1.1 Polynomifunktio

1. a) Suoran kulmakerroin $k = -2 < 0$, joten suora on laskeva.

b) Suoran kulmakerroin $k = 0{,}4 > 0$, joten suora on nouseva.

c) Suoran kulmakerroin $k = 0$, joten suora on x-akselin suuntainen (vaakasuora). Suora ei siis ole nouseva eikä laskeva.

2. a) $f(-2) = -3 \cdot (-2) - 1 = 5$

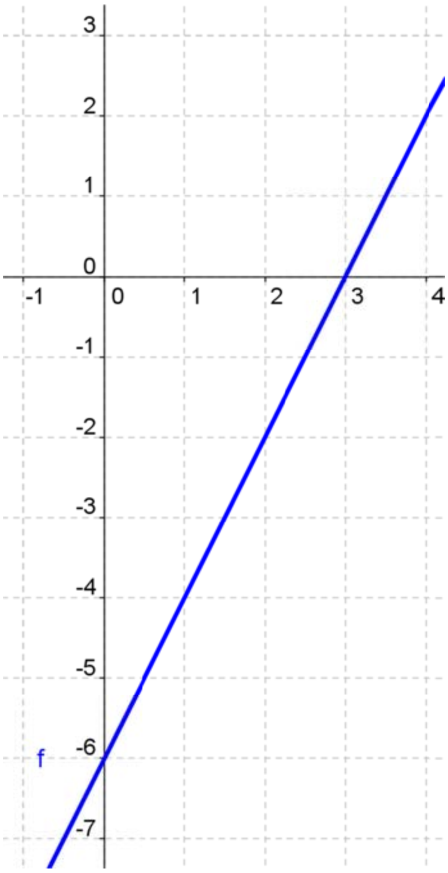
b) $f(-2) = \frac{1}{3} \cdot (-2) + 5 = 4\frac{1}{3}$

c) $f(-2) = 10 - 6 \cdot (-2) = 22$

3. a) $f(-16) = 2 \cdot (-16) - 6 = -38 \neq 67$

Piste ei ole kuvaajalla.

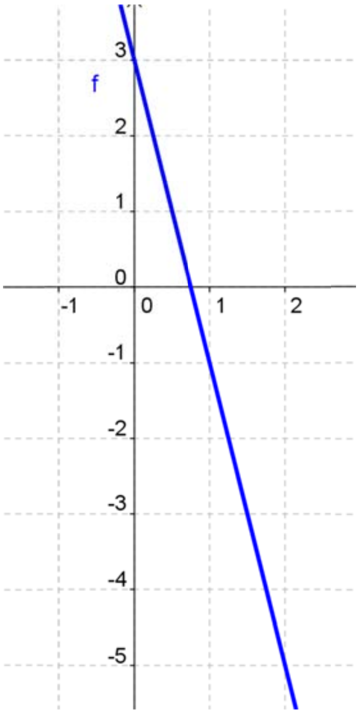
x	***f*(*x*) = 2*x* - 6**
0	-6
1	-4
2	-2



b) $f(-16) = 3 - 4 \cdot (-16) = 67$

Piste on kuvaajalla.

x	***f*(*x*) = 3 – 4*x***
0	3
1	-1
2	-5



4. a) $-6x = 0 \quad |: (-6)$

$x = 0$

b) $-3x + 9 = 0$

$-3x = -9 \quad |: (-3)$

$x = 3$

c) $4x - 5 = 0$

$4x = 5 \quad |: 4$

$$x = \frac{5}{4}$$

5. a) Kuvaaja leikkaa y-akselin, kun $x = 0$.

$$f(0) = 2 \cdot 0 - \frac{3 \cdot 0 - 2}{4} = \frac{1}{2}$$

Kuvaaja leikkaa y-akselin pisteessä $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

b) Nollakohta saadaan yhtälöstä $g(x) = 0$.

$$2x - \frac{3x-2}{4} = 0$$

$$^{4)}\frac{2x}{1} - \frac{3x-2}{4} = 0$$

$$\frac{8x}{4} - \frac{3x-2}{4} = 0 \quad |:4$$

$$8x - (3x-2) = 0$$

$$8x - 3x + 2 = 0$$

$$5x = -2 \quad |:5$$

$$x = -\frac{2}{5}$$

6. ***x*-akseli**:

$$-\frac{3}{4}x - 6 = 0 \quad |\cdot 4$$

$$-3x - 24 = 0$$

$$-3x = 24 \quad |:(-3)$$

$$x = -8$$

leikkauspiste (-8, 0)

***y*-akseli**:

$$f(0)=-\frac{3}{4}\cdot 0-6=-6$$

y-akselin leikkauspiste (0, -6)

Huom! Funktion lauseke siinä muodossa, että *y*-akselin leikkauspisteen näkee myös suoraan vakiotermistä.

7. *x*-akselin leikkauspiste saadaan yhtälöstä *f*(*x*) = 0.

$$2-\frac{x}{2}+\frac{x-1}{5}=0$$

$$^{10)}\frac{2}{1}-{}^{5)}\frac{x}{2}+{}^{2)}\frac{x-1}{5}=0$$

$$\frac{20}{10}-\frac{5x}{10}+\frac{2x-2}{10}=0 \quad |\cdot 10$$

$$20-5x+2x-2=0$$

$$-3x=-18 \quad |:(-3)$$

$$x=6$$

Kuvaaja leikkaa *x*-akselin pisteessä (6, 0).

8. a) Toisen asteen termin kerroin 4 > 0, joten paraabeli aukeaa ylöspäin

b) Toisen asteen termin kerroin -1 < 0, joten paraabelin aukeaa alaspäin.

c) Toisen asteen termin kerroin 4 > 0, joten paraabeli aukeaa ylöspäin.

d) Toisen asteen termin kerroin -12 < 0, joten paraabeli aukeaa alaspäin.

9. a) $f(x) = (3 - 2x)(3 + 2x)$

$$= 9 + 6x - 6x - 4x^2$$

$$= 9 - 4x^2$$

b) $f(x) = -6x(4 - x)$

$$= -24x + 6x^2$$

c) $f(x) = (4x - 3)(4x - 3)$

$$= 16x^2 - 12x - 12x + 9$$

$$= 16x^2 - 24x + 9$$

d) $f(x) = (7 - x)(4x - 8)$

$$= 28x - 56 - 4x^2 + 8x$$

$$= -4x^2 + 36x - 56$$

10. a) $g(x)=\dfrac{6x^2-8x}{2}=\dfrac{6x^2}{2}-\dfrac{8x}{2}=3x^2-4x$

b) $g(x)=\dfrac{5-3x+x^2}{5}=\dfrac{5}{5}-\dfrac{3x}{5}+\dfrac{x^2}{5}=1-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{1}{5}x^2$

11. a) $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+3\cdot\dfrac{1}{2}+2=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{2}+2=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{6}{4}+2=3\dfrac{1}{4}$

b) $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{6}-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}=0$

12. a) $-2x^2+4x=0$

$x(-2x+4)=0$

$x=0$ tai $-2x+4=0$

$-2x=-4 \quad |:(-2)$

$x=2$

b) $x^2-x-42=0$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-42)}}{2\cdot1}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{1\pm13}{2}$$

$x=7$ tai $x=-6$

13. a) $-x^2 + 3x + 4 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{-3 \pm 5}{-2}$$

$x = -1$ tai $x = 4$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = 2$$

c) $x^2 + 6x + 10 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Ei ratkaisua

Funktiolla ei ole nollakohtia.

14. a) -10x + 2 = 0

$$-10x = -2 \quad |:(-10)$$

$$x = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$$

b) $2x^2 + 32x = 0$

$2x(x + 16) = 0$

$2x = 0$ tai $x + 16 = 0$

$x = 0$ $x = -16$

c) $7x^2 + 7 = 0$

$7x^2 = -7 \quad | :7$

$x^2 = -1$

Ei ratkaisua

Funktiolla ei ole nollakohtia.

15. a) $2x^2 + 2x – 60 = 0 \quad |: 2$

$x^2 + x – 30 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{-1 \pm 11}{2}$$

$x = 5$ tai $x = -6$

b) $x(3x + 9) = 0$

$x = 0$ tai $3x + 9 = 0$

$3x = -9 \quad |:3$

$x = -3$

16. a) $f(0) = -0 + 3 = 3$

pisteessä (0, 3)

b) $f(0)= -0^2 - 5 = -5$

pisteessä (0, -5)

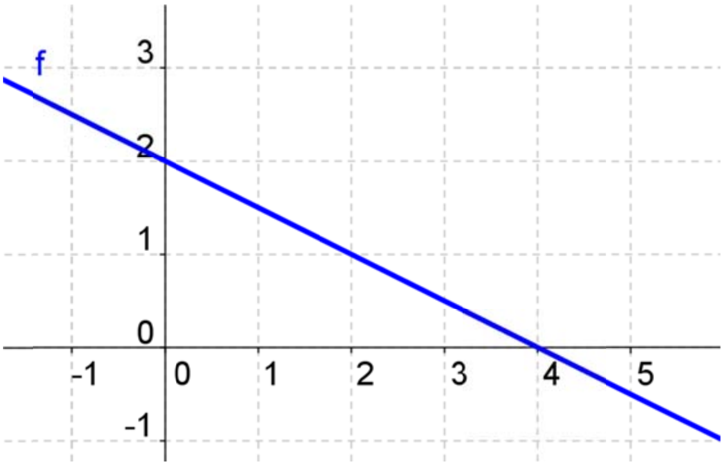
c) $f(0) = 2\cdot 0^2 - 4\cdot 0 = 0$

pisteessä (0, 0)

17. a) $f(-0,1) = -0,5 \cdot (-0,1) + 2 = 2,05 \neq 0,63$

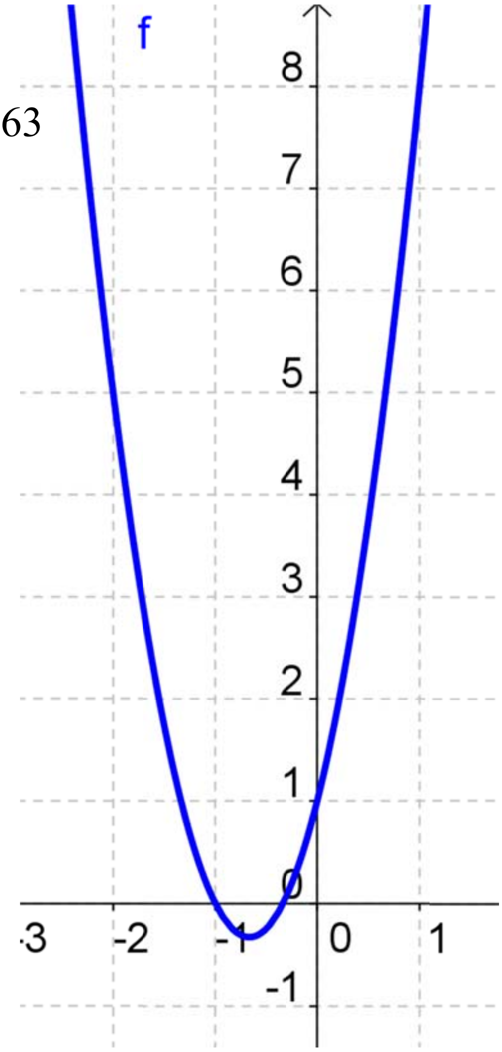
Piste ei ole kuvaajalla.

x	$f(x) = -0,5x + 2$
0	2
2	1
4	0



b) $f(-0,1) = 3 \cdot (-0,1)^2 + 4 \cdot (-0,1) + 1 = 0,63$
Piste on kuvaajalla.

x	$f(x) = 3x^2 + 4x + 1$
0	1
1	1
-1	0
-2	5



18. a) $g(-1) = -(-1) + 2 = 3$

b) $h(-1) = -(-1)^2 + 7 \cdot (-1) = -8$

c) $r(-1) = -2 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 + 3 = 3$

19. a) $-x + 5 = 0$

$$-x = -5$$

$$x = 5$$

b) $x^2 + 11 = 0$

$$x^2 = -11$$

Ei ratkaisua

Ei nollakohtia

c) $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$x = 2$ tai $x = 1$

20. a) ***x*-akseli:**

$${}^{3)}\frac{1-3x}{2} - {}^{6)}\frac{x}{1} - {}^{2)}\frac{1}{3} = 0$$

$$\frac{3-9x}{6} - \frac{6x}{6} - \frac{2}{6} = 0 \quad | \cdot 6$$

$$3 - 9x - 6x - 2 = 0$$

$$-15x = -1 \quad |:(-15)$$

$$x = \frac{1}{15}$$

leikkauspiste $\left(\frac{1}{15}, 0\right)$

***y*-akseli**:

$$g(0) = \frac{1 - 3 \cdot 0}{2} - 0 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

leikkauspiste $\left(0, \frac{1}{6}\right)$

b) ***x*-akseli**:

$x^2 - 5x = 0$

$x(x-5) = 0$

$x = 0$ tai $x - 5 = 0$

$x = 5$

leikkauspisteet: (0, 0) ja (5, 0)

***y*-akseli**:

$g(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 = 0$

leikkauspiste: (0, 0)

21. Sievennetään ensin funktion lauseketta.

$$\begin{aligned}(x-2)^2 - (1-x) &= (x-2)(x-2) - (1-x)\\ &= x^2 - 2x - 2x + 4 - 1 + x\\ &= x^2 - 3x + 3\end{aligned}$$

Lasketaan funktion nollakohta:

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Ei ratkaisua

Kuvaaja ei leikkaa *x*-akselia.

1.2 Polynomifunktion merkki

22. a) Kuvaaja kulkee x-akselilla tai sen yläpuolella, kun $x \geq 2$, joten

$$f(x) \geq 0, \text{ kun } x \geq 2.$$

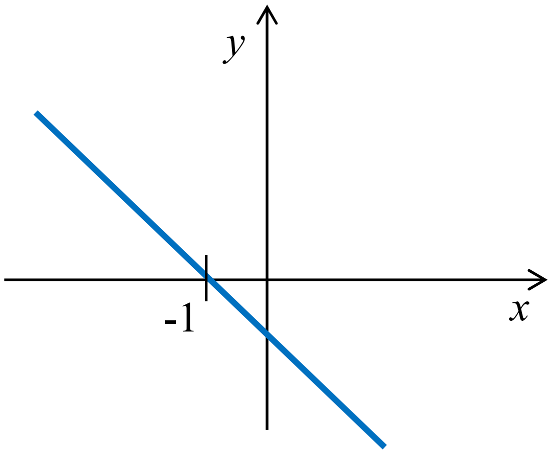
b) Kuvaaja kulkee x–akselilla tai sen yläpuolella, kun $x \leq 3$, joten

$$f(x) \geq 0, \text{ kun } x \leq 3.$$

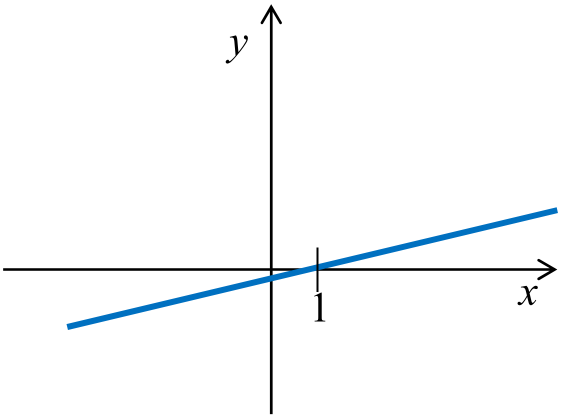
23. a) Kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, kun $x < 12$, joten f saa negatiivisia arvoja (eli $f(x) < 0$), kun $x < 12$.

b) Kuvaaja kulkee x-akselin alapuolella, kun $x > -6$, joten f saa negatiivisia arvoja (eli $f(x) < 0$), kun $x > -6$.

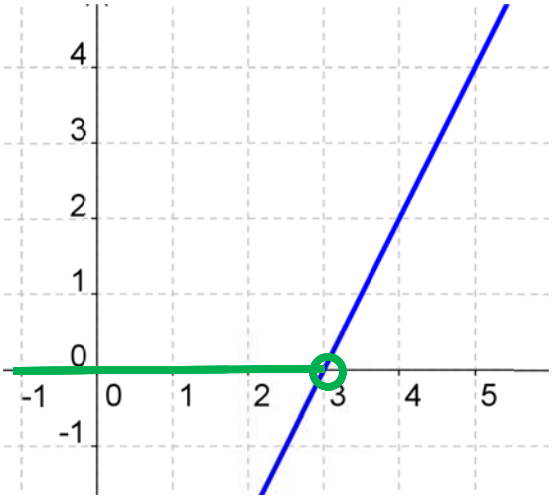
24. a) Ratkaisuksi kelpaa mikä tahansa laskeva suora, joka leikkaa x-akselin kohdassa $x = - 1$.



b) Ratkaisuksi kelpaa mikä tahansa nouseva suora, joka leikkaa x-akselin kohdassa $x = 1$.



25. **Tapa 1**: kuvaajan avulla



Ratkaistaan ensin nollakohdat:

$2x - 6 = 0$

$2x = 6 \quad | : 2$

$x = 3$

Funktio saa negatiivisia arvoja, kun kuvaaja kulkee *x*-akselin alapuolella, joten

$f(x) < 0$, kun $x < 3$

Tapa 2: ilman kuvaajaa

$2x - 6 < 0$

$2x < 6 \quad | : 3$

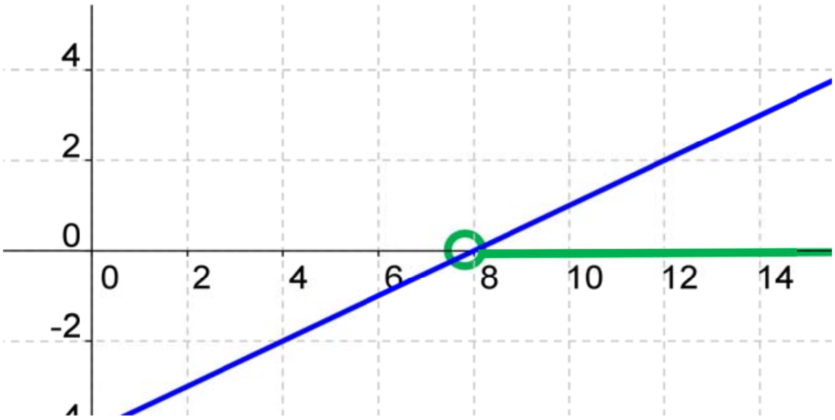
$x < 3$

26. Ratkaistaan ensin nollakohdat:

$$\frac{1}{2}x - 4 = 0$$

$$\frac{1}{2}x = 4 \quad |\cdot 2$$

$$x = 8$$



Funktio saa positiivisia arvoja, kun kuvaaja kulkee *x*-akselin yläpuolella, joten

$f(x) > 0$, kun $x > 8$.

27. a)

$$-4x+6<-2$$
$$-4x<-8 \quad \Big|:(-4)$$
$$x>2$$

b)

$$-3x+1\leq 5-2x$$
$$-x\leq 4 \quad \Big|:(-1)$$
$$x\geq -4$$

28. a)

$$3x+1\geq 5x+2$$
$$-2x\geq 1 \quad \Big|:(-2)$$
$$x\leq -\frac{1}{2}$$

b)

$$2(x+2)\geq 5$$
$$2x+4\geq 5$$
$$2x\geq 1 \quad \Big|:2$$
$$x\geq \frac{1}{2}$$

29. a)

$$-(2x-4)>12+2x$$
$$-2x+4>12+2x$$
$$-4x>8 \quad \big|:(-4)$$
$$x<-2$$

b)

$$-(-4x+3)-x<-2x-1$$
$$4x-3-x<-2x-1$$
$$5x<2 \quad \big|:5$$
$$x<\frac{2}{5}$$

30. a)

$$2(3-x)<7-2x$$
$$6-2x<7-2x$$
$$0<1$$

Tosi, joten epäyhtälön ratkaisuna kaikki x:n arvot.

b)

$$5x+3(x-1)<8x-4$$
$$5x+3x-3<8x-4$$
$$0<-1$$

Epätosi, joten epäyhtälöllä ei ole ratkaisua.

31. a)

$${}^{2)}\frac{2x}{5} - {}^{10)}3 < {}^{5)}\frac{x}{2}$$

$$\frac{4x}{10} - \frac{30}{10} < \frac{5x}{10} \qquad \Big| \cdot 10$$

$$4x - 30 < 5x$$

$$-x < 30 \quad \Big| :(-1)$$

$$x > -30$$

b)

$$\frac{4x+1}{4} \geq 7x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{4x+1}{4} \geq {}^{4)}\frac{7x}{1} - {}^{2)}\frac{1}{2}$$

$$\frac{4x+1}{4} \geq \frac{28x}{4} - \frac{2}{4} \Big| \cdot 4$$

$$4x + 1 \geq 28x - 2$$

$$-24x \geq -3 \qquad \Big| :(-24)$$

$$x \leq \frac{3}{24}^{(3}$$

$$x \leq \frac{1}{8}$$

32.

$$\frac{x}{3}-\frac{x-3}{2}<x+\frac{x+6}{3}$$

$$^{2)}\frac{x}{3}-{}^{3)}\frac{x-3}{2}<{}^{6)}\frac{x}{1}+{}^{2)}\frac{x+6}{3}$$

$$\frac{2x}{6}-\frac{3(x-3)}{6}<\frac{6x}{6}+\frac{2(x+6)}{6} \qquad \Big|\cdot 6$$

$$2x-3(x-3)<6x+2(x+6)$$

$$2x-3x+9<6x+2x+12$$

$$-9x<3 \qquad \Big|:(-9)$$

$$x>-\frac{3^{(3}}{9}$$

$$x>-\frac{1}{3}$$

33.

$$(x-2)^2-\left(x^2-4\right)>2$$

$$(x-2)(x-2)-x^2+4>2$$

$$x^2-2x-2x+4-x^2>-2$$

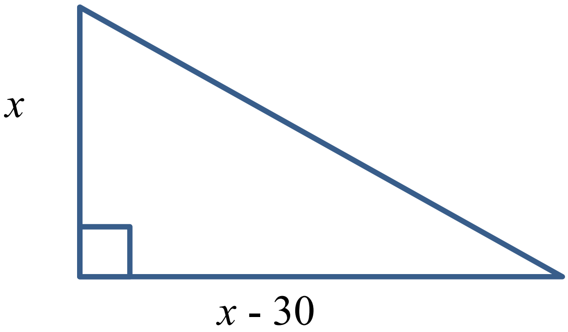
$$-4x>-6 \qquad \Big|:(-4)$$

$$x<\frac{6^{(2}}{4}$$

$$x<\frac{3}{2}$$

34. a) Merkitään kateetteja kirjaimilla x ja y.
Koska kateettien yhteispituus on 30, saadaan

$$x + y = 30$$
$$y = 30 - x$$



b) **Ehto 1:**

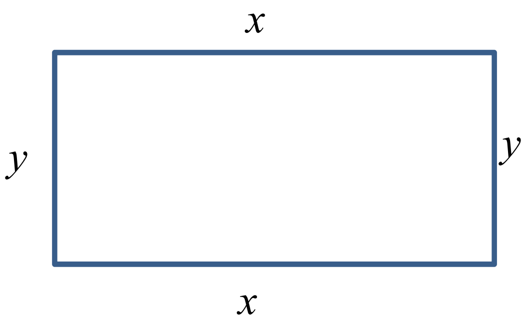
$$30 - x > 0$$
$$-x > -30 \quad |:(-1)$$
$$x < 30$$

Ehto 2: $x > 0$

Yhdistämällä ehdot saadaan: $0 < x < 30$

35. a) Olkoon korkeus y.

$$2x + 2y = 22$$
$$2y = 22 - 2x \quad |:2$$
$$y = \frac{22 - 2x}{2}$$
$$y = 11 - x$$



Suorakulmion korkeus on $11 - x$.

b) **Ehto 1:** $x > 0$

Ehto 2:

$$11 - x > 0$$

$$-x > -11 \quad |:(-1)$$

$$x < 11$$

Ehdot yhdistämällä saadaan: $0 < x < 11$

36. a)

$$1 - 5x \geq 0$$

$$-5x \geq -1 \quad |:(-5)$$

$$x \leq \frac{1}{5}$$

b)

$$\frac{-3x + 10}{2} \geq 0 \qquad |\cdot 2$$

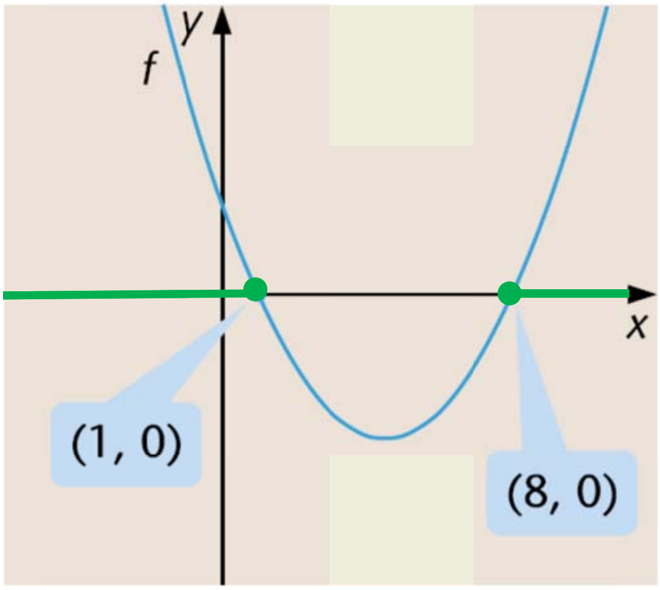
$$-3x + 10 \geq 0$$

$$-3x \geq -10 \quad |:(-3)$$

$$x \leq \frac{10}{3}$$

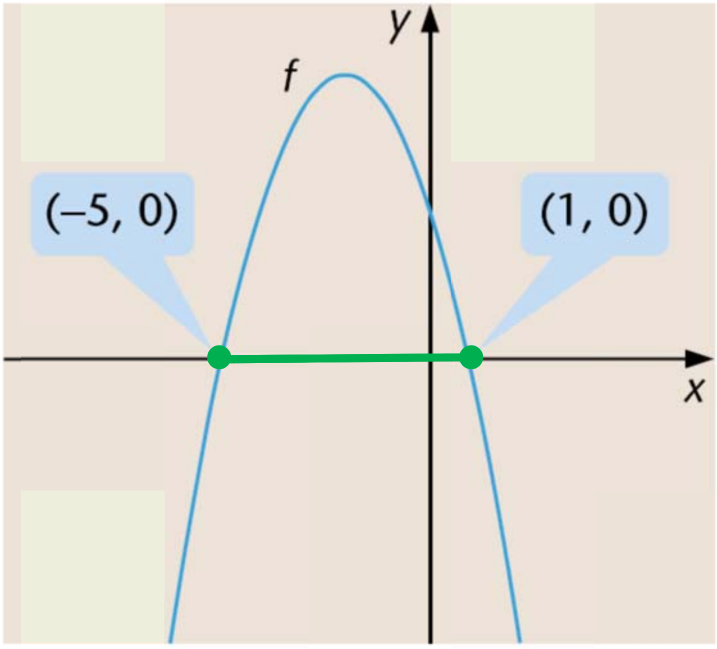
$$x \leq 3\frac{1}{3}$$

37. a)



