annos viimeisenä päivänä on siis 5 mg eli

$$\begin{aligned} 130 - 5n &= 5 \\ -5n &= -125 \qquad \Big| :(-5) \\ n &= 25 \end{aligned}$$

Kuuri kestää siis 25 päivää.

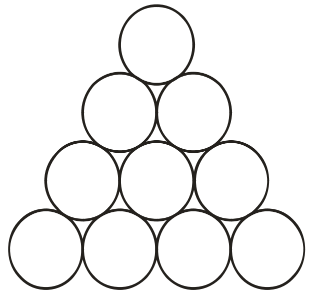
b) Lasketaan lääkemäärien summa eli aritmeettinen summa, jossa
$a_1 = 125$ (mg)
$n = 25$
$a_{25} = 5$ (mg)
$d = -5$ (mg)

Aritmeettinen summa

$$S_{25} = 25 \cdot \frac{125 + 5}{2} = 25 \cdot \frac{130}{2} = 1625 \text{ (mg)}$$

Vastaus: a) 25 päivää b) 1625 mg

156. Hahmotellaan tilannekuva.



Tukkien lukumäärät eri kerroksissa muodostavat aritmeettisen jonon, jossa

$a_1 = 1$
$d = 1$
kerroksia n kpl

Aritmeettinen summa, tukkeja yhteensä 171 eli

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 171$$

Muodostetaan yleinen jäsen a_n.

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 1 + (n-1) \cdot 1 = n$$

Summaksi saadaan siis

$$
\begin{aligned}
&n \cdot \frac{1+n}{2} = 171 \qquad \Big| \cdot 2 \\
&n(1+n) = 342 \\
&n^2 + n - 342 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-342)}}{2 \cdot 1} \\
&n = \frac{-1 \pm \sqrt{1369}}{2} \\
&n = \frac{-1 \pm 37}{2} \\
&n = \frac{-1+37}{2} = 18 \quad \text{tai} \quad n = \frac{-1-37}{2} = -19
\end{aligned}
$$

$n = -19$ ei käy, koska $n > 0$

Kerroksia on siis 18 (kpl).

Vastaus: 18 kerrosta

2.4 Geometrinen lukujono

157. a) 4, 20, 100

suhdeluku $\dfrac{100}{20} = \dfrac{20}{4} = 5 = q$

b) -9, 27, -81

suhdeluku $\dfrac{-81}{27} = \dfrac{27}{-9} = -3 = q$

c) 550, -440, 352

suhdeluku $\dfrac{352}{-440} = \dfrac{-440}{550} = \dfrac{-4}{5} = -0{,}8 = q$

d) $3, \dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{16}$

suhdeluku $\left.\begin{array}{l} \dfrac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{\cancel{3}}{16} \cdot \dfrac{4}{\cancel{3}} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{\frac{3}{4}}{3} = \dfrac{\cancel{3}}{4} \cdot \dfrac{1}{\cancel{3}} = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} q = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

158. a) $a_n = 4 \cdot 3^{n-1} = a_1 \cdot q^{n-1} \qquad q = 3$

$$a_1 = 4 \cdot 3^{1-1} = 4 \cdot 3^0 = 4$$

$$a_8 = 4 \cdot 3^{8-1} = 4 \cdot 3^7 = 8748$$

b) $a_n = -1 \cdot 0{,}2^{n-1} = a_1 \cdot q^{n-1} \qquad q = 0{,}2$

$$a_1 = -1 \cdot 0{,}2^{1-1} = -1 \cdot 0{,}2^0 = -1$$

$$a_8 = -1 \cdot 0{,}2^{8-1} = -1 \cdot 0{,}2^7 = -1{,}28 \cdot 10^{-5}$$

159. Geometrinen lukujono 5, 35, 245

a) Yleistä jäsentä varten tarvitaan ensimmäinen jäsen ja suhdeluku.

suhdeluku $\qquad q = \dfrac{35}{5} = \dfrac{245}{35} = 7$

ensimmäinen jäsen $\quad a_1 = 5$

Yleinen jäsen on siis $\qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot 7^{n-1}$

b) $a_7 = 5 \cdot 7^{7-1} = 5 \cdot 7^6 = 588245$

160. a) 12, -36, 108

Jono on geometrinen, koska

$$q = \frac{-36}{12} = \frac{108}{-36} = -3$$

9. jäsen $\quad a_9 = a_1 \cdot q^{9-1} = 12 \cdot (-3)^8 = 78732$

b) $-2, -1, -\frac{1}{2}$

Jono on geometrinen, koska

$$q = \frac{-1}{-2} = \frac{-\frac{1}{2}}{-1} = \frac{1}{2}$$

9. jäsen $\quad a_9 = a_1 \cdot q^{9-1} = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 = -0{,}0078125$

161. Geometrinen jono, jossa $q = 4$ ja $a_6 = -7168$

Yleisen jäsenen avulla saadaan

$$\begin{aligned} a_1 \cdot q^{6-1} &= a_6 \\ a_1 \cdot 4^5 &= -7168 \\ 1024a_1 &= -7168 \ |: 1024 \\ a_1 &= -7 \end{aligned}$$

162. a) Geometrinen lukujono, jossa $a_6 = 486$, $q = 3$

Yleisen jäsenen avulla saadaan

$$\begin{aligned} a_1 \cdot q^{6-1} &= a_6 \\ a_1 \cdot 3^5 &= 486 \\ 243a_1 &= 486 \ |: 243 \\ a_1 &= 2 \end{aligned}$$

b) Geometrinen lukujono, jossa $a_8 = -312500$, $a_1 = -4$

Yleisen jäsenen avulla saadaan

$$
\begin{aligned}
a_1 \cdot q^{8-1} &= a_8 \\
-4 \cdot q^7 &= -312500 \quad |:(-4) \\
q^7 &= 78125 \\
q &= \sqrt[7]{78125} \\
q &= 5
\end{aligned}
$$

163. Geometrinen jono

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 4 \\ a_5 &= 324 \end{aligned}\right\} a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ sijoitetaan } n = 5$$

$$
\begin{aligned}
a_1 \cdot q^{5-1} &= 324 \\
4q^4 &= 324 \quad |:4 \\
q^4 &= 81 \\
q &= \pm\sqrt[4]{81} \\
&= \pm 3
\end{aligned}
$$

10. jäsen on $\quad a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1}$

$$a_{10} = 4 \cdot 3^9 = 78732 \text{ (kun } q = 3) \text{ tai}$$

$$a_{10} = 4 \cdot (-3)^9 = -78732 \text{ (kun } q = -3)$$

164. a) 2, 4, 8, …

Jono on geometrinen, koska $q = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$.

Lasketaan yleisen jäsenen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ avulla, onko $a_n = 64$.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2^{n-1} &= 64 \quad && \mid :2 \\ 2^{n-1} &= 32 && \mid \ln \\ (n-1)\ln 2 &= \ln 32 && \mid :\ln 2 \\ n-1 &= \frac{\ln 32}{\ln 2} \\ n &= \frac{\ln 32}{\ln 2} + 1 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

Koska *n* on positiivinen kokonaisluku, niin luku 64 on 6. jäsen jonossa.

b) 32768, 16384, 8192, …

Jono on geometrinen, koska $q = \frac{8192}{16384} = \frac{16384}{32768} = \frac{1}{2}$

Lasketaan yleisen jäsenen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ avulla, onko $a_n = 64$.

$$
\begin{aligned}
32768 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= 64 && \Big| :32768 \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= \frac{1}{512} && \Big| \ln \\
(n-1)\ln\frac{1}{2} &= \ln\frac{1}{512} && \Big| :\ln\frac{1}{2} \\
n &= \frac{\ln\frac{1}{512}}{\ln\frac{1}{2}} + 1 \\
n &= 10
\end{aligned}
$$

Koska *n* on positiivinen kokonaisluku, niin luku 64 on 10. jäsen jonossa.

Vastaus: a) 6. jäsen b) 10. jäsen

165. Tutkitaan jonon yleisen jäsenen avulla, onko $a_n = 17496$.

a) 3, 36, 43

Jono on geometrinen, koska $q = \frac{36}{3} = \frac{432}{36} = 12$.

Yleisen jäsenen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ avulla saadaan

$$
\begin{aligned}
a_1 \cdot q^{n-1} &= 17496 \\
3 \cdot 12^{n-1} &= 17496 \quad \big| :3 \\
12^{n-1} &= 5832 \quad \big| \ln \\
(n-1)\ln 12 &= \ln 5832 \quad \big| :\ln 12 \\
n &= \frac{\ln 5832}{\ln 12} + 1 \\
n &= 4{,}485...
\end{aligned}
$$

Koska *n* ei ole positiivinen kokonaisluku, ei luku 17496 ole jonossa.

b) 8, 24, 72

Jono on geometrinen, koska $q=\dfrac{24}{8}=\dfrac{72}{24}=3$.

Yleisen jäsenen $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$ avulla saadaan

$$
\begin{aligned}
a_1\cdot q^{n-1} &= 17496 \\
8\cdot 3^{n-1} &= 17496 \quad \left|:8\right. \\
3^{n-1} &= 2187 \quad \left|\ln\right. \\
(n-1)\ln 3 &= \ln 2187 \quad \left|:\ln 3\right. \\
n &= \frac{\ln 2187}{\ln 3}+1 \\
n &= 8
\end{aligned}
$$

Koska *n* on positiivinen kokonaisluku, luku 17496 on jonossa.

Vastaus: a) ei b) kyllä

166. Geometrinen lukujono $a_4=54$, $a_{10}=39366$

a) Yleisen jäsenen avulla saadaan $a_4\cdot q^{10-4}=a_{10}$

$$
\begin{aligned}
54\cdot q^6 &= 39366 \quad \left|:54\right. \\
q^6 &= 729 \\
q &= \pm\sqrt[6]{729} \\
&= \pm 3
\end{aligned}
$$

b) Lasketaan ensin jonon ensimmäinen jäsen. Yleisen jäsenen avulla saadaan

$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$

Kun $q = 3$, niin

$$\begin{aligned} 54 &= a_1 \cdot 3^3 \\ 27a_1 &= 54 \;|: 27 \\ a_1 &= 2 \end{aligned}$$

Kun $q = -3$, niin

$$\begin{aligned} 54 &= a_1 \cdot (-3)^3 \\ -27a_1 &= 54 \;|: (-27) \\ a_1 &= -2 \end{aligned}$$

Kun $a_1 = 2$, niin $a_2 = 2 \cdot 3 = 6$.

Kun $a_1 = -2$, niin $a_2 = -2 \cdot (-3) = 6$.

Vastaus: a) $q = 3$ tai $q = -3$ b) 2 ja 6 tai -2 ja 6

167. Geometrinen lukujono: $a_3 = -16$, $a_8 = -512$.

Yleisen jäsenen avulla saadaan $a_3 \cdot q^{8-3} = a_8$

$$\begin{aligned} -16 \cdot q^5 &= -512 \;|: (-16) \\ q^5 &= 32 \\ q &= \sqrt[5]{32} \\ q &= 2 \end{aligned}$$

Määritetään ensimmäinen jäsen yleisen jäsenen avulla

$$
\begin{aligned}
a_1 \cdot q^2 &= a_3 \\
a_1 \cdot 2^2 &= -16 \\
4a_1 &= -16 \;|: 4 \\
a_1 &= -4
\end{aligned}
$$

Kun $a_1 = -4$, niin $a_2 = -4 \cdot 2 = -8$.

Vastaus: -4 ja -8

168. Paperiarkkien pinta-alat muodostavat geometrisen jonon.

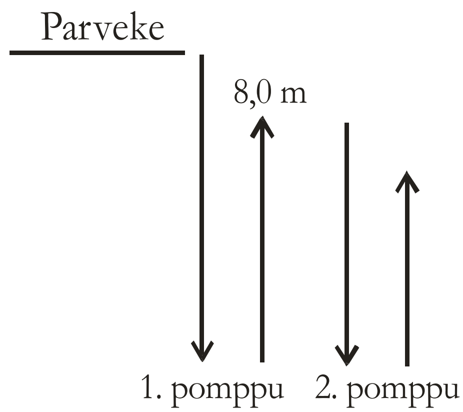
$$
\begin{array}{ccccccc}
\text{A0} & & \text{A1} & & \text{A2} & & \text{A3} \\
1\ \text{m}^2 & \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\ \text{m}^2 & \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} & \frac{1}{4}\ \text{m}^2 & \xrightarrow{\cdot\frac{1}{2}} & \frac{1}{8}\ \text{m}^2
\end{array}
$$

Koska lukujonon suhdeluku $q = \frac{1}{2}$, niin

$$\text{Ala}_{\text{A4}} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625\,(\text{m}^2) = 6{,}25\ (\text{dm}^2)$$

Vastaus: Ala on $6{,}25\ \text{dm}^2$

169. Hahmotellaan tilannekuva.



Tarkastellaan pallon korkeutta eri pomppujen jälkeen:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 8{,}0\ \text{m} \\ q &= \frac{4}{5} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_2 &= 8{,}0 \cdot \frac{4}{5}\ \text{m}\ \ \text{(2 pompun jälkeen)} \\ a_3 &= 8{,}0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \text{m}\ \ \text{(3 pompun jälkeen)} \end{aligned}$$

Pallon korkeus noudattaa geometristä jonoa, jonka yleinen termi eli korkeus n. pompun jälkeen on $a_n = 8{,}0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$.

Korkeus 10. pompun jälkeen on

$$a_{10} = 8{,}0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^9 \text{m} = 1{,}073... \approx 1{,}1\ \text{(m)}$$

Vastaus: 1,1 m

170. a) 3 kk = 12 viikkoa

Tarkastellaan Emilian merkkien määrää. Merkitään merkkien määrää alussa a_1. Emilia kaksinkertaistaa merkkien määrän viikoittain.

$$\begin{array}{cc}
\text{1. viikko} & a_1 \\
\text{2. viikko} & a_1 \cdot 2 \\
\text{3. viikko} & a_1 \cdot 2 \cdot 2 = a_1 \cdot 2^2 \\
\vdots & \vdots \\
\text{12. viikko} & a_1 \cdot 2^{12-1}
\end{array}$$

Koska merkkien määrä kaksinkertaistuu viikoittain, kyseessä on geometrinen jono, jossa $q = 2$.

Tarkastellaan Eeron merkkien määrää. Merkitään merkkien määrää alussa a_1. Eeron merkkien määrä kasvaa 25 kpl viikoittain.

$$\begin{array}{cc}
\text{1. viikko} & a_1 \\
\text{2. viikko} & a_1 + 25 \\
\text{3. viikko} & a_1 + 25 + 25 = a_1 + 2 \cdot 25 \\
\vdots & \vdots \\
\text{12. viikko} & a_1 + (12-1) \cdot 25
\end{array}$$

Merkkimäärä siis lisääntyy 25 kpl/viikko, joten kysessä on aritmeettinen jono, jossa $d = 25$.

b) Kun merkkien määrä alussa on $a_1 = 1$, niin 12 viikon kuluttua:

Emilialla on

$$a_{12} = a_1 \cdot 2^{12-1} = 1 \cdot 2^{11} = 2048$$

Eerolla on

$$a_{12} = a_1 + (12-1) \cdot 25 = 1 + 11 \cdot 25 = 276$$

Vastaus: a) Emilia, geometrinen; Eero, aritmeettinen
b) Emilia 2048 kpl, Eero 276 kpl

171. Tarkastellaan Nooran ja Juuson kolikkojen määriä pinoissa.
Nooran kolikkojen määrä 2- kertaistuu. Merkitään, että Juuso lisää aina d kpl seuraavaan pinoon.

Nooran pinot:
$a_1 = 5$
$a_2 = 2 \cdot 5$
$a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 5$

Juuson pinot:
$a_1 = 5$
$a_2 = 5 + d$
$a_3 = 5 + d + d$

Nooran kolikkojen määrät noudattavat geometrista jonoa, joten 6. pinossa on kolikoita $a_6 = 2^5 \cdot 5$.

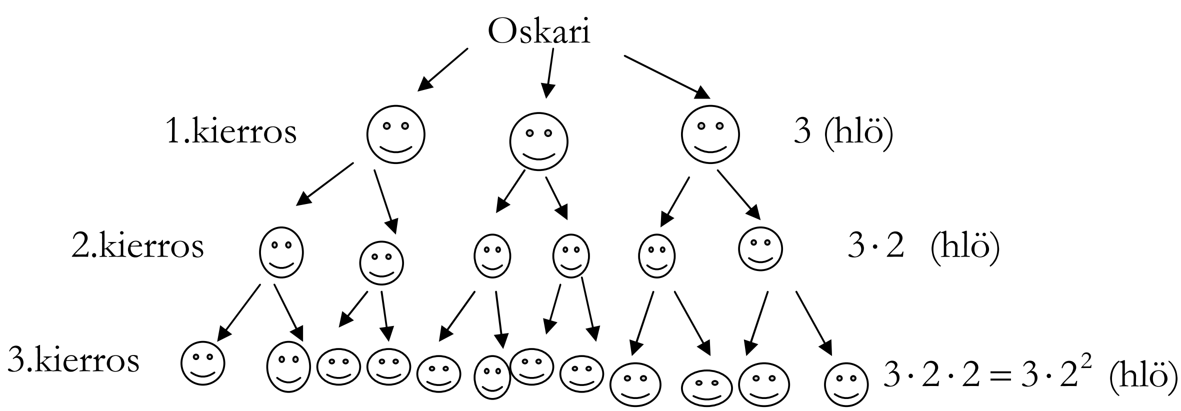
Juuson kolikkojen määrät noudattavat aritmeettista jonoa, joten 6. pinossa on kolikoita $a_6 = 5 + 5d$

Kuudensissa pinoissa on sama määrä kolikoita eli

$$\begin{aligned} 5+5d &= 2^5\cdot 5 \\ 5d &= 155 \quad |:5 \\ d &= 31 \end{aligned}$$

Vastaus: 31 kolikkoa

172. Oskari lähettää ketjukirjeen. Tarkastellaan eri kierroksilla kirjeen saaneiden määriä.



Kirjeen saaneiden lukumäärät noudattavat geometrista jonoa, jonka yleinen jäsen on $a_n = 3\cdot 2^{n-1}$.

a) 10. kierroksella kirjeen saa $a_{10} = 3 \cdot 2^9 = 1536$ (hlö).

b) Tutkitaan kokeilemalla eli taulukoidaan kirjeen saajien määriä eri kierroksilla.

Lähetyskierros	**Henkilömäärä**
1	3
2	6
3	$3 \cdot 2^2$
15	$3 \cdot 2^{14} = 49152$
17	$3 \cdot 2^{16} = 196608$
18	$3 \cdot 2^{17} = 393216 > 200000$

18. kierroksella kirjeen on saanut 393216 >200000. Tämän on ensimmäinen kerta, kun 200000 raja ylittyy, koska 17. kierroksella kirjeen saajia on alle 200000.

Vastaus: a) 1536 b) 18. kierroksella

173. Geometrinen lukujono 3, 6, 12, …

a) Määritetään ensin suhdeluku

$$q = \frac{12}{6} = \frac{6}{3} = 2$$

Yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1}$.

b) 12. jäsen on $a_{12} = 3 \cdot 2^{12-1} = 3 \cdot 2^{11} = 6144$

c) Tutkitaan, onko $a_n = 98304$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^{n-1} &= 98304 \quad |:3 \\ 2^{n-1} &= 32768 \\ \lg 2^{n-1} &= \lg 32768 \\ (n-1)\lg 2 &= \lg 32768 \quad |:\lg 2 \\ n &= \frac{\lg 32768}{\lg 2} + 1 \\ n &= 16 \end{aligned}$$

Luku 98304 on siis 16.jäsen jonossa.

Vastaus: a) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ b) 6144 c) on

174. a) 1, -2, 4

$$\left.\begin{aligned} q &= -2 \\ a_1 &= 1 \end{aligned}\right\} a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1} = 1 \cdot (-2)^9 = -512$$

b) 3, 15, 75

$$\left.\begin{aligned} q &= 5 \\ a_1 &= 3 \end{aligned}\right\} a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1} = 3 \cdot 5^9 = 5859375$$

175. Geometrinen jono, jossa $q = 0{,}8$ ja $a_8 = 16384$.

Yleisen jäsenen avulla saadaan

$$a_8 = a_1 \cdot q^{8-1}$$

$$a_1 \cdot 0{,}8^7 = 16384 \quad \big| : 0{,}8^7$$

$$a_1 = \frac{16384}{0{,}8^7}$$

$$a_1 = 78125$$

176. Geometrinen lukujono $a_3 = 500$ ja $a_7 = 8000$
Yleisen jäsenen avulla saadaan

$$
\begin{aligned}
a_3 \cdot q^{7-3} &= a_7 \\
500 \cdot q^4 &= 8000 \quad |: 500 \\
q^4 &= 16 \\
q &= \pm\sqrt[4]{16} \\
&= \pm 2
\end{aligned}
$$

Kun q = 2, niin

$$
\begin{aligned}
a_3 = a_1 \cdot q^2 &= 500 \\
a_1 \cdot 2^2 &= 500 \quad |:4 \\
a_1 &= \frac{500}{4} = 125
\end{aligned}
$$

Kun q = -2, niin

$$
\begin{aligned}
a_3 = a_1 \cdot q^2 &= 500 \\
a_1 \cdot (-2)^2 &= 500 \quad |:4 \\
a_1 &= \frac{500}{4} = 125
\end{aligned}
$$

Lukujonon toinen jäsen on $a_2 = a_1 \cdot q$.

Kun q = 2, niin $a_2 = 125 \cdot 2 = 250$

Kun q = -2, niin $a_2 = 125 \cdot (-2) = -250$

Vastaus: $a_1 = 125$, $a_2 = 250$ tai $a_1 = 125$, $a_2 = -250$

177. Koska luistelulenkin pituus kasvaa viikoittain 20 %, niin pituus 1,20 –kertaistuu. Lenkkien pituudet muodostavat geometrisen jonon, jossa $a_1 = 5{,}0$ km ja $q = 1{,}20$.

a) Lenkin pituus viiden viikon kuluttua

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} = 5{,}0 \cdot 1{,}20^4 = 10{,}368 \approx 10{,}4 \text{ (km)}$$

b) Lenkin pituus 8 viikon kuluttua

$$\begin{aligned} a_8 &= a_1 \cdot q^{8-1} \\ a_1 \cdot 1{,}20^7 &= 25 \qquad \Big| :1{,}20^7 \\ a_1 &= \frac{25}{1{,}20^7} \\ &= 6{,}977... \approx 7{,}0 \text{ (km)} \end{aligned}$$

c) Koska lenkin pituus kasvaa yhtä monta kilometriä viikoittain, lenkkien pituudet muodostavat aritmeettisen jonon. Merkitään kilometrimäärän kasvua kirjaimella *d*.

$a_8 = 25$ km

$a_8 = a_1 + (8-1)d$ ja $a_1 = 5{,}0$ km

$$5{,}0 + 7d = 25$$

$$7d = 20 \qquad |:7$$

$$d = 2\frac{6}{7} = 2{,}857 \approx 2{,}9 \text{ (km)}$$

Vastaus: a) 10,4 km b) 7,0 km c) 2,9 km

2.5 Geometrinen summa

178. a) $q = 4$, $n = 8$

$$S_8 = \frac{1\left(1-4^8\right)}{1-4} = 21845$$

b) $q = 3$, $n = 8$

$$S_8 = \frac{-0{,}3\left(1-3^8\right)}{1-3} = -984$$

c) $q = -0{,}5$, $n = 6$

$$S_6 = \frac{5860\left(1-(-0{,}5)^6\right)}{1-(-0{,}5)} = 3845{,}625$$

179. a) 3, 6, 12 geometrinen jono

$q = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = 2$
$a_1 = 3$
$n = 8$

$$S_8 = \frac{3\left(1-2^8\right)}{1-2} = 765$$

b) -5, -15, -45 geometrinen jono

$q = \frac{-15}{-5} = \frac{-45}{-15} = 3$
$a_1 = -5$
$n = 8$

$$S_8 = \frac{-5\left(1-3^8\right)}{1-3} = -16400$$

180. $a_1 = 2$, $a_2 = 8$

a) geometrinen lukujono, $q = \frac{8}{2} = 4$, $n = 10$

$$S_{10} = \frac{2\left(1-4^{10}\right)}{1-4} = 699050$$

b) aritmeettinen jono, d = 8-2= 6, n = 10
Summaa varten tarvitaan viimeinen jäsen eli

$$a_{10} = 2 + (10-1)\cdot 6 = 56$$

$$S_{10} = 10 \cdot \frac{2+56}{2} = 290$$

181. a) $0,6 + 0,6^2 + 0,6^3 + ... + 0,6^{11}$

$a_1 = 0,6$
$q = 0,6$
$n = 11$

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{0,6\left(1-0,6^{11}\right)}{1-0,6} \\ &= 1,494558... \\ &\approx 1,49 \end{aligned}$$

b) $3+3\cdot 0{,}8+3\cdot 0{,}8^2+3\cdot 0{,}8^3+...+3\cdot 0{,}8^{12}$

$$a_1 = 3$$
$$q = 0{,}8$$
$$n = 13$$

$$\begin{aligned} S_{13} &= \frac{3\left(1-0{,}8^{13}\right)}{1-0{,}8} \\ &= 14{,}175... \\ &\approx 14{,}2 \end{aligned}$$

182. $1+6+36+...+46656$, geometrinen summa

$$a_1 = 1$$
$$q = \frac{36}{6} = \frac{6}{1} = 6$$

Lasketaan yhteenlaskettavien lukumäärä *n*.

Yleisen jäsenen avulla saadaan

$$\begin{aligned} a_1 \cdot q^{n-1} &= a_n \\ 1\cdot 6^{n-1} &= 46656 \\ 6^{n-1} &= 46656 \\ (n-1)\lg 6 &= \lg 46656 \quad |:\lg 6 \\ n &= \frac{\lg 46656}{\lg 6} + 1 \\ n &= 7 \end{aligned}$$

Summassa on siis 7 lukua, joten

$$S_7 = \frac{1\left(1-6^7\right)}{1-6} = 55987$$

183. $3+1+\frac{1}{3}+---+\frac{1}{2187}$, geometrinen summa

$a_1 = 3$

$q = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$

Laskesetaan yhteenlaskettavien lukumäärä *n*.

Yleisen jäsenen avulla saadaan

$$
\begin{aligned}
a_1 \cdot q^{n-1} &= a_n \\
3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} &= \frac{1}{2187} \quad \Big|: 3 \\
\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} &= \frac{1}{6561} \\
(n-1)\lg\frac{1}{3} &= \lg\frac{1}{6561} \quad \Big|: \lg\frac{1}{3} \\
n &= \frac{\lg\frac{1}{6561}}{\lg\frac{1}{3}} + 1 \\
n &= 9
\end{aligned}
$$

Yhteenlaskettavia on siis 9 kpl, joten

$$
S_9 = \frac{3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^9\right)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9841}{2187}
$$

184. $a_1 = -3920000$

$$q = \frac{-980000}{-3920000} = \frac{-245000}{-980000} = \frac{1}{4}$$

Lasketaan summan jäsenten määrä yleisen jäsenen avulla.

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\
-3920000 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} &= -3828{,}125 && \Big| :(-3920000) \\
\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} &= \frac{-3828{,}125}{-3920000} && \Big| \lg \\
(n-1)\lg\frac{1}{4} &= \lg\frac{3828{,}125}{3920000} && \Big| :\lg\frac{1}{4} \\
n &= \frac{\lg\frac{3828{,}125}{3920000}}{\lg\frac{1}{4}} + 1 \\
n &= 6
\end{aligned}$$

$$S_6 = \frac{-3920000\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{4}} = -5225390{,}625 \approx -5{,}23 \cdot 10^6$$

185. a) $2+4+8+...+4096$

Geometrinen summa, koska $q=\frac{8}{4}=\frac{4}{2}=2$

$a_1=2$

Lasketaan summan jäsenten määrä yleisen jäsenen avulla.

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\
2\cdot 2^{n-1} &= 4096 && \mid :2 \\
2^{n-1} &= 2048 && \mid \lg \\
(n-1)\lg 2 &= \lg 2048 && \mid :\lg 2 \\
n &= \frac{\lg 2048}{\lg 2}+1 \\
n &= 12
\end{aligned}
$$

Yhteenlaskettavia on siis 12 kpl, joten

$$S_{12}=\frac{2\left(1-2^{12}\right)}{1-2}=8190$$

b) $2+4+6+\ldots+24$

Aritmeettinen summa, koska $d=4-2=6-4=2$
$a_1=2$

Lasketaan summan jäsenten määrä yleisen jäsenen avulla.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+(n-1)\cdot d \\ 2+(n-1)\cdot 2 &= 24 \\ (n-1)\cdot 2 &= 22 \qquad \Big| :2 \\ n-1 &= 11 \\ n &= 12 \end{aligned}$$

Yhteenlaskettavia on siis 12 kpl, joten

$$S_{12}=\frac{2+24}{2}\cdot 12=156$$

186. Geometrinen jono 3, 9, 27, 81, …

$$q = \frac{27}{9} = \frac{9}{3} = 3$$
$$a_1 = 3$$

$$\begin{aligned}
S_n &= 9999 \\
\frac{3\left(1-3^n\right)}{1-3} &= 9999 && \Big| \cdot (-2) \\
3\left(1-3^n\right) &= -19998 && \Big| : 3 \\
1-3^n &= -6666 \\
-3^n &= -6667 && \Big| : (-1) \\
3^n &= 6667 && \Big| \lg \\
n \lg 3 &= \lg 667 && \Big| : \lg 3 \\
n &= \frac{\lg 667}{\lg 3} \\
n &= 8{,}0145...
\end{aligned}$$

Jos $n = 8$, niin $S_8 = \dfrac{3\left(1-3^8\right)}{1-3} = 9840 < 9999$

Jos $n = 9$, niin $S_9 = \dfrac{3\left(1-3^9\right)}{1-3} = 29523 > 9999$

Vastaus: Vähintään 9 jäsentä

187. Geometrinen lukujono 0,4; 2,4; 14,4…

$$q=\frac{14,4}{2,4}=\frac{2,4}{0,4}=6$$
$$a_1=0,4$$

a)

$$\begin{aligned}
S_n &= 10000 \\
\frac{0,4\left(1-6^n\right)}{1-6} &= 10000 && \big|\cdot(-5) \\
0,4\left(1-6^n\right) &= -50000 && \big|:0,4 \\
1-6^n &= -125000 \\
-6^n &= -125001 && \big|:(-1) \\
6^n &= 125001 && \big|\lg \\
n\lg 6 &= \lg 125001 && \big|:\lg 6 \\
n &= \frac{\lg 125001}{\lg 6} \\
n &= 6,5500...
\end{aligned}$$

Jos $n=6$, niin $S_6=\dfrac{0,4\left(1-6^6\right)}{1-6}=3732,4<10000$

Jos $n=7$, niin $S_7=\dfrac{0,4\left(1-6^7\right)}{1-6}=22394,8>10000$

Jotta summa ylittäisi 10000, niin tarvitaan vähintään 7 jäsentä.

b)

$$
\begin{aligned}
S_n &= 50000 \\
\frac{0,4\left(1-6^n\right)}{1-6} &= 50000 \qquad \left|\cdot(-5)\right. \\
0,4\left(1-6^n\right) &= -250000 \quad \left|:0,4\right. \\
1-6^n &= -625000 \\
-6^n &= -625001 \qquad \left|:(-1)\right. \\
6^n &= 625001 \qquad \left|\lg\right. \\
n\lg 6 &= \lg 625001 \quad \left|:\lg 6\right. \\
n &= \frac{\lg 625001}{\lg 6} \\
n &= 7,448...
\end{aligned}
$$

Jos $n = 7$, niin $S_7 = \dfrac{0,4\left(1-6^7\right)}{1-6} = 22394,8 < 50000$

Jos $n = 8$, niin $S_8 = \dfrac{0,4\left(1-6^8\right)}{1-6} = 134369,2 > 50000$

Jotta summa olisi korkeintaan 50000, niin tarvitaan enintään 7 jäsentä.

Vastaus: a) vähintään 7 b) enintään 7

188. $2 + 10 + 50 + ... + a \leq 200000$

Epäyhtälön vasen puoli on geometrinen summa, koska $q = \frac{50}{10} = \frac{10}{2} = 5$.

$a_1 = 2$

Koska geometrisen summan laskemiseksi tarvitaan yhteenlaskettavien lukumäärä, lasketaan se ensin. Tämän avulla saadaan selville summan viimeinen luku *a*.

Selvitetään, millä yhteenlaskettavien määrällä summan arvo on tasan 200000.

$$\frac{2(1-5^n)}{1-5} = 200000 \quad |\cdot(-4)$$

$$2(1-5^n) = -800000 \quad |:2$$

$$1-5^n = -400000$$

$$-5^n = -400001 \quad |:(-1)$$

$$5^n = 400001$$

$$n \lg 5 = \lg 400001 \quad |:\lg 5$$

$$n = \frac{\lg 400001}{\lg 5} = 8{,}0147...$$

Koska yhteenlaskettavien lukumäärä on kokonaisluku ja summan arvon pitää olla **pienempi** tai yhtäsuuri kuin 200000, niin $n = 8$.

Kun n = 8, niin summan viimeinen luku on

$$a = a_1 \cdot q^{8-1} = 2 \cdot 5^7 = 156250$$

Vastaus: 156250

189. Tarkastellaan Kroisoksen tallettamia rahamääriä peräkkäisinä päivinä:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1\,€ \\ a_2 &= 1 \cdot 2\,€ \\ a_3 &= 1 \cdot 2 \cdot 2\,€ = 1 \cdot 2^2\,€ \\ a_4 &= 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2\,€ = 1 \cdot 2^3\,€ \\ &\vdots \\ a_n &= 1 \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

Huomataan, että rahamäärät muodostavat geometrisen jonon, koska talletettava määrä 2- kertaistuu päivittäin eli $q = 2$

Kun aikaa on kulunut kaksi viikkoa eli 14 päivää ($n = 14$), tilillä on rahaa yhteensä

$$S_{14} = \frac{1\left(1 - 2^{14}\right)}{1 - 2} = 16383\ (€)$$

Vastaus: 16383 €

190. Merkitään avajaisviikon myyntituloja $a_1 = 3500$ (€).
Tulot pienenivät joka viikko 4,1 % eli tulot 0,959 – kertaistuivat viikoittain (100 % - 4,1 % = 95,9 %).

Myyntitulot muodostavat siis geometrisen jonon, jossa $q = 0{,}959$.

Kokonaismyyntitulot 9 viikon aikana (n = 9) ovat

$$S_9 = \frac{3500\left(1 - 0{,}959^9\right)}{1 - 0{,}959} = 26799{,}032... \approx 26799 \ (€)$$

Vastaus: 26799 €

191. Esiintymisten määrä kasvaa 10 % kuukausittain, joten määrä 1,10 – kertaistuu kuukaudessa. Esiintymisten lukumäärät muodostavat siis geometrisen jonon, jossa $a_1 = 2$ ja $q = 1{,}10$.

Jonon yleinen jäsen on siis $a_n = 2 \cdot 1{,}10^{n-1}$.

a) Esiintymisiä vuoden 2014 aikana eli 12 kk aikana on

$$S_{12} = 2 + 1{,}10 \cdot 2 + ... + 1{,}10^{11} \cdot 2$$

$$= \frac{2\left(1 - 1{,}10^{12}\right)}{1 - 1{,}10} = 42{,}768... \approx 43$$

b) 500. esiintyminen on silloin, kun $S_n = 500$.

$$\begin{aligned}
\frac{2\left(1-1{,}10^n\right)}{1-1{,}10} &= 500 && \Big|\cdot(-0{,}1)\\
2\left(1-1{,}10^n\right) &= -50 && \Big|:2\\
1-1{,}10^n &= -25 &&\\
-1{,}10^n &= -26 && \Big|:(-1)\\
1{,}10^n &= 26 && \Big|\lg\\
n\lg 1{,}10 &= \lg 26 && \Big|:\lg 1{,}10\\
n &= \frac{\lg 26}{\lg 1{,}10} &&\\
n &= 34{,}18\ldots &&
\end{aligned}$$

Lasketaan 35 kuukautta tammikuusta 2014:

$$\text{tammi14}\underbrace{\quad}_{12\text{kk}}\text{joulu14}\underbrace{\quad}_{12\text{kk}}\text{joulu15}\underbrace{\quad}_{11\text{kk}}\text{marras16}$$

Vastaus: a) 43 b) marraskuussa 2016

192. Säästöpossuun kertyy vuodessa: 2000,00 €. Tämä summa talletetaan vuosittain, aina vuoden lopussa, pankkitilille, jonka korko 1,8 %.

	Tilillä on rahaa (€)
1. vuoden jälkeen	2000
2. vuoden jälkeen	$1{,}018\cdot 2000+2000$
3. vuoden jälkeen	$1{,}018\cdot(1{,}018\cdot 2000+2000)+2000$
	$=1{,}018^2\cdot 2000+1{,}018\cdot 2000+2000$
4. vuoden jälkeen	$1{,}018^3\cdot 2000+1{,}018^2\cdot 2000+1{,}018\cdot 2000+2000$
$\vdots$	$\vdots$
6. vuoden jälkeen	$1{,}018^5\cdot 2000+\ldots+1{,}018\cdot 2000$

Koska Verna ja Santeri säästävät vain viisi vuotta, niin kuudennen vuoden jälkeen ei tilillä olevaan summaan enää lisätä vuoden aikana säästöpossuun talletettua määrää, koska sitä ei ole.

6. vuoden jälkeen tilillä oleva rahamäärä muodostuu geometrisena summana, jossa $a_1=2000$, $q=1{,}018$ ja $n=5$.

$$S_5=\frac{2000\cdot 1{,}018\cdot\left(1-1{,}018^5\right)}{1-1{,}018}$$
$$=10553{,}1362\ldots$$
$$\approx 10553{,}14\ (€)$$

b) Rahaa on talletettu viiden vuoden aikana pankkiin

$$5 \cdot 2000\ € = 10000\ €$$

Koska kuudennen vuoden lopussa rahaa on tilillä 10553,14 €, niin korkoa on tullut

$$10553{,}14\ € - 10000\ € = 553{,}14\ €$$

Vastaus: a) 10553,14 € b) 553,14 €

193. Soluviljelmän massa kasvoi tunnissa 35 % eli viljelmä 1,35 – kertaistui tunnissa. Alussa viljelmän massa oli $a_1 = 2{,}5$ mg.

Ryhmä valmisti kuusi soluviljelmää (yhden viljelmän tunnissa). Tarkastellaan soluviljelmien massoja tutkimuksen loputtua. Tutkimus loppuu, kun viimeisen viljelmän valmistamisesta on kulunut 1 h eli sen on ehtinyt kasvaa 1,35 – kertaiseksi.

aika(h)	**Viljelmä 1 (mg)**	**Viljelmä 2 (mg)**	**Viljelmä 3 (mg)**	**Viljelmä 4 (mg)**	**Viljelmä 5 (mg)**	**Viljelmä 6 (mg**
0	2,5					
1	$1{,}35 \cdot 2{,}5$	2,5				
2	$1{,}35^2 \cdot 2{,}5$	$1{,}35 \cdot 2{,}5$	2,5			
3	$1{,}35^3 \cdot 2{,}5$	$1{,}35^2 \cdot 2{,}5$	$1{,}35 \cdot 2{,}5$	2,5		
4	$1{,}35^4 \cdot 2{,}5$	$1{,}35^3 \cdot 2{,}5$	$1{,}35^2 \cdot 2{,}5$	$1{,}35 \cdot 2{,}5$	2,5	
5	$1{,}35^5 \cdot 2{,}5$	$1{,}35^4 \cdot 2{,}5$	$1{,}35^3 \cdot 2{,}5$	$1{,}35^2 \cdot 2{,}5$	$1{,}35 \cdot 2{,}5$	2,5
6	$1{,}35^6 \cdot 2{,}5$	$1{,}35^5 \cdot 2{,}5$	$1{,}35^4 \cdot 2{,}5$	$1{,}35^3 \cdot 2{,}5$	$1{,}35^2 \cdot 2{,}5$	$1{,}35 \cdot 2{,}5$

Lasketaan viljelmien massat yhteen taulukon viimeiseltä riviltä eli yhteismassa (mg) oli

$$1{,}35^6 \cdot 2{,}5 \; + \; 1{,}35^5 \cdot 2{,}5 + \; \dots \; + 1{,}35 \cdot 2{,}5\,.$$

Massat muodostavat geometrisen summan, jossa $a_1 = 1{,}35 \cdot 2{,}5$; $q = 1{,}35$; $n = 6$.

$$S_6 = \frac{1{,}35 \cdot 2{,}5\left(1 - 1{,}35^6\right)}{1 - 1{,}35} = 48{,}729... \approx 49\,(\text{mg})$$

b) Soluviljelmiä oli kuusi eli niiden yhteismassa alussa on $6 \cdot 2{,}5 = 15$ (mg). Päivän aikana viljelmät siis kasvoivat yhteensä

$$48{,}729... - 15 = 33{,}729... \approx 34\,(\text{mg})$$

Vastaus: a) 49 mg b) 34 mg

194. Tutkitaan Pihlan säästämiä rahamääriä viikoittain.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 3\ € \\
a_2 &= 2 \cdot 3\ € \\
a_3 &= 2 \cdot 2 \cdot 3\ € \\
a_4 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3\ € \\
&\vdots \\
a_n &= 2^{n-1} \cdot 3\ €
\end{aligned}
$$

Rahamäärät muodostavat geometrisen jonon, jossa $a_1 = 3$ ja $q = 2$.

Lasketaan, milloin viikottaisten säästöjen summa on vähintään 195 €.

Lasketaan siis geometrinen summa

$$
\begin{aligned}
S_n &= 195\ (€) \\
\frac{3(1-2^n)}{1-2} &= 195 && \big| \cdot (-1) \\
3(1-2^n) &= -195 && \big| :3 \\
1-2^n &= -65 \\
-2^n &= -66 && \big| \cdot (-1) \\
2^n &= 66 && \big| \lg \\
n \lg 2 &= \lg 66 && \big| : \lg 2 \\
n &= \frac{\lg 66}{\lg 2} \\
n &= 6{,}0443...
\end{aligned}
$$

Jos $n = 6$, niin $S_6 = \dfrac{3\left(1-2^6\right)}{1-2} = 126 < 195$ (€)

Jos $n = 7$, niin $S_7 = \dfrac{3\left(1-2^7\right)}{1-2} = 381 > 195$ (€)

Vastaus: 7 viikon kuluttua

195. Kävijämäärä väheni päivittäin 12 % eli 0,88 – kertaistui (100 % - 12 % = 88 %). Kävijämäärät muodostavat siis geometrisen jonon, jossa $a_1 = 150$ ja $q = 0{,}88$.

Lasketaan aluksi, million näyttelyssä on käynyt yhteensä 400 henkilöä.

$$
\begin{aligned}
S_n &= 400 \\
\frac{150\left(1-0{,}88^n\right)}{1-0{,}88} &= 400 \quad \left| \cdot 0{,}12 \right. \\
150\left(1-0{,}88^n\right) &= 48 \quad \left| :150 \right. \\
1-0{,}88^n &= \frac{8}{25} \\
-0{,}88^n &= -\frac{17}{25} \quad \left| \cdot(-1) \right. \\
0{,}88^n &= \frac{17}{25} \quad \left| \lg \right. \\
n \lg 0{,}88 &= \lg\frac{17}{25} \quad \left| :\lg 0{,}88 \right. \\
n &= \frac{\lg\frac{17}{25}}{\lg 0{,}88} = 3{,}016...
\end{aligned}
$$

Jos $n = 3$, niin $S_3 = \dfrac{150\left(1-0{,}88^3\right)}{1-0{,}88} = 398{,}16 < 400$

Jos $n = 4$, niin $S_4 = \dfrac{150\left(1-0{,}88^4\right)}{1-0{,}88} = 500{,}3808 > 400$

Vastaus: 4 päivän jälkeen

196. Pekan lukemien sivujen määrä kasvaa päivittäin 1,3 % eli 1,013 –kertaistuu (100 % + 1,3 % = 101,3 %). Sivumäärät siis muodostavat geometrisen jonon, jossa $a_1 = 107$ ja $q = 1{,}013$

Kirja on luettu, kun sivujen yhteismäärä on 1650.