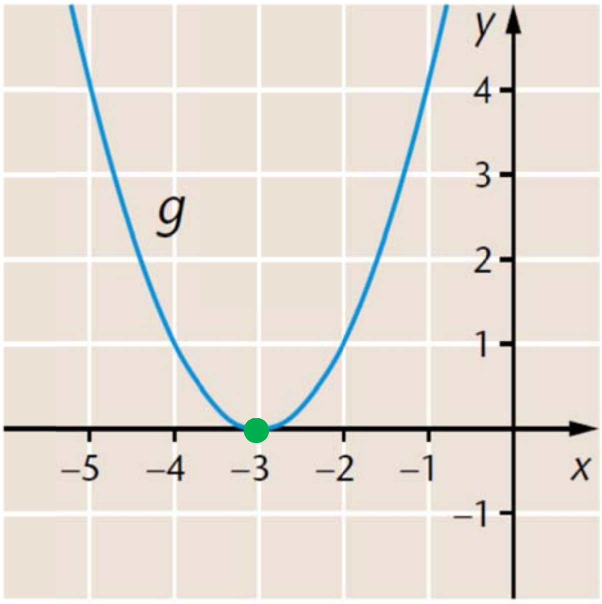
$f(x) \geq 0$, kun $x \leq 1$ tai $x \geq 8$

b)



$f(x) \geq 0$, kun $-5 \leq x \leq 1$

38. a)

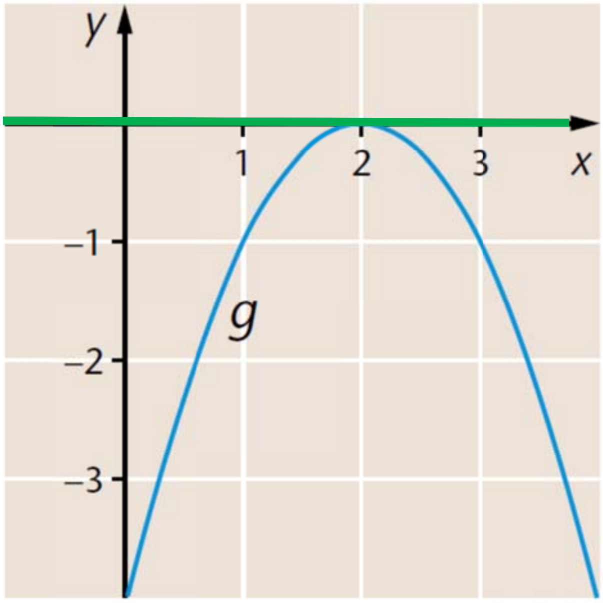


$g(x) = 0$, kun $x = -3$

Muulloin funktion arvot positiivisia, joten

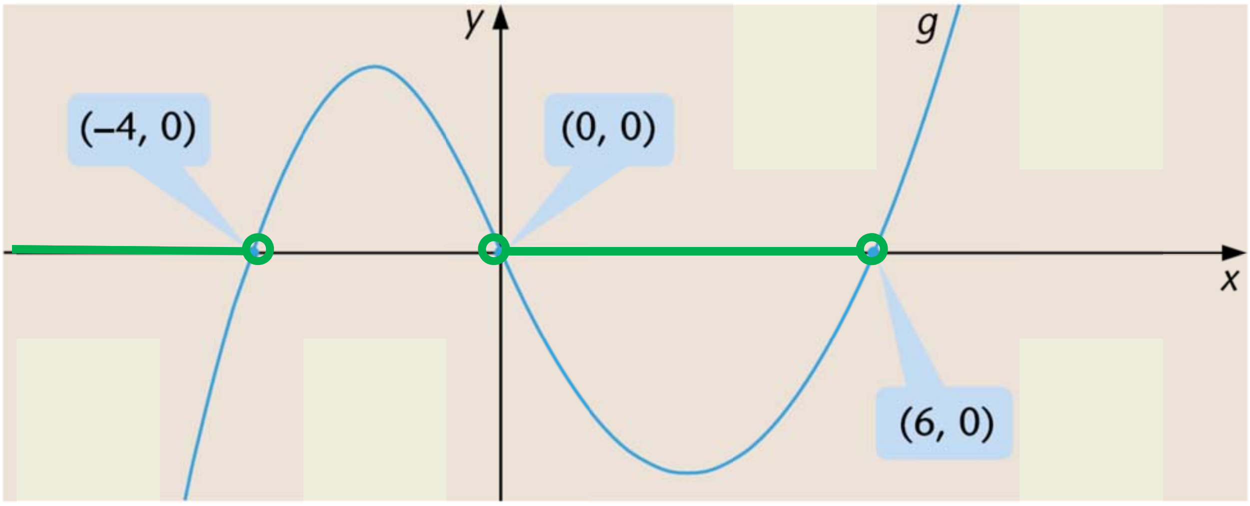
$g(x) \leq 0$, kun $x = -3$

b)



$g(x) \leq 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla

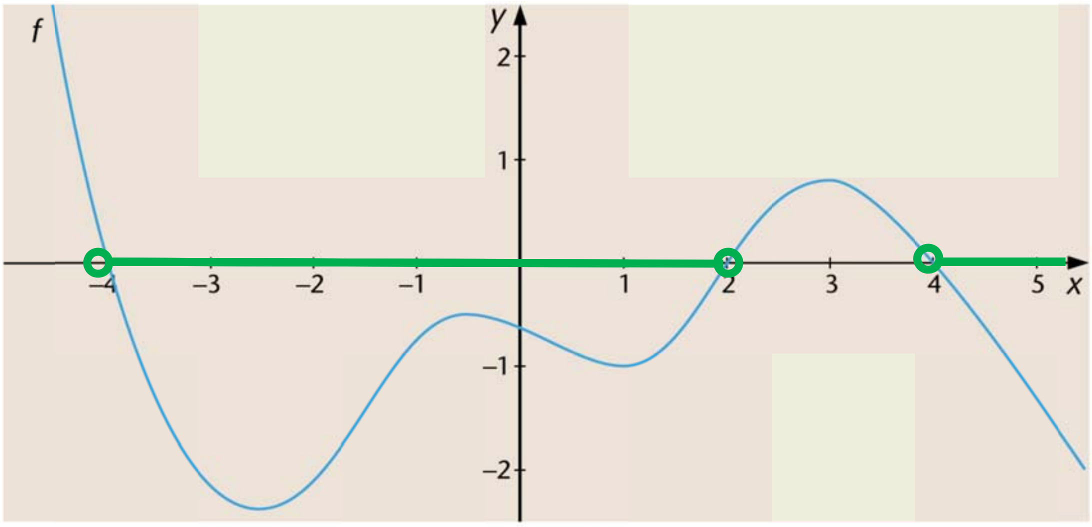
39.



$g(x) < 0$, kun $x < -4$ tai $0 < x < 6$

40. a) Funktion nollakohdat $x = -4$, $x = 2$ ja $x = 4$.

b)



$f(x) < 0$, kun $-4 < x < 2$ tai $x > 4$

41. a) Merkitään $f(x) = x^2 - 3x - 4$.

Funktion f nollakohdat:

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

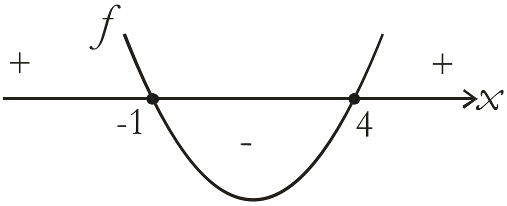
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x = 4 \quad \text{tai} \quad x = -1$$

f:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



$f(x) > 0$ kun $x < -1$ tai $x > 4$

b) Merkitään $f(x) = -x^2 + 5{,}4x - 2$.

Funktion f nollakohdat:

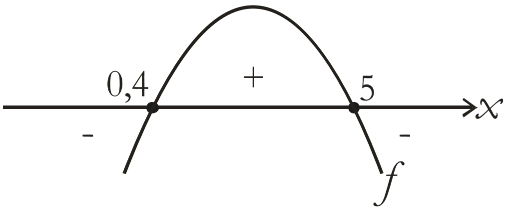
$-x^2 + 5{,}4x - 2 = 0$

$$x = \frac{-5{,}4 \pm \sqrt{5{,}4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-5{,}4 \pm 4{,}6}{-2}$$

$x = 0{,}4$ tai $x = 5$

f:n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



$f(x) \geq 0$ kun $0{,}4 \leq x \leq 5$

42. a)

$4x^2 \leq 16$

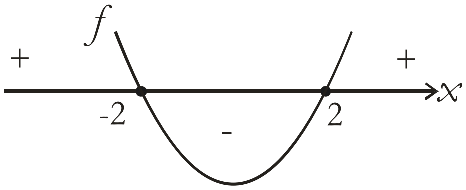
$4x^2 - 16 \leq 0$

Merkitään $f(x) = 4x^2 - 16$.

Nollakohdat:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 16 &= 0 \\ 4x^2 &= 16 \quad \left| :4 \right. \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

f:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



$f(x) \leq 0 \quad \text{kun} \quad -2 \leq x \leq 2$

b)

$$100 < 2x^2 - 10x$$

$$-2x^2 + 10x + 100 < 0$$

Merkitään $f(x) = -2x^2 + 10x + 100$.

Funktion f nollakohdat:

$$-2x^2 + 10x + 100 = 0$$

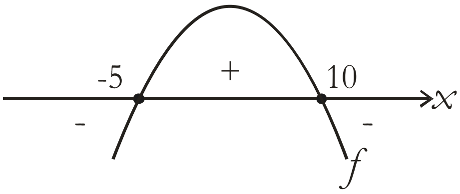
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 100}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{900}}{-4}$$

$$x = \frac{-10 \pm 30}{-4}$$

$$x = -5 \quad \text{tai} \quad x = 10$$

f:n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



$f(x) < 0$ kun $x < -5$ tai $x > 10$

43. a) Merkitään $f(x) = x^2 + 4x + 6$.

Nollakohdat:

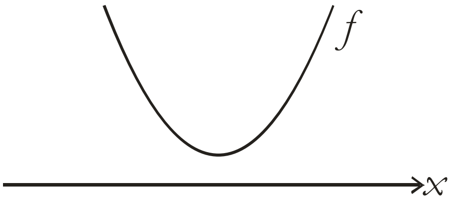
$x^2 + 4x + 6 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Koska juurrettava -8 < 0, yhtälöllä ei ole ratkaisuja eikä funktiolla *f* siis nollakohtia.

f :n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka ei leikkaa *x*-akselia.



$f(x) > 0$ kaikilla *x*:n arvoilla.

b) $-2x^2 + 12x - 18 > 0$

Merkitään $f(x) = -2x^2 + 12x - 18$.

Nollakohdat:

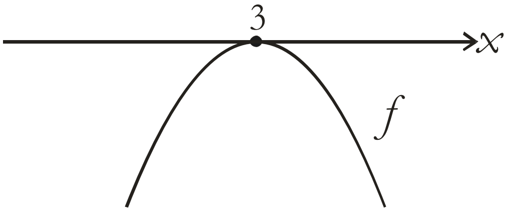
$-2x^2 + 12x - 18 = 0$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-18)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{-4}$$

$$x = 3$$

f:n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joka sivuaa x-akselia kohdassa $x = 3$.



f ei saa positiivisia arvoja millään x:n arvolla eli epäyhtälöllä $-2x^2 + 12x - 18 > 0$ ei ole ratkaisua.

44. a) Merkitään $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

Nollakohdat:

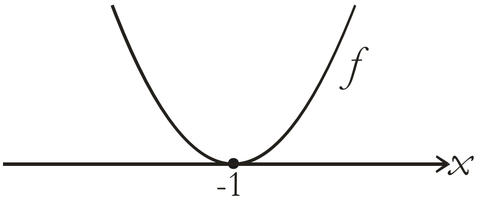
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = -1$$

f:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka sivuaa x-akselia kohdassa x = -1.



$f(x) \leq 0$ vain kun $x = -1$.

b) $-2x^2+20x-50<0$

Merkitään $f(x)=-2x^2+20x-50$.

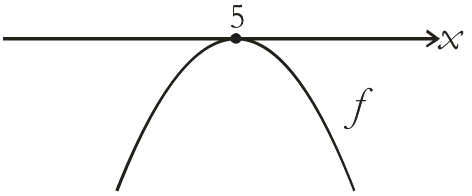
Nollakohdat:

$-2x^2+20x-50=0$

$$x=\frac{-20\pm\sqrt{20^2-4\cdot(-2)\cdot(-50)}}{2\cdot(-2)}$$

$$x=\frac{-20\pm 0}{-4}=5$$

f:n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joka sivuaa x-akselia kohdassa $x = 5$.



f saa negatiivisia arvoja muualla paitsi kohdassa $x = 5$.

Näin ollen $-2x^2+20x-50<0$ kun $x\neq 5$.

45. a) Merkitään $f(x) = -6x^2 + x - 9$.

Nollakohdat:

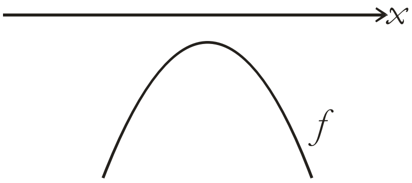
$$-6x^2 + x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-6)\cdot(-9)}}{2\cdot(-6)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-215}}{-12}$$

Koska juurrettava -215 < 0, yhtälöllä ei ole ratkaisuja eikä funktiolla *f* ole nollakohtia.

Funktion *f* kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joka ei leikkaa *x*-akselia.



$f(x) \leq 0$ kaikilla x:n arvoilla.

b) $8x^2 + 2x + 9 \leq 0$

Merkitään $f(x) = 8x^2 + 2x + 9$.

Nollakohdat:

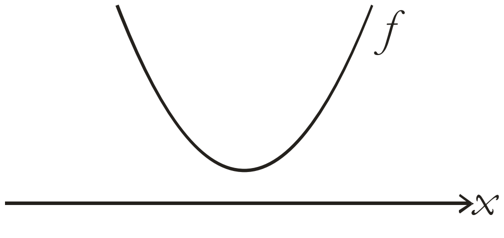
$8x^2 + 2x + 9 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 8 \cdot 9}}{2 \cdot 8}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-284}}{16}$$

Koska juurrettava -284 < 0, yhtälöllä ei ole ratkaisuja eikä funktiolla f nollakohtia.

f:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka ei leikkaa x-akselia.



f saa vain positiivisia arvoja, joten epäyhtälöllä $8x^2 + 2x + 9 \leq 0$ ei ole ratkaisuja.

46. Merkitään $f(x) = 2x^2 + 3x - 20$.

Nollakohdat:

$$2x^2 + 3x - 20 = 0$$

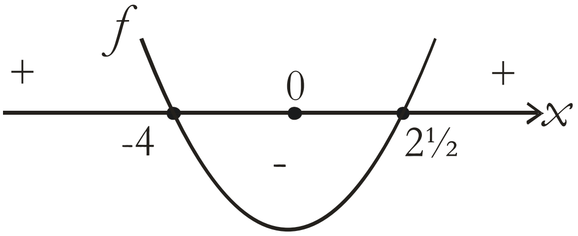
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-20)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm 13}{4}$$

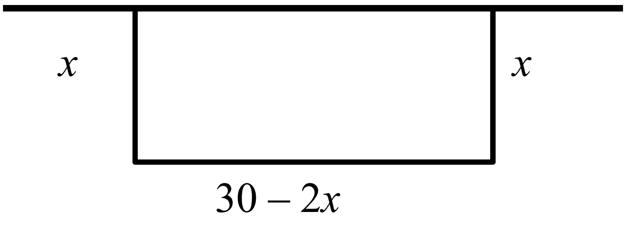
$$x = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = -4$$

f:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



$f(x) \leq 0$ kun $-4 \leq x \leq 2\frac{1}{2}$

Koska epäyhtälön ratkaisuun hyväksytään vain x:n positiivisia arvoja, $0 < x \leq 2\frac{1}{2}$.



47. Aitauksen ala

$A(x) = x(30 - 2x) = 30x - 2x^2$

Aitauksen pinta-alan tulisi olla vähintään 100 m^2, joten saadaan epäyhtälö:

$$A(x) \geq 100$$

$$30x - 2x^2 \geq 100$$

$$-2x^2 + 30x - 100 \geq 0$$

Merkitään $f(x) = -2x^2 + 30x - 100$.

Nollakohdat:

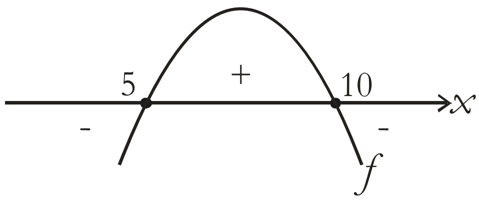
$$-2x^2 + 30x - 100 = 0$$

$$x = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-100)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x = \frac{-30 \pm 10}{-4}$$

$$x = 5 \quad \text{tai} \quad x = 10$$

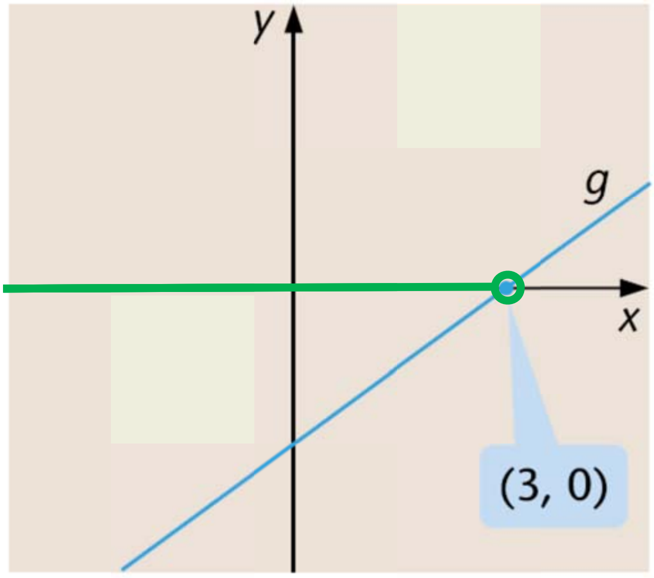
f:n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



$f(x) \geq 0$, kun $5 \leq x \leq 10$

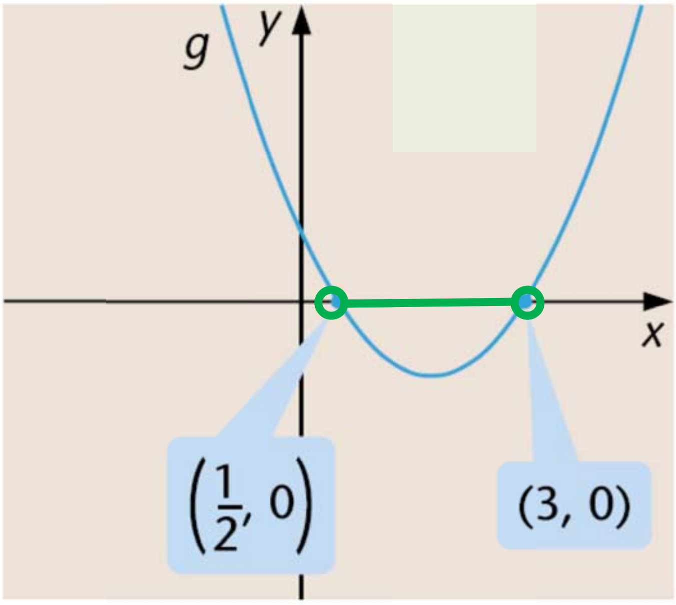
Näin ollen ala on vähintään 100 m^2, kun kohtisuoran sivun pituus kuuluu välille $[5\,\text{m}, 10\,\text{m}]$ eli $5 \leq x \leq 10$ (metriä).

48. a)



Funktio saa negatiivisia arvoja (eli $g(x) < 0$), kun $x < 3$.

b)



Funktio saa negatiivisia arvoja (eli $g(x) < 0$), kun $\frac{1}{2} < x < 3$

49. a) $g(x) < 0$, kun

$$2x + 1 < 0$$

$$2x < -1 \quad |:2$$

$$x < -\frac{1}{2}$$

b) $g(x) = -2x^2 + 10x$

Nollakohdat:

$-2x^2 + 10x = 0$

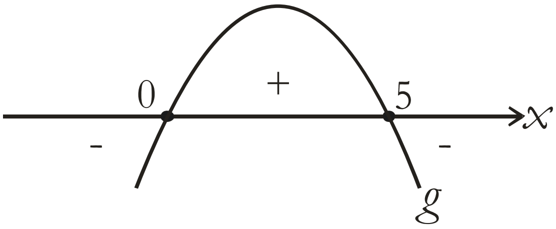
$x(-2x + 10) = 0$

$x = 0$ tai $-2x + 10 = 0$

$-2x = -10 |: (-2)$

$x = 5$

g :n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



$g(x) < 0$, kun $x < 0$ tai $x > 5$.

50. a) $4x + 5 < 5x - 1$

$$-x < -6 \quad \Big| :(-1)$$

$$x > 6$$

b) $2(x – 5) < -4(x + 1) – x + 1$

$$2x - 10 < -4x - 4 - x + 1$$

$$2x + 10 < -5x - 3$$

$$7x < 7 \qquad \Big| :7$$

$$x < 1$$

51. a) $8x^2 \geq 72$

$$8x^2 - 72 \geq 0$$

Merkitään $f(x) = 8x^2 - 72$.

Nollakohdat:

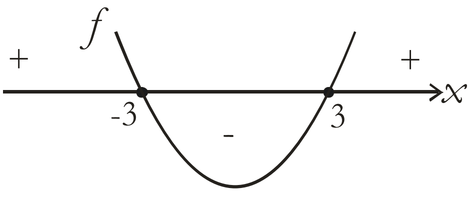
$$8x^2 - 72 = 0$$

$$8x^2 = 72 \quad \Big| :8$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

f:n kuvaaja ylöspäin aukeava paraabeli.



$f(x) \geq 0$, kun $x \leq -3$ tai $x \geq 3$

b) $x^2 + 8x + 21 < 0$

Merkitään $f(x) = x^2 + 8x + 21$

Nollakohdat:

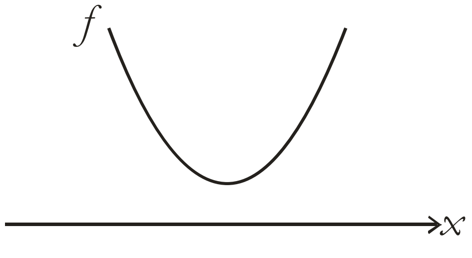
$x^2 + 8x + 21 = 0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{-20}}{2}$$

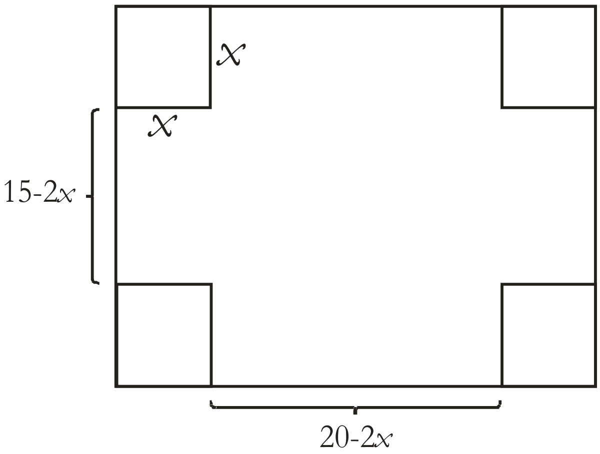
Koska juurrettava -20 < 20, yhtälöllä ei ole ratkaisuja eikä funktiolla *f* ole nollakohtia.

f :n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joka ei leikkaa *x*-akselia.



f saa vain positiivisia arvoja, joten epäyhtälöllä $x^2 + 8x + 21 < 0$ ei ole ratkaisuja.

52.



a) **Ehto 1**:

$$\begin{aligned} 15-2x &\geq 0 \\ -2x &\geq -15 \,\big|\, :(-2) \\ x &\leq 7{,}5 \end{aligned}$$

Ehto 2:

$$\begin{aligned} 20-2x &\geq 0 \\ -2x &\geq -20 \,\big|\, :(-2) \\ x &\leq 10 \end{aligned}$$

Ehto 3:

$$x \geq 0$$

Kun ehdot yhdistetään saadaan $0 \leq x \leq 7\frac{1}{2}$ (cm)

b)

$$\begin{aligned} A(x) &= (15-2x)(20-2x) \\ &= 300-30x-40x+4x^2 \\ &= 4x^2-70x+300 \end{aligned}$$

c) Vaaditaan, että $A(x) \leq 150$ eli

$$4x^2 - 70x + 300 \leq 150$$

$$4x^2 - 70x + 150 \leq 0$$

Merkitään $f(x) = 4x^2 - 70x + 150$.