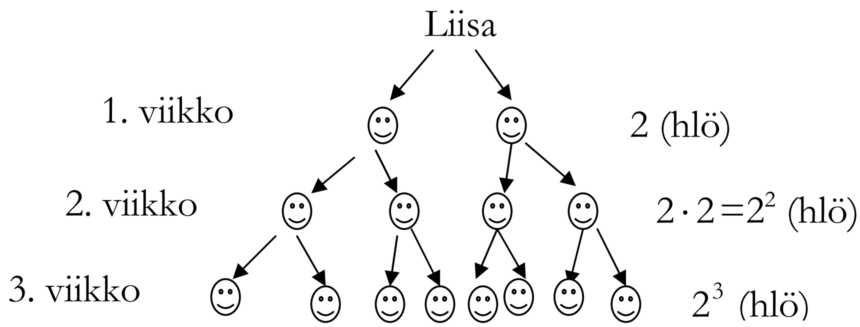
$$
\begin{aligned}
S_n &= 1650 \\
\frac{107\left(1-1{,}013^n\right)}{1-1{,}013} &= 1650 && \big| \cdot(-0{,}013) \\
107\left(1-1{,}013^n\right) &= -21{,}45 && \big| :107 \\
1-1{,}013^n &= -\frac{21{,}45}{107} \\
-1{,}013^n &= -\frac{21{,}45}{107}-1 && \big| \cdot(-1) \\
1{,}013^n &= \frac{21{,}45}{107}+1 && \big| \lg \\
n\lg 1{,}013 &= \lg\left(\frac{21{,}45}{107}+1\right) && \big| :\lg 1{,}013 \\
n &= \frac{\lg\left(\frac{21{,}45}{107}+1\right)}{\lg 1{,}013} \\
n &= 14{,}1458...
\end{aligned}
$$

Jos $n = 14$, niin $S_{14} = \dfrac{107\left(1-1{,}013^{14}\right)}{1-1{,}013} = 1631 < 1650$

Jos $n = 15$, niin $S_{15} = \dfrac{107\left(1-1{,}013^{15}\right)}{1-1{,}013} = 1759{,}61... > 1650$

Vastaus: 15 päivän kuluttua

197. Tarkastellaan asiakkaiden määriä eri viikkoina.



Viikottain saatujen uusien asiakkaiden määrä muodostaa geometrisen jonon, jossa $a_1 = 2$ ja $q = 2$.

Viiden viikon jälkeen uusia asiakkaita on (Liisan lisäksi)

$$S_5 = \frac{2(1-2^5)}{1-2} = 62$$

Yleisesti *n* viikon jälkeen uusia asiakkaita on

$$S_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = \frac{2-2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 2$$

Lasketaan, milloin $S_n > 10000$. Selvitetään ensin, milloin asiakkaita on 10000.

$$
\begin{aligned}
S_n &= 10000 \\
2^{n+1} - 2 &= 10000 \\
2^{n+1} &= 10002 \\
(n+1)\lg 2 &= \lg 10002 \; |: \lg 2 \\
n+1 &= \frac{\lg 10002}{\lg 2} \\
n &= \frac{\lg 10002}{\lg 2} - 1 \\
n &= 12{,}288...
\end{aligned}
$$

Jos $n = 12$, niin $S_{12} = 2^{12+1} - 2 = 8190 < 10000$

Jos $n = 13$, niin $S_{13} = 2^{13+1} - 2 = 16382 > 10000$

Uusia asiakkaita olisi yli 10000 13 viikon kuluttua.

198. Tarkastellaan särmien pituksia:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = \frac{1}{2}$$
$$a_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$\vdots$$
$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Kuutioiden särmien pituudet muodostavat geometrisen jonon, jossa $a_1 = 1$ (m) ja $q = \frac{1}{2}$.

b) Lasketaan 10 ensimmisen kuution särmien pituuden yhteen, jolloin saadaan pinon korkus.

$$S_{10} = \frac{1\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 1{,}998... \approx 2 \text{ (m)}$$

Tutkitaan summan arvoa, kun kuutioiden lukumäärä n kasvaa. Muodostetaan taulukko, kun $n = 11, 12, 13, 14$

n	S_n
$n=11$	$S_{11}=\dfrac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1{,}9990234...$
$n=12$	$S_{12}=\dfrac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1{,}99951171...$
$n=13$	$S_{13}=\dfrac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1{,}9997558...$
$n=14$	$S_{14}=\dfrac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{14}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1{,}999877...$

Korkeus lähestyy lukua 2 (m).

Vastaus: a) kolme alinta: 1m, $\frac{1}{2}$ m, $\frac{1}{4}$m, kuution *n*:nnen särmän pituus $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ b) 2 m

199. Tutkitaan puuston määrää aina vuoden alussa. Tällä hetkellä puuston määrä on 3100 m³. Vuoden kuluttua (seuraavan vuoden alussa) puuston määrä olkoon a_1, kahden vuoden kuluttua a_2 jne.

Aika	**Puuston määtä (m³)**
Nyt	3100
a_1	$1{,}042 \cdot 3100 - 161$
a_2	$1{,}042(1{,}042 \cdot 3100 - 161) - 161$
	$= 1{,}042^2 \cdot 3100 - 1{,}042 \cdot 161 - 161$
$\vdots$	$\vdots$
a_{16}	$1{,}042^{16} \cdot 3100 - 1{,}042^{15} \cdot 161 - \ldots - 161$
	$= 1{,}042^{16} \cdot 3100 - \underbrace{\left(1{,}042^{15} \cdot 161 + \ldots + 161\right)}_{q=1{,}042,\, n=16,\, a_1=161}$

16 vuoden jälkeen puuston määrä on geometrinen summa

$$
\begin{aligned}
S_{16} &= 1{,}042^{16} \cdot 3100 - \frac{161\left(1 - 1{,}042^{16}\right)}{1 - 1{,}042} \\
&= 2416{,}936\ldots \\
&\approx 2400 \ (\mathrm{m}^3)
\end{aligned}
$$

Vastaus: 2400 m³

200. 3, 12, 48, …

Geometrinen lukujono, jossa $a_1 = 3$ ja $q = \frac{48}{12} = \frac{12}{3} = 4$.

a) $S_{10} = \frac{3\left(1-4^{10}\right)}{1-4} = 1048575$

b) Summan viimeinen jäsen eli 10. jäsen saadaan yleisen termin avulla

$$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1} = 3 \cdot 4^9 = 786432$$

201. a) 5, 25, 125, … , 78125

Geometrinen lukujono, jossa $a_1 = 5$ ja $q = \frac{125}{25} = \frac{25}{5} = 5$

Lasketaan ensin jonon jäsenten määrä.

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\
5 \cdot 5^{n-1} &= 78125 && \mid :5 \\
5^{n-1} &= 15625 && \mid \lg \\
(n-1)\lg 5 &= \lg 15625 && \mid :\lg 5 \\
n &= \frac{\lg 15625}{\lg 5} + 1 \\
n &= 7
\end{aligned}$$

Yhteenlaskettavia on siis 7 kpl, joten

$$S_7 = \frac{5\left(1-5^7\right)}{1-5} = 97655$$

b) 2, 6, 18, 54, … , 118098

Geometrinen jono, jossa $a_1 = 2$ ja $q = \frac{18}{6} = \frac{6}{2} = 3$

Lasketaan ensin jonon jäsenten määrä.

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\
2 \cdot 3^{n-1} &= 118098 && \Big| :2 \\
3^{n-1} &= 59049 && \Big| \lg \\
(n-1)\lg 3 &= \lg 59049 && \Big| :\lg 3 \\
n &= \frac{\lg 59049}{\lg 3} + 1 \\
n &= 11
\end{aligned}$$

Yhteenlaskettavia on siis 11 kpl, joten

$$S_{11} = \frac{2\left(1-3^{11}\right)}{1-3} = 177146$$

Vastaus: a) 97655 b) 177146

202. 1,6; 12, 8; 102,4; …

Geometrinen lukujono, koska $q = \dfrac{102{,}4}{12{,}8} = \dfrac{12{,}8}{1{,}6} = 8$

Lisäksi $a_1 = 1{,}6$.

a) $S_n \geq 25000$

Lasketaan ensin, millä arvolla n summa on tasan 25000.

$$
\begin{aligned}
\frac{1{,}6\left(1-8^n\right)}{1-8} &= 25000 && \big| \cdot(-7) \\
1{,}6\left(1-8^n\right) &= -175000 && \big| :1{,}6 \\
1-8^n &= -109375 \\
-8^n &= -109376 && \big| :(-1) \\
8^n &= 109376 && \big| \lg \\
n\lg 8 &= \lg 109376 && \big| :\lg 8 \\
n &= \frac{\lg 109376}{\lg 8} \\
n &= 5{,}579...
\end{aligned}
$$

Jos $n = 5$, niin $S_5 = \dfrac{1{,}6\left(1-8^5\right)}{1-8} = 7489{,}6 < 25000$

Jos $n = 6$, niin $S_6 = \dfrac{1{,}6\left(1-8^6\right)}{1-8} = 59918{,}4 > 25000$

Jotta $S_n \geq 25000$, niin jäseniä tulee olla vähintään 6 kpl.

b) $S_n \leq 538000$

Lasketaan ensin, milla arvolla *n* summa on tasan 538000.

$$\begin{aligned}
\frac{1{,}6\left(1-8^n\right)}{1-8} &= 538000 \quad \left| \cdot(-7)\right. \\
1{,}6\left(1-8^n\right) &= -3766000 \quad \left| :1{,}6\right. \\
1-8^n &= -2353750 \\
-8^n &= -2353751 \quad \left| :(-1)\right. \\
8^n &= 2353751 \quad \left| \lg\right. \\
n\lg 8 &= \lg 2353751 \quad \left| :\lg 8\right. \\
n &= \frac{\lg 2353751}{\lg 8} \\
n &= 7{,}0555...
\end{aligned}$$

Jos $n = 7$, niin $S_7 = \dfrac{1{,}6\left(1-8^7\right)}{1-8} = 479348{,}8 < 538000$

Jos $n = 8$, niin $S_8 = \dfrac{1{,}6\left(1-8^8\right)}{1-8} = 3834792 > 538000$

Jotta $S_n \leq 538000$, niin jäseniä tulee olla enintään 7 kpl.

Vastaus: a) vähintään 6 b) enintään 7

203. Säämäärät eräällä viikolla kasvoivat 4,7 % päivittäin eli 1,047 –kertaistuivat (100% + 4,7 % = 104,7 %). Sademäärät muodostavat siis geometrisen jonon, jossa $q = 1{,}047$ ja $a_1 = 8{,}0$ (mm)

Viikon eli 7 päivän aikana satoi:

$$S_7 = \frac{8{,}0\left(1 - 1{,}047^7\right)}{1 - 1{,}047} = 64{,}544... \approx 65 \text{ (mm)}$$

Vastaus: 65 mm

204. Tarkastellaan tilillä olevaa rahamäärää (€) aina vuoden alussa.

$a_1 = 4000$ alkutalletus

$a_2 = 1{,}02 \cdot 4000 + 4000$ tilillä oleva rahamäärä 1. vuoden lopussa

$a_3 = 1{,}02 \cdot (1{,}02 \cdot 4000 + 4000) + 4000$

$= 1{,}02^2 \cdot 4000 + 1{,}02 \cdot 4000 + 4000$ 2. vuoden lopussa

$a_4 = 1{,}02^3 \cdot 4000 + 1{,}02^3 \cdot 4000 + ... + 4000$ 3. vuoden lopussa

$\vdots$

Rahamäärä vuoden alussa muodostuu geometrisena summana, jossa $q = 1{,}02$ ja $a_1 = 4000$.

a) Rahaa tilillä on viidennen vuoden lopussa (koron lisäyksen jälkeen eli ennen seuraavaa 4000€ talletusta)

$$1{,}02^5 \cdot 4000 + 1{,}02^4 \cdot 4000 + 1{,}02^3 \cdot 4000 + 1{,}02^2 \cdot 4000 + 1{,}02 \cdot 4000$$

Summa on geometrinen, jossa $a_1 = 1{,}02 \cdot 4000$, $q = 1{,}02$, $n = 4$

$$S_4 = \frac{1{,}02 \cdot 4000\left(1 - 1{,}02^5\right)}{1 - 1{,}02} = 21232{,}483... \approx 21232{,}48 \ (€)$$

b) Viiden vuoden aikana tehdyt talletukset ovat $5 \cdot 4000 = 20000$ (€)
Talletukset ovat kasvaneet korkoa

21232,48 € - 20000 € = 1232,48 €

c) Lasketaan, milloin $S_n \geq 30000$ (€).

Lasketaan ensin, milloin tilillä on tasan 30000 €.

$$
\begin{aligned}
\frac{1{,}02 \cdot 4000\left(1-1{,}02^n\right)}{1-1{,}02} &= 30000 && \big| \cdot(-0{,}02) \\
4080\left(1-1{,}02^n\right) &= -600 && \big| : 4080 \\
1-1{,}02^n &= -\frac{5}{34} && \\
-1{,}02^n &= -1\frac{5}{34} && \big| :(-1) \\
1{,}02^n &= 1\frac{5}{34} && \big| \lg \\
n \lg 1{,}02 &= \lg \frac{39}{34} && \big| : \lg 1{,}02 \\
n &= \frac{\lg \frac{39}{34}}{\lg 1{,}02} && \\
n &= 6{,}9284\ldots &&
\end{aligned}
$$

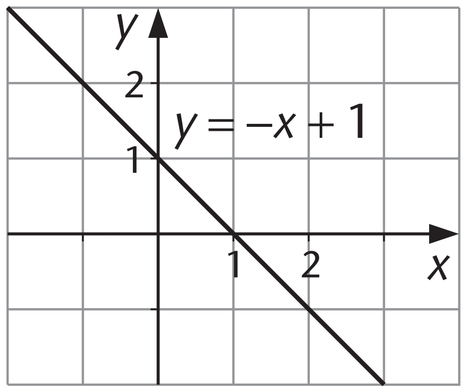
Jos $n = 6$, niin $S_6 = \dfrac{1{,}02 \cdot 4000\left(1-1{,}02^6\right)}{1-1{,}02} = 25737{,}13\ldots < 30000$

Jos $n = 7$, niin $S_7 = \dfrac{1{,}02 \cdot 4000\left(1-1{,}02^7\right)}{1-1{,}02} = 30331{,}87\ldots > 30000$

Vastaus: 7 vuoden kuluttua

Kertausosa

1. a) $y = -x + 1$

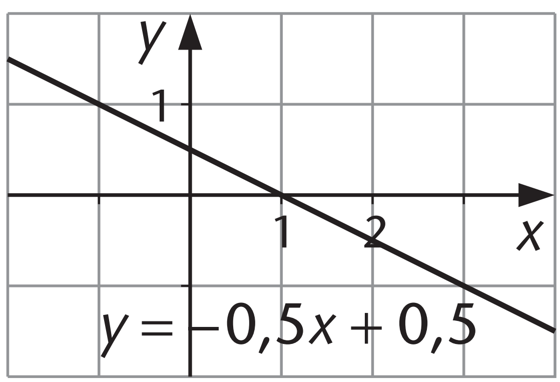


b)

$$-2y - x + 1 = 0$$

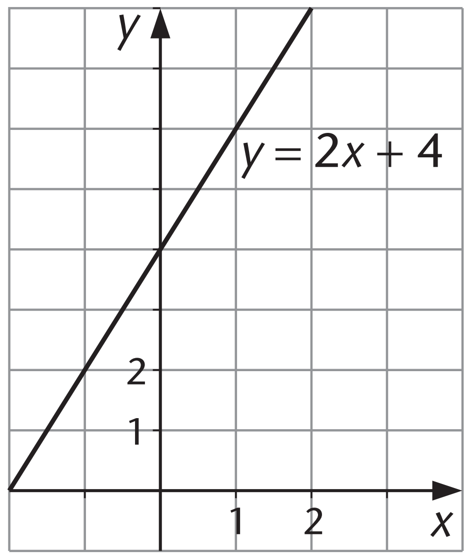
$$-2y = x - 1 \qquad \Big| :(-2)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



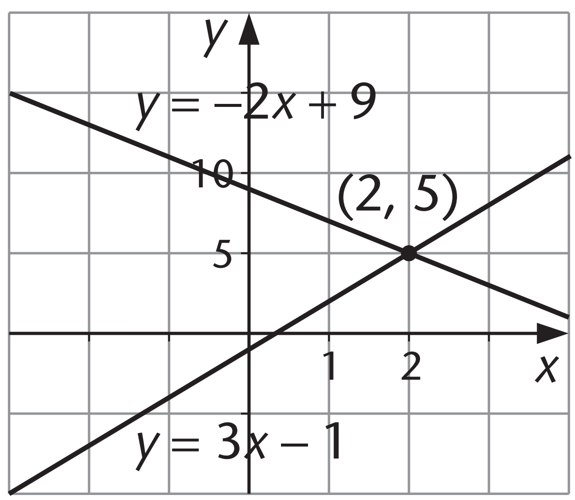
c)

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 3 &= -5 \\ -2y &= -4x - 8 \quad \Big| :(-2) \\ y &= 2x + 4 \end{aligned}$$



2. Piirretään suorat koordinaatistoon.

a)



b)

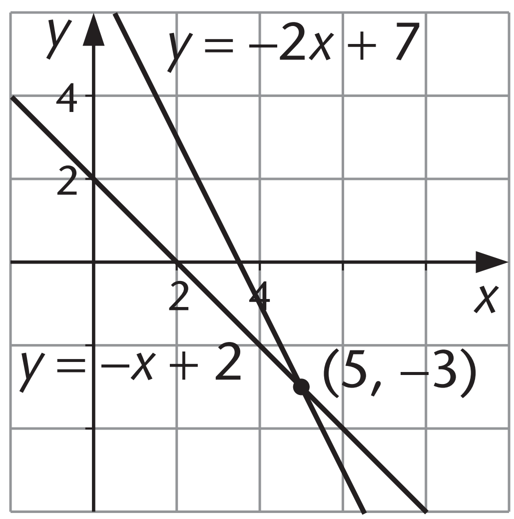
$$3x + 3x = 6$$

$$3y = -3x + 6 \quad \big| :3$$

$$y = -x + 2$$

$$y + 2x - 7 = 0$$

$$y = -2x + 7$$



Vastaus: a)(2, 5) b) (5, -3)

3. Merkitään
x = merirosvorahat (kg) hinta: 6,00 €/kg
y = suklaatryffelit (kg) hinta: 7,00 €/kg

a) $6{,}00\,x + 7{,}00\,y = 5{,}00$ (€)

b) $y = 200\,\text{g} = 0{,}2\,\text{kg}$

$$\begin{aligned} 6x + 7 \cdot 0{,}2 &= 5{,}0 \\ 6x + 1{,}4 &= 5{,}0 \\ 6x &= 3{,}6 \quad \Big| :6 \\ x &= 0{,}6 \ \text{(kg)} \end{aligned}$$

Vastaus: a) $6{,}00x + 7{,}00\,y = 5{,}00$ (€) b) 600 g

4. x- akseli leikataan pisteessä, jossa y- koordinaatti on nolla eli $y = 0$.
y- akseli leikataan pisteessä, jossa x-koordinaatti on nolla eli $x = 0$.

a) $y = -2x - 1$
Kun $y = 0$, niin

$$\begin{aligned} -2x - 1 &= 0 \\ -2x &= 1 \ \Big| :(-2) \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Siis x – akselin leikkauspiste on $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

Kun $x = 0$, niin

$$y = -2 \cdot 0 - 1$$
$$y = -1$$

Siis y- akselin leikkauspiste on on (0, -1).

b) $3y + x - 2 = 0$

Kun $y = 0$, niin

$$3 \cdot 0 + x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

Siis x- akselin leikkauspiste on (2, 0).

Kun x =0, niin

$$3y + 0 - 2 = 0$$
$$3y = 2 \;|\!:3$$
$$y = \frac{2}{3}$$

Siis y- akselin leikkauspiste on on $\left(0,\frac{2}{3}\right)$

5. a)

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x+5y=0 \\ -x+4y=27 \end{cases} \\ \hline 9y=27 \\ y=3 \end{array}$$

Kun $y = 3$, niin

$$x+5\cdot 3=0$$
$$x=-15$$

b) $\begin{cases} -x+2y=1 \\ y=x+1 \end{cases}$

Sijoitetaan $y=x+1$ yhtälöön $-x+2y=1$.

$$-x+2(x+1)=1$$
$$-x+2x+2=1$$
$$x=-1$$

Kun x = -1, niin $y=-1+1=0$

Vastaus: a) $x=-15$, $y=3$ b) $x=-1$, $y=0$

6. a) $\begin{cases} 3x - y = 2 & \big| \cdot 2 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 6x - 2y = 4 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases} \\ + \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

tosi

Yhtälöparilla ääretön määrä ratkaisuja.