Nollakohdat:

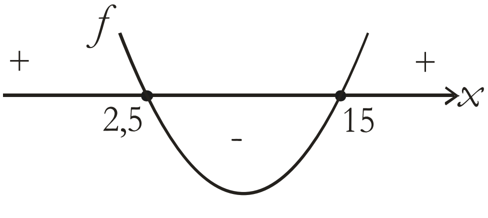
$4x^2 - 70x + 150 = 0$

$$x = \frac{-(-70) \pm \sqrt{(-70)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 150}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{70 \pm 50}{8}$$

$$x = 15 \quad \text{tai} \quad x = 2{,}5$$

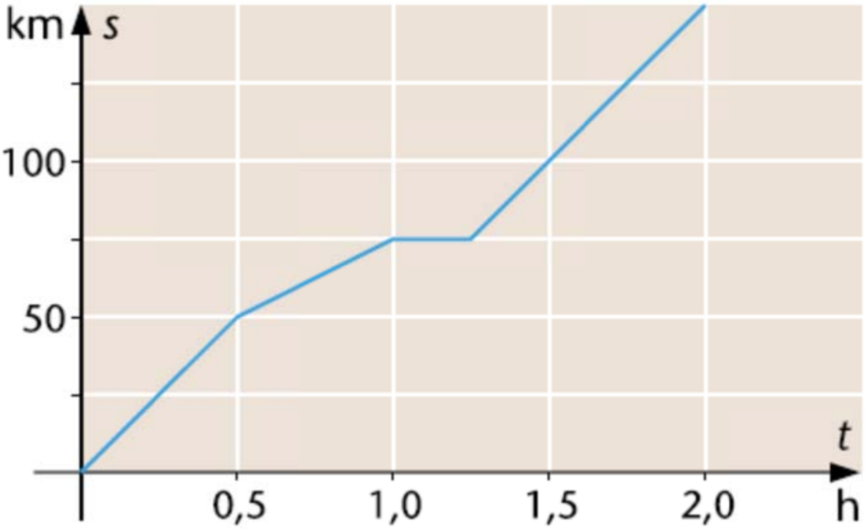
f:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



$f(x) \leq 0$, kun $2{,}5 \leq x \leq 15$

1.3 Funktion muutosnopeus

53.



a) Kun lähdöstä on kulunut 1,0 h, Roosa ei enää liiku, joten ollaan perillä. Etäisyys kotoa on 75 km.

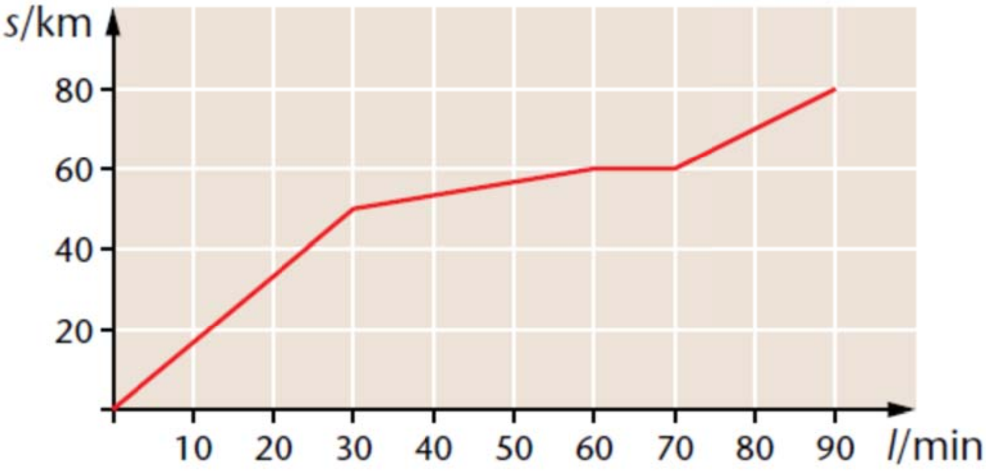
b) Ensimmäisen puolen tunnin aikana Roosa on ajanut 50 km.

Keskinopeus on siis $\frac{50\,\text{km}}{0{,}5\,\text{h}} = 100\frac{\text{km}}{\text{h}}$

c) Roosa ”ei liiku”, kun $1{,}0 \le t \le 1{,}25$, joten aikaa verotoimistossa kuluu $0{,}25\,\text{h} = 15\,\text{min}$.

d) Paluumatka alkaa hetkellä $t = 1{,}25$ ja päättyy, kun $t = 2{,}0$. Aikaa kuluu siis $0{,}75\,\text{h} = 45\,\text{min}$.

54.



a) 0,5 h = 30 min

30 min aikana juna on kulkenut 50 km matkan.

Junan keskinopeus $v = \dfrac{50\,\text{km}}{0{,}5\,\text{h}} = 100\,\text{km/h}$

b) Tuppukylän asemalle pysähdytään, kun matkaa on taittunut 60 km.

Isomäki sijaitsee 80 km:n päässä lähtöasemalta, joten Tuppukylästä on matkaa Isomäelle

$$80\text{ km} - 60\text{ km} = 20\text{ km}$$

c) Junamatka Tuppukylästä Isomäelle kestää

$$90\text{ min} - 70\text{ min} = 20\text{ min} = \frac{20}{60}\text{ h} = \frac{1}{3}\text{ h}$$

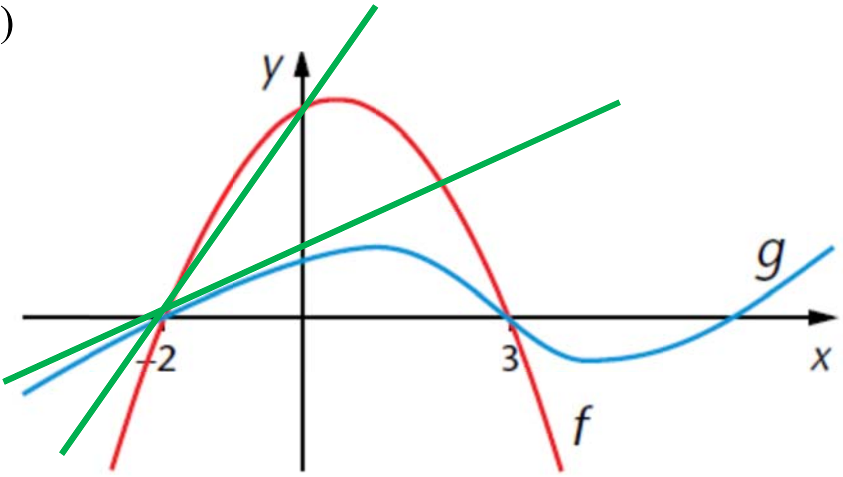
Matkan pituus oli 20 km, joten keskinopeus on

$$v = \frac{20\,\text{km}}{\frac{1}{3}\text{h}} = 60\,\text{km/h}$$

d) Koko matkan pituus on 80 km ja matkaan kuluu aikaa 90 min = 1,5 h.

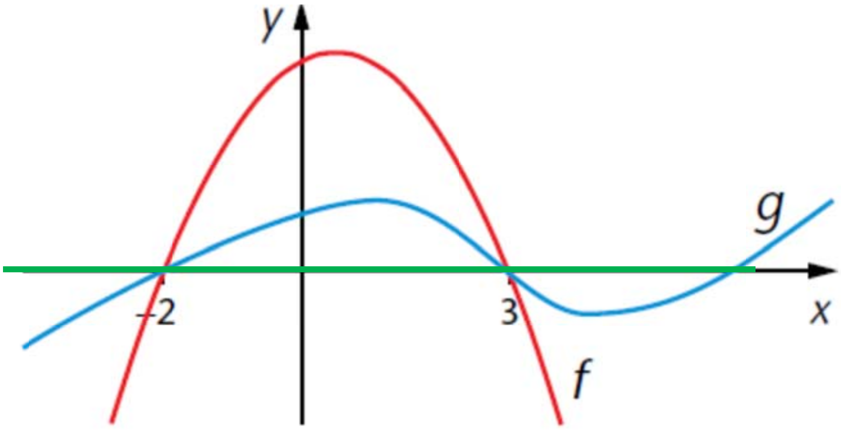
Keskinopeus on $v = \dfrac{80\,\text{km}}{1{,}5\,\text{h}} = 53{,}33...\text{km/h} \approx 53\text{ km/h}$

55. a)



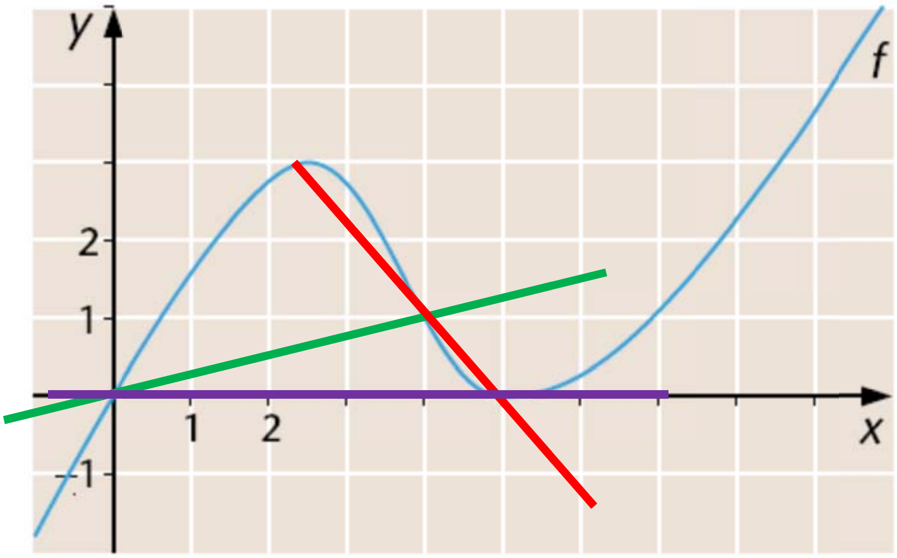
Välillä [-2, 0] punaisella piirretyn funktion *f* muutosnopeus on suurempi, koska funktiolle *f* keskimääräistä muutosnopeutta kuvaavan suoran kulmakerroin on suurempi (suora nousee jyrkemmin)

b)



Välillä [-2, 3] funktioiden muutosnopeudet ovat yhtä suuret, koska keskimääräistä muutosnopeutta kuvaavat suorat ovat molemmat vaakasuoria.

56.



a) Keskimääräinen muutosnopeus välillä $[0,4]$ saadaan laskemalla pisteiden (0, 0) ja (4, 1) kautta piirretyn suoran kulmakerroin:

$$\frac{1-0}{4-0}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

b) Pisteiden (4,1) ja (5, 0) kautta piirretyn suoran kulmakerroin:

$$\frac{0-1}{5-4}=\frac{-1}{1}=-1$$

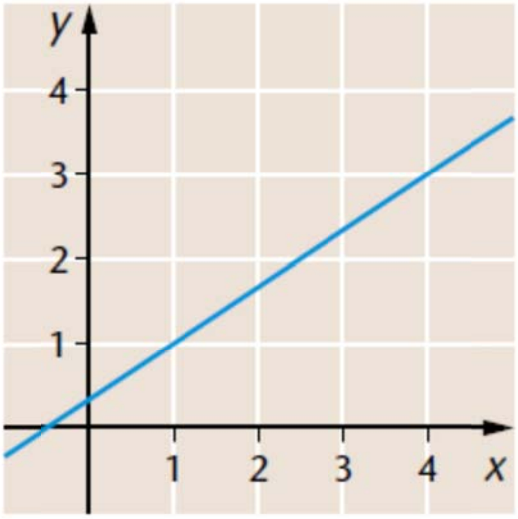
c) Pisteiden (0, 0) ja (5, 0) kautta piirretyn suoran kulmakerroin:

$$\frac{0-0}{5-0}=\frac{0}{5}=0$$

57. a) Suora kulkee pisteiden (1, 1) ja (4, 3) kautta

Keskimääräinen muutosnopeus

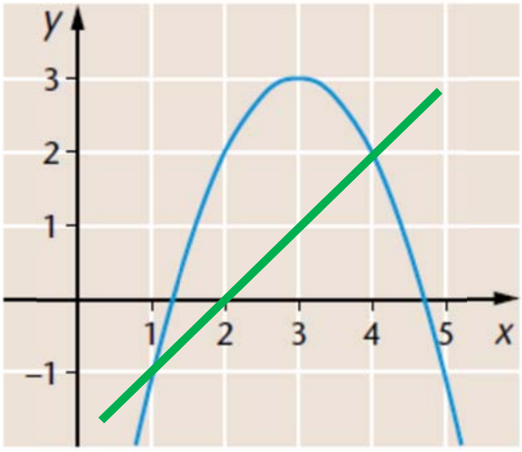
$$\frac{3-1}{4-1}=\frac{2}{3}$$



b) Suora kulkee pisteiden (1, -1) ja (4, 2) kautta

Keskimääräinen muutosnopeus

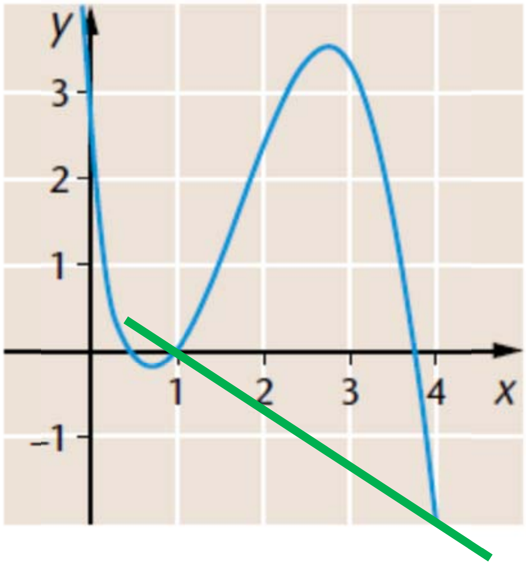
$$\frac{2-(-1)}{4-1}=\frac{3}{3}=1$$



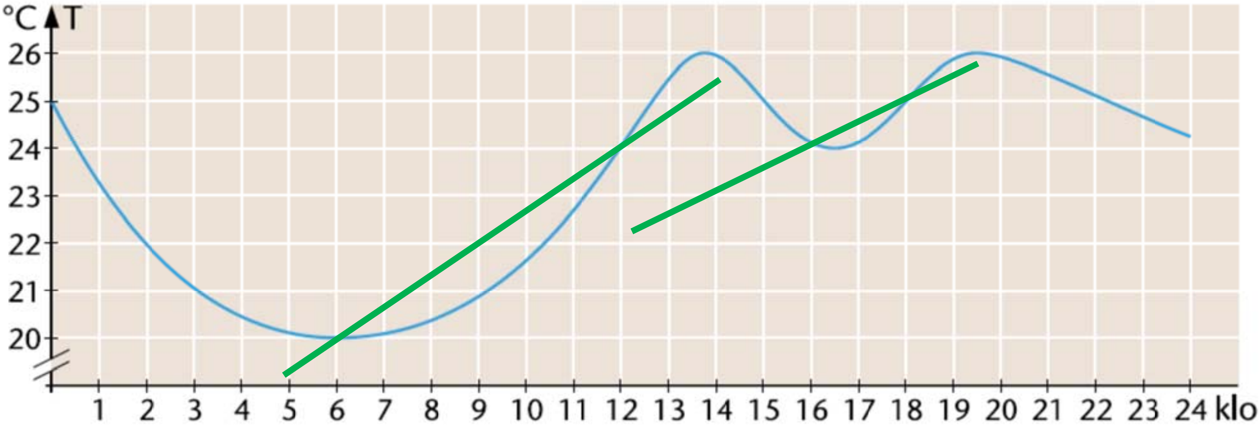
c) Suora kulkee pisteiden (1, 0) ja (4, -2) kautta

Keskimääräinen muutosnopeus

$$\frac{-2-0}{4-1}=-\frac{2}{3}$$



58.



a) Laitteisto alkaa puhaltaa kylmää ilmaa 26 asteen lämpötilassa, koska tällöin lämpötilaa kuvaava käyrä kääntyy alaspäin.

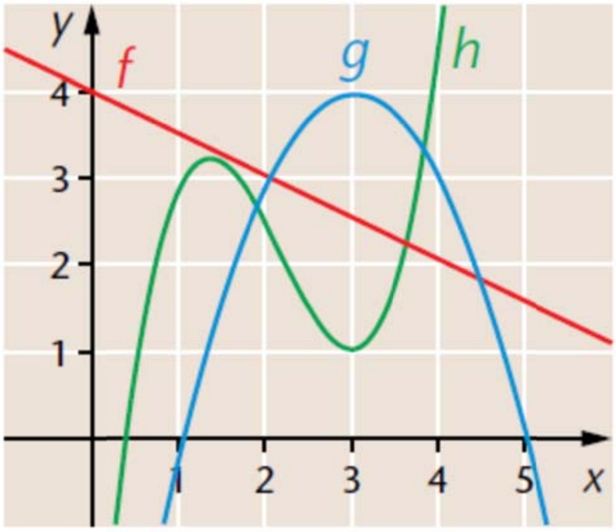
b) Suora kulkee pisteiden (16, 24) ja (18, 25) kautta.
Lämpötilan keskimääräinen muutosnopeus on

$$\frac{25-24}{18-16}=\frac{1}{2}=0{,}5 \quad (°\mathrm{C}\,/\,\mathrm{h})$$

c) Suora kulkee pisteiden (6, 20) ja (12, 24) kautta.
Lämpötilan keskimääräinen muutosnopeus on

$$\frac{24-20}{12-6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=0{,}666...\approx 0{,}7 \quad (°\mathrm{C}\,/\,\mathrm{h})$$

59. funktioiden keskimääräiset muutosnopeudet välillä [1, 3]:



funktio *f*: $\frac{2,5-3,5}{3-1}=0,5$

funktio *g*: $\frac{4-0}{3-1}=2$

funktio *h*: $\frac{1-3}{3-1}=-1$

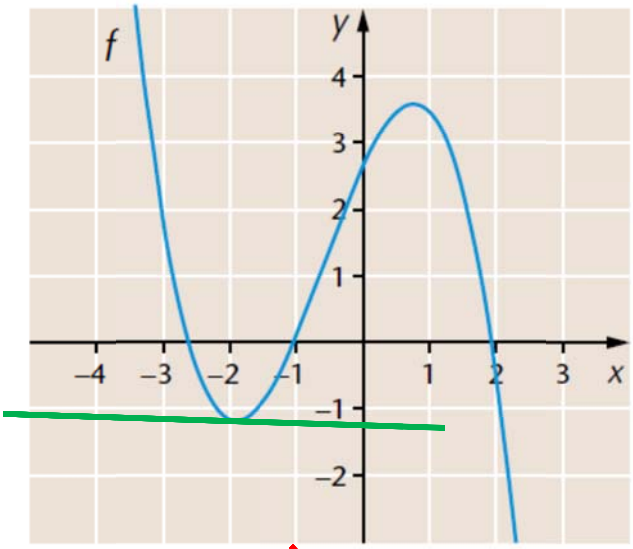
a) Suurin keskimääräinen muutosnopeus välillä [1, 3] on funktiolla *g*

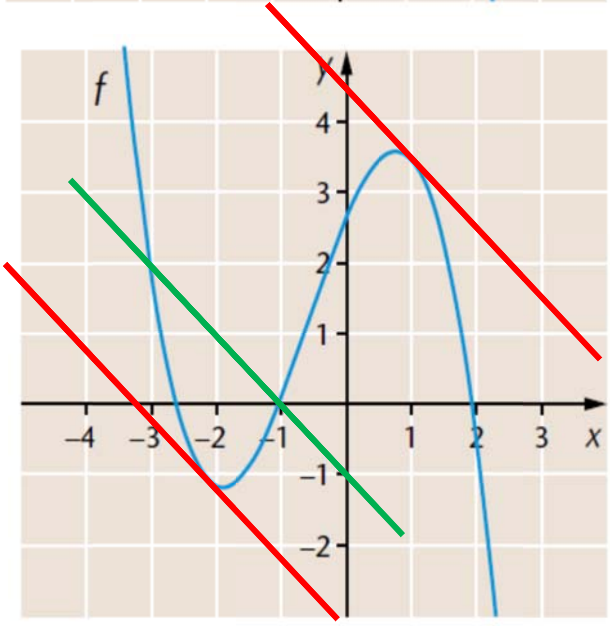
b) Pienin keskimääräinen muutosnopeus välillä [1, 3] on funktiolla *h*

d) Suurin hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 3$ on funktioilla *g* ja *h*.

Molempien hetkellinen muutosnopeus on 0.
Funktion *f* hetkellinen muutosnopeus on -0,5.

60. a) Funktion hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = -2$ on ≈ 0





b) Piirretään ensin keskimääräistä muutosnopeutta kuvaava suora.

Siirretään suoraa ja etsitään kohdat, joissa suora on tangenttina.

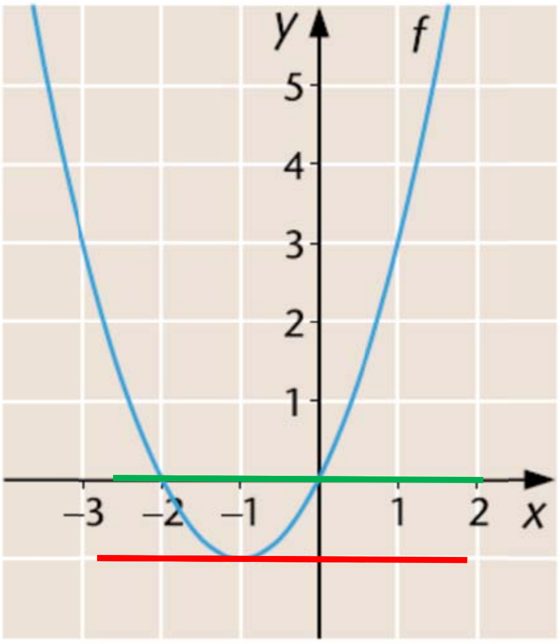
Hetkellinen muutosnopeus on sama kohdissa
$x \approx -2{,}2$ ja $x \approx 1$

61. a) Hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = -1$ on 0.

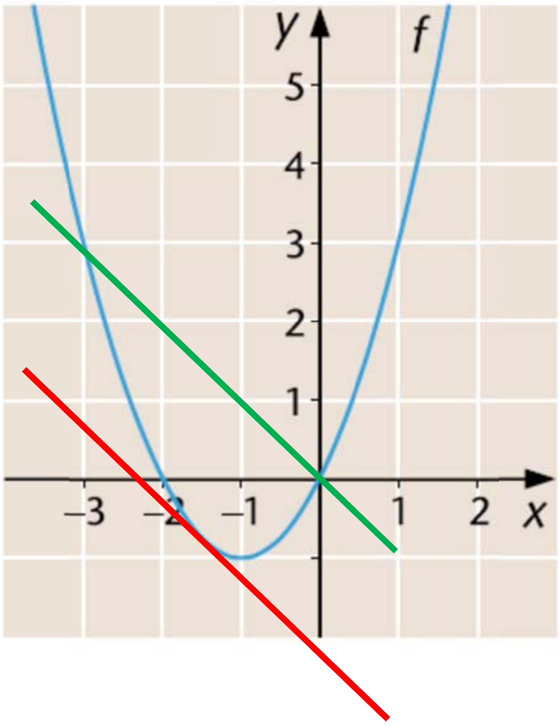
b) Hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = 0$ saadaan kuvaan piirretyn tangenttisuoran avulla. Hetkellinen muutosnopeus on

$$\frac{6-0}{3-0} = 2$$

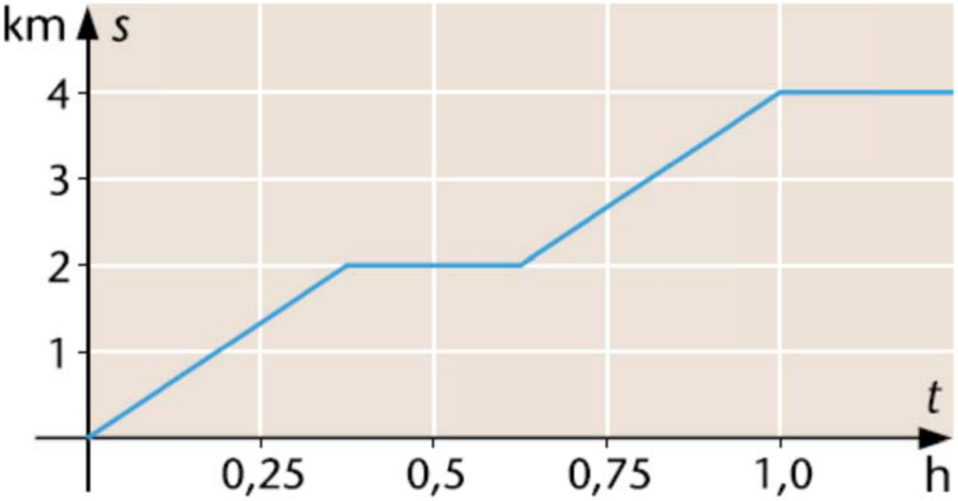
62. a) Hetkellinen muutosnopeus on sama kuin välillä [-2, 0] kohdassa $x \approx$ -1



b) Hetkellinen muutosnopeus on sama kuin välillä [-3, 0] kohdassa $x \approx$ - 1,5



63.



a) Edla on kaupassa välillä, jolloin etäisyys kotoa ei kasva. Kauppa on siis 2 km päässä.

b) Kaupassaoloaikaa kuvaava pätkä käyrää on noin yhden ruudun mittainen eli 0,25 h = 15 min.

c) Piirretään tangentti kohtaan $t = 0{,}25$. Sen kulmakerroin on

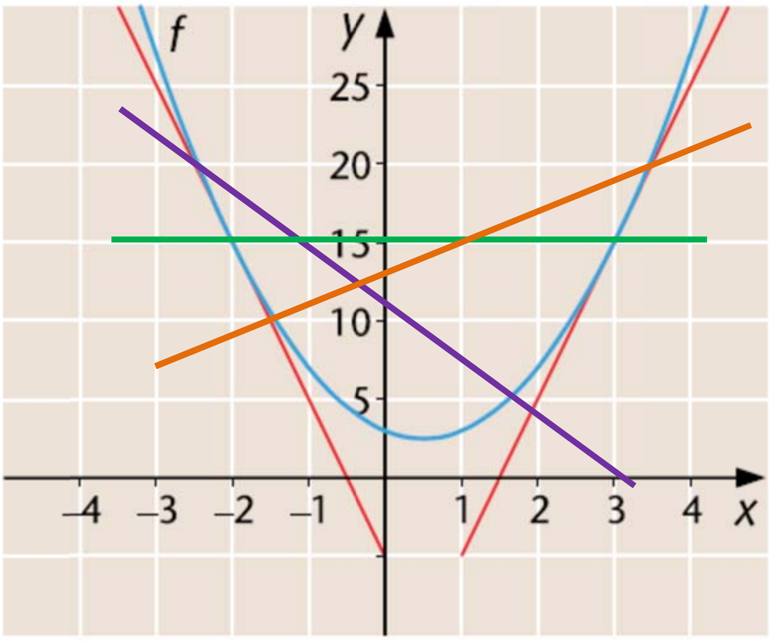
$$\frac{1{,}3-0}{0{,}25-0}=\frac{1{,}3}{0{,}25}\approx 5$$

Edlan nopeus on noin 5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Huomautus: Kuvaajasta on vaikea lukea tarkkoja pisteitä. Myös tulos 6 km/h on täysin hyväksyttävä.

d) Edla saapuu Millan luo, kun $t = 1{,}0$, jolloin etäisyys Edlan kotiin on 4 km.