Kirjoitetaan yhtälöt ratkaistussa muodossa.

$$\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ -y &= -3x + 2 \\ y &= 3x - 2 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} -6x + 2y &= -4 \\ 2y &= 6x - 4 \quad \big| :2 \\ y &= 3x - 2 \end{aligned}$$

Leikkauspisteitä on siis ääretön määrä, mutta niiden on toteutettava suoran $y = 3x - 2$ yhtälö.

b) $\begin{cases} y = -x + 4 \\ y + x + 5 = 0 \end{cases}$

Sijoitetaan $y = -x + 4$ yhtälöön $y + x + 5 = 0$.

$$\begin{aligned} -x + 4 + x + 5 &= 0 \\ 9 &= 0 \end{aligned}$$

epätosi

Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

Vastaus: a) Kaikki suoran $y = 3x - 2$ pisteet. b) Ei ratkaisua

7. a) $\begin{cases} 3x + 4y = -2 & \big| \cdot 5 \\ 5x + 3y = 4 & \big| \cdot (-3) \end{cases}$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 15x + 20y = -10 \\ -15x - 9y = -12 \end{cases} \\ \hline 11y = -22 \\ y = -2 \end{array}$$

Kun y = - 2, niin

$$\begin{aligned} 3x + 4 \cdot (-2) &= -2 \\ 3x - 8 &= -2 \\ 3x &= 6 \quad \big| :3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

b) $\begin{cases} 2x + 4y = 3 & \big| \cdot (-2) \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} -4x - 8y = -6 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases} \\ \hline -5y = -3 \\ y = \dfrac{3}{5} \end{array}$$

Kun $y = \frac{3}{5}$, niin

$$2x + 4 \cdot \frac{3}{5} = 3$$

$$2x + \frac{12}{5} = 3$$

$$2x = \frac{3}{5} \quad \big| :2$$

$$x = \frac{3}{10}$$

c) $\begin{cases} -0{,}3x + 7y = 5(x + 2y + 2) \\ 3(2{,}1x + y) = x + 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} -0{,}3x + 7y = 5x + 10y + 10 \\ 6{,}3x + 3y = x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -5{,}3x - 3y = 10 \\ 5{,}3x + 3y = 2 \end{cases} \\ + \hphantom{xxxxxxxxxxxx} \\ \hline 0 = 12 \end{array}$$

epätosi
ei ratkaisua

Vastaus: a) $x = 2$, $y = -2$ b) $x = \frac{3}{10}$, $y = \frac{3}{5}$ c) ei ratkaisua

8. Merkitään x = 2 kpl pakkausten lkm.
y = 6 kpl pakkausten lkm.

$$\begin{cases} x + y = 70 & \big| \cdot (-2) \\ 2x + 6y = 260 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} -2x - 2y = -140 \\ 2x + 6y = 260 \end{cases} \\ \hline 4y = 120 \\ y = 30 \end{array}$$

Kun $y = 30$, niin

$$\begin{aligned} x + 30 &= 70 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Vastaus: Kahden kappaleen pakkauksia 40 kpl, kuuden kappaleen pakkauksia 30 kpl

9. Merkitään x = yhdessä taksissa matkustavien lkm.
y = yhdessä bussissa matkustavien lkm.
(keskimäärin)

$$\begin{cases} 136x + 68y = 3196 & \big| \cdot(-106) \\ 124x + 106y = 4806 & \big| \cdot 68 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} -14416x - 7208y = -338776 \\ \quad 8432x + 7208y = 326808 \end{cases} \\ + & \\ \hline & -5984x \qquad\qquad = -11968 \\ & \qquad\qquad x = 2 \end{array}$$

Kun $x = 2$, niin

$$\begin{aligned} 136 \cdot 2 + 68y &= 3196 \\ 272 + 68y &= 3196 \\ 68y &= 2924 \quad \big| :68 \\ y &= 43 \end{aligned}$$

Vastaus: Bussissa saapui keskimäärin 43 matkustajaa. Taksissa saapui keskimäärin 2 matkustajaa.

10. Merkitään x = 1,5-prosenttinen liuos (l)
y = 20,0-prosenttinen liuos (l)

	1,5-pros.	**20,0-pros.**	**Koko liuos (l)**
Liuoksen määrä (l)	x	y	1,5
Saippuan määrä	$0{,}015x$	$0{,}20y$	$0{,}10 \cdot 1{,}5$

Saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} x + y = 1{,}5 \\ 0{,}015x + 0{,}20y = 0{,}10 \cdot 1{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1{,}5 & \Big| \cdot (-0{,}20) \\ 0{,}015x + 0{,}20y = 0{,}15 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -0{,}20x - 0{,}20y = -0{,}3 \\ 0{,}015x + 0{,}20y = 0{,}15 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -0{,}185x &= -0{,}15 \\ x &= \frac{0{,}15}{0{,}185} \\ x &= 0{,}8108... \\ x &\approx 0{,}81 \end{aligned}$$

Kun $x = 0{,}8108...$, niin

$$\begin{aligned} 0{,}8108... + y &= 1{,}5 \\ y &= 0{,}68918... \approx 0{,}69 \end{aligned}$$

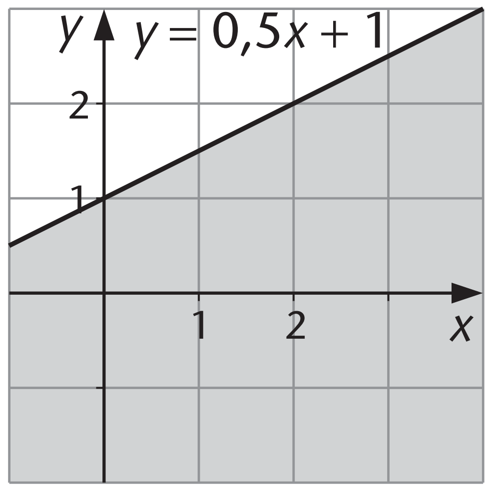
Vastaus: 1,5-prosenttista liuosta 0,81 l, 20-prosenttista liuosta 0,69 l

11. a)

$$x > 2y - 2$$

$$2y < x + 2 \quad \left|: 2\right.$$

$$y < \frac{1}{2}x + 1$$

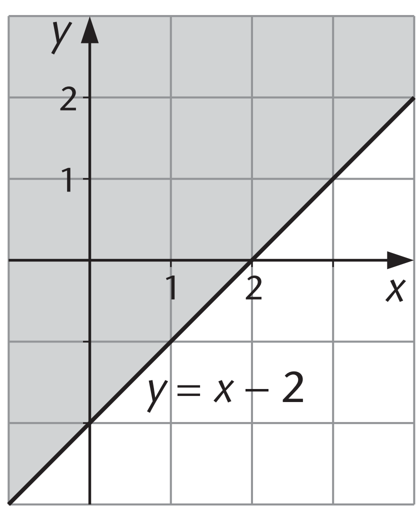


b)

$$4x - y \leq 2y + x + 6$$

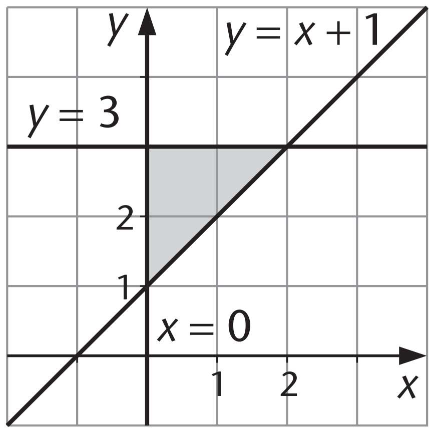
$$-3y \leq -3x + 6 \quad \left|:(-3)\right.$$

$$y \geq x - 2$$



12. a)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 3 \\ y \geq x+1 \end{cases}$$

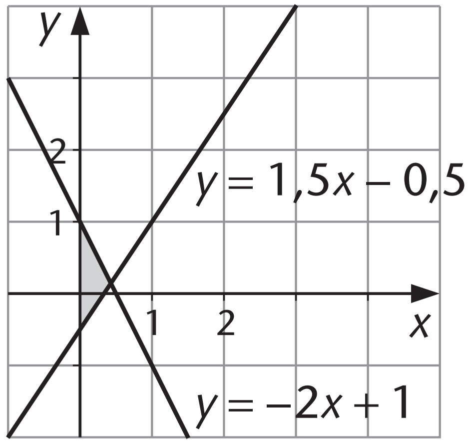


b)

$$\begin{cases} 4x \leq -2y+2 \\ 2y \geq 3x-1 \\ \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y \leq -4x+2 & \big| :2 \\ 2y \geq 3x-1 & \big| :2 \\ \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq -2x+1 \\ y \geq \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

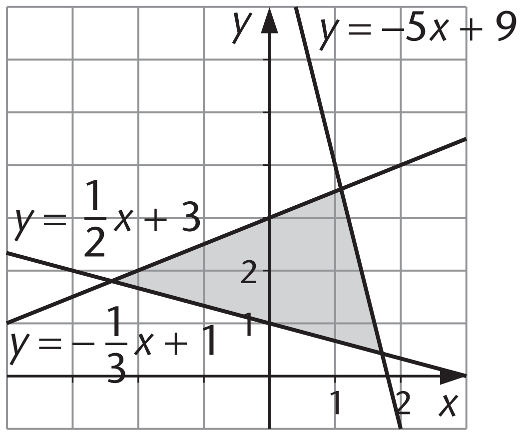


c)

$$\begin{cases} y < -5x + 9 \\ -x + 2y < 6 \\ 3y + x - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < -5x + 9 \\ 2y < x + 6 & \Big| :2 \\ 3y > -x + 3 & \Big| :3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < -5x + 9 \\ y < \dfrac{1}{2}x + 3 \\ y > -\dfrac{1}{3}x + 1 \end{cases}$$



13. Merkitään x = ruisvoileipien lkm.
y = vehnävoileipien lkm.

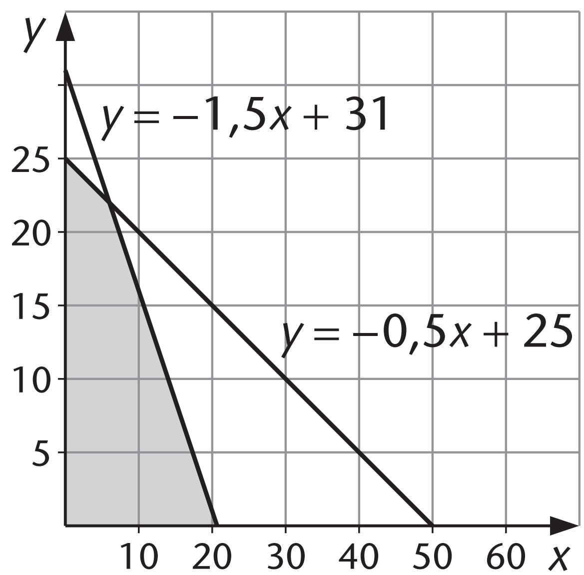
	Ruis x	**Vehnä y**	**Yhteensä max**
Kinkkuviipaleet	3	2	62
Juustoviipaleet	1	2	50

Saadaan epäyhtälöt:

$$\begin{cases} 3x + 2y \le 62 & \big| :2 \\ x + 2y \le 50 & \big| :2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \le -1{,}5x + 31 \\ y \le -0{,}5x + 25 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Epäyhtälöryhmän ratkaisuna on tasoalue, joka kuvaa niitä pisteitä, millaisia määriä voileipiä voidaan valmistaa.



14. a) Suurin tai pienin arvo löytyy tarkasteltavan monikulmion kärkipisteissä.

1. kärkipiste (0, 0), origo

2. kärkipiste suoran $y = -x + 4$ y-akselin leikkauspiste, (0,4)

3. kärkipiste suorien $y = -x + 4$ ja $y = -5x + 6$ leikkauspiste:

$$\begin{aligned} -x + 4 &= -5x + 6 \\ 4x &= 2 \qquad \Big| :4 \\ x &= \frac{1}{2} = 0{,}5 \end{aligned}$$

Kun $y = -0{,}5 + 4 = 3{,}5$

Saadaan piste (0,5; 3,5).

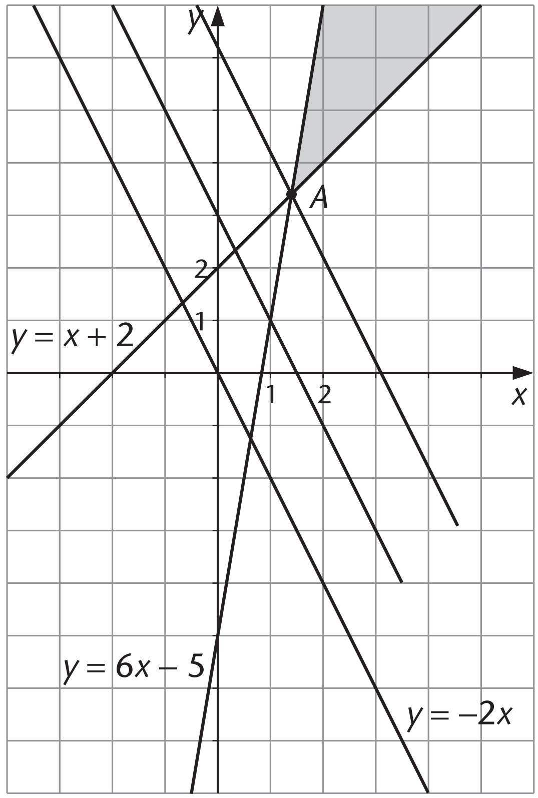
4. kärkipiste suoran $y = -5x + 6$ nollakohta

$$\begin{aligned} -5x + 6 &= 0 \\ -5x &= -6 \quad \big| :(-5) \\ x &= \frac{6}{5} = 1{,}2 \end{aligned}$$

Saadaan piste (1,2; 0).

Kärkipiste	**Lausekkeen** $2x + y$ **arvo**
(0, 0)	$2 \cdot 0 + 0 = 0$ pienin
(0, 4)	$2 \cdot 0 + 4 = 4$
(0,5; 3,5)	$2 \cdot 0{,}5 + 3{,}5 = 4{,}5$ suurin
(1,2; 0)	$2 \cdot 1{,}2 + 0 = 2{,}4$

b) Suurin ja pienin arvo etsitään tutkimalla suorien $2x + y = c$ joukkoa. Kaikki tällaiset suorat ovat yhdensuuntaisia origon kautta kulkevan suoran $2x + y = 0$ kanssa ($y = -2x$).



Pienin vakiotermin c arvo näyttäisi olevan suoralla, joka sivuaa tasoaluetta pisteessä A, suorien $y = x + 2$ ja $y = 6x - 5$ leikkauspisteessä:

$$
\begin{aligned}
x + 2 &= 6x - 5 \\
-5x &= -7 \qquad \big| :(-5) \\
x &= \frac{7}{5} = 1{,}4
\end{aligned}
$$

Kun $x = 1{,}4$, niin $y = 1{,}4 + 2 = 3{,}4$.
Siis $A = (1{,}4; 3{,}4)$

Lauseke $2x + y$ saa tällöin arvon $2 \cdot 1{,}4 + 3{,}4 = 6{,}2$. Kaikki tämän suoran yläpuolella olevat kulkevat tasoalueen poikki. Vakiotermi voi siis suurentua rajatta eli suurinta arvoa ei ole.

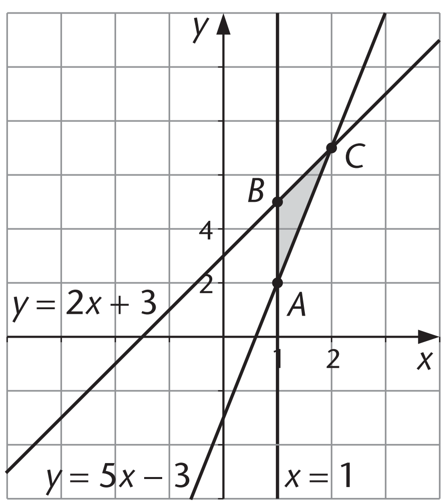
Vastaus: a) Suurin arvo 4,5 , pienin arvo 0
b) Suurinta arvoa ei ole, pienin arvo 6,2

15.

$$\begin{cases} -5x + y \geq -3 \\ y \leq 2x + 3 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 5x - 3 \\ y \leq 2x + 3 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Piirretään tasoalueen kuva.



Lasketaan muodostuneen monikulmion kärkipisteet.

A:

$$\begin{cases} y = 5x - 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Sijoitetaan $x = 1$ yhtälöön $y = 5x - 3$.
$y = 5 \cdot 1 - 3 = 2$
Siis A = (1, 2).

B:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Sijoitetaan $x = 1$ yhtälöön $y = 2x + 3$.
$y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$
Siis B = (1, 5).

C:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 5x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 5x - 3 \\ -3x &= -6 \qquad \big| :(-3) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$y = 2 \cdot 2 + 3 = 7$
Siis C = (2, 7).

Kärkipiste	**Lausekkeen $-3x - 2{,}3y$ arvo**
(1, 2)	$-3 \cdot 1 - 2{,}3 \cdot 2 = -7{,}6$ suurin
(1, 3)	$-3 \cdot 1 - 2{,}3 \cdot 3 = -9{,}9$
(2, 7)	$-3 \cdot 2 - 2{,}3 \cdot 7 = -22{,}1$ pienin

16. Merkitään $x =$ rehu A
$y =$ rehu B

Taulukosta (tehtävänanto) saadaan optimoitava lauseke ja rajoitusehdot.

a) Optimoitava lauseke: kustannukset $= 0{,}10x + 0{,}40y$ (€)

b) Rajoittavat ehdot:

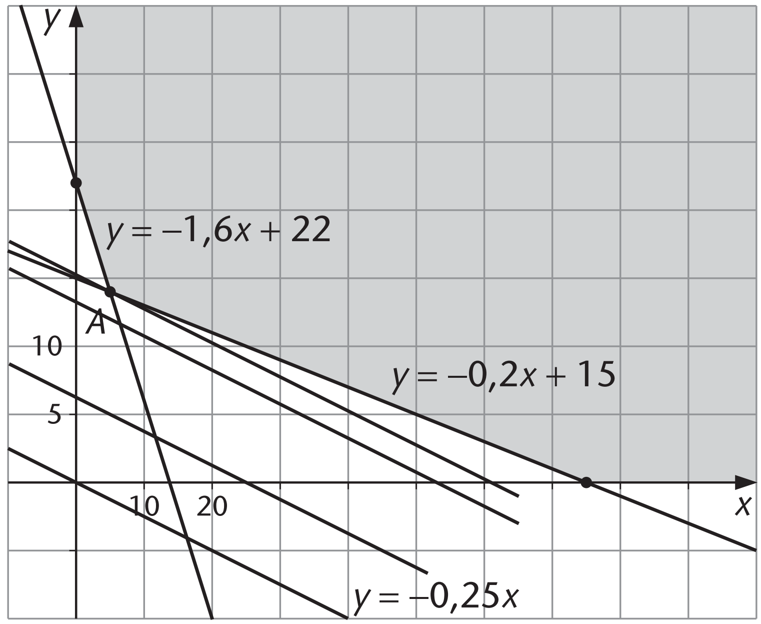
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 160x + 100y \geq 2200 \\ 2x + 10y \geq 150 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq -1{,}6x + 2{,}2 \\ y \geq -0{,}2x + 15 \end{cases}$$

Ratkaistaan epäyhtälöryhmä. Piirretään suorat koordinaatistoon.
Lasketaan piirtämistä varten nollakohdat:

$$\begin{aligned} -1{,}6x + 22 &= 0 \\ -1{,}6x &= -22 \quad \big| :(-1{,}6) \\ x &= 13{,}75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0{,}2x + 15 &= 0 \\ -0{,}2x &= -15 \quad \big| :(-0{,}2) \\ x &= 75 \end{aligned}$$



Koska suotuisa alue ei ole rajoitettu, optimiarvo etsitään tutkimalla suorien $0{,}10x+0{,}50\,y=c$ joukkoa. Kaikki tällaiset suorat ovat yhdensuuntaisia origon kautta kulkevan suoran $0{,}10x+0{,}40\,y=0$ kanssa.

Piirretään siis suora $y=-0{,}25x$.

Lasketaan suorien $y=-0{,}2x+15$ ja $y=-1{,}6x+22$ leikkauspiste A:

$$\begin{aligned}-0{,}2x+15&=-1{,}6x+22\\ 1{,}4x&=7 \qquad \Big|:1{,}4\\ x&=5\end{aligned}$$

Kun $x=5$, niin $y=-0{,}2\cdot 5+15=14$. Siis A = (5, 14).

Vastaus: 5 yksikköä rehua A, 14 yksikköä rehua B

17. Kootaan tehtävässä annetut tiedot taulukkoon ja muodostetaan rajoittavat ehdot (epäyhtälöt) sekä optimoitava lauseke.

	Iso kori x	**Pieni kori y**	**Yhteensä max**
Kuulat	40	20	$10 \cdot 100$
Pullot	3	1	70
Voitto	$3{,}10\,x$	$1{,}50\,y$	

Optimoitava lauseke: $\text{Voitto} = 3{,}10x + 1{,}50\,y$ (€)

Rajoittavat ehdot (taulukosta):

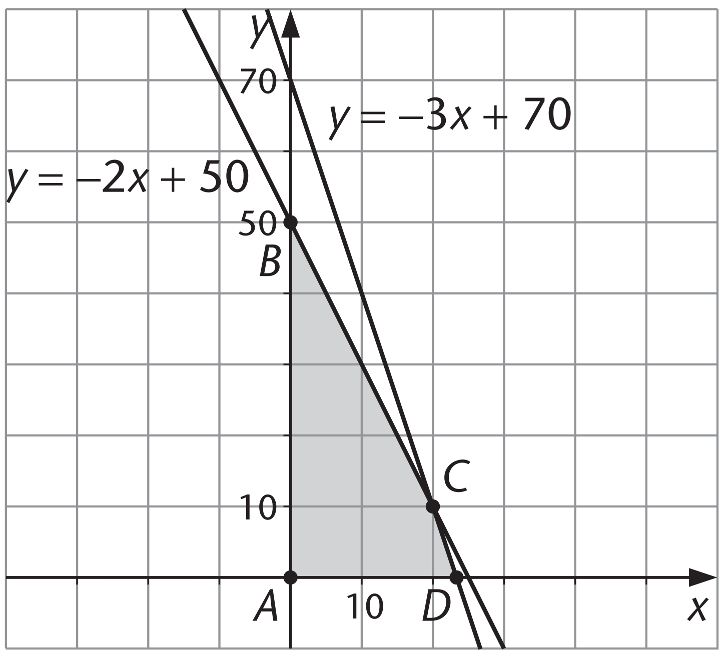
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 40x + 20\,y \leq 1000 \\ 3x + y \leq 70 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -2x + 50 \\ y \leq -3x + 70 \end{cases}$$

Ratkaistaan epäyhtälöryhmä. Piirretään suorat koordinaatistoon. Lasketaan piirtämistä varten nollakohdat:

$$\begin{aligned} -2x + 50 &= 0 \\ -2x &= -50 \quad \Big| :2 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x + 70 &= 0 \\ -3x &= -70 \quad \Big| :(-3) \\ x &= 23\frac{1}{3} \end{aligned}$$



Lasketaan suotuisan tasoalueen kärkipisteet, sillä optimiarvo saadaan jossakin kärkipisteessä.

$A = (0, 0)$, origo

$B = (0, 50)$ Suoran $y = -2x + 50$ y-akselin leikkauskohta.

C: Suorien $y = -2x + 50$ ja $y = -3x + 70$ leikkauspiste.

$$\begin{aligned} -2x + 50 &= -3x + 70 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Kun $x = 20$, niin $y = -2 \cdot 20 + 50 = 10$. Siis $C = (20, 10)$.

$D = \left(23\frac{1}{3}, 0\right)$: Suoran $y = -3x + 70$ nollakohta.

Lasketaan optimoitavan lausekkeen arvo kärkipisteissä.

Kärkipiste	**Voitto** $3{,}10x + 1{,}50y$ **(€)**
(0, 0)	$3{,}10 \cdot 0 + 1{,}50 \cdot 0 = 0$
(0, 50)	$3{,}10 \cdot 0 + 1{,}50 \cdot 50 = 75$
(20, 10)	$3{,}10 \cdot 20 + 1{,}50 \cdot 10 = 77$ suurin
$\left(23\frac{1}{3}, 0\right)$	$3{,}10 \cdot 23\frac{1}{3} + 1{,}50 \cdot 0 = 72\frac{1}{3}$

Suurin voitto saadaan siis, kun $x = 20$ ja $y = 10$.

Vastaus: Isoja koreja 20 kpl ja pieniä koreja 10 kpl.

18. Merkitään x = salkku (lkm.)
y = iltalaukku (lkm.)

Kootaan tehtävänannon tiedot taulukkoon, josta saadaan optimoitava lauseke ja rajoitusehdot.

	Raaka-aine (kg)	**Työaika (h)**	**Hinta (€)**
Salkku *x*	4,0	3	160
Laukku *y*	0,5	1	50
Yhteensä max	200	250	

Optimoitava lauseke: $\text{myyntitulo} = 160x + 50y$

Rajoitusehdot:

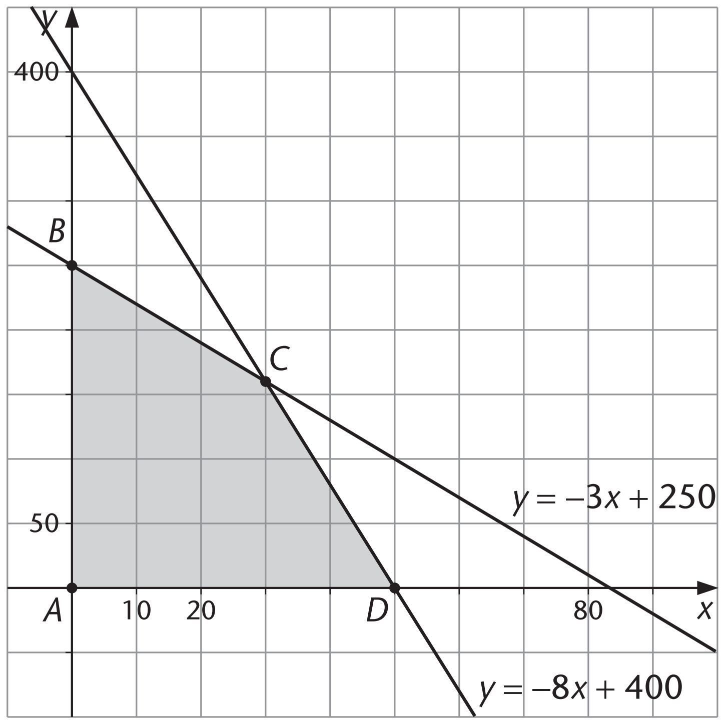
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4{,}0x + 0{,}5y \leq 200 \\ 3x + y \leq 250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -8x + 400 \\ y \leq -3x + 250 \end{cases}$$

Ratkaistaan epäyhtälöryhmä. Ratkaistaan nollakohdat suorien piirtämistä varten.

$$\begin{aligned} -8x + 400 &= 0 \\ -8x &= -400 \quad \left| :(-8) \right. \\ x &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x + 250 &= 0 \\ -3x &= -250 \quad \left| :(-3) \right. \\ x &= 83\frac{1}{3} \end{aligned}$$



Lasketaan suotuisan alueen kärkipisteet, sillä optimiarvo saadaan jossakin kärkipisteessä.

$A = (0, 0)$, origo

$B = (0, 250)$: Suoran $y = -3x + 250$ y-akselin leikkauskohta.

C: Suorien $y = -3x + 250$ ja $y = -8x + 400$ leikkauspiste.

$$\begin{aligned} -3x + 250 &= -8x + 400 \\ 5x &= 150 \quad \Big| :5 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Kun $x = 30$, niin $y = -3 \cdot 30 + 250 = 160$.
Siis $C = (30, 160)$.

D = (50, 0): Suoran $y = -8x + 400$ nollakohta.

Lasketaan optimoitavan lausekkeen arvo kärkipisteissä.

Kärkipiste	**Myyntitulo** $160x + 50y$ **(€)**
(0, 0)	$160 \cdot 0 + 50 \cdot 0 = 0$
(0, 250)	$160 \cdot 0 + 50 \cdot 250 = 12500$
(30, 160)	$160 \cdot 30 + 50 \cdot 160 = 12800$ suurin
(50, 0)	$160 \cdot 50 + 50 \cdot 0 = 8000$

Suurin myyntitulo, kun $x = 30$ ja $y = 160$.

Vastaus: Salkkuja 30 kpl ja iltalaukkuja 160 kpl.

19. a) $a_n = n^2 - 15n$

$$a_{18} = 18^2 - 15 \cdot 18 = 54$$

b) $a_n = \dfrac{2}{3n-15}$

$$a_{18} = \frac{2}{3 \cdot 18 - 15} = \frac{2}{39}$$

20. a) $a_n = n^2 + 2n - 7$

$$n^2 + 2n - 7 = 8$$
$$n^2 + 2n - 15 = 0$$

$$n = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1}$$
$$n = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$
$$n = \frac{-2+8}{2} = 3 \text{ tai } n = \frac{-2-8}{2} = -5$$

Koska n on positiivinen kokonaisluku, niin $n = 3$.

Siis $a_3 = 8$ eli 3. jäsen on 8.

b) $a_n = 3n^2 + 4n + 2$

$$3n^2 + 4n + 2 = 8$$
$$3n^2 + 4n - 6 = 0$$

$$n = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3}$$
$$n = \frac{-4 \pm \sqrt{88}}{6}$$
$$n = 0{,}896... \text{ tai } n = -2{,}230...$$

Koska n ei ole positiivinen kokonaisluku, niin luku 8 ei kuulu jonoon.

Vastaus: a) on b) ei ole

21. a) Joni luku aluksi 20 sivua eli $a_1 = 20$
Toisena päivänä Joni luki $a_2 = 20 + 4 = 24$
Kolmantena päivänä Joni luki $a_3 = 20 + 2 \cdot 4 = 28$
$a_4 = 20 + 3 \cdot 4 = 32$
$\vdots$

Luettujen sivujen määrät muodostavat aritmeettisen jonon, jossa $d = 4$.

b) Yleinen jäsen on siis:

$$\begin{aligned} a_n &= 20 + (n-1) \cdot d \\ &= 20 + 4n - 4 \\ &= 4n + 16 \end{aligned}$$

c) 2 viikkoa = 14 päivää

$$a_{14} = 4 \cdot 14 + 16 = 72 \ \text{(sivua)}$$

Vastaus: a) 20, 24, 28, 32, … b) $a_n = 4n + 16$ c) 72 sivua

22. a) Ensimmäisellä portaalla ($n = 1$) oli kynttilöitä

$$a_1 = 41 - 4 \cdot 1 = 37 \ \text{(kpl)}$$

b) Viimeisellä portaalla oli 1 kynttilä. Lasketaan siis, milloin $a_n = 1$.

$$\begin{aligned} a_n &= 1 \\ 41 - 4n &= 1 \\ -4n &== -40 \,|: (-4) \\ n &= 10 \end{aligned}$$

Portaita oli siis 10.

Vastaus: a) 37 b) 10 portaalla

23. 1, -3, -7, -11, …

a) Aritmeettinen jono: $a_1 = 1$, $d = -3 - 1 = -7 - (-3) = -4$

Yleinen jäsen on siis

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= 1 + (n-1) \cdot (-4) \\ &= 1 - 4n + 4 \\ &= -4n + 5 \end{aligned}$$

b) $a_{21} = -4 \cdot 21 + 5 = -79$

24. Aritmeettinen jono 67, 62, 57, 52, ...

$$\begin{aligned} &a_1 = 67 \\ &d = 62 - 67 = 57 - 62 = -5 \end{aligned}$$

a) Tutkitaan, onko $a_n = -467$.

$$\begin{aligned} a_n &= -467 \\ a_1 + (n-1) \cdot d &= -467 \\ 67 + (n-1) \cdot (-5) &= -467 \\ 67 - 5n + 5 &= -467 \\ -5n &= -539 \quad \left| :(-5) \right. \\ n &= 107{,}8 \end{aligned}$$

Koska n ei ole positiivinen kokonaisluku, niin −467 ei ole jonossa.

b) Tutkitaan, onko $a_n = -673$.

$$\begin{aligned}
a_n &= -673 \\
67 + (n-1) \cdot (-5) &= -673 \\
67 - 5n + 5 &= -673 \\
-5n &= -745 \qquad \big| :(-5) \\
n &= 149
\end{aligned}$$

Koska n on positiivinen kokonaisluku, niin −673 on jonossa.

Vastaus: a) ei ole b) on

25. Aritmeettinen lukujono, jossa $d = 7$ ja $a_{43} = -43$.

Kysytään, milloin $a_n < -100$. Määritetään ensin yleinen jäsen $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$$\begin{aligned}
a_{43} &= -43 \\
a_1 + (43-1) \cdot 7 &= -43 \\
a_1 + 42 \cdot 7 &= -43 \\
a_1 + 294 &= -43 \\
a_1 &= -337
\end{aligned}$$

Yleinen jäsen on siis

$$\begin{aligned} a_n &= -337 + (n-1)\cdot 7 \\ &= -337 + 7n - 7 \\ &= 7n - 344 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &< -100 \\ 7n - 344 &< -100 \\ 7n &< 244 \quad |:7 \\ n &< 34{,}857... \end{aligned}$$

Koska *n* on positiivinen kokonaisluku, niin 34 jäsentä on pienempiä kuin -100.

Vastaus: 34 jäsentä

26. a) Tarkastellaan syvyyttä rannasta lähtien siirtyen aina 1m merelle päin.

$$a_0 = 2{,}90\,\text{m} \quad \text{(etäisyys rantaan 0 m)}$$
$$a_1 = (2{,}90 + 0{,}4)\ \text{m} = 3{,}30\ \text{m}$$
$$a_2 = 2{,}90 + 2 \cdot 0{,}4 = 3{,}70\ \text{m}$$
$$a_3 = 2{,}90 + 3 \cdot 0{,}4 = 4{,}10\ \text{m}$$
$$\vdots$$
$$a_n = 2{,}90 + n \cdot 0{,}4\ \ \text{(m)} \quad \text{etäisyys rantaan } n \text{ metriä}$$

Syvyydet muodostavat siis aritmeettisen jonon, jossa $d = 0{,}4$ (m)

b) syvyys 120 m päässä rannasta eli etsitään 120. jäsentä jonossa

$$a_{120} = 2{,}90 + 120 \cdot 0{,}4 = 50{,}9\ \ \text{(m)}$$

Vastaus: a) $a_n = 2{,}90 + 0{,}4n$ b) 50,9 m

27. a) $92+124+156+..+572$

Aritmeettinen summa, jossa $a_1 = 92$ ja $d = 124 - 92 = 156 - 124 = 32$

Lasketaan, montako lukua summassa on, kun tiedetään, että viimeinen jäsen on 572.

$$\begin{aligned} a_n &= 572 \\ a_1 + (n-1)\cdot d &= 572 \\ 92 + (n-1)\cdot 32 &= 572 \\ 92 + 32n - 32 &= 572 \\ 32n &= 512 \quad \Big| :32 \\ n &= 16 \end{aligned}$$

Summassa on siis 16 jäsentä.

$$S_{16} = 16 \cdot \frac{92+572}{2} = 16 \cdot \frac{664}{2} = 5312$$

b) $101+95+89+...+(-61)+(-67)$

Aritmeettinen summa, jossa $a_1 = 101$ ja $d = 95 - 101 = 89 - 95 = -6$

Lasketaan, montako lukua summassa on, kun tiedetään, että viimeinen jäsen on -67.

$$
\begin{aligned}
a_n &= -67 \\
a_1 + (n-1)\cdot d &= -67 \\
101 + (n-1)\cdot(-6) &= -67 \\
101 - 6n + 6 &= -67 \\
-6n &= -174 \quad \big| :(-6) \\
n &= 29
\end{aligned}
$$

$$S_{29} = 29 \cdot \frac{101-67}{2} = 493$$

Vastaus: a) 5312 b) 493

28. Aritmeettinen jono 3, 5, 7, 9, …, jossa $a_1 = 3$ ja $d = 5-3 = 7-5 = 2$

Lasketaan 60. jäsen yleisen jäsenen avulla.

$$
\begin{aligned}
a_n &= a_1 = a_1 + (n-1)\cdot d \\
&= 3 + (n-1)\cdot 2 \\
&= 3 + 2n - 2 \\
&= 2n + 1
\end{aligned}
$$

60. jäsen on siis $a_{60} = 2\cdot 60 + 1 = 121$

$$S_{60} = 60 \cdot \frac{3+121}{2} = 3720$$

Vastaus: 3720

29. Tarkastellaan katsojien määrää viikoittain. Määrät muodostavat aritmeettisen jonon, jossa $a_1 = 5550$, $d = -450$.

a) Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 5550 + (n-1)\cdot(-450) \\ &= 5550 - 450n + 450 \\ &= -450n + 6000 \end{aligned}$$

b) Lasketaan ensin, kuinka moni näki elokuvan 12. viikolla.

$$a_{12} = -450\cdot 12 + 6000 = 600$$

$$S_{12} = 12\cdot\frac{5550+600}{2} = 36900$$

Vastaus: a) $a_n = -450n + 6000$ b) 36900 katsojaa

30. Tarkastellaan kilpa-auton kulkemaa matkaa:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \text{ (m)} \\ a_2 &= 2+4 = 6 \text{ (m)} \\ &\vdots \\ a_n &= 2+(n-1)\cdot 4 = 2+4n-4 = 4n-2 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Matkat muodostavat aritmeettisen jono, jossa $d = 4$.

a) 15. sekunnin aikana kulkema matka:

$$a_{15} = 4 \cdot 15 - 2 = 58 \text{ (m)}$$

Kokonaismatka ensimmäisen 15 sekunnin aikana eli hetkillä 1 – 15 (s)

$$S_{15} = 15 \cdot \frac{2 + 58}{2} = 450 \text{ (m)}$$

b) Viimeisen sekunnin aikana v_{k_1}:

$$v_{k_1} = \frac{a_{15}}{1\,\text{s}} = \frac{58\,\text{m}}{1\,\text{s}} = 58 \cdot 3{,}60\ \text{km}/\text{h} = 208{,}8\ \text{km}/\text{h} \approx 209\ \text{km}/\text{h}$$

Tutkittavan 15 sekunnin aikana v_{k_2}:

$$v_{k_2} = \frac{S_{15}}{15\ s} = \frac{450\,\text{m}}{15\,\text{s}} = 30 \cdot 3{,}60\ \text{km}/\text{h} = 108\ \text{km}/\text{h}$$

Vastaus: a) 450 m b) $v_{k_1} = 209\ \text{km}/\text{h}$ c) $v_{k_2} = 108\ \text{km}/\text{h}$

31. Geometrinen jono 3, −15, 75, −375, … , jossa

$a_1 = 3$, $q = \dfrac{-15}{3} = \dfrac{75}{-15} = -5$

a) Yleinen jäsen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot (-5)^{n-1}$

b) Yleisen jäsenen avulla saadaan $a_8 = 3 \cdot (-5)^{8-1} = 3 \cdot (-5)^7 = -234375$

Vastaus: a) $a_n = 3 \cdot (-5)^{n-1}$ b) −234375

32. Geometrinen jono, jossa $q = 0{,}5$ ja $a_7 = -6$.

Ensimmäinen jäsen lasketaan yleisen jäsenen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ avulla.

$$
\begin{aligned}
a_7 &= -6 \\
a_1 \cdot 0{,}5^{7-1} &= -6 \\
a_1 \cdot 0{,}5^6 &= -6 \qquad \Big| :0{,}5^6 \\
a_1 &= \frac{-6}{0{,}5^6} \\
a_1 &= -384
\end{aligned}
$$

Vastaus: -384

33. Geometrinen jono 2000, 600, 180, …, jossa

$$a_1 = 2000\ ,\ \ q = \frac{600}{2000} = \frac{180}{600} = \frac{3}{10}$$

Yleinen jäsen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2000 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}$

Tutkitaan, milloin $a_n = 1{,}458$.

$$\begin{aligned}
2000 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} &= 1{,}458 \qquad \Big| :2000 \\
\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} &= \frac{1{,}458}{2000} \\
(n-1)\lg\frac{3}{10} &= \lg\left(7{,}29 \cdot 10^{-4}\right) \\
n-1 &= \frac{\lg\left(7{,}29 \cdot 10^{-4}\right)}{\lg\frac{3}{10}} \\
n &= 6+1 = 7
\end{aligned}$$

$a_7 = 1{,}458$

Vastaus: 7. jäsen

34. Bakteeriviljelmä 2 –kertaistuu kahdessakymmenessäminuutissa eli bakteerien lukumäärät muodostavat geometrisen jonon.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 6 & \\ a_2 = 6 \cdot 2 & 20\,\text{min kuluttua} \\ a_3 = 6 \cdot 2^2 & 2 \cdot 20\,\text{min kuluttua} \\ a_4 = 6 \cdot 2^3 & 3 \cdot 20\,\text{min kuluttua} \\ \vdots & \\ a_n = 6 \cdot 2^{n-1} & (n-1) \cdot 20\,\text{min kuluttua} \end{array}$$

Lasketaan, milloin $a_n = 6291456$ (bakteeria)

$$\begin{aligned} 6 \cdot 2^{n-1} &= 6291456 \quad \big| :6 \\ 2^{n-1} &= 1048576 \\ (n-1)\lg 2 &= \lg 1048576 \quad \big| :\lg 2 \\ n-1 &= \frac{\lg 1048576}{\lg 2} \\ n-1 &= 20 \\ n &= 21 \end{aligned}$$

Tällöin aikaa on kulunut

$$(n-1) \cdot 20 \text{ min} = 20 \cdot 20 \text{ min} = 400 \text{ min} \;\; (6 \text{ h } 40 \text{ min})$$

Vastaus: 400 min kuluttua (6 h 40 min)

35. Geometrinen jono, koska vähenemistä 3,4 %. Matkustajia on siis aina jäljellä 100 % - 3,4 % = 96,6 % edellisvuoteen verratuna eli määrä 0,966 –kertaistuu.

	$a_0 = 10900$
1 v. kuluttua:	$a_1 = 10900 \cdot 0{,}966$
2 v. kuluttua:	$a_2 = 10900 \cdot 0{,}966^2$
$\vdots$	
n. vuoden kuluttua	$a_n = 10900 \cdot 0{,}966^n$

a) 10 vuoden kuluttua

$$a_{10} = 10900 \cdot 0{,}966^{10} = 7712{,}545... \approx 7700$$

b) $a_n < 6500$

Lasketaan ensin, milloin $a_n = 6500$.

$$10900 \cdot 0{,}966^n = 6500 \quad \Big| :10900$$

$$0{,}966^n = \frac{65}{109}$$

$$n \lg 0{,}966 = \lg \frac{65}{109} \quad \Big| :\lg 0{,}966$$

$$n = \frac{\lg \frac{65}{109}}{\lg 0{,}966}$$

$$n = 14{,}944...$$

Jos $n = 14$, niin $a_{14} = 10900 \cdot 0{,}966^{14} = 6715{,}9... > 6500$

Jos $n = 15$, niin $a_{15} = 10900 \cdot 0{,}966^{15} = 6487{,}58... < 6500$

Siis 15 vuoden kuluttua määrä on alle 6500.

Vastaus: a) 7700 matkustajaa b) 15 vuoden kuluttua

36. a) $5 + 25 + 125 + ... + 9765625$

Geometrinen summa: $a_1 = 5$, $q = \frac{25}{5} = \frac{125}{5} = 5$

Lasketaan ensin yleisen jäsenen avulla, montako lukua summassa on.

Yleinen jäsen: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1}$

$$
\begin{aligned}
a_n &= 9765625 \\
5 \cdot 5^{n-1} &= 9765625 \quad \left| :5 \right. \\
5^{n-1} &= 1953125 \\
(n-1)\lg 5 &= \lg 1953125 \quad \left| :\lg 5 \right. \\
n - 1 &= \frac{\lg 1953125}{\lg 5} \\
n &= 9 \\
n &= 10
\end{aligned}
$$

Summassa on siis 10 lukua.

$$S_{10} = 5 \cdot \frac{1-5^{10}}{1-5} = 12207030 \approx 12210000$$

b) $3 + 3 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}6^2 + ... + 3 \cdot 0{,}6^{10}$

Geometrinen summa: $n = 11$, $q = 0{,}6$, $a_1 = 3$

$$S_{11} = 3 \cdot \frac{1-0{,}6^{11}}{1-0{,}6} = 7{,}4727... \approx 7{,}473$$

37. 2; 2,6; 3,38; 4,394; …

Geometrinen jono, jossa $a_1 = 2$ ja $q = \frac{2{,}6}{2} = \frac{3{,}38}{2{,}6} = 1{,}3$

Kysytään, milloin $S_n > 1000$

Lasketaan ensin, milloin $S_n = 1000$.