64.



a) Keskimääräinen muutosnopeus välillä [-2, 3]:

$$\frac{15-15}{-2-3}=0$$

b) Keskimääräinen muutosnopeus välillä $\left[-1\frac{1}{2},3\frac{1}{2}\right]$:

$$\frac{20-10}{3\frac{1}{2}-\left(-1\frac{1}{2}\right)}=\frac{10}{5}=2$$

c) Keskimääräinen muutosnopeus välillä $\left[-2\frac{1}{2},1\frac{1}{2}\right]$:

$$\frac{20-5}{-2\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}}=\frac{15}{-4}=-3{,}75\approx -4$$

d) Hetkellinen muutosnopeus kohdassa x = -2:

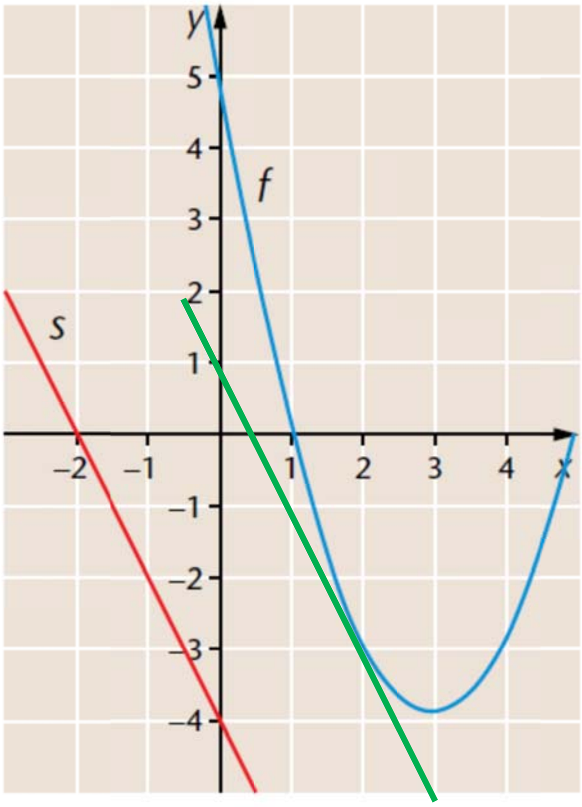
$$\frac{15-25}{-2-(-3)}=\frac{-10}{1}=-10$$

Hetkellinen muutosnopeus kohdassa x = -3:

$$\frac{25-15}{4-3}=10$$

65. a) Suoran *s* kulmakerroin

$$k_s = \frac{-4-0}{0-(-2)} = -2$$



b) Etsitään suoraa siirtämällä sellainen kohta funktion *f* kuvaajalla, jossa tangentti on suoran *s* suuntainen.

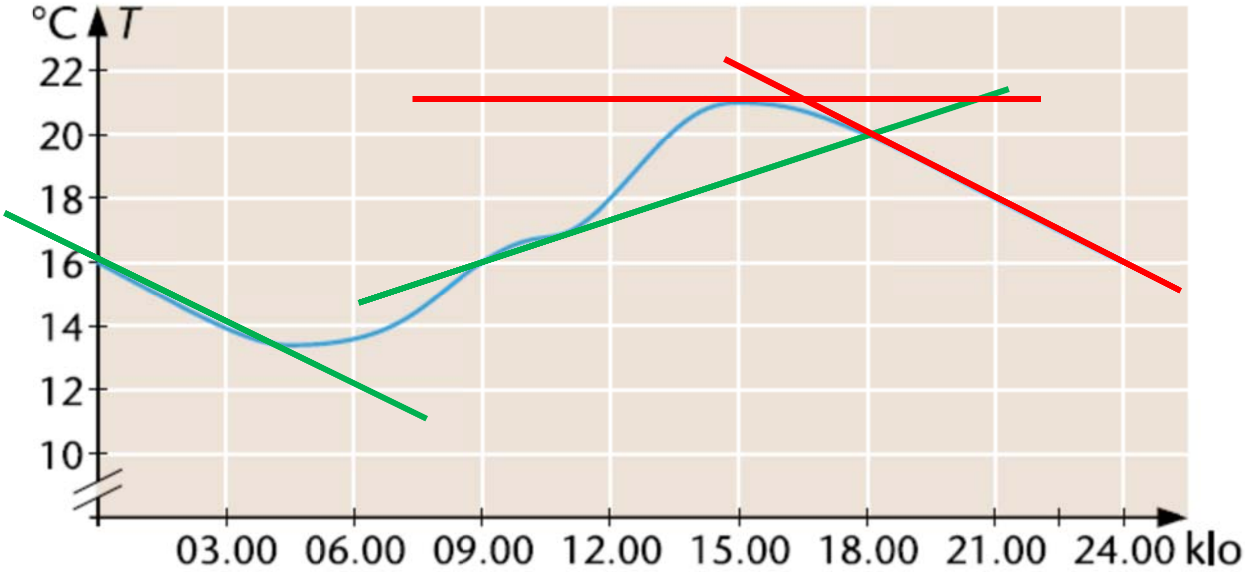
$$x \approx 2$$

c) Keskimääräinen muutosnopeus välillä [0, 1] on

$$\frac{0-5}{1-0} = -5$$

Keskimääräinen muutosnopeus on pienempi välillä [0, 1].

66.



a) Keskimääräinen muutosnopeus kolmen ensimmäisen tunnin aikana on

$$\frac{14-16}{3-0}=\frac{-2}{3}=-0{,}666...\approx-0{,}7\ \ (°\text{C}/\text{h})$$

b) Lämpötilan keskimääräinen muutosnopeus välillä [9, 18] on

$$\frac{20-16}{18-9}=\frac{4}{9}=0{,}444...\approx 0{,}4\ \ (°\text{C}/\text{h})$$

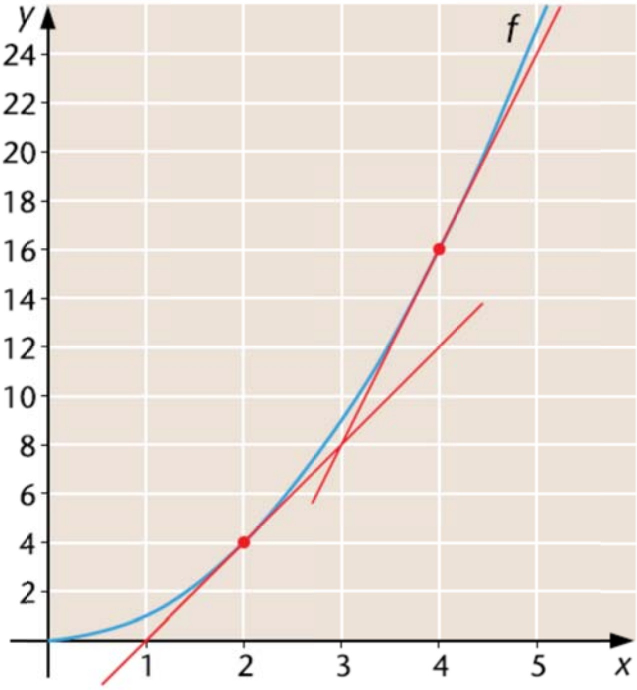
c) Hetkellinen muutosnopeus klo 15.00 on

$$\frac{21-21}{18-15}=0\ \ (°\text{C}/\text{h})$$

d) Hetkellinen muutosnopeus klo 21.00 on

$$\frac{18-16}{21-24}=\frac{2}{-3}=-0{,}666...\approx-0{,}7\ \ (°\text{C}/\text{h})$$

2.1 Funktion derivaatta



67. a) $f(4) \approx 16$

b) Lasketaan pisteeseen (4, 16) piirretyn tangentin kulmakerroin:

$$\frac{24-8}{5-3} = \frac{16}{2} = 8$$

$$f'(4) \approx 8$$

c) $f(2) \approx 4$

d) Lasketaan pisteeseen (2, 4) piirretyn tangentin kulmakerroin:

$$\frac{12-0}{4-1} = \frac{12}{3} = 4$$

$$f'(2) \approx 4$$

68. a) $f(-1) \approx 2$

b) $f(0{,}5) \approx 1$

c) Lasketaan pisteeseen (-1, 2) piirretyn tangentin kulmakerroin:

$$\frac{2-1}{-1-0} = -1$$

d) Lasketaan pisteeseen (0,5;1) piirretyn tangentin kulmakerroin:

$$\frac{1-4{,}5}{0{,}5-1} = \frac{-3{,}5}{-0{,}5} = 7$$

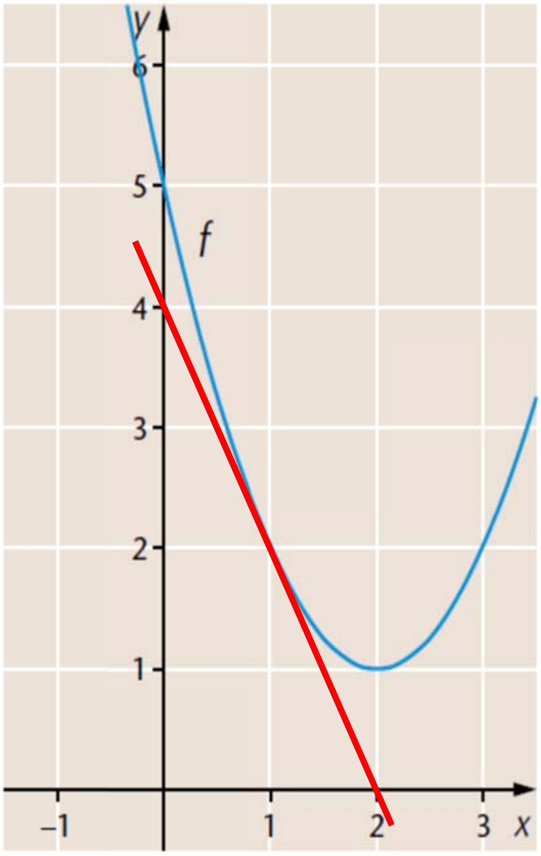
69. a) Lasketaan pisteeseen (-2, 2) piirretyn tangentin kulmakerroin:

$$\frac{2-(-2)}{-2-(-1)}=\frac{4}{-1}=-4$$

b) Lasketaan pisteeseen (2, 2) piirretyn tangentin kulmakerroin:

$$\frac{2-(-2)}{2-1}=\frac{4}{1}=4$$

70. Piirretään funktion kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 1$.



Derivaatta kohdassa $x = 1$ saadaan tangenttisuoran kulmakertoimesta:

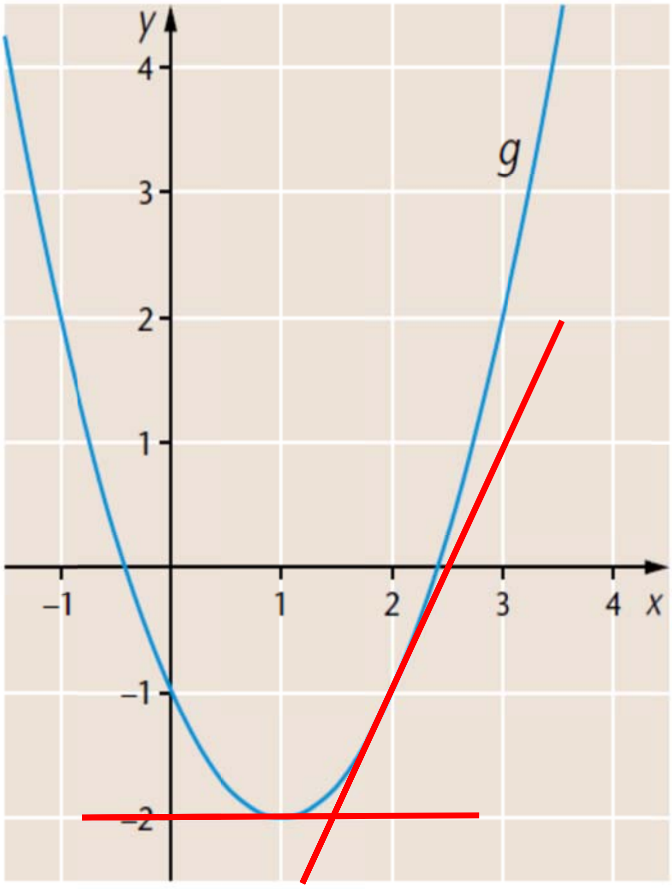
$$\frac{2-4}{1-0}=-2$$

71. a) Piirretään funktion kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 1$.

$$f'(1) = \frac{-2-(-2)}{1-2}$$
$$= 0$$

b) Piirretään funktion kuvaajalle tangentti kohtaan $x = 2$.

$$f'(2) = \frac{-1-1}{2-3}$$
$$= \frac{-2}{-1}$$
$$= 2$$



72. a)

$f(2) = 5$

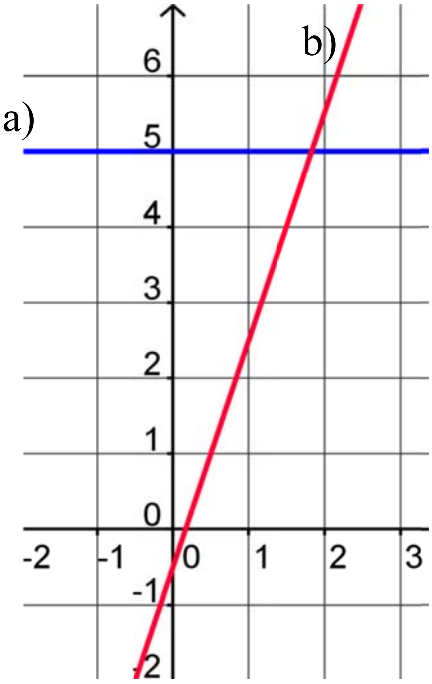
$f'(2) = 0$

(tangentti x-akselin suuntainen)

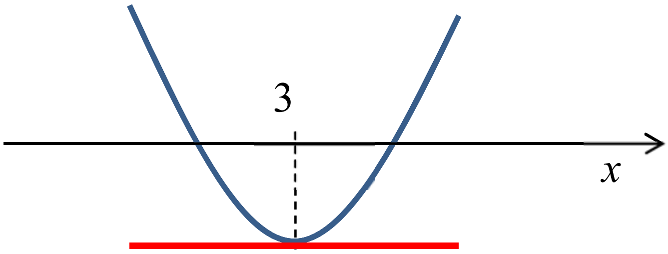
b)

$f(2) \approx 5{,}5$

$f'(2) \approx 3$



73.

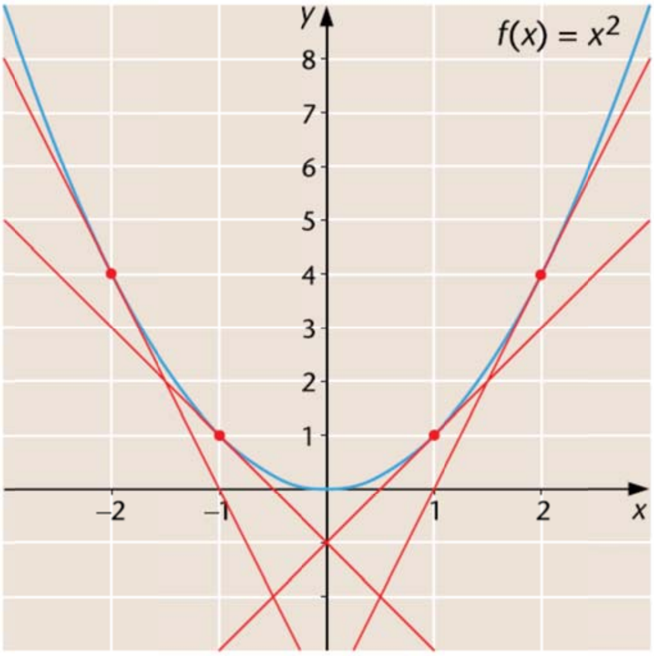


$f(3)$ on huippupisteen y-koordinaatti eli $f(3) = -1$.

Pisteeseen (3, -1) piirretyn tangentin kulmakerroin nolla eli $f'(3) = 0$

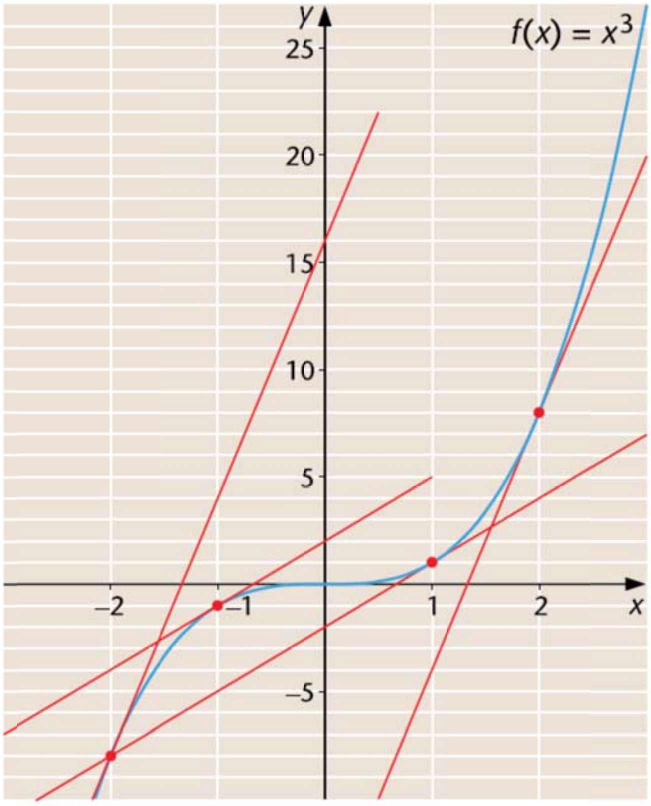
74.

x	$f'(x)$
1	$\frac{1-(-1)}{1-0} = 2$
-1	$\frac{1-(-1)}{-1-0} = -2$
2	$\frac{4-0}{2-1} = 4$
-2	$\frac{4-0}{-2-(-1)} = -4$
x	$2x$

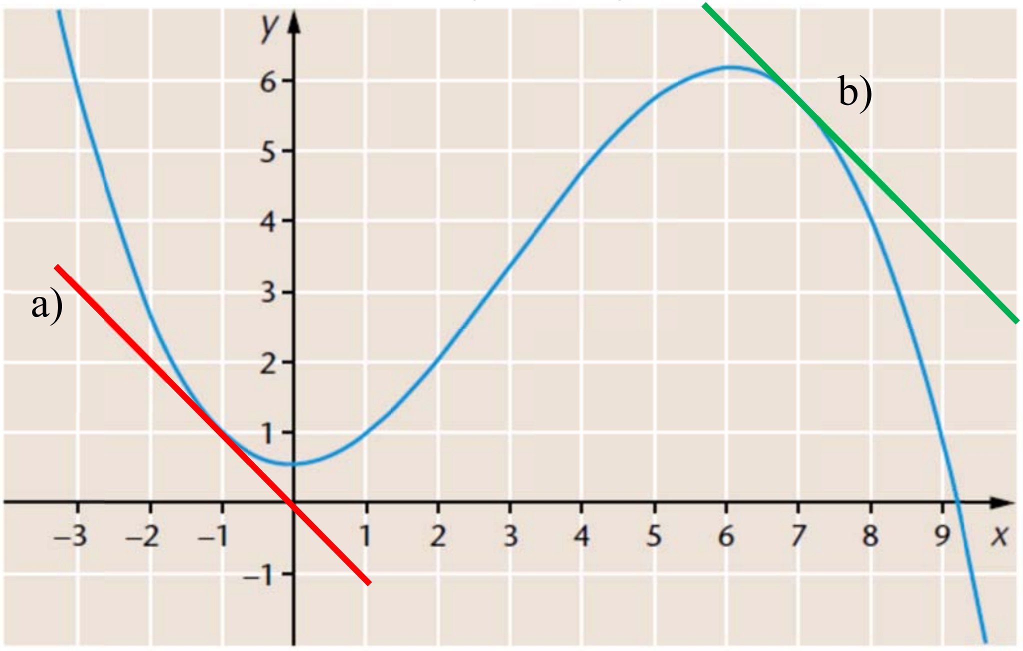


75.

x	$f'(x)$
1	$\frac{1-(-2)}{1-0}=3$
-1	$\frac{-1-2}{-1-0}=3$
2	$\frac{8-(-4)}{2-1}=12$
-2	$\frac{-8-4}{-2-(-1)}=12$
x	$3x^2$



76. a) Piirretään funktion kuvaajalle tangentti kohtaan x = -1

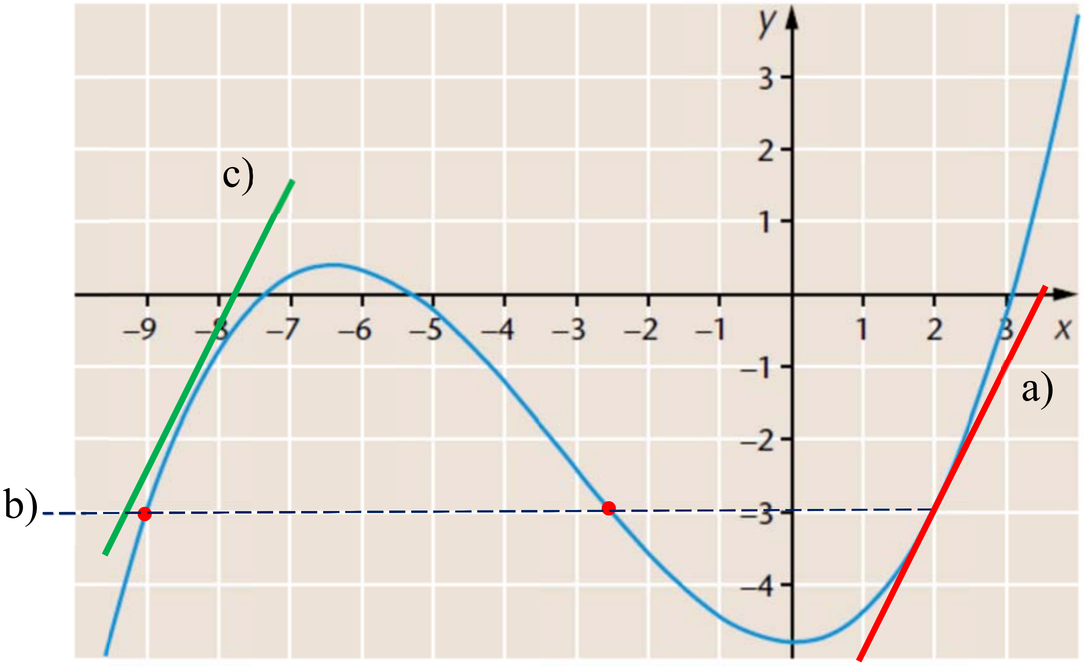


$$f'(-1)=\frac{1-0}{-1-0}=-1$$

b) Etsitään tangenttia siirtämällä muut kohdat, joissa tangentti yhdensuuntainen a-kohdan tilanteen kanssa.

$x \approx 7$

77. a) $g(2) = -3$ $\qquad$ $g'(2) = \dfrac{-3-(-1)}{2-3} = 2$



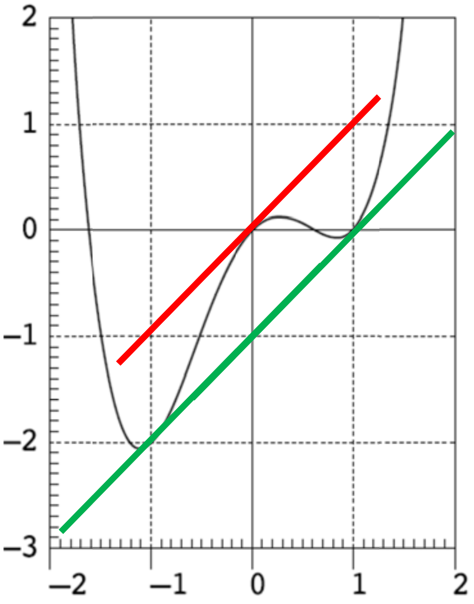
b) $x \approx$-2,5 $\qquad$ ja $\qquad$ $x \approx$-9

c) $x \approx$-8,5

78. Pisteeseen (0, 0) piirretyn tangentin kulmakerroin:

$$\frac{1-(-1)}{1-(-1)} = 1$$

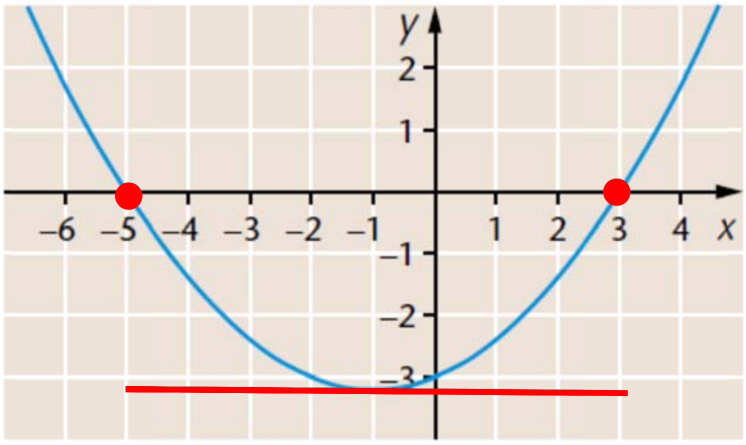
eli $f'(0) \approx 1$



Käyrälle voidaan piirtää samansuuntaisia tangentteja kohtiin $x \approx -1$ ja $x \approx 1$ eli pisteisiin (-1, -2) ja (1, 0).

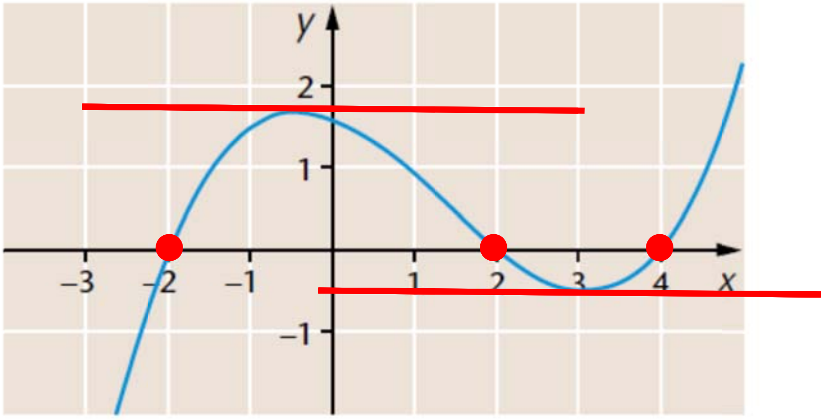
79. a) ***f '*(*x*) = 0**, kun
$x \approx -1$

***f*(*x*) = 0**, kun
$x \approx -5$tai $x \approx 3$

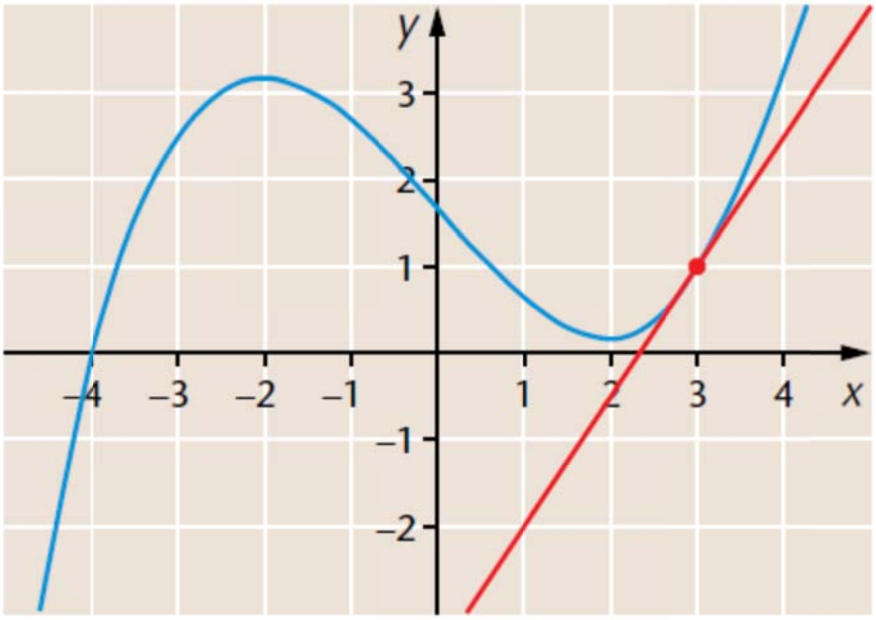


b) ***f '*(*x*) = 0**, kun
$x \approx -0{,}5$ tai $x \approx 3$

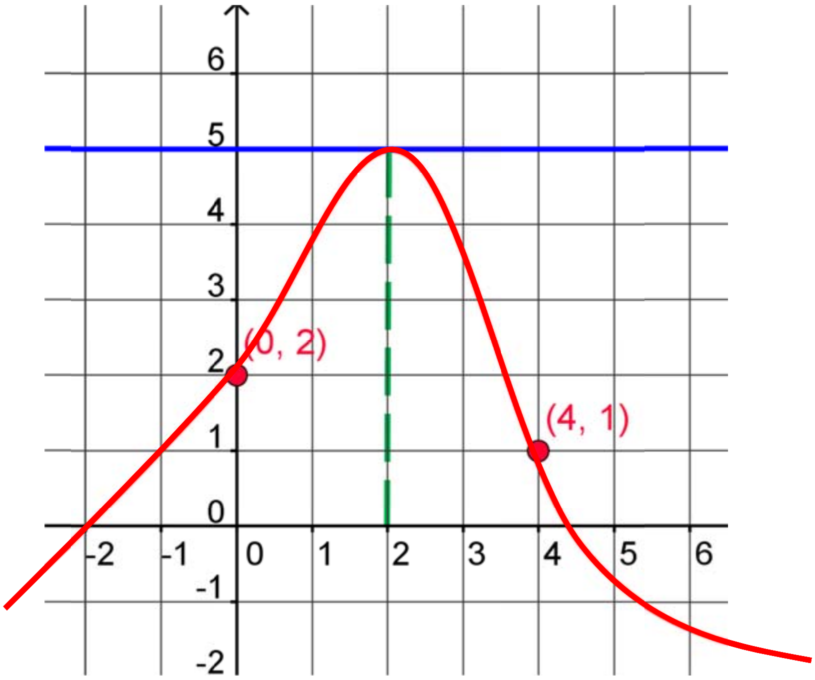
***f*(*x*) = 0**, kun
$x \approx -2$, $x \approx 2$ tai $x \approx 4$



80. b, c, e, f, i

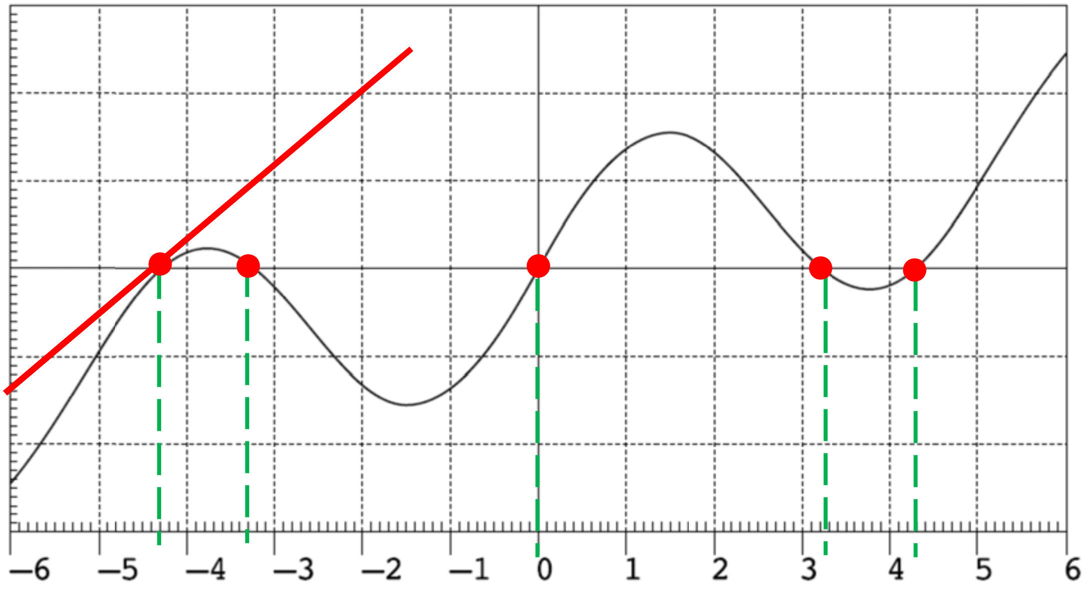


81.



82. Funktion nollakohdat:

$x_1 \approx -4{,}3$ $x_2 \approx -3{,}3$ $x_3 \approx 0$ $x_4 \approx 3{,}3$ $x_5 \approx 4{,}3$



Kohtaan $x_1 \approx -4{,}3$ piirretyn tangentin kulmakerroin:

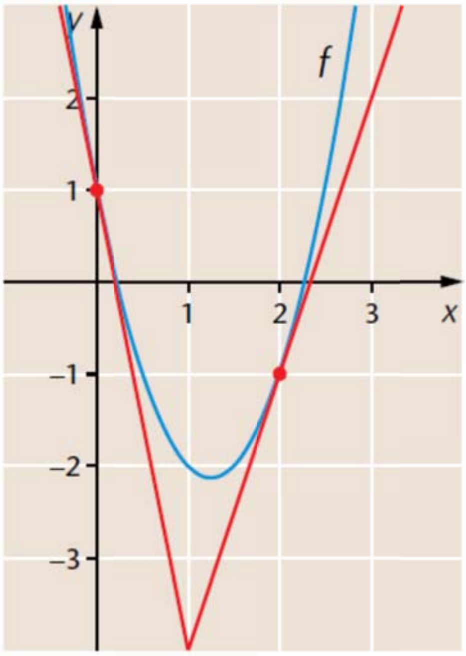
$$\frac{2-0}{-2-(-4{,}3)} = 0{,}869... \qquad \text{eli } f'(x_1) \approx 0{,}9$$

83. a) $f(0) \approx 1$

b) $f'(0) \approx \dfrac{1-(-4)}{0-1} = -5$

c) $f(2) \approx -1$

d) $f'(2) \approx \dfrac{-1-2}{2-3} = 3$

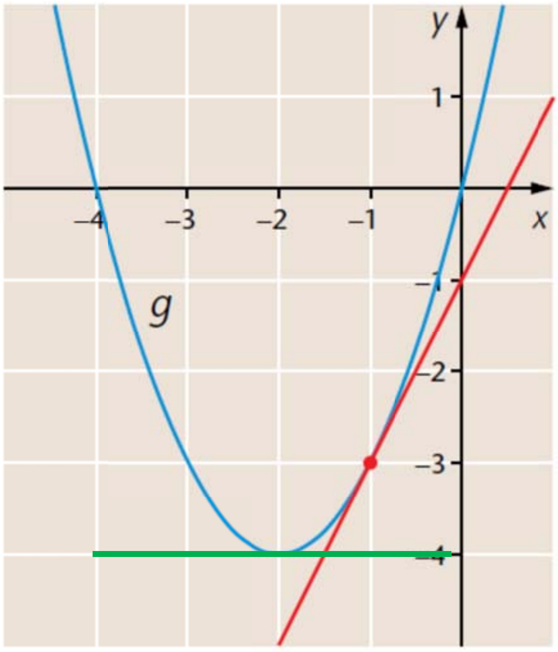


84. a) $g(-1) \approx -3$

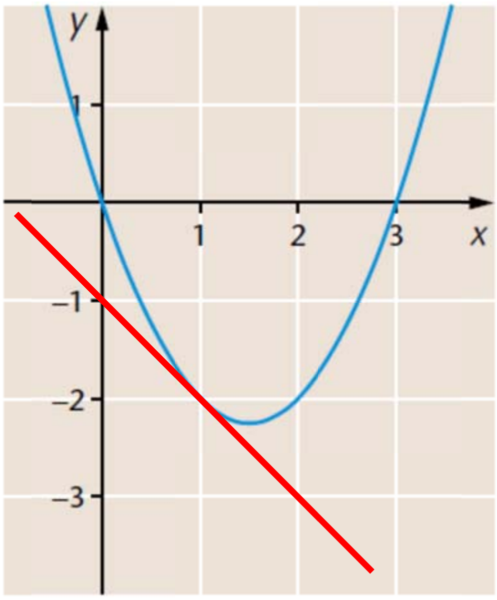
b) $g'(-1) \approx \dfrac{-3-(-5)}{-1-(-2)} = 2$

c) Funktion nollakohdat:
$x \approx -4$ ja $x \approx 0$

d) Derivaatan nollakohta:
$x \approx -2$



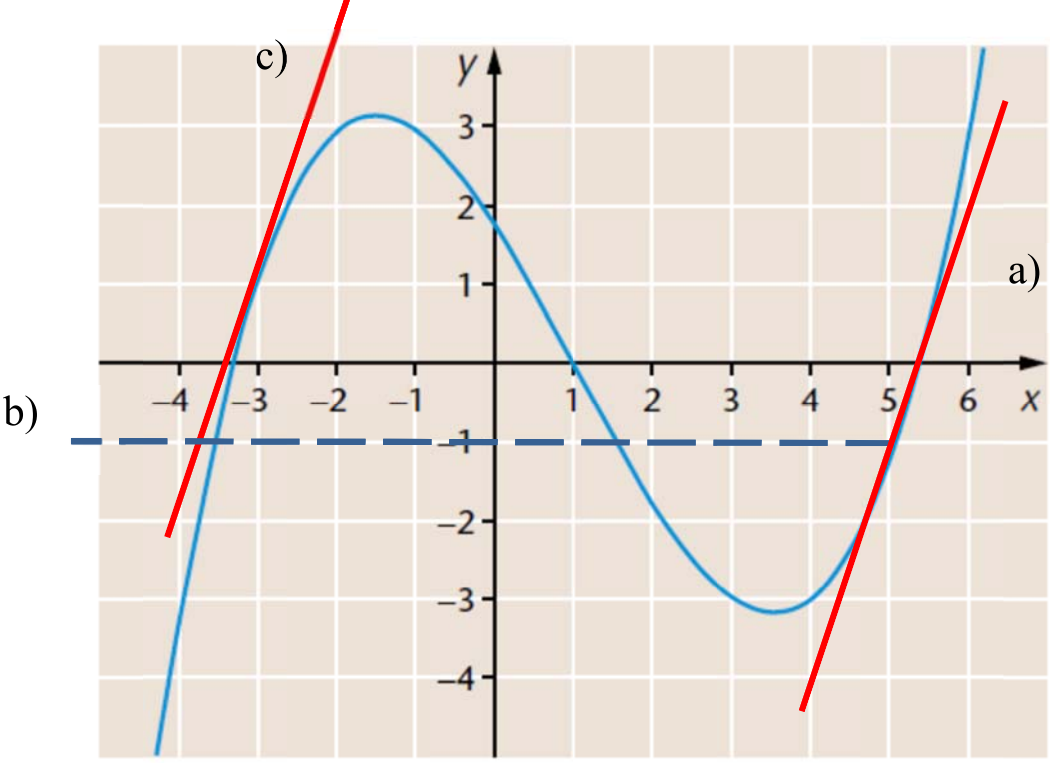
85. Piirretään ensin kuvaajalle tangenttisuora kohtaan $x = 1$.



$$f'(1) \approx \frac{-2-(-3)}{1-2} = -1$$

86. a) $g(5) \approx -1$

$$g'(5) \approx \frac{-1-2}{5-6} = 3$$



b) $x \approx 1{,}5$ ja $x \approx -3{,}5$

c) $x \approx -3$

2.2 Derivoimissääntöjä ja -kaavoja

87. a) $\mathrm{D}(-5) = 0$

b) $\mathrm{D}(-4{,}3x) = -4{,}3$

c) $\mathrm{D}\left(\frac{4}{7}x\right) = \frac{4}{7}$

d) $\mathrm{D}\left(\frac{x}{3}\right) = \mathrm{D}\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{3}$

88. a) $f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$

b) $m'(x) = -4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} = -12x^2$

c) $g'(t) = \frac{3}{5} \cdot 5 \cdot t^{5-1} = 3t^4$

d) $h'(r) = 0{,}6 \cdot 7 \cdot r^{7-1} = 4{,}2r^6$

89. a) $\mathrm{D}(-5x^3) = -5\ \mathrm{D}(x^3) = -5 \cdot 3x^{3-1} = -15x^2$

b) $\mathrm{D}(3x^2 - x + 4) = \mathrm{D}(3x^2) - \mathrm{D}(x) + \mathrm{D}(4)$
$= 3 \cdot 2x^{2-1} - 1 + 0 = 6x - 1$

c) $D\left(\frac{2x}{3} + \frac{4}{5}\right) = D\left(\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}\right) = D\left(\frac{2}{3}x\right) + D\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{3}$

90. a) $f'(x)=10$

b) $f'(r)=-3\cdot 3\cdot r^{3-1}=-9r^2$

c) $f'(x)=-7\cdot 3\cdot x^{3-1}-5=-21x^2-5$

d) $f'(t)=-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot t^{2-1}+\frac{1}{3}=-t+\frac{1}{3}$

91. a) $f'(x)=-3x^2+4$

b) $f'(x)=24x$

c) $f'(x)=-15x^4+1{,}2x^3-10x$

d) $f'(r)=-\frac{7}{3}\cdot 6r^5=-14r^5$

92. a) $\mathrm{D}\left(3x^{11}+4x\right)=\mathrm{D}\left(3x^{11}\right)+\mathrm{D}(4x)=33x^{10}+4$

b) $\mathrm{D}\left(-5b^3+1\right)=\mathrm{D}\left(-5b^3\right)+\mathrm{D}(1)=-15b^2$

c) $$\begin{aligned}\mathrm{D}\left(-3x^8-4x^3+x^2\right)&=\mathrm{D}\left(-3x^8\right)+\mathrm{D}\left(-4x^3\right)+\mathrm{D}\left(x^2\right)\\&=-24x^7-12x^2+2x\end{aligned}$$

d) $\mathrm{D}\left(25-7x-0{,}5x^2\right)=\mathrm{D}(25)+\mathrm{D}(-7x)+\mathrm{D}\left(-0{,}5x^2\right)=-7-x$

93. a)

$$\mathrm{D}(-\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3})=-\frac{1}{2}\cdot 4x^3+\frac{2}{3}\cdot 3x^2+\frac{1}{2}\cdot 1$$

$$=-2x^3+2x^2+\frac{1}{2}$$

b) $D\left(4x-7+x^4\right)=4\cdot 1-0+4x^3=4x^3+4$

c) $D\left(\frac{3x^2}{5}-\frac{4x}{5}\right)=D\left(\frac{3}{5}x^2-\frac{4}{5}x\right)=\frac{3}{5}\cdot 2x-\frac{4}{5}\cdot 1=\frac{6}{5}x-\frac{4}{5}$

d) $D\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot 2x-\frac{2}{3}\cdot 1+0=\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}$

94. a) $f(x) = 10x^4 + 15x^2$

$f'(x) = 10 \cdot 4x^3 + 15 \cdot 2x = 40x^3 + 30x$

b) $f(x) = (x - 5)(x - 5) = x^2 -5x - 5x + 25 = x^2 - 10x + 25$

$f'(x) = 2x - 10$

c) $f(x)=\frac{9x^4}{3}+\frac{3x^2}{3}-\frac{6x}{3}=3x^4+x^2-2x$

$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 + 2x - 2 = 12x^3 + 2x - 2$

d) $f(x) = 2x^2 - 3x^2 + 4x = -x^2 + 4x$

$f'(x) = -2x + 4$

95. a) $g(x) = 4\left(x^2 - 1\right) = 4x^2 - 4$

$g'(x) = 8x$

b) $g(x) = x^2\left(2x + 6\right) = 2x^3 + 6x^2$

$g'(x) = 6x^2 + 12x$

c) $g(t) = (t - 3)(t - 3) = t^2 - 3t - 3t + 9 = t^2 - 6t + 9$

$g'(x) = 8x$

d) $g(r) = (r - 1)(r + 1) = r^2 + r - r - 1 = r^2 - 1$

$g'(r) = 2r$

96. a) $m(t) = -\dfrac{2t}{6} = -\dfrac{1}{3}t$ $\qquad m'(t) = -\dfrac{1}{3}$

b) $h(x) = \dfrac{x + 3}{5} = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{3}{5}$ $\qquad h'(x) = \dfrac{1}{5}$

c) $g(x) = \dfrac{6x^5 - 12x^3 + 3}{3} = 2x^5 - 4x^3 + 1$

$g'(x) = 10x^4 - 12x^2$

d) $f(r) = \dfrac{4r^5 - 2r^2 + 16r}{-2} = -2r^5 + r^2 - 8r$

$f'(r) = -10r^4 + 2r - 8$

97.

$$f(x)=\left(\frac{5x-4}{3}\right)^2=\frac{(5x-4)(5x-4)}{9}=\frac{25x^2-20x-20x+16}{9}$$

$$=\frac{25}{9}x^2-\frac{40}{9}x+\frac{16}{9}$$

$$f'(x)=\frac{25}{9}\cdot 2x-\frac{40}{9}=\frac{50}{9}x-\frac{40}{9}$$

98. $k(r)=-3r^4+\frac{1}{3}$

$k'(r)=-12r^3$

$k(2)=-3\cdot 2^4+\frac{1}{3}=-47\frac{2}{3}$

$k'(2)=-12\cdot 2^3=-96$

99. $m(t)=2t^6-4t^2-5$

$m'(t)=12t^5-8t$

$m(-1)=2\cdot(-1)^6-4\cdot(-1)^2-5=-7$

$m'(-1)=12\cdot(-1)^5-8\cdot(-1)=-4$

100. $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 6$

$P'(x) = 6x^2 + 6x - 5$

$P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 6 = 12$

$P'(-2) = 6 \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2) - 5 = 7$

101. $P(x) = x^6 + x^3$

$P'(x) = 6x^5 + 3x^2$

$$\begin{aligned}
P'\left(-\frac{1}{2}\right) &= 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= -6 \cdot \frac{1}{32} + 3 \cdot \frac{1}{4} \\
&= -\frac{3}{16} + {}^{4)}\frac{3}{4} \\
&= -\frac{3}{16} + \frac{12}{16} \\
&= \frac{9}{16}
\end{aligned}$$

102. a) $h'(x) = -0{,}4 \cdot 5 \cdot x^{5-1} - 1 = -2x^4 - 1$

b) $n'(r) = 20 \cdot r^{20-1} - 3{,}4 \cdot 3r^{3-1} = 20r^{19} - 10{,}2r^2$

c) $f'(t) = 15 \cdot t^{15-1} + 8 \cdot 4t^{4-1} - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot t^{3-1} = 15t^{14} + 32t^3 - t^2$

d) $f'(x) = -\frac{1}{6}$

103. a) $D(2x^2 + 10x) = 4x + 10$

b) $D(2x^2 + 2x + 2x + 2) = D(2x^2 + 4x + 2) = 4x + 4$

c) $D[(2x - 1)(2x - 1)] = D(4x^2 - 2x - 2x + 1) = D(4x^2 - 4x + 1)$
$= 8x - 4$

d) $D(3x^2 - 2x^3 + 10x^2) = D(-2x^3 + 13x^2) = -6x^2 + 26x$

104. a) $D\left(\frac{3}{15}x^2 - \frac{5}{15}x\right) = D\left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{3}x\right) = \frac{2}{5}x - \frac{1}{3}$

b) $D\left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 2\right) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{6}{4}x = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$

105. a) $f(x) = -3\left(-x^2 + 1\right) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 6x$

$f(4) = 3 \cdot 4^2 - 3 = 45$

$f'(4) = 6 \cdot 4 = 24$

b) $f(x) = (2x - 3)(-x + 1) = -2x^2 + 2x + 3x - 3 = -2x^2 + 5x - 3$

$f'(x) = -4x + 5$

$f(4) = -2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 = -15$

$f'(4) = -4 \cdot 4 + 5 = -11$

2.3 Derivaatan arvo

106. a) Derivoidaan funktio:

$$f'(x) = -2x + 3$$

$$f'(3) = -2 \cdot (-3) + 3 = 9$$

b) Ratkaistaan yhtälö:

$$-2x + 3 = -3$$

$$-2x = -6 \quad |:(-2)$$

$$x = 3$$

107. a) $g(5) = 3 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 = 55$

b) Ratkaistaan yhtälö:

$$3x^2 - 4x = 20$$

$$3x^2 - 4x - 20 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-20)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{6}$$

$$x = \frac{4 \pm 16}{6}$$

$$x = \frac{20}{6} = 3\frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-12}{6} = -2$$

108. $g(t)=t\left(t^2-9t+32\right)=t^3-9t^2+32t$

$g'(t)=3t^2-18t+32$

$g'(t)=5$ kun

$$3t^2-18t+32=5$$
$$3t^2-18t+27=0$$
$$t=\frac{-(-18)\pm\sqrt{(-18)^2-4\cdot3\cdot27}}{2\cdot3}$$
$$t=\frac{18\pm\sqrt{0}}{6}=\frac{18}{6}$$
$$t=3$$

109. $g(x)=(x+2)(x+2)=x^2+2x+2x+4=x^2+4x+4$

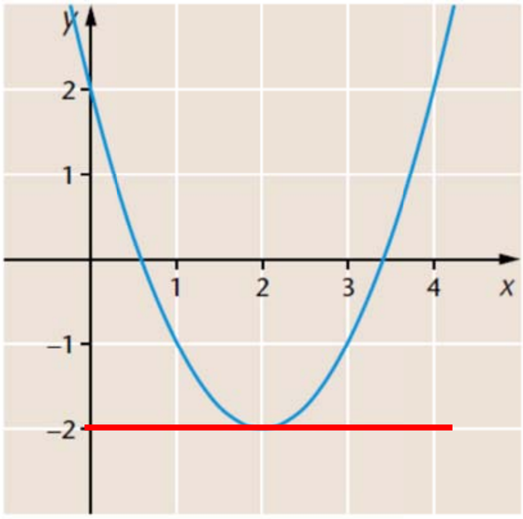
$g'(x)=2x+4$

$g'(x)=4$ kun

$$2x+4=4$$
$$2x=0 \qquad |:2$$
$$x=0$$

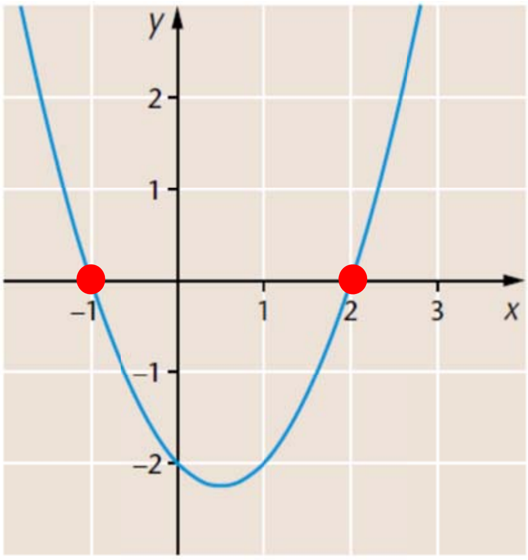
110. a) Derivaatan nollakohtaan voidaan piirtää vaakasuora tangentti.

Derivaatan nollakohta $x \approx 2$.



b) Derivaatan nollakohdissa derivaattafunktion kuvaaja leikkaa x-akselin.

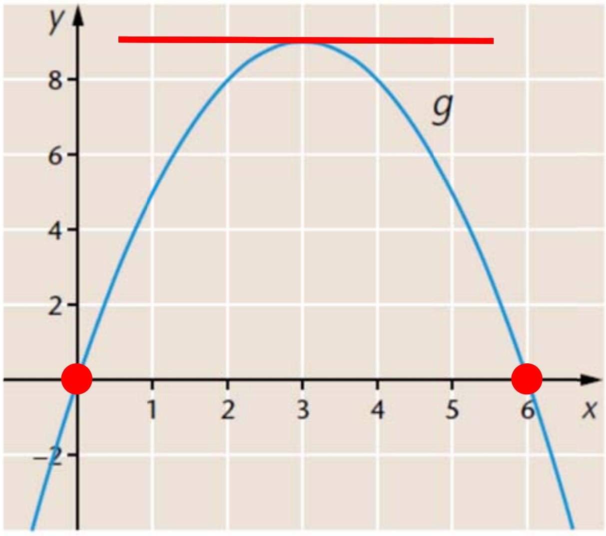
Derivaatan nollakohdat
$x \approx -1$ ja $x \approx 2$.