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \frac{1-1{,}3^n}{1-1{,}3} &= 1000 \quad \Big| :2 \\
\frac{1-1{,}3^n}{-0{,}3} &= 2000 \quad \Big| \cdot(-0{,}3) \\
1-1{,}3^n &= -150 \\
-1{,}3^n &= -151 \quad \Big| \cdot(-1) \\
1{,}3^n &= 151 \\
n\lg 1{,}3 &= \lg 151 \\
n &= \frac{\lg 151}{\lg 1{,}3} \\
n &= 19{,}1233...
\end{aligned}
$$

Jos $n = 19$, niin

$$S_{19} = 2 \cdot \frac{1-1{,}3^{19}}{1-1{,}3} = 967{,}946... < 1000$$

Jos $n = 20$, niin

$$S_{20} = 2 \cdot \frac{1-1{,}3^{20}}{1-1{,}3} = 1260{,}330... > 1000$$

Vastaus: vähintään 20 jäsentä

38. Marjojen määrä pieneni 5 % eli määrä 0,95 – kertaistuu (100 % - 5 % = 95 %). Tarkastellaan marjojen määriä peräkkäisinä päivinä.

$$\begin{aligned} a_1 &= 25 \text{ l} \\ a_2 &= 0{,}95 \cdot 25 \text{ l} \\ a_3 &= 0{,}95^2 \cdot 25 \text{ l} \\ &\vdots \\ a_n &= 0{,}95^{n-1} \cdot 25 \text{ l} \end{aligned}$$

Muodostuu siis geometrinen jono, jossa $a_1 = 25$ l ja $q = 0{,}95$.

Kahden viikon, $n = 14$ (päivää), aikana Sanni poimi yhteensä

$$S_{14} = 25 \cdot \frac{1-0{,}95^{14}}{1-0{,}95} \text{ l} = 256{,}162... \text{ l} \approx 256 \text{ l}$$

39. Tarkastellaan Viljon tilillä olevaa rahamäärää vuosittain syntymäpäivänä:

1 v.	$120{,}00$ (€)
2 v.	$1{,}021 \cdot 120{,}00 + 120{,}00$ (€)
3 v.	$1{,}021^2 \cdot 120{,}00 + 1{,}021 \cdot 120{,}00 + 120{,}00$
$\vdots$	
18 v.	$1{,}021^{17} \cdot 120{,}00 + ... + 1{,}021 \cdot 120{,}00$

Rahaa on tilillä 18 v päivänä (ilman viimeistä talletusta):
geometrinen summa, jossa $n = 18$, $a_1 = 120{,}00$, $q = 1{,}021$

$$\begin{aligned} S_{18} &= 1{,}021 \cdot 120{,}00 \cdot \frac{1 - 1{,}021^{17}}{1 - 1{,}021} \\ &= 2472{,}352... \text{ (€)} \end{aligned}$$

Vastaus: 2472,35 €

40. Taimista kuihtuu 20 % viikossa eli taimien määrä 0,80 – kertaistuu viikossa (100% - 20% = 80%).

Tarkastellaan taimien määrää:

Alussa taimia	600
1 viikon kuluttua	$0{,}80 \cdot 600 + 80$
2 viikon kuluttua	$0{,}80^2 \cdot 600 + 0{,}80 \cdot 80 + 80$
$\vdots$	
20 viikon kuluttua	$0{,}80^{20} \cdot 600 + \underbrace{0{,}80^{19} \cdot 80 + ... + 80}_{20\,\text{kpl}\,(=n)}$

$a_1 = 80$, $q = 0{,}80$

Taimia on 20 viikon kuluttua geometrinen summa

$$
\begin{aligned}
S_{20} &= 0{,}80^{20} \cdot 600 + 80 \cdot \frac{1-0{,}80^{20}}{1-0{,}80} \\
&= 402{,}305\ldots \\
&\approx 400
\end{aligned}
$$

Vastaus: 400 tainta

1. Harjoituskoe

1. a) Muodostetaan ensin suorien yhtälöiden ratkaistut muodot.

$$8y = 4x + 12 \quad \Big| :8$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$-5x + 6y = -5$$
$$6y = 5x - 5 \quad \Big| :6$$
$$y = \frac{5}{6}x - \frac{5}{6}$$

Leikkauspiste lasketaan ratkaisemalla yhtälöpari.
(Yhtälöparin olisi voinut muodostaa myös suoraan tehtävänannon normaalimuodoista.)

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{5}{6}x + \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6}$$
$$-\frac{1}{3}x = -2\frac{1}{3} \quad \Big| :\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$x = 7$$

Kun $x = 7$, niin $y = \frac{1}{2} \cdot 7 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5$.
Siis leikkauspiste (7, 5)

b) Muodostetaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} -4x + 20y = -5 & \big| \cdot 5 \\ -5x + 15y = -10 & \big| \cdot (-4) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -20x + 100y = -25 \\ 20x - 60y = 40 \end{cases} \\ \hline 40y = 15 \\ y = \frac{3}{8} \end{array}$$

Kun $y = \frac{3}{8}$, niin

$$\begin{aligned} -4x + 20 \cdot \frac{3}{8} &= -5 \\ -4x + \frac{60}{8} &= -5 \\ -4x &= -12\frac{1}{2} \quad \big| :(-4) \\ x &= 3\frac{1}{8} \end{aligned}$$

Vastaus: a) (7, 5) b) $x = 3\frac{1}{8}$, $y = \frac{3}{8}$

2. Aritmeettinen jono 20, 17, 14, 11, 8,…, jossa $a_1 = 20$, $d = -3$

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 20 + (n-1)\cdot(-3) \\ &= 20 - 3n + 3 \\ &= -3n + 23 \end{aligned}$$

Lasketaan, milloin $a_n > -50$.

$$\begin{aligned} -3n + 23 &> -50 \\ -3n &> -73 \quad \big| :(-3) \\ n &< 24{,}333... \end{aligned}$$

Koska *n* on positiivinen kokonaisluku, niin lukuja on siis 24 kpl.

Vastaus: $a_n = -3n + 23$, 24 lukua on suurempia kuin -50

3. a) Aritmeettinen jono 1, 4, 7, …, jossa

$$a_1 = 1$$
$$d = 4 - 1 = 7 - 4 = 3$$

Määritetään aluksi yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 1 + (n-1)\cdot 3 \\ &= 1 + 3n - 3 \\ &= 3n - 2 \end{aligned}$$

Lasketaan, milloin $a_n = 250$.

$$\begin{aligned} 3n - 2 &= 250 \\ 3n &= 252 \quad \Big| :3 \\ n &= 84 \end{aligned}$$

Siis $a_{84} = 250$

b) Geometrinen jono $3,\ 4\frac{1}{2},\ 6\frac{3}{4},\ \ldots$, jossa

$$a_1 = 3$$

$$q = \frac{4\frac{1}{2}}{3} = \frac{6\frac{3}{4}}{4\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Lasketaan aluksi yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\ &= 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

6. termi: $a_6 = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{6-1} = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5} = 22{,}78125 \approx 22{,}8$

15. ensimmäisen termin summa:

$$S_{15} = 3 \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{15}}{1-\frac{3}{2}} = 2621{,}363 \approx 2621{,}4$$

Vastaus: a) 84. jäsen b) $a_6 \approx 22{,}8$ ja $S_{15} \approx 2621{,}4$

4. Kunto-ohjelman kesto kasvaa päivittäin 8 % eli 1,08 – kertaistuu (100% + 8% = 108%).

1. päivä $a_1 = 45 \text{ (min)}$
2. päivä $a_2 = 1{,}08 \cdot 45 \text{ (min)}$
3. päivä $a_3 = 1{,}08^2 \cdot 45 \text{ (min)}$

$\vdots$

n. päivä $a_n = 1{,}08^{n-1} \cdot 45 \text{ (min)}$

a) Jonon 15. jäsen

$$\begin{aligned} a_{15} &= 1{,}08^{15-1} \cdot 45 \text{ min} \\ &= 1{,}08^{14} \cdot 45 \text{ min} \\ &= 132{,}173 \ldots \text{ min} \\ &\approx 132 \text{ min} \end{aligned}$$

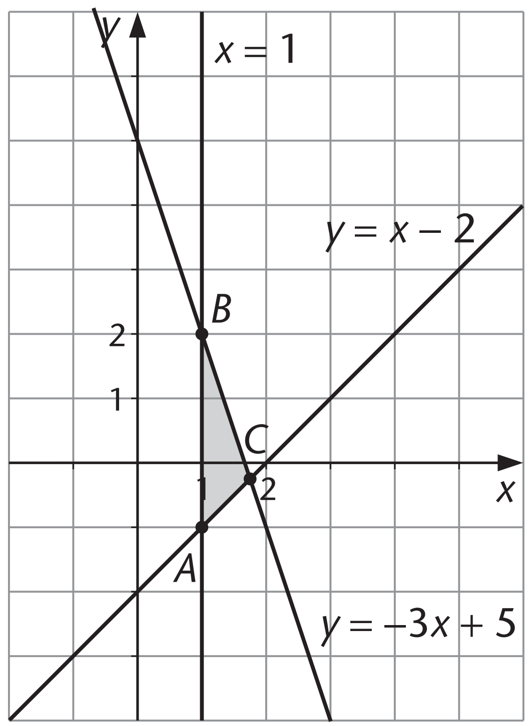
b) Kuntoiluun käytetään aikaa 30 päivän aikana

$$\begin{aligned} S_{30} &= 45 \cdot \frac{1 - 1{,}08^{30}}{1 - 1{,}08} \\ &= 5097{,}74\ldots \\ &\approx 5100 \text{ min } (85 \text{ h}) \end{aligned}$$

Vastaus: a) 132 min b) 85 h

5. Muodostetaan ensin ratkaistut muodot ja piirretään suorat koordinaatistoon.

$3x + y \leq 5$	$-x + y + 2 \geq 0$	$x - 1 \geq 0$
$y \leq -3x + 5$	$y \geq x - 2$	$x \geq 1$



Lasketaan muodostuneen monikulmion kärkipisteet, sillä optimiarvot löytyvät kärkipisteistä.

A: Suorien $x = 1$ ja $y = x - 2$ leikkauspiste. $y = 1 - 2 = -1$
Siis $A = (1, -1)$

B: Suorien $x = 1$ ja $y = -3x + 5$ leikkauspiste. $y = -3 \cdot 1 + 5 = 2$
Siis $B = (1, 2)$

C: Suorien $y=-3x+5$ ja $y=x-2$ leikkauspiste.

$$\begin{aligned}-3x+5&=x-2\\ -4x&=-7 \quad \big| :(-4)\\ x&=\frac{7}{4}=1{,}75\end{aligned}$$

$$y=\frac{7}{4}-2=-\frac{1}{4}=-0{,}25$$

Siis $C=(1{,}75;\,-0{,}25)$

Kärkipiste	**Lausekkeen** $11x-5y$ **arvo**
(1, −1)	$11\cdot 1-5\cdot(-1)=16$
(1, 2)	$11\cdot 1-5\cdot 2=1$ pienin
(1,75; −0,25)	$11\cdot\frac{7}{4}-5\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=20{,}5$ suurin

Vastaus: Suurin arvo 20,5 pisteessä (1,75; −0,25),
pienin arvo 1 pisteessä (1, 2)

6. Merkitään x = lanka A (m)
y = lanka B (m)

Kootaan tehtävänannon tiedot taulukkoon:

	Lanka A **x (m)**	**Lanka B** **y (m)**	**yht. min (g)**
Villa	20	10	14
Keinokuitu	20	60	30
Hinta (€)	30	20	

Optimoitava lauseke: kulut $= 30x + 20y$

Rajoittavat ehdot:

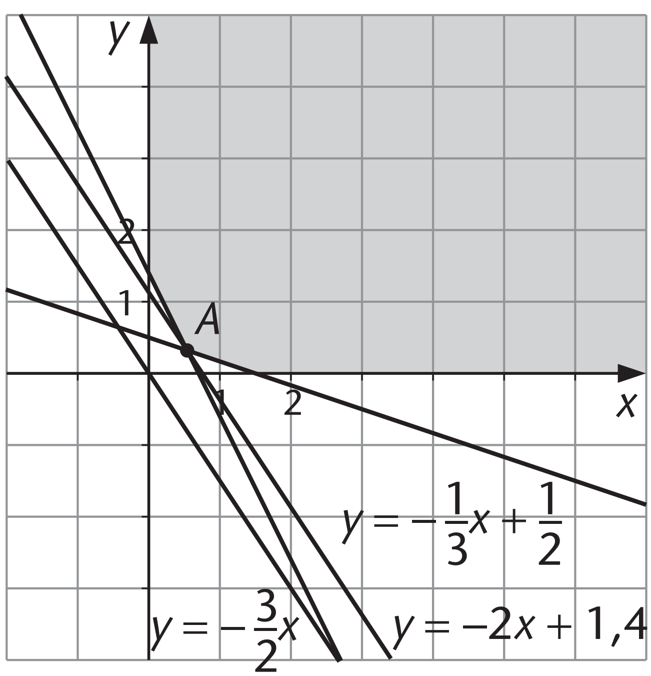
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 20x + 10y \geq 14 \\ 20x + 60y \geq 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq -2x + 1{,}4 \\ y \geq -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Piirretään suotuisa alue. Lasketaan piirtämistä varten suorien nollakohdat:

$$\begin{aligned} -2x+1{,}4 &= 0 \\ -2x &= 1{,}4 \quad \big| :(-2) \\ x &= 0{,}7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}x+\frac{1}{2} &= 0 \\ -\frac{1}{3}x &= -\frac{1}{2} \quad \Big| :\left(-\frac{1}{3}\right) \\ x &= \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \end{aligned}$$



Optimoitavan lausekkeen pienin arvo etsitään tutkimalla suorien $3x + 2y = c$ joukkoa. Kaikki tällaiset suorat ovat yhdensuuntaisia suoran $30x + 20y = 0$ kanssa eli $y = -\frac{3}{2}x$.

Pienin arvo saadaan kuvan mukaan pisteessä A:
Suorien $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ ja $y = -2x + 1{,}4$ leikkauspiste.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} &= -2x + 1{,}4 \\ 1\frac{2}{3}x &= 0{,}9 \qquad \Big| :1\frac{2}{3} \\ x &= 0{,}54 \end{aligned}$$

Kun $x = 0{,}54$, niin

$$y = -2 \cdot 0{,}54 + 1{,}4 = 0{,}32.$$

Siis $A = (0{,}54;\ 0{,}32)$

Kulut ovat tällöin $30 \cdot 0{,}54 + 20 \cdot 0{,}32 = 22{,}6$ (€)

Vastaus: Lanka A: 0,54 m ja lanka B: 0,32 m

2. Harjoituskoe

1. a) $4n^2 - 1$, $n = 1, 2, \ldots$

$$a_1 = 4 \cdot 1^2 - 1 = 3$$
$$a_2 = 4 \cdot 2^2 - 1 = 4 \cdot 4 - 1 = 15$$
$$a_3 = 4 \cdot 3^2 - 1 = 4 \cdot 9 - 1 = 35$$
$$a_4 = 4 \cdot 4^2 - 1 = 4 \cdot 16 - 1 = 63$$
$$a_5 = 4 \cdot 5^2 - 1 = 4 \cdot 25 - 1 = 99$$

b) Aritmeettinen jono, $a_1 = -7$ ja $d = -1$

$$a_1 = -7$$
$$a_2 = -7 - 1 = -8$$
$$a_3 = -7 - 2 \cdot 1 = -9$$
$$a_4 = -7 - 3 \cdot 1 = -10$$
$$a_5 = -7 - 4 \cdot 1 = -11$$

c) Geometrinen jono, $a_1 = \frac{1}{2}$ ja $q = -\frac{1}{3}$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2} \\
a_2 &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{6} \\
a_3 &= -\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{18} \\
a_4 &= \frac{1}{18} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{54} \\
a_5 &= -\frac{1}{54} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{162}
\end{aligned}
$$

2. a)

$$
\begin{cases} 2a + 3b = -8 \\ 2a - b = 4 \quad \middle| \cdot (-1) \end{cases}
$$

$$
+\begin{cases} 2a + 3b = -8 \\ -2a + b = -4 \end{cases}
$$

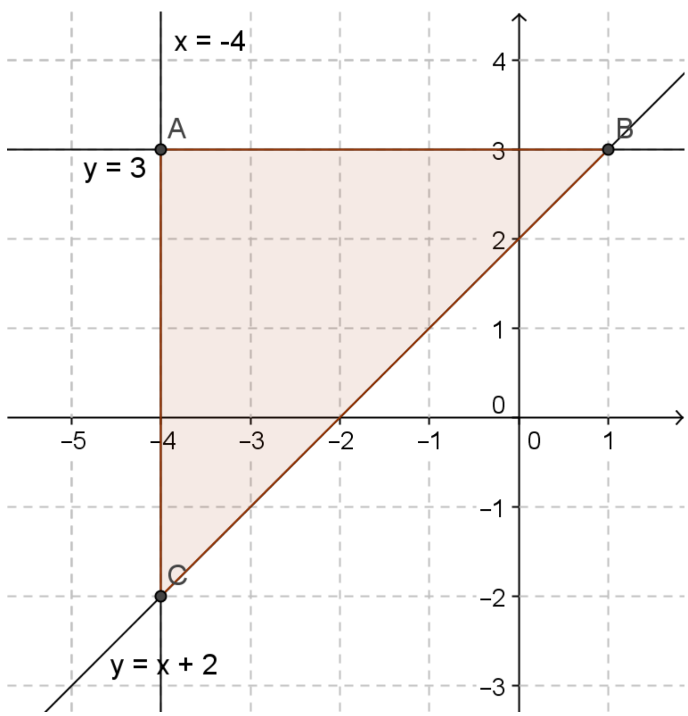
$$
\begin{aligned}
4b &= -12 \quad |: 4 \\
b &= -3
\end{aligned}
$$

Kun b = -3, niin

$$\begin{aligned} 2a-(-3)&=4 \\ 2a&=1 \quad \vert :2 \\ a&=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{cases} y \geq x+2 \\ y < 3 \\ x \geq -4 \end{cases}$$



Epäyhtälön ratkaisuna on kolmion muotoinen tasoalue *ABC*, jossa reuna $y = 3$ ei kuulu mukaan.

Vastaus: a) $a = \frac{1}{2}$, $b = -3$ b) kuvan tasoalue

3. Merkitään x = Pekan tuntipalkka (€)
y = Jarin tuntipalkka (€)

$$\begin{cases} 10x + 14y = 110 & \mid \cdot 9 \\ 9x + 17y = 121 & \mid \cdot (-10) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} 90x + 126y = 990 \\ -90x - 170y = -1210 \end{cases} \\ \hline -44y = -220 \\ y = 5 \end{array}$$

Kun $y = 5$, niin

$$\begin{aligned} 9x + 17 \cdot 5 &= 121 \\ 9x + 85 &= 121 \\ 9x &= 36 \quad \mid :9 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Vastaus: Pekan tuntipalkka 4 €/h, Jarin tuntipalkka 5 €/h

4. 2, 4, 6, 8,… on aritmeettinen jono, jossa $a_1 = 2$ ja
$d = 8 - 6 = 6 - 4 = 4 - 2 = 2$

999 ensimmäisen termin summa:

Lasketaan ensin 999. jäsen eli
$$\begin{aligned} a_{999} &= a_1 + (999-1)\cdot d \\ &= 2 + 998\cdot 2 \\ &= 1998 \end{aligned}$$

999 ensimmäisen jäsenen summa on siis

$$S_{999} = 999\cdot\frac{2+1998}{2} = 999000$$

888 ensimmäisen termin summa:

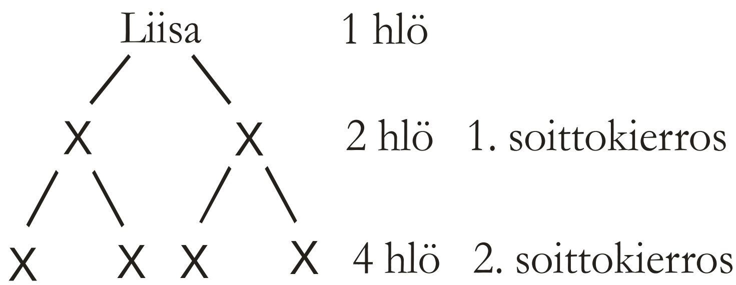
Lasketaan ensin 888. jäsen eli
$$\begin{aligned} a_{888} &= a_1 + (888-1)\cdot d \\ &= 2 + 887\cdot 2 \\ &= 1776 \end{aligned}$$

888 ensimmäisen jäsenen summa on siis

$$S_{888} = 888\cdot\frac{2+1776}{2} = 789432$$

$\frac{999000}{789432} = 1{,}2654...$ eli 26,54…% ≈ 26,5 % suurempi

5. Hahmotellaan apukuvio



Huomataan, että kuulijoiden määrä kaksinkertaistuu aina seuraavalla soittokerralla, joten muodostuu geometrinen jono, jossa $a_1 = 2$, $q = 2$.

Yleinen jäsen on $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

a) 10. kierroksella $n = 10$

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2046$$

b) $S_n > 5020$

Lasketaan ensin, milloin $S_n = 5020$.

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} &= 5020 \\
2 \cdot \frac{1-2^n}{-1} &= 5020 \quad \left| \cdot (-1) \right. \\
2\left(1-2^n\right) &= -5020 \quad \left| :2 \right. \\
1-2^n &= -2510 \\
-2^n &= -2511 \quad \left| \cdot (-1) \right. \\
2^n &= 2511 \\
n \lg 2 &= \lg 2511 \quad \left| : \lg 2 \right. \\
n &= \frac{\lg 2511}{\lg 2} \\
n &= 11{,}294...
\end{aligned}
$$

Jos $n = 11$, niin

$$S_{11} = 2 \cdot \frac{1-2^{11}}{-1} = 4095 < 5020$$

Jos $n = 12$, niin

$$S_{12} = 2 \cdot \frac{1-2^{12}}{-1} = 8190 > 5020$$

Tarvitaan siis 12 soittokierrosta.

Vastaus: a) 2046 henkilöä b) vähintään 12 soittokierrosta

6. Laina 72000 (€), vuotuinen korko 3,3 %,

$\frac{1}{2}$ vuoden korko: $\frac{3,3}{2}\% = 1,65\%$

Tarkastellaan lainan määrää ja maksettuja korkoja.

$\frac{1}{2}$ vuoden kuluttua:

lainaa	$72000 - 4500$ (€) $= 67500$ (€)
korkoa	$0,0165 \cdot 72000 = 1188$ (€)

1 vuoden kuluttua:

lainaa	$72000 - 2 \cdot 4500$ (€) $= 63000$ (€)
korkoa	$0,0165 \cdot 67500$ (€) $= 1113,75$ (€)

1 vuodessa lainaa lyhennetään $2 \cdot 4500$ € $= 9000$ €, joten

lainan takaisinmaksu siis kestää $\frac{72000}{9000} = 8$ (vuotta).