111. Funktion nollakohdissa kuvaaja leikkaa x-akselin.

Funktion nollakohdat:
$x \approx 0$ ja $x \approx 6$

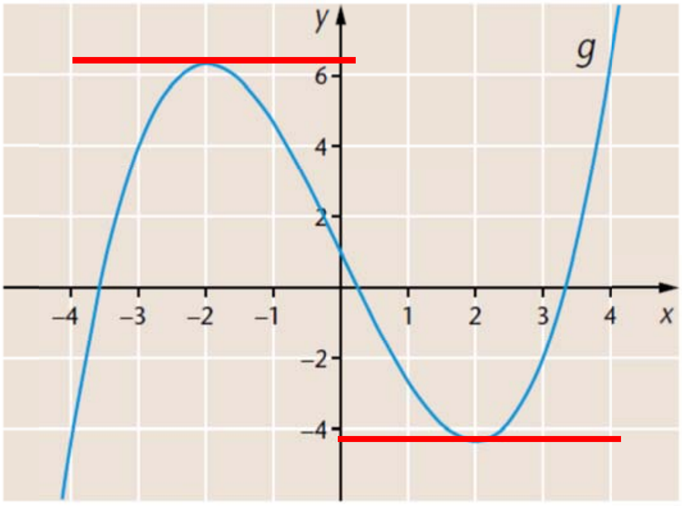
Derivaatan nollakohdassa funktion kuvaajalle voidaan piirtää vaakasuora tangentti.



Derivaatan nollakohta: $x \approx 3$.

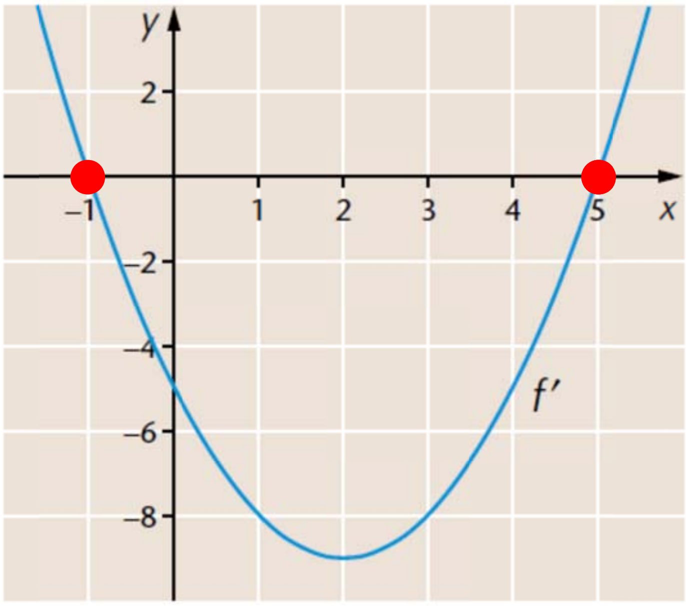
112. Derivaatan nollakohdissa funktion kuvaajalle voidaan piirtää vaakasuora tangentti.

Derivaatan nollakohdat:
$x \approx -2$ ja $x \approx 2$



113. Derivaatan nollakohdissa derivaattafunktion kuvaaja leikkaa x-akselin.

Derivaatan nollakohdat:
$x \approx -1$ ja $x \approx 5$.



114. $P(x) = x(x+1) = x^2 + x$

$P'(x) = 2x+1$

$P'(x) = 2$ kun

$$2x+1=2$$
$$2x = 1 \quad \Big| :2$$
$$x = \frac{1}{2}$$

115. Funktion $f(x) = x^3 - 7x$ tangentin kulmakerroin saa arvon 5 siinä pisteessä, missä derivaatta $f'(x) = 5$.

$f'(x) = 3x^2 - 7$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 7 &= 5 \\ 3x^2 &= 12 \quad |:3 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Vastaavat y-koordinaatit saadaan laskemalla funktion *f* arvot kohdissa *x* = 2 ja *x* = -2.

$$f(2) = 2^3 - 7 \cdot 2 = -6$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 7 \cdot (-2) = 6$$

Kysytyt pisteet ovat (2, -6) ja (-2, 6).

116. a) $f(x) = 3x^2 + 6x$

$f'(x) = 6x + 6$

$f'(x) = 0$ kun

$$\begin{aligned} 6x + 6 &= 0 \\ 6x &= -6 \quad |:6 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

b) $f(x) = -2x^2 + 7$
$f'(x) = -4x$

$f'(x) = 0$ kun

$$-4x = 0 \quad \Big|:(-4)$$
$$x = 0$$

117. a) $f(x) = -8x^2 + 12x$
$f'(x) = -16x + 12$

$f'(x) = 0$ kun

$$-16x + 12 = 0$$
$$-16x = -12 \quad \Big|:(-16)$$
$$x = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 80x + 5$
$f'(x) = x^2 + 2x - 80$

$f'(x) = 0$ kun

$$x^2 + 2x - 80 = 0$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-80)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{324}}{2}$$
$$x = \frac{-2 \pm 18}{2}$$
$$x = 8 \quad \text{tai} \quad x = -10$$

118. a) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 - 48x + 1$

$$f'(x) = 6x^2 - 42x - 48$$

$f'(x) = 0$ kun

$$6x^2 - 42x - 48 = 0$$

$$x = \frac{-(-42) \pm \sqrt{(-42)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-48)}}{2 \cdot 6}$$

$$x = \frac{42 \pm \sqrt{2916}}{12}$$

$$x = \frac{42 \pm 54}{12}$$

$$x = 8 \quad \text{tai} \quad x = -1$$

b) $f(x) = -2x^3 - 9x^2 + 60x - 8$

$$f'(x) = -6x^2 - 18x + 60$$

$f'(x) = 0$ kun

$$-6x^2 - 18x + 60 = 0$$

$$x = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 60}}{2 \cdot (-6)}$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{1764}}{-12}$$

$$x = \frac{18 \pm 42}{-12}$$

$$x = -5 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

119. a) $f(x)=(x+1)(x-9)=x^2-9x+x-9=x^2-8x-9$

$f'(x)=2x-8$

$f'(x)=0$ kun

$$2x-8=0$$

$$2x=8 \qquad \Big| :2$$

$$x=4$$

b) $f(x)=x^2(4x-21)-24x=4x^3-21x^2-24x$

$f'(x)=12x^2-42x-24$

$f'(x)=0$ kun

$$12x^2-42x-24=0$$

$$x=\frac{-(-42)\pm\sqrt{(-42)^2-4\cdot12\cdot(-24)}}{2\cdot12}$$

$$x=\frac{42\pm\sqrt{2916}}{24}$$

$$x=\frac{42\pm54}{24}$$

$$x=4 \quad \text{tai} \quad x=-\frac{1}{2}$$

120. $P(x) = x^3 - x^2 - 21x + 1$

$P'(x) = 3x^2 - 2x - 21$

$P'(x) = 0$ kun

$$3x^2 - 2x - 21 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-21)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{256}}{6}$$

$$x = \frac{2 \pm 16}{6}$$

$$x = 3 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}$$

121. a) $f(x) = 5x^2 + 8x - 1$

$f'(x) = 10x + 8$

$f'(x) = -2$ kun

$$10x + 8 = -2$$

$$10x = -10 \quad \Big| :10$$

$$x = -1$$

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x$

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$

$f'(x) = -2$ kun

$$3x^2 - 4x - 1 = -2$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6}$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{6}$$

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{3}$$

122. Paraabelin huippupisteen x-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

$f'(x) = 2x - 4$

Ratkaistaan derivaatan nollakohta:

$$2x - 4 = 0$$

$$2x = 4 \quad |:2$$

$$x = 2$$

Huipun y-koordinaatti: $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2$

Huippupiste on (2, 2).

123. Paraabelin huippupisteen *x*-koordinaatti on derivaatan nollakohta.

$f(x) = 8x^2 - 48x + 3$

$f'(x) = 16x - 48$

$f'(x) = 0$ kun

$$16x - 48 = 0$$

$$16x = 48 \quad |:16$$

$$x = 3$$

a) Huipun *x*-koordinaatti on 3.

b) Huipun *y*-koordinaatti $f(3) = 8 \cdot 3^2 - 48 \cdot 3 + 3 = -69$

124. Derivoidaan funktio. Vakiota *k* käsitellään derivoinnissa lukuna.

$f'(x) = k \cdot 2x + 5 = 2kx + 5$

Koska $f'(-1) = 4$, saadaan yhtälö:

$$2k \cdot (-1) + 5 = 4$$

$$-2k = -1 \quad |:(-2)$$

$$k = \frac{1}{2}$$

125. Derivoidaan funktio. Vakiota *a* käsitellään derivoinnissa lukuna.

$$g'(x) = -6x^2 + a \cdot 2x - 2a = -6x^2 + 2ax - 2a$$

Funktiolla on derivaatan nollakohta *x* = -2, joten saadaan yhtälö:

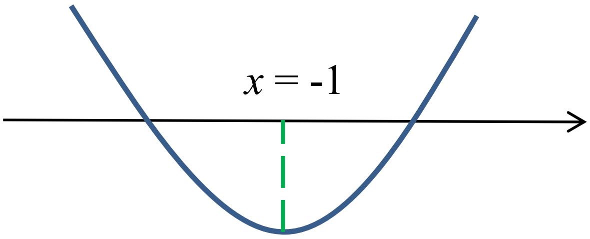
$$\begin{aligned} g'(-2) &= 0 \\ -6 \cdot (-2)^2 + 2a \cdot (-2) - 2a &= 0 \\ -24 - 6a &= 0 \\ -6a &= 24 \qquad |:(-6) \\ a &= -4 \end{aligned}$$

126. $y = 0{,}5x^2 + x - 1{,}2$

Käyrä on ylöspäin aukeava paraabeli, joten ojan suurin syvyys saadaan huipun *y*-koordinaatista.

Huippu saadaan selville derivaatan avulla.

$y' = 1{,}0x + 1{,}0$



$y' = 0$ kun

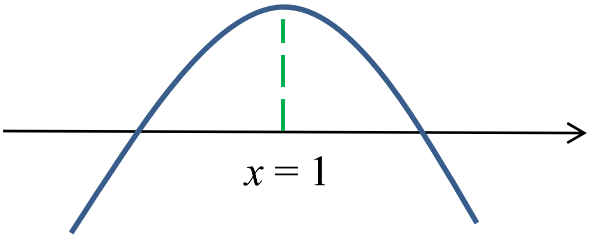
$$\begin{aligned} 1{,}0x + 1{,}0 &= 0 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

kun $x = -1$, $\qquad y = 0{,}5 \cdot (-1)^2 - 1 - 1{,}2 = -1{,}7$

Ojan suurin syvyys on 1,7 m.

127. Funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten maakellarin suurin korkeus saadaan huipun y-koordinaatista.

Derivoidaan funktio:
$h'(x) = -0{,}50x + 0{,}50$



Derivaatan nollakohta:
$h'(x) = 0$ kun

$$\begin{aligned} -0{,}50x + 0{,}50 &= 0 \\ -0{,}50x &= -0{,}50 \quad \Big| :(-0{,}50) \\ x &= 1{,}0 \end{aligned}$$

Huippukohdassa $x = 1{,}0$.

Huipun y-koordinaatti saadaan funktion arvosta:
$h(1{,}0) = -0{,}25 \cdot 1{,}0^2 + 0{,}50 \cdot 1{,}0 + 2{,}1 = 2{,}35$

Kellarin suurin korkeus on 2,35 m.

128. Paraabelin huippu löytyy derivaatan nollakohdasta.
Derivoidaan funktio (käsitellään vakiota *a* derivoinnissa lukuna).

$$g'(x) = 8x + 32$$

Lasketaan derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} 8x + 32 &= 0 \\ 8x &= -32 \quad |:8 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Huippu sijaitsee suoralla $y = -1$, joten huipun y-koordinaatti on -1.

Saadaan yhtälö:

$$\begin{aligned} g(-4) &= -1 \\ 4 \cdot (-4)^2 + 32 \cdot (-4) + a &= -1 \\ a &= 63 \end{aligned}$$

129. a) $f'(x) = 3x^2 - 2x$

$f'(-4) = 3\cdot(-4)^2 - 2\cdot(-4) = 56$

b) Ratkaistaan yhtälö:

$$3x^2 - 2x = 5$$

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 3\cdot(-5)}}{2\cdot 3}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{2 \pm 8}{6}$$

$$x = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3} \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{-6}{6} = -1$$

130. $g(x) = x(x-4) = x^2 - 4x$

$g'(x) = 2x - 4$

a) $g'(x) = 8$ kun

$$2x - 4 = 8$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

b) $g'(x) = -9$ kun

$$2x - 4 = -9$$

$$2x = -5 \quad |:2$$

$$x = -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}$$

131. a) $g'(x) = -6x + 9$

$$-6x + 9 = 0$$

$$-6x = -9 \quad |:(-6)$$

$$x = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

b) $g'(x) = 3x^2 - 11x - 4$

$$3x^2 - 11x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{11 \pm 13}{6}$$

$$x = \frac{24}{6} = 4 \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

132. Ylöspäin aukeavan paraabelin $y = x^2 - 6x + 14$ huippupisteessä derivaatta $y' = 0$.

$$y' = 2x - 6$$

$y' = 0$ kun

$$2x - 6 = 0$$

$$2x = 6 \quad |:2$$

$$x = 3$$

Kun $x = 3$, $\quad y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 14 = 5$.

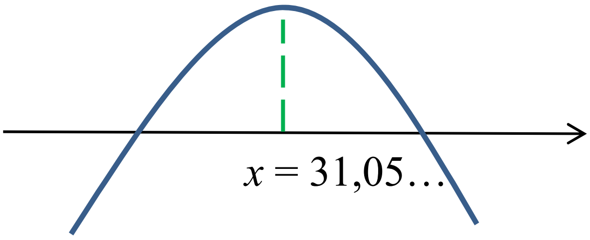
Huippupiste on (3, 5).

133. Paraabeli $y = -0{,}0187x^2 + 1{,}1613x$ aukeaa alaspäin, joten kaaren korkein kohta saadaan huipun y-koordinaatista.

$y' = -0{,}0374x + 1{,}1613$

$y' = 0$ kun

$$\begin{aligned} -0{,}0374x + 1{,}1613 &= 0 \\ -0{,}0374x &= -1{,}1613 \quad \big| :(-0{,}0374) \\ x &= 31{,}050... \end{aligned}$$



Kun $x = 31{,}05...$,

$$\begin{aligned} y &= -0{,}0187 \cdot 31{,}05...^2 + 1{,}1613 \cdot 31{,}05... \\ &= 18{,}029... \\ &\approx 18{,}0 \ \text{(m)} \end{aligned}$$

2.4 Derivaatan merkki

134. a) Derivaatta on positiivinen eli $g'(x) > 0$, kun $x > -1$
Derivaatta on negatiivinen eli $g'(x) < 0$, kun $x < -1$

		-1	
g'	-		+

b) Derivaatta on positiivinen eli $g'(x) > 0$, kun $x < -1$ tai $x > 3$
Derivaatta on negatiivinen eli $g'(x) < 0$, kun $-1 < x < 3$

		-1		3	
g'	+		-		+

135. Merkkikaavio:

		-1		0		3	
f'	-		+		-		+

$f'(x) < 0$, kun $x < -1$ tai $0 < x < 3$

136. a) Merkkikaavio:

		2		4	
f'	+		-		+

Derivaatta positiivinen, kun $x < 2$ tai $x > 4$.

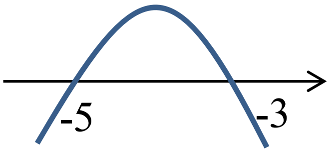
b) Merkkikaavio:

		1	
f'	+		+

Derivaatta positiivinen, kun $x \neq 1$.

137. Merkkikaavio:

		-5		-3	
f'	-		+		-



a) Derivaatta positiivinen, kun $-5 < x < -3$.

b) Derivaatta negatiivinen, kun $x < -5$ tai $x > -3$.

138. a) $g(x) = 4x^2 - 16x$ $\qquad$ $g'(x) = 8x - 16$

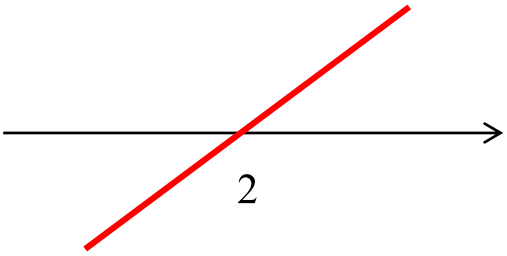
Derivaatan nollakohta:

$$8x - 16 = 0$$

$$8x = 16 \quad |:8$$

$$x = 2$$

Derivaatan kuvaaja:



$g'(x) < 0$ kun $x < 2$

Huom! Tehtävän voi myös ratkaista epäyhtälön avulla:

$g'(x) < 0$ kun

$$8x - 16 < 0$$

$$8x < 16 \quad |:8$$

$$x < 2$$

b) $g(x) = (3-x)(2x-5) = 6x - 15 - 2x^2 + 5x = -2x^2 + 11x - 15$

$g'(x) = -4x + 11$

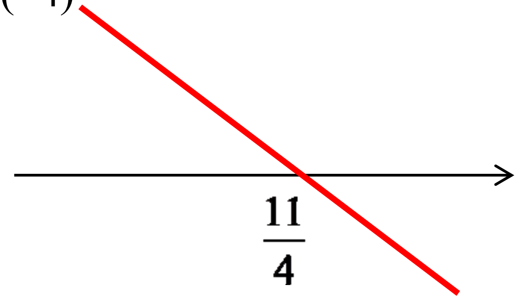
Derivaatan nollakohta:

$$-4x + 11 = 0$$

$$-4x < 0 - 11 \quad \Big| :(-4)$$

$$x = \frac{11}{4}$$

Derivaatan kuvaaja:



$g'(x) < 0$ kun $x > \dfrac{11}{4}$

Huom! Tehtävän voi myös ratkaista epäyhtälön avulla:

$g'(x) < 0$ kun

$$-4x + 11 < 0$$

$$-4x < -11 \Big| :(-4)$$

$$x > \frac{11}{4}$$

139. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ $\qquad f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) > 0$ kun $3x^2 - 6x - 9 > 0$

Derivaatan f' nollakohdat:

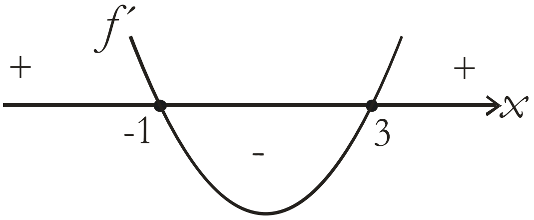
$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-9)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{6 \pm 12}{6}$$

$$x = 3 \quad \text{tai} \quad x = -1$$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



$f'(x) > 0$ kun $x < -1$ tai $x > 3$

140. Derivaatta: $f'(x) = 6x^2 + 30x - 36$

Derivaatan nollakohdat:

$$6x^2 + 30x - 36 = 0$$

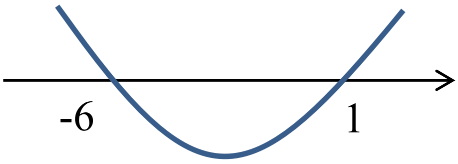
$$x = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-36)}}{2 \cdot 6}$$

$$x = \frac{-30 \pm \sqrt{1764}}{12}$$

$$x = \frac{-30 \pm 42}{12}$$

$$x = \frac{12}{12} = 1 \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{-72}{12} = -6$$

Derivaatan kuvaaja:



Derivaatta positiivinen, kun $x < -6$ tai $x > 1$

141. a) Derivaatta: $g'(x) = -8x - 24$

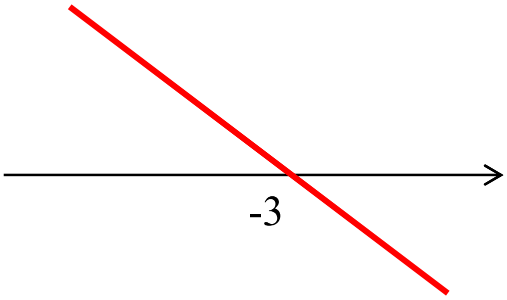
Derivaatan nollakohta:

$$-8x - 24 = 0$$

$$-8x = 24 \quad |:(-8)$$

$$x = -3$$

Derivaatan kuvaaja:



$g'(x) \leq 0$, kun $x \geq -3$

b) Derivaatta: $g'(x) = -3x^2 + 18x$

Derivaatan nollakohdat:

$$-3x^2 + 18x = 0$$

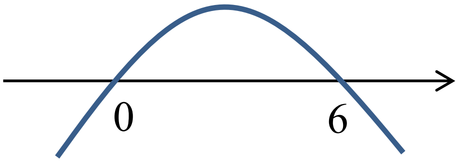
$$x(-3x+18) = 0$$

$$x = 0 \qquad \text{tai} \qquad -3x + 18 = 0$$

$$-3x = -18 \quad |:(-3)$$

$$x = 6$$

Derivaatan kuvaaja:



$g'(x) \leq 0$, kun $x \leq 0$ tai $x \geq 6$

142. $f(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t$

$f'(t) = -t^2 + 4$

Derivaatan nollakohdat:

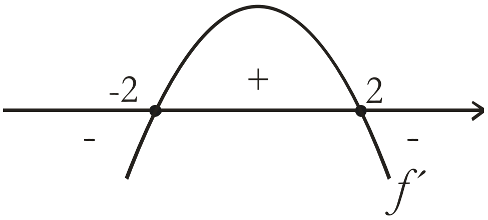
$$-t^2 + 4 = 0$$

$$-t^2 = -4 \quad |:(-1)$$

$$t^2 = 4$$

$$t = \pm 2$$

Derivaatan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli:



$f'(t) > 0$ kun $-2 < t < 2$

143. $g(x) = 4x^3 + x^2 - 4x - 8$

$g'(x) = 12x^2 + 2x - 4$

Derivaatan nollakohdat:

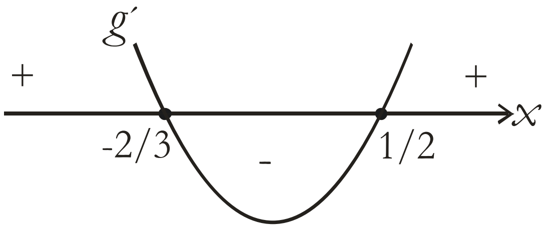
$$12x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-4)}}{2 \cdot 12}$$

$$x = \frac{-2 \pm 14}{24}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{2}{3}$$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



$g'(x) < 0$ kun $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$

144. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}$

Ehto 1:

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{5} &> 0 \\ \frac{2}{3}x &> \frac{1}{5} \qquad \Big| : \frac{2}{3} \\ x &> \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Ehto 2:

$$\begin{aligned} f'(x) &< 1 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{5} &< 1 \\ \frac{2}{3}x &< \frac{6}{5} \qquad \Big| : \frac{2}{3} \\ x &< \frac{9}{5} \end{aligned}$$

Kun ehdot 1 ja 2 yhdistetään, saadaan $\frac{3}{10} < x < \frac{9}{5}$

145. Derivoidaan funktio:

$$g'(x) = -3x^2 + 36x - 108$$

Derivaatan nollakohdat:

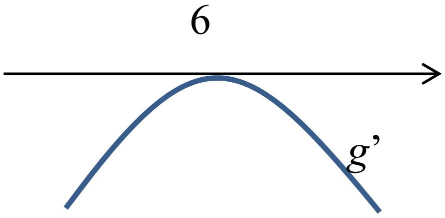
$$x = \frac{-36 \pm \sqrt{36^2 - 4\cdot(-3)\cdot(-108)}}{2\cdot(-3)}$$

$$x = \frac{-36 \pm \sqrt{0}}{-6}$$

$$x = 6$$

Derivaatalla yksi nollakohta eli derivaatan kuvaaja sivuaa x-akselia kohdassa $x = 6$.

Derivaatan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Derivaatta ei siis saa positiivisia arvoja millään muuttujaan x arvoilla.

146. $f(x) = x(x^2 + 3) = x^3 + 3x$

Derivoidaan funktio:

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

Derivaatan nollakohdat:

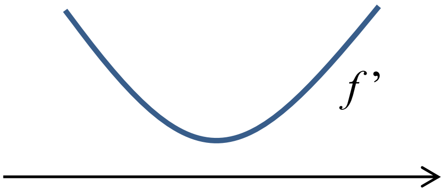
$$3x^2 + 3 = 0$$

$$3x^2 = -3 \quad |:3$$

$$x^2 = -1$$

Ei ratkaisua

Derivaatalla ei ole nollakohtia. derivaatan kuvaaja ylöspäin aukeava paraabeli, joten derivaatta saa aina vain positiivisia arvoja eli $f'(x) > 0$ kaikilla muuttujan x arvoilla.



147. Derivoidaan funktio. Käsitellään vakiota a derivoinnissa tavallisena lukuna.

$$g'(x) = a \cdot 2x + 5 = 2ax + 5$$

Derivaatalla nollakohta x = -2, joten saadaan yhtälö:

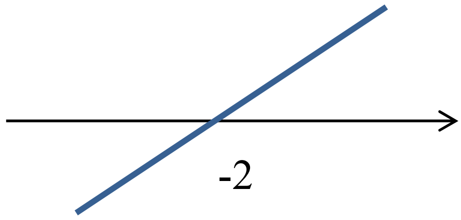
$$2a \cdot (-2) + 5 = 0$$

$$-4a = -5 \quad |:(-4)$$

$$a = \frac{5}{4}$$

Derivaattafunktio on siis muotoa $g'(x)=2\cdot\frac{5}{4}x+5=\frac{5}{2}x+5$

Derivaatan kuvaaja nouseva suora, jonka nollakohta x = -2, joten $g'(x) > 0$, kun $x > -2$.



148. $h(x)=(x+1)(x-3)=x^2-3x+x-3=x^2-2x-3$

$h'(x)=2x-2$

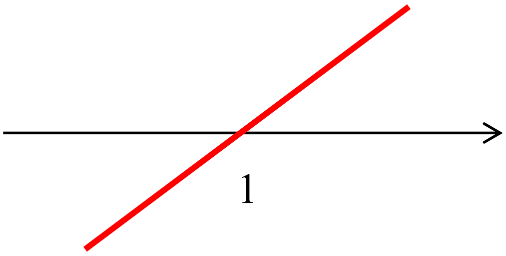
a) $h'(x)=5$ kun

$$2x-2=5$$
$$2x=7 \quad \Big| :2$$
$$x=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$$

b) Derivaatan nollakohta:

$$2x-2=0$$
$$2x=2 \quad \Big| :2$$
$$x=1$$

Derivaatan kuvaaja:



$h'(x)<0$ kun $x<1$

Huom! Tehtävän voi myös ratkaista epäyhtälön avulla.

149. $h(x) = (x + 1)(x - 3) = x^2 - 3x + x - 3 = x^2 -2x - 3$

Derivoidaan funktio: $h'(x) = 2x - 2$

a) Ratkaistaan yhtälö:

$$2x - 2 = 5$$

$$2x = 7 \quad |:2$$

$$x = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$$

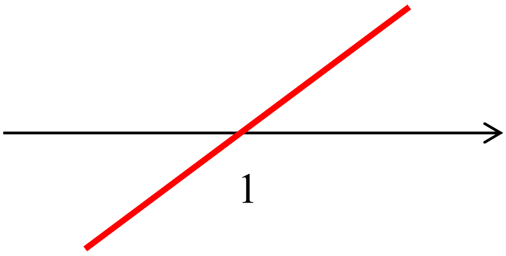
b) Derivaatan nollakohdat:

$$2x - 2 = 2$$

$$2x = 2 \quad |:2$$

$$x = 1$$

Derivaatan kuvaaja nouseva suora, joten derivaatta on negatiivinen, kun $x < 1$



150. a) $f'(x) = 8x + 6$

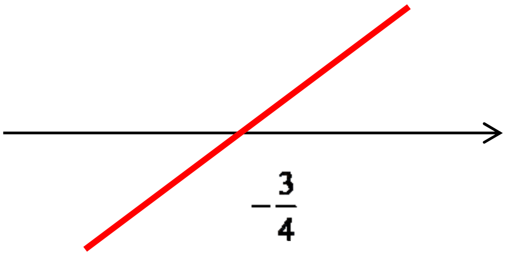
Derivaatan nollakohta:

$$8x + 6 = 0$$

$$8x = -6 \quad |:8$$

$$x = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

Derivaatan kuvaaja nouseva suora, joten $f'(x) < 0$, kun $x < -\frac{3}{4}$



b) $f'(x) = 2x - 18x^2$

Derivaatan nollakohdat:

$$2x - 18x^2 = 0$$

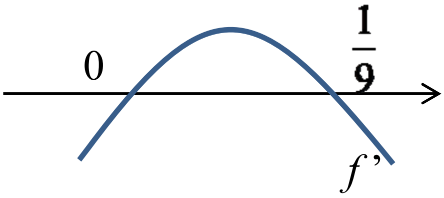
$$x(2 - 18x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2 - 18x = 0$$

$$-18x = -2 \quad |:(-18)$$

$$x = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

Derivaatan kuvaaja alaspäin aukeava paraabeli, joten $f'(x) < 0$, kun $x < 0$ tai $x > \frac{1}{9}$



151. $P(x) = 9 + 6x - x^3$

$P'(x) = 6 - 3x^2$

Derivaatan nollakohdat:

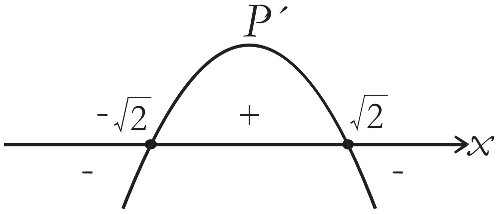
$$6 - 3x^2 = 0$$

$$-3x^2 = -6 \,|:(-3)$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Derivaatan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



$$P'(x) > 0 \text{ kun } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

152. Funktion derivaatta:

$$f'(x) = -x^2 + 4x - 7$$

Derivaatan nollakohdat:

$$-x^2 + 4x - 7 = 0$$

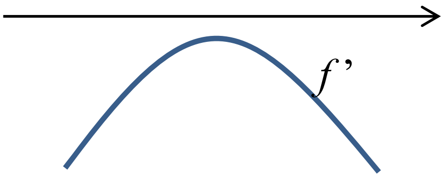
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-12}}{-2}$$

Ei ratkaisua

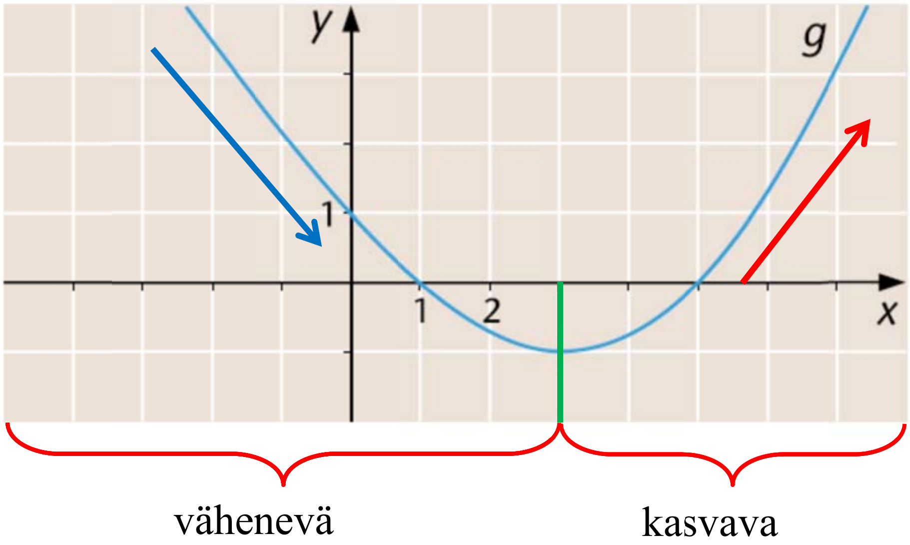
Derivaatalla ei ole nollakohtia.

Derivaatan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten derivaatta saa negatiivisia arvoja kaikilla muuttujan *x* arvoilla.



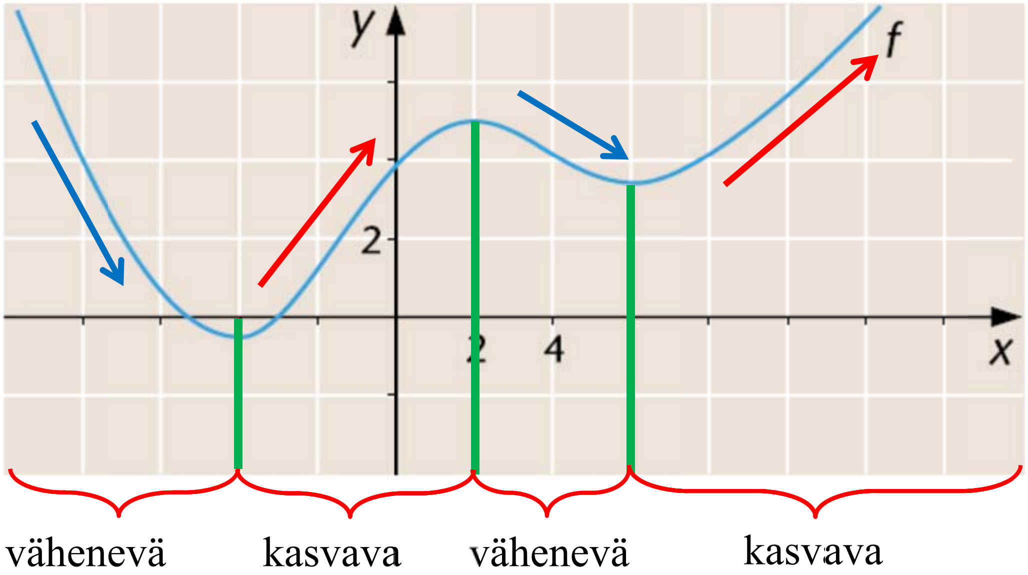
3.1 Funktion kulku

153. Funktio on kasvava, kun $x \geq 3$ ja vähenevä, kun $x \leq 3$.



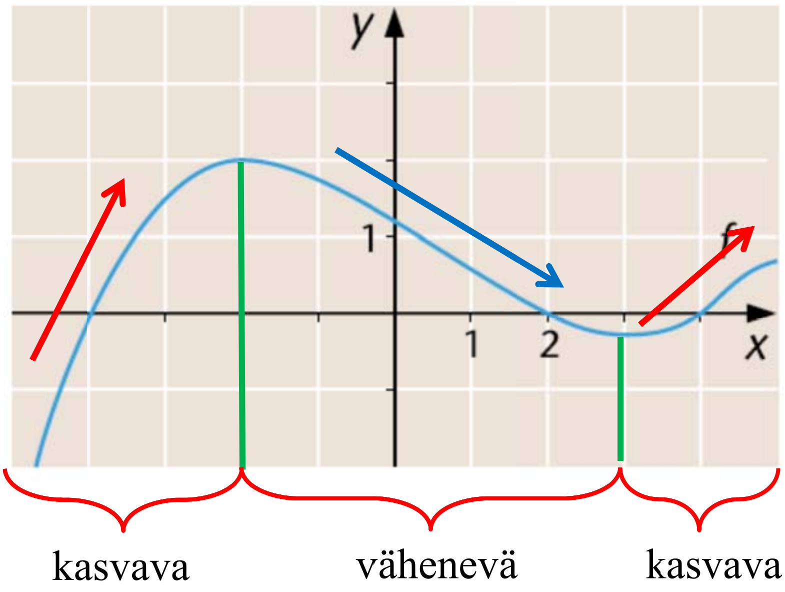
154. a) $f'(x) \leq 0$, kun funktio *f* on vähenevä eli kun $x \in]-\infty, -4]$ tai $x \in [2, 6]$.

b) $f'(x) > 0$, kun funktio *f* on kasvava eli kun $x \in]-4, 2[$ tai $x \in]6, \infty[$

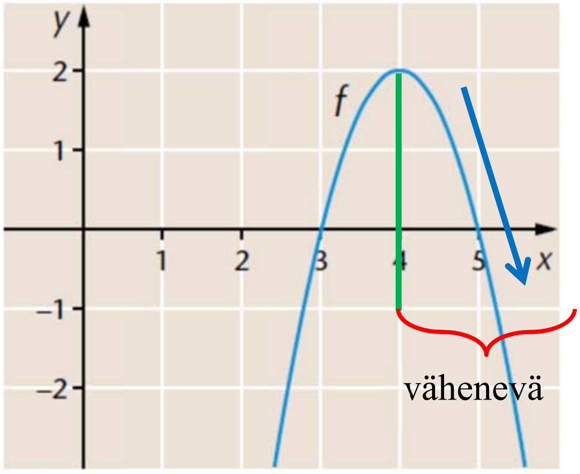


155. a) Funktio on kasvava, kun $-5 \leq x \leq -2$ tai $3 \leq x \leq 5$

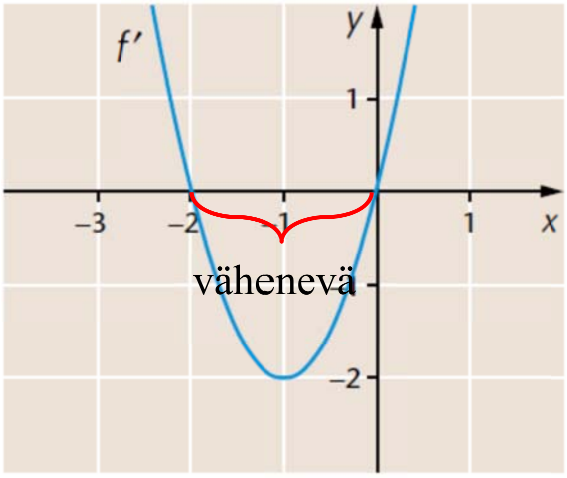
b) Funktio on vähenevä, kun $-2 \leq x \leq 3$



156. a) Funktio on vähenevä, kun $x \geq 4$

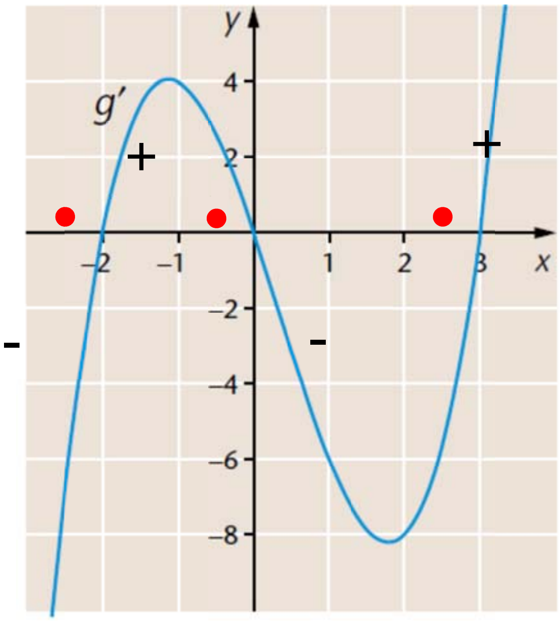


b) Funktio on vähenevä, kun derivaatta on negatiivinen eli kun $-2 \leq x \leq 0$.



157. Derivaatan kuvaaja leikkaa nollakohdissa x-akselin, joten nollakohdat ovat $x = -2$, $x = 0$ ja $x = 3$.

		-2		0		3	
g'	-		+		-		+
g	↘		↗		↘		↗



Funktio g on kasvava, kun $-2 \leq x \leq 0$ tai $x \geq 3$

158. a) Funktio g on vähenevä, kun $g'(x) \leq 0$.

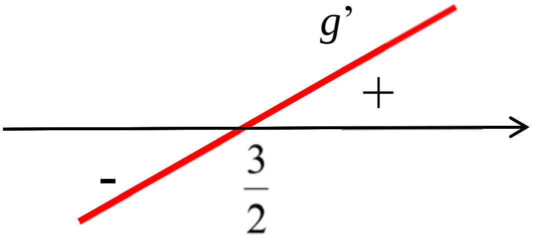
$g'(x) = 2x - 3$

Derivaatan nollakohdat:

$$2x - 3 = 0$$

$$2x = 3 \quad |:2$$

$$x = \frac{3}{2}$$



Funktio on vähenevä, kun $x \leq \frac{3}{2}$.

Huom! Tehtävän voi ratkaista myös epäyhtälön avulla:

$g'(x) \leq 0$, kun

$$2x - 3 \leq 0$$

$$2x \leq 3 \quad |:2$$

$$x \leq \frac{3}{2}$$

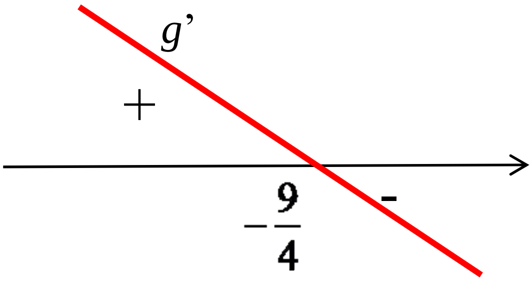
b) $g'(x) = -\frac{4}{3}x - 3$

Derivaatan nollakohdat:

$$-\frac{4}{3}x - 3 = 0$$

$$-\frac{4}{3}x = 3 \quad \Big| :\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$x = -\frac{9}{4}$$



Funktio on vähenevä, kun $g'(x) \leq 0$ eli, kun $x \geq -\frac{9}{4}$.

Huom! Tehtävän voi ratkaista myös epäyhtälön avulla:

$g'(x) \leq 0$ kun

$$-\frac{4}{3}x - 3 \leq 0$$

$$-\frac{4}{3}x \leq 3 \quad \Big| :\left(-\frac{4}{3}\right)$$

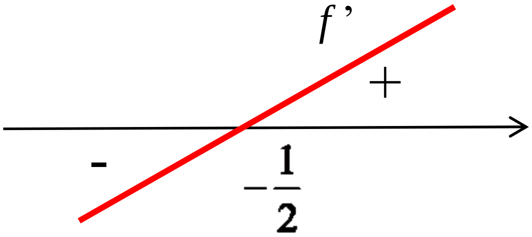
$$x \geq -\frac{9}{4}$$

159. a) f on kasvava, kun $f'(x) \geq 0$.

$f'(x) = 2x + 1$

Derivaatan nollakohdat:

$$2x + 1 = 0$$
$$2x = -1 \quad \Big| :2$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

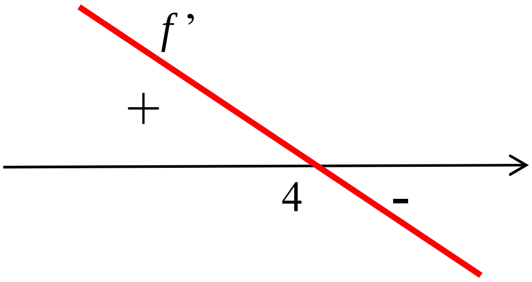


Funktio on kasvava, kun $x \geq -\frac{1}{2}$

Huom! Tehtävän voi ratkaista myös epäyhtälön avulla:

$$2x + 1 \geq 0$$
$$2x \geq -1 \quad \Big| :2$$
$$x \geq -\frac{1}{2}$$

b) $f'(x) = -\frac{1}{2}x + 2$



Derivaatan nollakohdat:

$$-\frac{1}{2}x + 2 = 0$$
$$-\frac{1}{2}x = -2 \quad \Big| :\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$x = 4$$

Funktio on kasvava, kun f '$(x) \geq 0$ eli, kun $x \leq 4$.

Huom! Tehtävän voi ratkaista myös epäyhtälön avulla.

160. $f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$

Derivaatan nollakohdat:

$$3x^2 + 12x + 9 = 0$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-12 \pm 6}{5}$$

$$x = -1 \quad \text{tai} \quad x = -3$$

Derivaatan merkki:

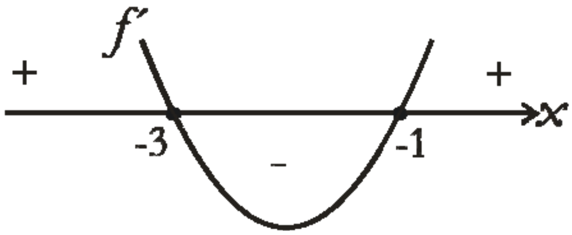
- $f'(-4) = 3 \cdot (-4)^2 + 12 \cdot (-4) + 9 = 9 > 0$
- $f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) + 9 = -3 < 0$
- $f'(-4) = 3 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 + 9 = 9 > 0$

Merkkikaavio:

		-3		-1	
f'	+		−		+
f	↗		↘		↗

f on kasvava , kun $f'(x) \geq 0$ eli kun $x \leq -3$ tai $x \geq -1$

Huom! Derivaatan merkin voi perustella myös seuraavasti: Derivaatan f' kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.
$f'(x) \geq 0$ kun
$x \leq -3$ tai $x \geq -1$.



161. Tarkastellaan g:n kulkua derivaatan g' avulla.

$g'(x) = 12x^2 - 12x - 504$

Derivaatan nollakohdat:

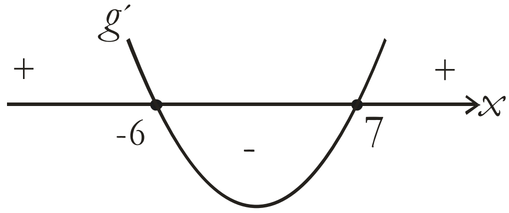
$$12x^2 - 12x - 504 = 0$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-504)}}{2 \cdot 12}$$

$$x = \frac{12 \pm 156}{24}$$

$$x = 7 \quad \text{tai} \quad x = -6$$

Derivaatan g' kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Merkkikaavio:

	-6	7	
g'	+	−	+
g	↗	↘	↗

g on kasvava, kun $x \leq -6$ tai $x \geq 7$

g on vähenevä, kun $-6 \leq x \leq 7$

162. a) $g'(x) = -3x^2 - 27x$

Derivaatan nollakohdat:

$$-3x^2 - 27x = 0$$

$$x(-3x - 27) = 0$$

$$x = 0 \qquad \text{tai} \qquad -3x - 27 = 0$$

$$-3x = 27 \quad |:(-3)$$

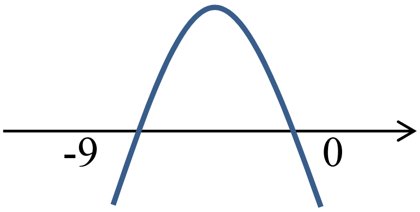
$$x = -9$$

Merkki- ja kulkukaavio:

Tapa 1 testipisteet

- $g\,'(-10) = -30$
- $g'(-1) = 24$
- $g'(1) = -30$

Tapa 2 derivaatan kuvaaja



		-9		0	
g'	-		+		-
g	↘		↗		↘

g on kasvava, kun $-9 \leq x \leq 0$

g on vähenevä, kun $x \leq -9$ tai $x \geq 0$.

b) $g'(x) = -3x^2 - 12x - 13$

Derivaatan nollakohdat:

$$-3x^2 - 12x - 13 = 0$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-13)}}{2 \cdot (-3)}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{-12}}{-6}$$

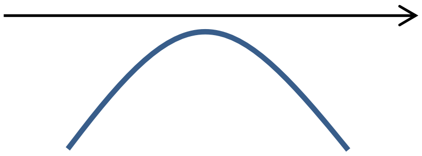
Ei ratkaisua
Derivaatalla ei ole nollakohtia

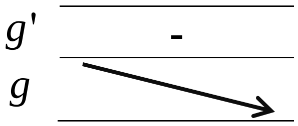
Merkki- ja kulkukaavio:

Tapa 1 testipisteet

- g ’(0) = -13

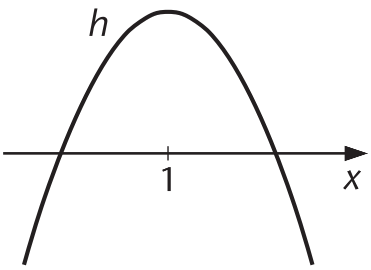
Tapa 2 derivaatan kuvaaja

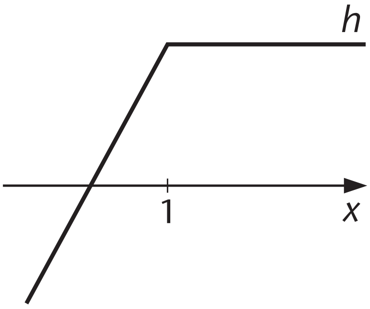




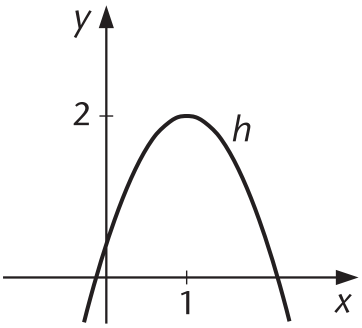
g on vähenevä kaikilla muuttujan x arvoilla

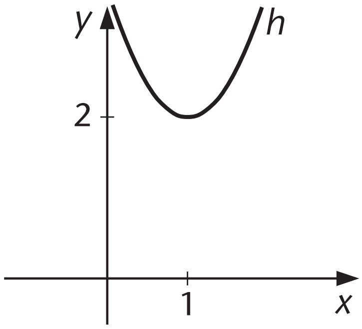
163. a)



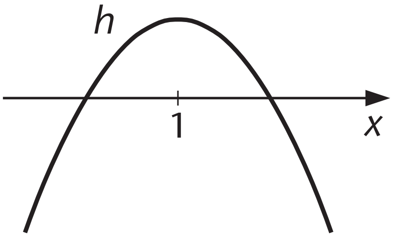


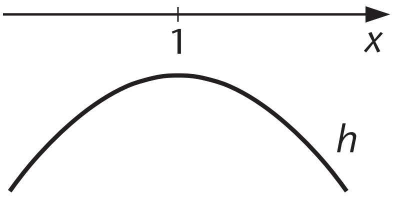
b)





c)





164. $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

Derivaatan nollakohdat:

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{1}{3}$$

Derivaatan merkki:

- $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1 = 4 > 0$
- $f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$
- $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 1 = 7 > 0$

Kulkukaavio:

$-\frac{1}{3}$ $\quad$ 1

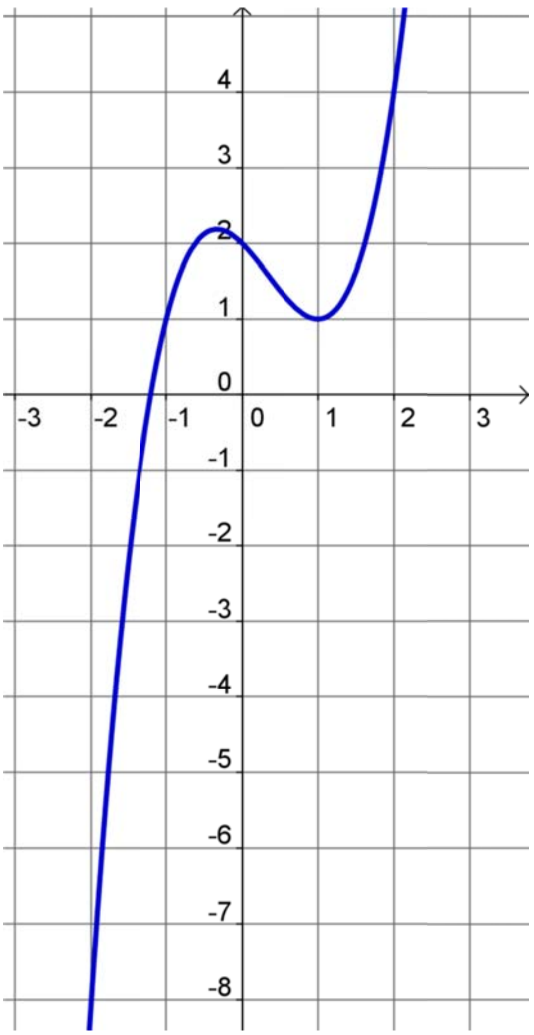
f'	+	−	+
f	↗	↘	↗

Funktio on kasvava, kun $x \leq -\frac{1}{3}$ tai $x \geq 1$.

Funktio on vähenevä, kun $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

Lasketaan pisteitä kuvaajan piirtämiseksi.

x	$f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$
-1	$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 2 = 1$
-2	$f(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - (-2) + 2 = -8$
0	$f(0) = 0^3 - 0^2 - 0 + 2 = 2$
1	$f(1) = 1^3 - 1^2 - 1 + 2 = 1$
2	$f(2) = 2^3 - 2^2 - 2 + 2 = 4$
$-\frac{1}{3}$	$f(-\frac{1}{3}) = (-\frac{1}{3})^3 - (-\frac{1}{3})^2 - (-\frac{1}{3}) + 2 \approx 2{,}2$


4
3
2
1
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8

165. a) Aloitushetkellä $x = 0$ eli

$$h(0) = -6 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 1000 = 1000 \text{ (bakteeria)}$$

b) Bakteerikanta vähentyy, kun *f* vähenee eli $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) = -18x^2 + 6x + 4$$

Derivaatan nollakohdat:

$$-18x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-18) \cdot 4}}{2 \cdot (-18)} = \frac{-6 \pm 18}{-36}$$

$$x = -\frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$$

Koska *x* kuvaa aikaa, se ei voi saada negatiivisia arvoja.