Korkojen maksua on $2 \cdot 8 = 16$ kertaa. Korot muodostavat jonon:

$$
\begin{array}{ll}
1. & 0{,}0165 \cdot 72000 = a_1 \\
2. & 0{,}0165 \cdot (72000 - 4500) \\
 & = 0{,}0165 \cdot 72000 - 0{,}0165 \cdot 4500 \\
3. & 0{,}0165 \cdot (72000 - 2 \cdot 4500) \\
 & = 0{,}0165 \cdot 72000 - 0{,}0165 \cdot 2 \cdot 4500 \\
\vdots & \vdots \\
16. & 0{,}0165 \cdot 4500 = 74{,}25 = a_{16}
\end{array}
$$

Korot muodostavat aritmeettisen, jossa $a_1 = 0{,}0165 \cdot 72000 = 1188$ ja $d = -0{,}0165 \cdot 4500 = -74{,}25$.

Korkoa maksetaan yhteensä:

$$S_{16} = 16 \cdot \frac{1188 + 74{,}25}{2} \text{ €} = 10098 \text{ €}$$

Vastaus: 10098 €, takaisinmaksu kestää 8 v.

3. Harjoituskoe

1. a) $a_n = 6n - 1$, $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} 6n - 1 &= 276 \\ 6n &= 277 \quad \Big| :6 \\ n &= 46{,}166\ldots \end{aligned}$$

Koska n ei ole positiivinen kokonaisluku, niin 276 ei kuulu jonoon.

b) $a_n = -6 + 6(n-1)$, $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} -6 + 6(n-1) &= 276 \\ -6 + 6n - 6 &= 276 \\ 6n &= 288 \quad \Big| :6 \\ n &= 48 \end{aligned}$$

Koska n on positiivinen kokonaisluku, niin 276 kuuluu jonoon.

c) $a_n = -2 \cdot 3^n$, $n = 1, 2, ...$

$$-2 \cdot 3^n = 276 \quad \big| :(-2)$$
$$3^n = -138$$

Ei ratkaisua, sillä 3^n on aina positiivinen. Luku 276 ei siis kuulu jonoon.

Vastaus: a) ei kuulu b) kuuluu c) ei kuulu

2. Tarkastellaan kaupunkien *A* ja *B* asukasmääriä. Kaupungin *A* asukasmäärä vähenee vuosittain 107:llä eli asukasmäärät muodostavat aritmeettisen jonon. Kaupungin *B* asukasmäärä lisääntyy 1,5 % vuosittain eli 1,015 – kertaistuu, joten asukasmäärät muodostavat geometrisen jonon.

Kaupunki A	**Kaupunki B**
$a_1 = 47000$	$a_1 = 47000$
$d = -107$	$q = 1{,}015$
Aritmeettinen jono	Geometrinen jono
Yleinen termi	Yleinen termi
$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$= 47000 + (n-1) \cdot (-107)$	$= 47000 \cdot 1{,}015^{n-1}$
$= 47000 - 107n + 107$	
$= -107n + 47107$	

a) 15 vuoden kuluttua $n = 16$.

Kaupunki A	**Kaupunki B**
$a_{16} = -107 \cdot 16 + 47107$	$a_{16} = 47000 \cdot 1{,}015^{16-1}$
$= 45395$	$= 47000 \cdot 1{,}015^{15}$
≈ 45400	$= 58760{,}907...$
	≈ 58800

b) $\dfrac{58760{,}907... - 47000}{47000} \cdot 100\,\% = 25{,}02...\% \approx 25\,\%$

Vastaus: a) *A*: 45400, *B*: 58800 b) 25 %

3. 50 penkkiriviä, $a_1 = 19$, $d = 2$ eli penkkien määrät eri riveillä muodostavat aritmeettisen jonon.

a) Lasketaan ensin viimeisellä rivillä olevat penkit
$a_{50} = a_1 + (50-1) \cdot d = 19 + 49 \cdot 2 = 117$ (penkkiä)

$$S_{50} = 50 \cdot \frac{19 + 117}{2} = 3400 \text{ (penkkiä)}$$

b) Lasketaan, milloin $S_n = 1056$.
Muodostetaan ensin yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 19 + (n-1)\cdot 2 \\ &= 19 + 2n - 2 \\ &= 2n + 17 \end{aligned}$$

Lasketaan, mille riville n mennessä on kertynyt 1056 paikkaa

$$\begin{aligned} S_n &= 1056 \\ n\cdot\frac{19+2n+17}{2} &= 1056 \qquad \Big|\cdot 2 \\ n(2n+36) &= 2112 \\ 2n^2 + 36n - 2112 &= 0 \qquad \Big|:2 \\ n^2 + 18n - 1056 &= 0 \end{aligned}$$

$$n = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4\cdot 1\cdot(-1056)}}{2\cdot 1}$$

$$n = \frac{-18 \pm \sqrt{4548}}{2}$$

$$n = 24{,}719\ldots \text{ tai } n = -42{,}719\ldots$$

Koska n on positiivinen kokonaisluku, niin $n = -42{,}719\ldots$ ei käy.

Paikkanumero 1056 sijaitsee siis 25. rivillä. Lasketaan ensin, montako paikkaa on 24 ensimmäisellä rivillä.

$$S_{24} = 24 \cdot \frac{19 + a_{24}}{2} = 24 \cdot \frac{19 + 2 \cdot 24 + 17}{2} = 1008$$

Yli jää siis $1056 - 1008 = 48$ (paikkaa)

Siis paikkanumero 1056 on 25. rivillä, 48. paikka vasemmalta lukien.

Vastaus: a) 3400 penkkiä b) 25. rivillä, 48. paikka vasemmalta

4. Epäyhtälöryhmä

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq -y \;\;|:(-1) \\ 2y - x \leq 6 \\ 3x + y \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \geq -x \\ 2y \leq x + 6 \;\;|:2 \\ 3x + y \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \geq -x \\ y \leq \frac{1}{2}x + 3 \\ y \leq -3x + 3 \end{cases}$$

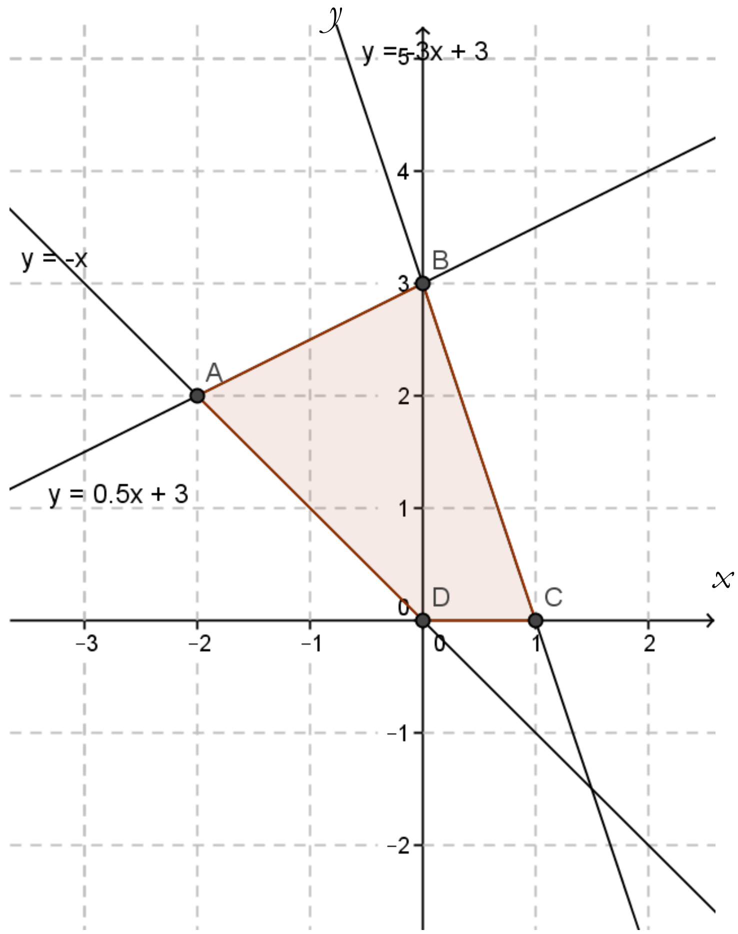
Piirretään suorat koordinaatistoon. Lasketaan suorien nollakohdat ja y – akselin leikkauskohdat piirtämistä varten.

$$
\begin{aligned}
-3x + 3 &= 0 \\
-3x &= -3 \quad |:(-3) \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}x + 3 &= 0 \\
\frac{1}{2}x &= -3 \quad \left|:\left(\frac{1}{2}\right)\right. \\
x &= -6
\end{aligned}
$$

y – akselin leikkauskohtana molemmilla eo. suorilla on $y = 3$

Koska epäyhtälöissä on yhtäsuuruudet, itse suorat kuuluvat myös tasoalueeseen. Muodostuu nelikulmio.



Pinta-alan laskemista varten lasketaan ensin kärkipisteet.

Piste A: suorien $y = \frac{1}{2}x + 3$ ja $y = -x$ leikkauspiste.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + 3 &= -x \\ \frac{3}{2}x &= -3 \quad \Big| : \frac{3}{2} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Kun x = -2, niin y = - (-2)=2. Piste A = (-2, 2).

Piste *B*: suorien $y = -3x + 3$ ja $y = \frac{1}{2}x + 3$ leikkauspiste

$$
\begin{aligned}
-3x + 3 &= \frac{1}{2}x + 3 \\
-3\frac{1}{2}x &= 0 \quad \Big| : \left(-3\frac{1}{2}\right) \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

Kun $x = 0$, niin $y = -3 \cdot 0 + 3 = 3$. Piste $B = (0, 3)$.

Piste *C*: suoran $y = -3x + 3$ nollakohta. Piste C=(1, 0)

Piste D= (0, 0), origo

Nelikulmio voidaan jakaa kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi lävistäjän *BD* avulla. Lasketaan syntyneiden kolmioiden *ABD* ja *BCD* pinta-alat yhteen.

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 3 + \frac{3}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Vastaus: $4\frac{1}{2}$

5.
Huom! Kirjan 1. painoksessa on virhe tehtävänannossa. Valmistukseen käytettävä kokonaisaika on 176 h.
(ei 160 h).

Merkitään $x =$ tuolit (kpl)
$y =$ pöydät (kpl)

	Valmistus (h)	**Maalaus (h)**	**Hinta (€)**
Pöytä *y*	9,6	6	150
Tuoli *x*	8	3	100
Yhteensä max	176	90	

Optimoitava lauseke $\text{tulot} = 100x + 150y$

Rajoittavat ehdot:

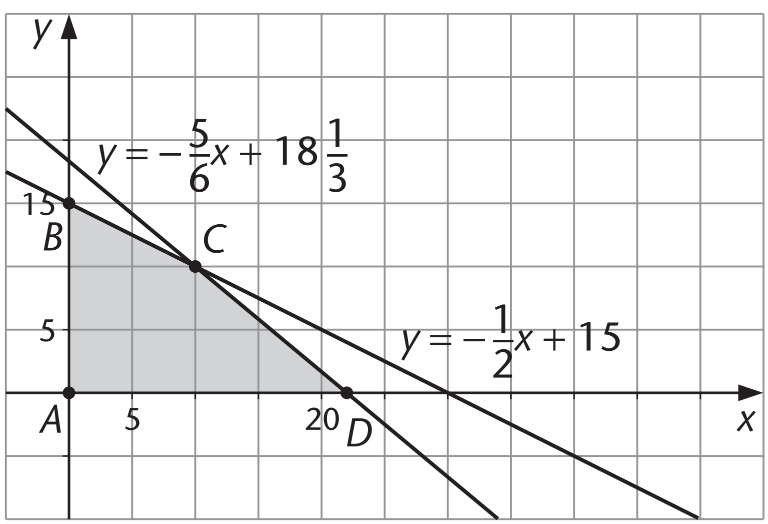
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8x + 9{,}6y \leq 176 \\ 3x + 6y \leq 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\dfrac{5}{6}x + 18\dfrac{1}{3} \\ y \leq -\dfrac{1}{2}x + 15 \end{cases}$$

Piirretään suorat ja etsitään suotuisa alue. Lasketaan suorien nollakohdat piirtämistä varten:

$$
\begin{aligned}
-\frac{5}{6}x + 18\frac{1}{3} &= 0 \\
-\frac{5}{6}x &= -18\frac{1}{3} \quad \Big| : \left(-\frac{5}{6}\right) \\
x &= 22
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}x + 15 &= 0 \\
-\frac{1}{2}x &= -15 \quad \Big| : \left(-\frac{1}{2}\right) \\
x &= 30
\end{aligned}
$$



Lasketaan muodostuneen monikulmion kärkipisteet *A*, *B*, *C* ja *D*, sillä optimiarvo löytyy kärkipisteistä.

$A = (0, 0)$

B: Suoran $y = -\frac{1}{2}x + 15$ y-akselin leikkauskohta eli $B = (0, 15)$

C: Suorien $y = -\frac{5}{6}x + 18\frac{1}{3}$ ja $y = -\frac{1}{2}x + 15$ leikkauspiste.

$$\begin{aligned} -\frac{5}{6}x + 18\frac{1}{3} &= -\frac{1}{2}x + 15 \\ -\frac{1}{3}x &= -3\frac{1}{3} \qquad \left| : \left(-\frac{1}{3}\right) \right. \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Kun $x = 10$, niin

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 10 + 15 = 10$$

Siis $C = (10, 10)$.

D: Suoran $y = -\frac{5}{6}x + 18\frac{1}{3}$ nollakohta. Siis $D = (22, 0)$.

Lasketaan tulojen $100x+150y$ arvot kärkipisteissä.

Kärkipisteet	$150x+150y$ **(€)**
(0, 0)	$100\cdot 0+150\cdot 0=0$
(0, 15)	$100\cdot 0+150\cdot 15=2250$
(10, 10)	$100\cdot 10+150\cdot 10=2500$ suurin
(22, 0)	$100\cdot 22+150\cdot 0=2200$

Suurimmat tulot saadaan pisteessä (10, 10) eli pöytiä valmistetaan 10 kpl ja tuoleja 10 kpl.

Vastaus: 10 kpl pöytiä, 10 kpl tuoleja

6. Talletussumma 100 €, korko 2,5 % eli summa 1,025 – kertaistuu vuodessa

Tarkastellaan tilillä olevaa rahamäärää:

1. vuotispäivä 100 (€)
2. vuotispäivä $1{,}025\cdot 100+100$ (€)
3. vuotispäivä $1{,}025^2\cdot 100+1{,}025\cdot 100+100$ (€)

$\vdots$

18. vuotispäivä $1{,}025^{17}\cdot 100+\ldots+1{,}025\cdot 100$ (€)
(viimeistä talletusta ei tehdä)

Rahamäärä 18 – vuotispäivänä muodostuu geometrisenä summana

$n = 17$, $a_1 = 1{,}025 \cdot 100$, $q = 1{,}025$

$$\begin{aligned} S_{17} &= 1{,}025 \cdot 100 \cdot \frac{1 - 1{,}025^{17}}{1 - 1{,}025} \\ &= 2138{,}634... \\ &\approx 2138{,}63 \text{ (€)} \end{aligned}$$

Vastaus: 2138, 63 €

Ekstrat

1. a)

$$\begin{cases} y = -3x - 1 \\ y = -x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$-x^2 - 2x + 1 = -3x - 1$$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

Kun x = - 1, niin $y = -3 \cdot (-1) - 1 = 3 - 1 = 2$
Kun x = 2, niin $y = -3 \cdot 2 - 1 = -6 - 1 = -7$

b)

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ -y + x^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$2x - 3 + x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Kun x = -1, niin $y = -2 \cdot (-1) + 3 = 2 + 3 = 5$

Vastaus: a) x = - 2, y = 2 tai x = 2, y = -7 b) x = -1, y = 5

2. Muodostetaan yhtälöpari.

a) $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = x^2 + 2x - 4 \end{cases}$

Sijoitetaan $y = 2x + 5$ yhtälöön $y = x^2 + 2x - 4$:

$$
\begin{aligned}
2x + 5 &= x^2 + 2x - 4 \\
x^2 - 9 &= 0 \\
x^2 &= 9 \\
x &= \pm 3
\end{aligned}
$$

Kun $x = 3$, niin $y = 2 \cdot 3 + 5 = 11$.
Kun $x = -3$, niin $y = 2 \cdot (-3) + 5 = -1$.

b) $\begin{cases} y = -4x + 3 \\ y = -x^2 - x + 3 \end{cases}$

Sijoitetaan $y = -4x + 3$ yhtälöön $y = -x^2 - x + 3$:

$$
\begin{aligned}
-4x + 3 &= -x^2 - x + 3 \\
x^2 - 3x &= 0 \\
x(x - 3) &= 0 \\
x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 3 &= 0 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Kun $x = 0$, niin $y = -4 \cdot 0 + 3 = 3$
Kun $x = 3$, niin $y = -4 \cdot 3 + 3 = -9$

Vastaus: a) (3, 11) tai (-3, -1) b) (0, 3) tai (3, -9)

3. a)

$$\begin{cases} y + x^2 = 5x - 2 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$$

Sijoitetaan $y = 2x - 6$ yhtälöön $y + x^2 = 5x - 2$

$$2x - 6 + x^2 = 5x - 2$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$
$$x = \frac{3 \pm 5}{2}$$
$$x = 4 \quad \text{tai} \quad x = -1$$

Kun $x = 4$, niin $y = 2 \cdot 4 - 6 = 2$
Kun $x = -1$, niin $y = 2 \cdot (-1) - 6 = -8$

b) $\begin{cases} y + 8x + 4 = 0 \\ y - 2x^2 = 3x + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -8x - 4 \\ y = 2x^2 + 3x + 1 \end{cases}$

Sijoitetaan $y = -8x - 4$ yhtälöön $y = 2x^2 + 3x + 1$

$$-8x - 4 = 2x^2 + 3x + 1$$

$$2x^2 + 11x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{81}}{4}$$

$$x = \frac{-11 \pm 9}{4}$$

$$x = -\frac{1}{2} \text{ tai } x = -5$$

Kun $x = -\frac{1}{2}$, niin

$$y = -8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 = 4 - 4 = 0$$

Kun $x = -5$, niin

$$y = -8 \cdot (-5) - 4 = 40 - 4 = 36$$

Vastaus: a) x=4, y= 2 tai x = -1, y=-8 b) $x = -\frac{1}{2}$, y=0 tai x= -5, y=36

4.

$$\begin{cases} y-2x+4=0 \\ y=x^2-3x+2 \end{cases}$$

Sijoitetaan $y=x^2-3x+2$ yhtälöön $y-2x+4=0$:

$$x^2-3x+2-2x+4=0$$
$$x^2-5x+6=0$$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}$$
$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}$$
$$x=\frac{5\pm1}{2}$$
$$x=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3 \text{ tai } x=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Kun $x=3$, niin $y=3^2-3\cdot3+2=2$
Kun $x=2$, niin $y=2^2-3\cdot2+2=0$

Vastaus: (3, 2) ja (2, 0)

5. a)

$$\begin{cases} 5a + b + 3c = 1 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ -4a - 5b + 2c = 1 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan molemmista *a*.

(1)

$$+\begin{cases} 4a + 2b + c = 2 \\ -4a - 5b + 2c = 1 \end{cases}$$

$$-3b + 3c = 3$$

(2)

$$\begin{cases} 5a + b + 3c = 1 & \Big| \cdot (-4) \\ 4a + 2b + c = 2 & \Big| \cdot 5 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -20a - 4b - 12c = -4 \\ 20a + 10b + 5c = 10 \end{cases}$$

$$6b - 7c = 6$$

Saadaan uusi yhtälöpari:

$$\begin{cases} -3b + 3c = 3 & \Big| \cdot 2 \\ 6b - 7c = 6 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -6b + 6c = 6 \\ 6b - 7c = 6 \end{cases}$$

$$-c = 12$$

$$c = -12$$

Jos $c=-12$, niin

$$\begin{aligned} -3b+3\cdot(-12)&=3\\ -3b-36&=3\\ -3b&=39 \quad \big| :(-3)\\ b&=-13 \end{aligned}$$

Sijoitetaan yhtälöön $4a+2b+c=2$ $c=-12$ ja $b=-13$:

$$\begin{aligned} 4a+2\cdot(-13)+(-12)&=2\\ 4a-26-12&=2\\ 4a&=40 \quad \big| :4\\ a&=10 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{cases} a+b+c=-5\\ 9a-3b+5c=-49\\ 4a-2b+c=-20 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan niistä c.

(1)

$$\begin{cases} a+b+c=-5 \quad \big| \cdot(-1)\\ 4a-2b+c=-20 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -a-b-c=5\\ 4a-2b+c=-20 \end{cases} \\ \hline 3a-3b=-15 \end{array}$$

(2)

$$\begin{cases} a+b+c=-5 & \Big|\cdot(-5) \\ 9a-3b+5c=-49 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} -5a-5b-5c=25 \\ 9a-3b+5c=-49 \end{cases} \\ \hline 4a-8b=-24 \end{array}$$

Saadaan uusi yhtälöpari:

$$\begin{cases} 3a-3b=-15 & \Big|\cdot(-4) \\ 4a-8b=-24 & \Big|\cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} -12a+12b=60 \\ 12a-24b=-72 \end{cases} \\ \hline -12b=-12 \\ b=1 \end{array}$$

Jos $b=1$, niin

$$\begin{aligned} 3a-3\cdot 1&=-15 \\ 3a&=-12 \quad \Big|:3 \\ a&=-4 \end{aligned}$$

Sijoitetaan yhtälöön $a+b+c=-5$ $a=-4$ ja $b=1$.

$$
\begin{aligned}
-4+1+c &= -5 \\
c &= -2
\end{aligned}
$$

Vastaus: a) $a=10,\ b=-13,\ c=-12$ b) $a=-4,\ b=1,\ c=-2$

6. a)

$$
\begin{cases}
-x+3y+4z=2 \\
x+2y+z=1 \\
-2x+y+4z=1
\end{cases}
$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan niistä x.

(1)

$$
\begin{array}{rl}
 & \begin{cases} -x+3y+4z=2 \\ x+2y+z=1 \end{cases} \\
+ & \\
\hline
 & 5y+5z=3
\end{array}
$$

(2)

$$
\begin{cases}
x+2y+z=1 & \Big| \cdot 2 \\
-2x+y+4z=1
\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & \begin{cases} 2x+4y+2z=2 \\ -2x+y+4z=1 \end{cases} \\
+ & \\
\hline
 & 5y+6z=3
\end{array}
$$

Saadaan uusi yhtälöpari:

$$\begin{cases} 5y + 5z = 3 & \Big| \cdot (-1) \\ 5y + 6z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} -5y - 5z = -3 \\ \quad 5y + 6z = 3 \end{cases} \\ \hline z = 0 \end{array}$$

Jos $z = 0$, niin

$$\begin{aligned} 5y + 5 \cdot 0 &= 3 \\ 5y &= 3 \\ y &= \frac{3}{5} = 0{,}6 \end{aligned}$$

Kun $z = 0$ ja $y = 0{,}6$, niin

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot 0{,}6 + 0 &= 1 \\ x + 1{,}2 &= 1 \\ x &= 1 - 1{,}2 = -0{,}2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 3x + y + 2z = 4 \\ -x + 6y + 4z = 1 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan z.

(1)

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 & \big| \cdot (-1) \\ 3x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -2x - y - 2z = -1 \\ 3x + y + 2z = 4 \end{cases} \\ + \hphantom{xxxxxxxxxxxxxx} \\ \hline x = 3 \end{array}$$

(2)

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 4 & \big| \cdot (-2) \\ -x + 6y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -6x - 2y - 4z = -8 \\ -x + 6y + 4z = 1 \end{cases} \\ + \hphantom{xxxxxxxxxxxxxx} \\ \hline -7x + 4y = -7 \end{array}$$

Saadaan uusi yhtälöpari:

$$\begin{cases} x = 3 \\ -7x + 4y = -7 \end{cases}$$

Sijoitetaan $x = 3$ yhtälöön $-x + 4y = -7$

$$\begin{aligned} -7 \cdot 3 + 4y &= -7 \\ -21 + 4y &= -7 \\ 4y &= 14 \quad \Big| :4 \\ y &= \frac{14}{4} = 3{,}5 \end{aligned}$$

Kun $x = 3$ ja $y = 3{,}5$, niin

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 3{,}5 + 2z &= 1 \\ 6 + 3{,}5 + 3z &= 1 \\ 2z &= -8{,}5 \quad \Big| :2 \\ z &= -4{,}25 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $x = -0{,}2$; $y = 0{,}6$; $z = 0$ b) $x = 3$, $y = 3{,}5$; $z = -4{,}25$

7. Muodostetaan yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 4z = 2 \\ 3x + y + 3z = 1 \\ -2x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan niistä y.

(1)

$$\begin{cases} 2x - 2y + 4z = 2 \\ 3x + y + 3z = 1 \quad \Big| \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2x - 2y + 4z = 2 \\ 6x + 2y + 6z = 2 \end{cases} \\ \hline 8x + 10z = 4 \end{array}$$

(2)

$$\begin{cases} 3x + y + 3z = 1 \quad \Big| \cdot (-3) \\ -2x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -9x - 3y - 9z = -3 \\ -2x + 3y + 4z = 1 \end{cases} \\ \hline -11x - 5z = -2 \end{array}$$

Saadaan uusi yhtälöpari:

$$\begin{cases} 8x + 10z = 4 \\ -11x - 5z = -2 \quad \Big| \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 8x + 10z = 4 \\ -22x - 10z = -4 \end{cases} \\ \hline -14x = 0 \\ x = 0 \end{array}$$

Jos $x=0$, niin

$$\begin{aligned} 8\cdot 0+10z&=4 \\ 10z&=4 \qquad \mid :10 \\ z&=0{,}4 \end{aligned}$$

Kun $x=0$ ja $z=0{,}4$, niin

$$\begin{aligned} 3\cdot 0+y+3\cdot 0{,}4&=1 \\ y&=1-1{,}2=-0{,}2 \end{aligned}$$

Vastaus: $x=0$, $y=-0{,}2$, $z=0{,}4$

8. Paraabelin yhtälö on muotoa $y=ax^2+bx+c$.

a)

$(-5,-81)$: $\quad -81=a\cdot(-5)^2+b\cdot(-5)+c$

$(1,-3)$: $\quad -3=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c$

$(2,-4)$: $\quad -4=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c$

Muodostuu yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 25a-5b+c=-81 \\ a+b+c=-3 \\ 4a+2b+c=-4 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan niistä c.

(1)

$$\begin{cases} 25a-5b+c=-81 & \Big| \cdot(-1) \\ a+b+c=-3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -25a+5b-c=81 \\ a+b+c=-3 \end{cases} \\ + \hline -24a+6b=78 \end{array}$$

(2)

$$\begin{cases} a+b+c=-3 & \Big| \cdot(-1) \\ 4a+2b+c=-4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -a-b-c=3 \\ 4a+2b+c=-4 \end{cases} \\ + \hline 3a+b=-1 \end{array}$$

Muodostetaan uusi yhtälöpari:

$$\begin{cases} -24a+6b=78 \\ 3a+b=-1 \; \Big| \cdot(-6) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -24a+6b=78 \\ -18a-6b=6 \end{cases} \\ + \hline -42a=84 \\ a=-2 \end{array}$$

Jos $a=-2$, niin

$$\begin{aligned} 3\cdot(-2)+b&=-1\\ -6+b&=-1\\ b&=5 \end{aligned}$$

Kun $a=-2$ ja $b=5$, niin

$$\begin{aligned} -2+5+c&=-3\\ 3+c&=-3\\ c&=-6 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} &(-2,-1): \quad -1=a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c\\ &(1,2): \quad 2=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c\\ &(2,-1): \quad -1=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c \end{aligned}$$

Saadaan yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 4a-2b+c=-1\\ a+b+c=2\\ 4a+2b+c=-1 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan niistä *c*.

(1)

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = -1 & \big| \cdot (-1) \\ a + b + c = 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} -4a + 2b - c = 1 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \\ + & \\ \hline & -3a + 3b = 3 \end{array}$$

(2)

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = -1 & \big| \cdot (-1) \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} -4a + 2b - c = 1 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases} \\ + & \\ \hline & 4b = 0 \\ & b = 0 \end{array}$$

Jos $b = 0$, niin

$$\begin{aligned} -3a + 3 \cdot 0 &= 3 \\ -3a &= 3 \quad \big| :(-3) \\ a &= -1 \end{aligned}$$

Kun $a = -1$ ja $b = 0$, niin

$$\begin{aligned} -1 + 0 + c &= 2 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $y = -2x^2 + 5x - 6$ b) $y = -x^2 + 3$

9. Kootaan tehtävänannon tiedot taulukkoon:

	Markus	**Timo**	**Pekka**
Nyt	x	y	z
2 v. sitten	$x-2$	$y-2$	$z-2$

Saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} x + y + z = 99 \\ 2(z-2) = x - 2 \\ y + 7 = x \end{cases}$$

Sijoitetaan $y + 7 = x$ kahteen muuhun yhtälöön.

$$\begin{cases} y + 7 + y + z = 99 \\ 2z - 4 = y + 7 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y + z = 92 \\ -y + 2z = 9 & \mid \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} 2y + z = 92 \\ -2y + 4z = 18 \end{cases} \\ + & \\ \hline & 5z = 110 \\ & z = 22 \end{array}$$

Jos $z = 22$, niin

$$
\begin{aligned}
-y + 2 \cdot 22 &= 9 \\
-y &= -35 \quad \Big| :(-1) \\
y &= 35
\end{aligned}
$$

Kun $y = 35$ ja $z = 22$, niin $x = 35 + 7 = 42$

Vastaus: Markus 42 v, Timo 35 v, Pekka 22 v.

10. Merkitään

x = aikuiset (lkm.)		10 €/hlö
y = lapset (lkm.)		5 €/hlö
z = eläkeläiset (lkm.)		7 €/hlö

Aikuiset	**Lapset**	**Eläkeläiset**	**Tulot (€)**
x	y	z	515
x	$2y$	$z + 5$	625
20	$\frac{1}{3}y$	$\frac{1}{2}z$	295

Saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 10x + 5y + 7z = 515 \\ 10x + 5 \cdot 2y + 7(z + 5) = 625 \\ 10 \cdot 20 + 5 \cdot \dfrac{1}{3}y + 7 \cdot \dfrac{1}{2}z = 295 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + 5y + 7z = 515 \\ 10x + 10y + 7z + 35 = 625 \\ 200 + \dfrac{5}{3}y + \dfrac{7}{2}z = 295 \qquad \Big| \cdot 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + 5y + 7z = 515 & \mathrm{I} \\ 10x + 10y + 7z = 590 & \mathrm{II} \\ 1200 + 10y + 21z = 1770 & \mathrm{III} \end{cases}$$

Eliminoidaan x yhtälöistä I ja II .

$$\begin{cases} 10x + 5y + 7z = 515 \qquad \Big| \cdot (-1) \\ 10x + 10y + 7z = 590 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -10x - 5y - 7z = -515 \\ 10x + 10y + 7z = 590 \end{cases} \\ \hline 5y = 75 \\ y = 15 \end{array}$$

Sijoitetaan $y = 15$ yhtälöön III:

$$\begin{aligned} 1200 + 10 \cdot 15 + 21z &= 1770 \\ 1200 + 150 + 21z &= 1770 \\ 21z &= 420 \quad \big| :21 \\ z &= 20 \end{aligned}$$

Kun $y = 15$ ja $z = 20$, niin

$$\begin{aligned} 10x + 5 \cdot 15 + 7 \cdot 20 &= 515 \\ 10x + 75 + 140 &= 515 \\ 10x &= 300 \quad \big| :10 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Vastaus: Aikuisia 30, lapsia 15, eläkeläisiä 20

11. Merkitään x = mansikat (kg)
y = porkkanat (kg)
z = herneet (kg)

Saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} x + y + z = 2,50 \\ 1,30z + 0,5y + z = 2,46 \\ 0,60x + y + 1,20z = 2,12 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia, joista eliminoidaan z.

(1)

$$\begin{cases} x + y + z = 2{,}50 & \big| \cdot (-1) \\ 1{,}30x + 0{,}5y + z = 2{,}46 & \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} -x - y - z = -2{,}50 \\ 1{,}30x + 0{,}5y + z = 2{,}46 \end{cases} \\ + & \\ \hline & 0{,}30x - 0{,}5y = -0{,}04 \end{array}$$

(2)

$$\begin{cases} x + y + z = 2{,}50 & \big| \cdot (-1{,}20) \\ 0{,}60x + y + 1{,}20z = 2{,}12 & \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} -1{,}20x - 1{,}20y - 1{,}20z = -3 \\ 0{,}60x + y + 1{,}20z = 2{,}12 \end{cases} \\ + & \\ \hline & -0{,}60x - 0{,}20y = -0{,}88 \end{array}$$

Saadaan uusi yhtälöpari:

$$\begin{cases} 0{,}30x - 0{,}5y = -0{,}04 & \big| \cdot 2 \\ -0{,}60x - 0{,}20y = -0{,}88 & \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} 0{,}60x - y = -0{,}08 \\ -0{,}60x - 0{,}20y = -0{,}88 \end{cases} \\ + & \\ \hline & -1{,}20y = -0{,}96 \\ & y = 0{,}8 \end{array}$$

Jos $y = 0{,}8$, niin

$$\begin{aligned} 0{,}30x - 0{,}5 \cdot 0{,}8 &= -0{,}04 \\ 0{,}30x - 0{,}4 &= -0{,}04 \\ 0{,}30x &= 0{,}36 \qquad \big| :0{,}30 \\ x &= 1{,}2 \end{aligned}$$

Jos $y = 0{,}8$ ja $x = 1{,}2$, niin

$$\begin{aligned} 1{,}2 + 0{,}8 + z &= 2{,}50 \\ 2{,}0 + z &= 2{,}50 \\ z &= 0{,}50 \end{aligned}$$

Vastaus: Mansikoita 1,2 kg, porkkanoita 0,8 kg, herneitä 0,5 kg

12. Merkitään x = appelsiinitiiviste (l)
y = omenatiiviste (l)
z = vesi (l)

Saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} x + y + z = 2{,}2 \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}y + z - 0{,}9 = 0{,}9 \\ 1{,}5x + 4y + 2z = 4{,}8 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan niistä z.

(1)

$$\begin{cases} x + y + z = 2{,}2 & \Big| \cdot (-1) \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + z = 1{,}8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} -x - y - z = -2{,}2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + z = 1{,}8 \end{cases} \\ + & \\ \hline & -\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = -0{,}4 \qquad \Big| \cdot 6 \\ & -3x - 4y = -2{,}4 \end{array}$$

(2)

$$\begin{cases} x + y + z = 2{,}2 & \Big| \cdot (-2) \\ 1{,}5x + 4y + 2z = 4{,}8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} -2x - 2y - 2z = -4{,}4 \\ 1{,}5x + 4y + 2z = 4{,}8 \end{cases} \\ + & \\ \hline & -0{,}5x + 2y = 0{,}4 \end{array}$$

Saadaan uusi yhtälöpari:

$$\begin{cases} -3x - 4y = -2{,}4 \\ -0{,}5x + 2y = 0{,}4 & \Big| \cdot 2 \end{cases}$$

$$
\begin{array}{r}
+\begin{cases} -3x-4y=-2{,}4 \\ -x+4y=0{,}8 \end{cases} \\
\hline
-4x=-1{,}6 \\
x=0{,}4
\end{array}
$$

Jos $x=0{,}4$, niin

$$
\begin{aligned}
-0{,}5\cdot 0{,}4+2y&=0{,}4 \\
-0{,}2+2y&=0{,}4 \\
2y&=0{,}6 \qquad \Big| :2 \\
y&=0{,}3
\end{aligned}
$$

Jos $x=0{,}4$ ja $y=0{,}3$, niin

$$
\begin{aligned}
0{,}4+0{,}3+z&=2{,}2 \\
0{,}7+z&=2{,}2 \\
z&=1{,}5
\end{aligned}
$$

Vastaus: Appelsiinitiivistettä 0,4 l, omenatiivistettä 0,3 l, vettä 1,5 l

13. a) $a_1 = 10$

$$a_2 = -a_1 + 1 = -10 + 1 = -9$$
$$a_3 = -a_2 + 1 = 9 + 1 = 10$$
$$a_4 = -a_3 + 1 = -10 + 1 = -9$$

b) $a_1 = 4$

$$a_2 = 12 \cdot a_1 - 20 = 12 \cdot 4 - 20 = 28$$
$$a_3 = 12 \cdot a_2 - 20 = 12 \cdot 28 - 20 = 316$$
$$a_4 = 12 \cdot a_3 - 20 = 12 \cdot 316 - 20 = 3772$$

14. a) $a_1 = 6$

$$a_2 = 2a_1 + 4 = 2 \cdot 6 + 4 = 16$$
$$a_3 = 2a_2 + 4 = 36$$
$$a_4 = 2a_3 + 4 = 76$$
$$a_5 = 2a_4 + 4 = 156$$
$$a_6 = 2a_5 + 4 = 316$$

b) $a_1 = 1$

$$a_2 = 2$$
$$a_3 = -5a_2 - a_1 + 13 = -5 \cdot 2 - 1 + 13 = 2$$
$$a_4 = -5a_3 - a_2 + 13 = -5 \cdot 2 - 2 + 13 = 1$$
$$a_5 = -5a_4 - a_3 + 13 = -5 \cdot 1 - 2 + 13 = 6$$
$$a_6 = -5a_5 - a_4 + 13 = -5 \cdot 6 - 1 + 13 = -18$$

Vastaus: a) $a_6 = 316$ b) $a_6 = -18$

15. a) $a_1 = 10$, $a_2 = 15$ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n = 3, 4, ...$

$$a_3 = 10 + 15 = 25$$
$$a_4 = 15 + 25 = 40$$
$$a_5 = 40 + 25 = 65$$

b) $a_1 = -2$, $a_2 = 2$

$$a_3 = 2 + (-2) = 0$$
$$a_4 = 0 + 2 = 2$$
$$a_5 = 2 + 0 = 2$$

16. Kolme ensimmäistä jäsentä: $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 12$

$$a_n = 2(a_{n-1} + a_{n-2}) , \ a_1 = 1 , \ a_2 = 5 , \ n = 3, 4, ...$$
$$a_4 = 2 \cdot (a_3 + a_2) = 2 \cdot (12 + 5) = 34$$
$$a_5 = 2 \cdot (a_4 + a_3) = 2 \cdot (34 + 12) = 92$$
$$a_6 = 2 \cdot (a_5 + a_4) = 2 \cdot (92 + 34) = 252$$

17. Susien määrä alussa on $a_1 = 50$. Määrä lisääntyy 20 % vuodessa eli 1,20 – kertaistuu. Lisäksi kahdeksan sutta kaadetaan vuosittain.

Rekursiosääntö, joka kuvaa susien määrää:

$$a_1 = 50 , \ a_n = 1{,}20 \cdot a_{n-1} - 8 , \ n = 2, 3, 4, ...$$

Taulukoidaan susien määrät 10 seuraavan vuoden aikana eli vuosina 1 – 10.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 50 \\
a_2 &= 1{,}20 \cdot 50 - 8 = 52 \\
a_3 &= 1{,}20 \cdot 52 - 8 = 54{,}4 \\
a_4 &= 1{,}20 \cdot 54{,}4 - 8 = 57{,}28 \\
a_5 &= 1{,}20 \cdot 57{,}28 - 8 = 60{,}736 \\
a_6 &= 1{,}20 \cdot 60{,}736 - 8 = 64{,}8832 \\
a_7 &= 1{,}20 \cdot 64{,}8832 - 8 = 69{,}85984 \\
a_8 &= 1{,}20 \cdot 69{,}85984 - 8 = 75{,}831808 \\
a_9 &= 1{,}20 \cdot 75{,}831808 - 8 = 82{,}9981696 \\
a_{10} &= 1{,}20 \cdot 82{,}9981696 - 8 = 91{,}59780352 \approx 92
\end{aligned}
$$

18. a) $a_n = 4n + 2$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 4 \cdot 1 + 2 = 6 \\
a_2 &= 4 \cdot 2 + 2 = 10 \\
a_3 &= 4 \cdot 3 + 2 = 14 \\
a_4 &= 4 \cdot 4 + 2 = 18 \\
a_5 &= 4 \cdot 5 + 2 = 22
\end{aligned}
$$

b) $a_n = 2 - 3^{n-1}$

$$a_1 = 2 \cdot 3^0 = 2$$
$$a_2 = 2 \cdot 3^1 = 6$$
$$a_3 = 2 \cdot 3^2 = 18$$
$$a_4 = 2 \cdot 3^3 = 54$$
$$a_5 = 2 \cdot 3^4 = 162$$

c) $a_n = 3 - 5n$

$$a_1 = 3 - 5 \cdot 1 = -2$$
$$a_2 = 3 - 5 \cdot 2 = -7$$
$$a_3 = 3 - 5 \cdot 3 = -12$$
$$a_4 = 3 - 5 \cdot 4 = -7$$
$$a_5 = 3 - 5 \cdot 5 = -22$$

19. a) Kaupunki A: $d = 200$

2004 alku	$35000 = a_0$
2005 alku	$a_1 = 35000 + 200$
2006 alku	$a_2 = 35000 + 2 \cdot 200$
$\vdots$	$\vdots$

Jonon yleinen jäsen $a_n = 3500 + n \cdot 200$

Kaupunki B: $q = 1{,}05$

2004 alku	$28000 = a_0$
2005 alku	$a_1 = 1{,}05 \cdot 28000$
2006 alku	$a_2 = 1{,}05^2 \cdot 28000$
$\vdots$	$\vdots$

Jonon yleinen jäsen $a_n = 1{,}05^n \cdot 28000$

b) Kaupunki A $\qquad a_0 = 35000$

2005	$a_1 = 35000 + 200 = 35200$
2006	$a_2 = 35000 + 400 = 35400$
2007	$a_3 = 35000 + 600 = 35600$
2008	$a_4 = 35000 + 800 = 35800$
2009	$a_5 = 35000 + 1000 = 36000$
2010	$a_6 = 35000 + 1200 = 36200$

Kaupunki B $\qquad a_0 = 28000$

2005	$a_1 = 1{,}05 \cdot 28000 = 29400$
2006	$a_2 = 1{,}05 \cdot 29400 = 30870$
2007	$a_3 = 1{,}05 \cdot 30870 = 32413{,}5$
2008	$a_4 = 1{,}05 \cdot 32415{,}5 = 34034{,}175$
2009	$a_5 = 1{,}05 \cdot 34034{,}175 = 35735{,}88...$
2010	$a_6 = 1{,}05 \cdot 35735{,}88... = 37522{,}6...$

Johtopäätös: Kaupungin B asukasluku ylittää kaupungin A asukasluvun vuonna 2010.

20. Vaihtoehto A: $a_1 = 50$ (€) , $d = 50$ (€)
Vaihtoehto B: $a_1 = 10$ (€) , $q = 2$

A

1 kk	$a_1 = 50$
2 kk	$a_2 = 50 + 50 = 100$
3 kk	$a_3 = 50 + 2 \cdot 50 = 150$
$\vdots$	
n kk	$a_n = 50 + (n-1) \cdot 50$

B

1 kk	$a_1 = 10$
2 kk	$a_2 = 2 \cdot 10 = 20$
3 kk	$a_3 = 2^2 \cdot 10 = 40$
$\vdots$	
n kk	$a_n = 10 \cdot 2^{n-1}$

a) 1000 € täyttyy 20 kk kuluttua vaihtoehdolla A ja 8 kk kuluttua vaihtoehdolla B.

b) Vaihtoehdon B hyöty on summan saavuttaminen nopeammin. Vaihtoehdon A hyöty on, ettei talletettavaa summaa tarvitse kasvattaa, vaan saa tallettaa aina saman vakiomäärän 50 €. Viiden ensimmäisen vuoden aikana vaihtoehdon A mukaan tilillä on enemmän rahaa kuin vaihtoehdolla B. Tämän jälkeen vaihtoehdon B mukaan summa kasvaa nopeammin.