Derivaatan merkki:

- $f'(0{,}1) = -18 \cdot 0{,}1^2 + 6 \cdot 0{,}1 + 4 = 4{,}42 > 0$
- $f'(1) = -18 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 4 = -8 < 0$

Merkkikaavio:

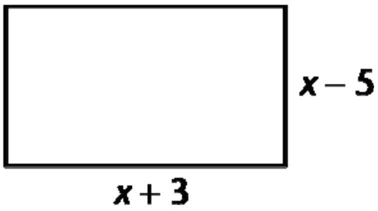
	0	$\frac{2}{3}$
f'	+	−
f	↗	↘

f on vähenevä, kun $x \geq \frac{2}{3}$.

Bakteerien määrä alkaa vähentyä, kun aikaa on kulunut $\frac{2}{3}\text{h} = 40\,\text{min}$.

166. a) Pinta-ala:

$$A(x) = (x+3)(x-5)$$
$$= x^2 - 5x + 3x - 15$$
$$= x^2 - 2x - 15$$

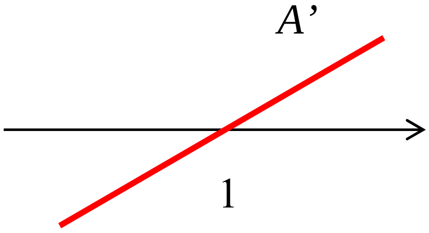


b) A on kasvava, kun $A'(x) \geq 0$.

$$A'(x) = 2x - 2$$

Derivaatan nollakohta:

$$2x - 2 = 0$$
$$2x = 2 \quad \Big| :2$$
$$x = 1$$



Pinta-alafunktio on kasvava, kun $x \geq 1$.

Huom! Tehtävän voi myös ratkaista epäyhtälön avulla:

$$A'(x) \geq 0 \text{ kun}$$
$$2x - 2 \geq 0$$
$$2x \geq 2 \quad \Big| :2$$
$$x \geq 1$$

167. Reitillä on ylämäkeä kohdissa, joissa $h'(x) > 0$.

$$h'(x) = -12x^3 + 36x^2 - 10x$$

$$h'(x) = 0 \text{ kun}$$

$$-12x^3 + 36x^2 - 10x = 0$$
$$2x\left(-6x^2 + 18x - 5\right) = 0$$

Tulon nollasäännön mukaan

$$2x = 0 \quad \text{tai} \qquad -6x^2 + 18x - 5 = 0$$

$$x = 0 \qquad\qquad x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot (-6) \cdot (-5)}}{2 \cdot (-6)}$$

$$x = \frac{-18 \pm 14{,}28...}{-12}$$

$$x = 0{,}30976... \quad \text{tai} \quad x = 2{,}69...$$

Nollakohdista x = 2,69… on juuri lenkin ulkopuolella.

Derivaatan merkki:

- $h'(0{,}1) = -12 \cdot 0{,}1^3 + 36 \cdot 0{,}1^2 - 10 \cdot 0{,}1 = -0{,}652 < 0$
- $h'(1) = -12 \cdot 1^3 + 36 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 = 14 > 0$

0 0,309… 2

h'	−	+
h	↘	↗

h on kasvava, kun $x \geq 0{,}31$ eli kun vaakasuora etäisyys on yli 310 m lenkin loppuun.

168. a) Kun pallo osuu maahan, $h(x) = 0$

$$-0{,}8x^2 + 75{,}2x = 0$$
$$x(-0{,}8x + 75{,}2) = 0$$

$x = 0$ tai $-0{,}8x + 75{,}2 = 0$

$$-0{,}8x = -75{,}2 \quad \big| :(-0{,}8)$$
$$x = 94$$

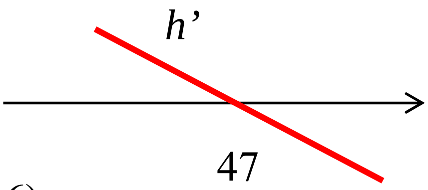
Lyönnin pituus on 94 m.

b) Pallo on laskevassa liikkeessä, kun funktio h vähenee, jolloin $h'(x) < 0$.

$$h'(x) = -1{,}6x + 75{,}2$$

Derivaatan nollakohta:

$$-1{,}6x + 75{,}2 = 0$$
$$-1{,}6x = -75{,}2 \quad \big| :(-1{,}6)$$
$$x = 47$$



Derivaatta negatiivinen, kun $x \geq 47$ eli kun etäisyys on yli 47 m.

Huom! Tehtävän voi ratkaista myös epäyhtälön avulla:

$h'(x) < 0$, kun

$$-1{,}6x + 75{,}2 < 0$$
$$-1{,}6x < -75{,}2 \quad \big| :(-1{,}6)$$
$$x > 47$$

169. *f* on kasvava, kun $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) = 2a - 6$$

$f'(x) \geq 0$ kun

$$\begin{aligned} 2a - 6 &\geq 0 \\ 2a &\geq 6 \qquad \vert :2 \\ a &\geq 3 \end{aligned}$$

170. *f* on kasvava, kun $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 + a$$

Derivaatan nollakohdat:

$$x^2 - 4x + 3 + a = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 + a)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(3 + a)}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4 - 4a}}{2}$$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Jos vaaditaan, että se ei saa negatiivisia arvoja, on em. yhtälöllä oltava enintään yksi ratkaisu. Se on mahdollista, jos juuren alla oleva lauseke eli diskriminantti $D \leq 0$:

$$\begin{aligned} 4 - 4a &\leq 0 \\ -4a &\leq -4 \quad \big| :(-4) \\ a &\geq 1 \end{aligned}$$

171. Tarkasteltavat muuttujan arvot x = 1,000 001 ja x = 1,000 002 ovat derivaatan nollakohtaa $x = 1$ suurempia.

Funktio on vähenevä, kun $x \geq 1$, joten muuttujan x arvojen kasvaessa funktion arvon pienenevät.

Mitä lähempänä muuttujan x arvo on siis derivaatan nollakohtaa $x = 1$, sitä suurempi funktion arvo on.

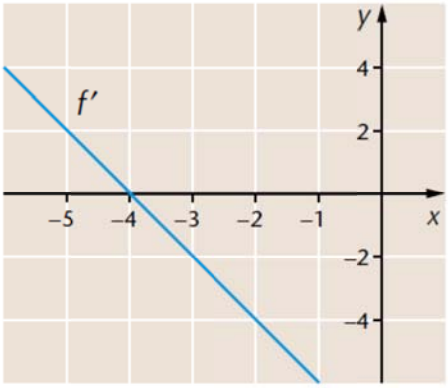
Koska 1,000 001 < 1,000 002 (eli 1,000 001 on lähempänä arvoa 1) on g(1,000 001) suurempi.

172. Funktio on kasvava, kun $f'(x) \geq 0$ eli kun derivaatan kuvaaja kulkee x-akselilla tai sen yläpuolella.

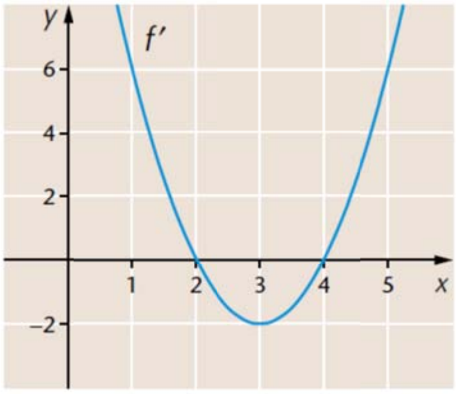
Funktio on vähenevä, kun $f'(x) \leq 0$ eli kun derivaatan kuvaaja kulkee x-akselilla tai sen alapuolella.

a) Derivaatan nollakohta: $x = -4$

Funktio f on kasvava, kun $x \leq -4$ ja vähenevä, kun $x \geq -4$.

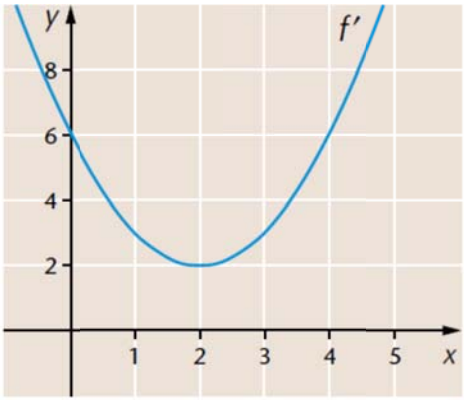


b) Derivaatan nollakohdat: $x = 2$ tai $x = 4$
Funktio f kasvava, kun $x \leq 2$ tai $x \geq 4$ ja vähenevä, kun $2 \leq x \leq 4$.



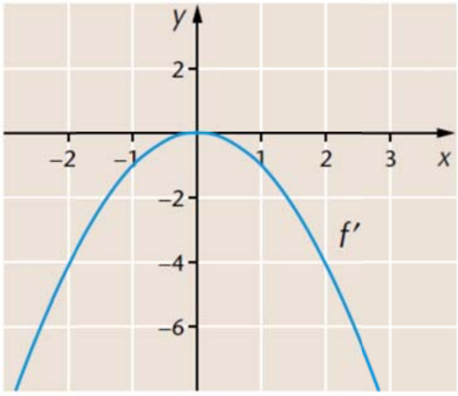
c) Derivaatalla ei ole nollakohtia.

Koska derivaatan kuvaaja kulkee aina x-akselin yläpuolella, on funktio f kasvava kaikilla muuttujan x arvoilla.



d) Derivaatan nollakohta: $x = 0$

Koska derivaatan kuvaaja kulkee aina joko x-akselilla tai sen yläpuolella, on funktio vähenevä kaikilla muuttujan x arvoilla.



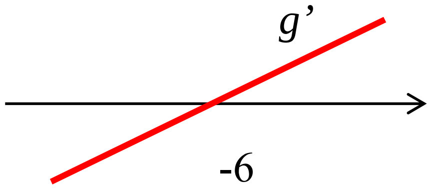
173. $g'(x) = 4x + 24$

Derivaatan nollakohta:

$$4x + 24 = 0$$

$$4x = -24 \quad |:4$$

$$x = -6$$



a) g on kasvava, kun $g'(x) \geq 0$ eli kun $x \geq$ -6

b) g on vähevenä, kun $g'(x) \leq 0$ eli kun $x \leq$.

174. $h'(x) = 18x^2 - 26x + 8$

Derivaatan nollakohdat:

$18x^2 - 26x + 8 = 0$

$$x = \frac{-(-26) \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 18 \cdot 8}}{2 \cdot 18} = \frac{26 \pm 10}{36}$$

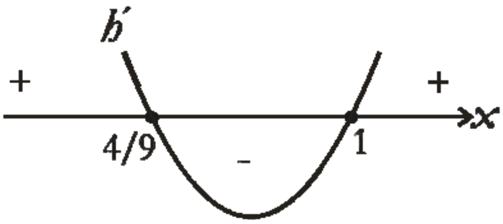
$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{4}{9}$$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.

Merkkikaavio:

$\frac{4}{9}$ 1

h'	+	−	+
h	↗	↘	↗



h on kasvava, kun $x \leq \frac{4}{9}$ tai $x \geq 1$.

175. $f'(x) = 21x^2 + 2x - 40$

Derivaatan nollakohdat:

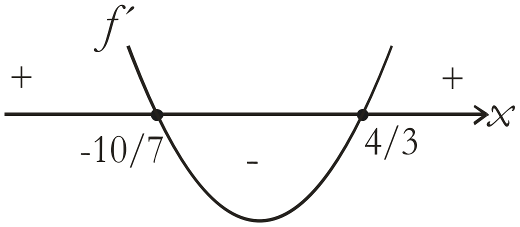
$21x^2 + 2x - 40 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 21 \cdot (-40)}}{2 \cdot 21}$$

$$x = \frac{-2 \pm 58}{42}$$

$$x = \frac{4}{3} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{10}{7}$$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Merkkikaavio:

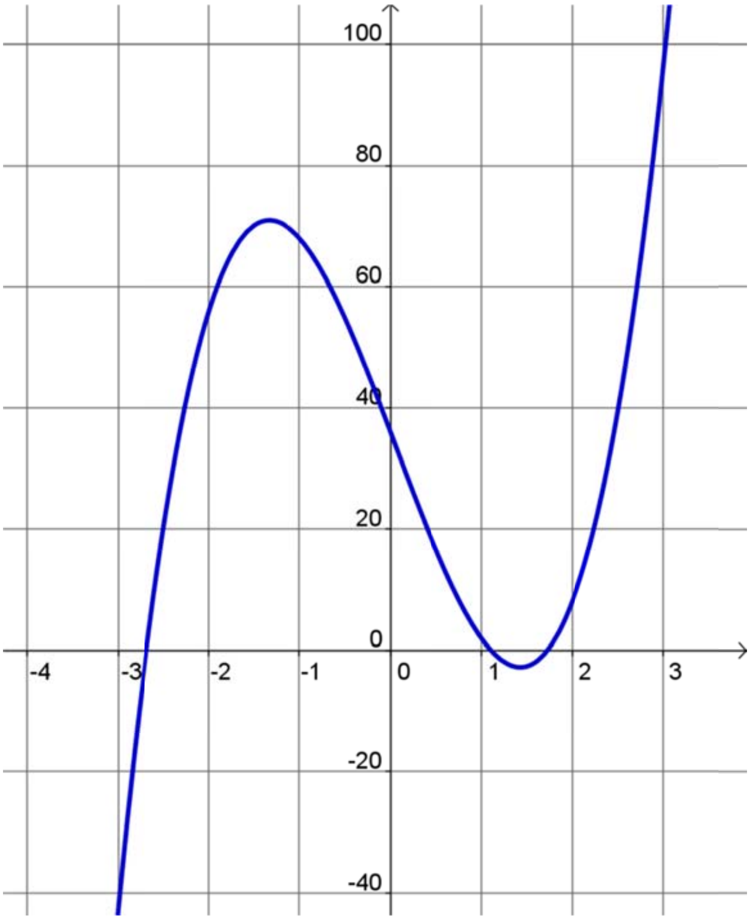
		$-\frac{10}{7}$		$\frac{4}{3}$	
f'	+		−		+
f	↗		↘		↗

f on kasvava, kun $x \le -\frac{10}{7}$ tai $x \ge \frac{4}{3}$.

f on vähenevä, kun $-\frac{10}{7} \le x \le \frac{4}{3}$.

Lasketaan funktion arvoja kuvaajan piirtämiseksi.

x	$f(x)=7x^3+x^2-40x+36$
-2	$f(-2)=7\cdot(-2)+(-2)^2-40\cdot(-2)+36=64$
$-\frac{10}{7}$	$f\left(-\frac{10}{7}\right)=74{,}77...$
-1	$f(-1)=70$
0	$f(0)=36$
$\frac{4}{3}$	$f\left(\frac{4}{3}\right)=1{,}037...$
1	$f(1)=4$
2	$f(2)=16$
3	$f(3)=114$



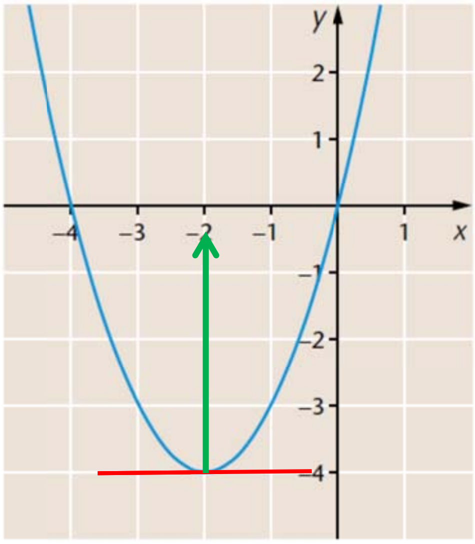
3.2 Funktion ääriarvot

176. a) minimikohta $x = 4$
minimiarvo $f(4) = -5$

b) maksimikohta $x = -3$
maksimiarvo $f(-3) = 10$

minimikohta $x = 1$
minimiarvo $f(1) = 0$

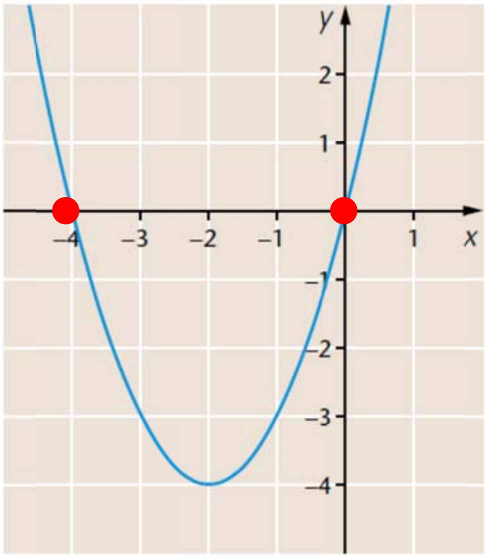
177. a) minimikohta $x = -2$



b) Derivaatalla kaksi nollakohtaa
$x = -4$ ja $x = 0$.

Merkki- ja kulkukaavio:

		-4		0	
f'	+		−		+
f	↗		↘		↗
		max		min	



maksimikohta $x = -4$
minimikohta $x = 0$

178. $f'(x) = -6x + 18$

Derivaatan nollakohta:

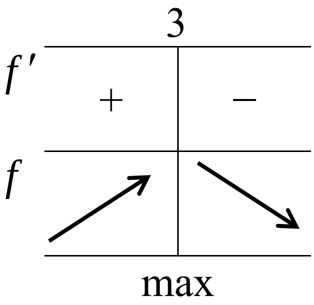
$$-6x + 1 = 0$$

$$-6x = -18 \quad \big| :(-6)$$

$$x = 3$$

Derivaatan merkki:

- $f'(0) = -6 \cdot 0 + 18 = 18 > 0$
- $f'(4) = -6 \cdot 4 + 18 = -6 < 0$



a) Maksimikohta $x = 3$

b) Maksimiarvo $f(3) = -3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 = 27$

179. a) $f'(x) = 2x - 4$

Derivaatan nollakohta:

$$2x - 4 = 0$$

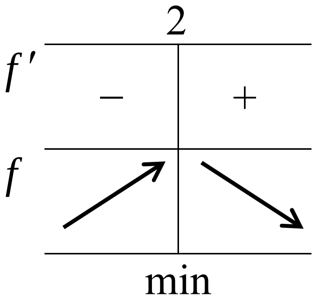
$$2x = 4 \quad \big| :2$$

$$x = 2$$

Derivaatan merkki:

- $f'(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4 < 0$
- $f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2 > 0$

Merkkikaavio:



Minimiarvo $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -3$

b) $f'(x) = -6x - 6$

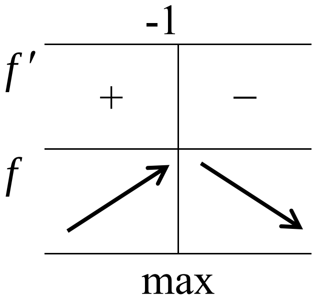
Derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} -6x - 6 &= 0 \\ -6x &= 6 \quad \Big| :(-6) \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $f'(-2) = -6 \cdot (-2) - 6 = 6 > 0$
- $f'(0) = -6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$

Merkkikaavio:



Maksimiarvo:

$$\boldsymbol{f(-1) = -3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 2 = 5}$$

180. $g'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

Derivaatan nollakohdat:

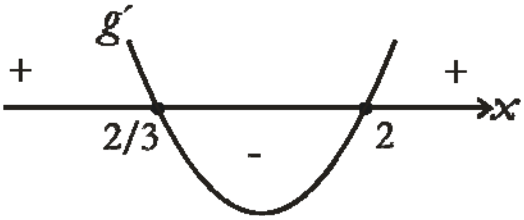
$$3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{8 \pm 4}{6}$$

$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2}{3}$$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Merkkikaavio:

	$\frac{2}{3}$	2	
f'	+	−	+
f	↗	↘	↗
	max	min	

Maksimiarvo: $g\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - 1 = \frac{5}{27}$

Minimiarvo: $g(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 1 = -1$

181. a) $g'(x) = 10x + 20$

Derivaatan nollakohta:

$$10x + 20 = 0$$

$$10x = -20 \quad \big|:10$$

$$x = -2$$

Derivaatan merkki:

- $g'(-3) = 10 \cdot (-3) + 20 = -10 < 0$
- $g'(0) = 10 \cdot 0 + 20 = 20 > 0$

Merkkikaavio:

		-2	
g'	$-$		$+$
g	↘		↗
		min	

Minimikohta: $x = -2$

b) $g'(x) = -12x^2 + 4x - 8$

Derivaatan nollakohdat:

$-12x^2 + 4x - 8 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-12) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-12)} = \frac{-4 \pm \sqrt{-368}}{-24}$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisuja, koska -368 < 0. Derivaatalla ei ole nollakohtia eikä funktiolla *g* näin ollen ääriarvokohtia

182. a) $h'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + x$

Derivaatan nollakohdat:

$$-\frac{3}{4}x^2 + x = 0$$

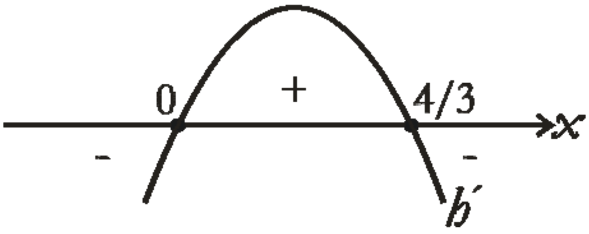
$$x\left(-\frac{3}{4}x + 1\right) = 0$$

$x = 0$ tai $-\frac{3}{4}x + 1 = 0$

$$-\frac{3}{4}x = -1 \quad \Big| : \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Derivaatan h' kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Merkkikaavio:

		0		$\frac{4}{3}$	
h'	$-$		$+$		$-$
h	↘		↗		↘
		min		max	

Minimikohta: $x = 0$

Maksimikohta: $x = \frac{4}{3}$

b) $h'(x) = 0{,}5x - 0{,}07$

Derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} 0{,}5x - 0{,}07 &= 0 \\ 0{,}5x &= 0{,}07 \quad \big| :0{,}5 \\ x &= 0{,}14 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $h'(0) = 0{,}5 \cdot 0 - 0{,}07 = -0{,}07 < 0$
- $h'(1) = 0{,}5 \cdot 1 - 0{,}07 = 0{,}43 > 0$

		0,14	
h'	$-$		$+$
h	↘	min	↗

Minimikohta: $x = 0{,}14$

183. Funktiolla $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+2x$ ei ole ääriarvoja, jos se on aina aidosti kasvava tai aidosti vähenevä. Tällöin derivaatalla f' ei ole nollakohtia.

$f'(x)=x^2+2x+2$

Derivaatan nollakohdat:

$$x^2+2x+2=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$$

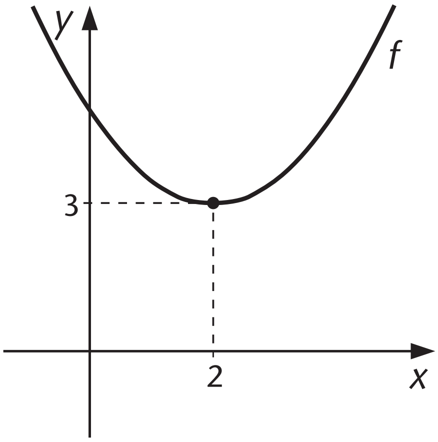
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}$$

Yhtälöllä ei ratkaisua, joten derivaatalla ei nollakohtia.

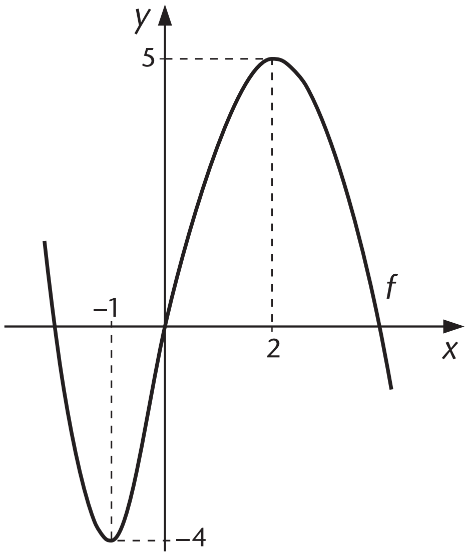
Derivaatan merkki: $f'(0)=0^2+2\cdot0+2=2>0$

$f'(x)>0$ kaikilla x:n arvoilla, joten f on aidosti kasvava eikä sillä ole ääriarvoja.

184. a)



b)



185. $f'(x) = 3x^2 - 27x + 24$

Derivaatan nollakohdat:

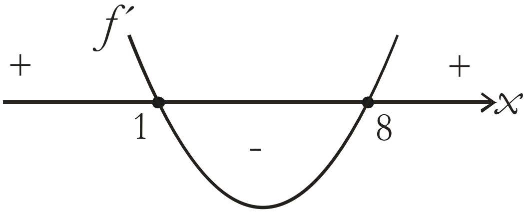
$3x^2 - 27x + 24 = 0$

$$x = \frac{-(-27) \pm \sqrt{(-27)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{27 \pm 21}{6}$$

$$x = 8 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



		1		8	
f'	+		−		+
f	↗		↘		↗
		max		min	

Minimikohta on $x = 8$

$$\Rightarrow f(8) = 8^3 - 13{,}5 \cdot 8^2 + 24 \cdot 8 + c = 6$$

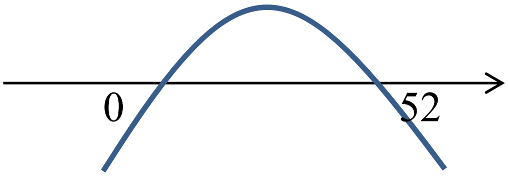
$$c - 160 = 6$$

$$c = 166$$

186. a) Bakteereja on elossa, kun niiden lukumäärä on suurempi kuin nolla eli ratkaistaan milloin $F(T) > 0$.

Nollakohdat:

Bakteerin määrää kuvaavan funktion kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joten funktio saa positiivisia arvoja, kun



$$0 < T < 52$$

b) Tutkitaan, millä muuttujan arvolla funktio saa suurimman arvonsa.

$$F'(T) = -0{,}625T + 16{,}25$$

Derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} -0{,}625T + 16{,}25 &= 0 \\ -0{,}625T &= -16{,}25 \quad |:(-0{,}625) \\ T &= 26 \end{aligned}$$

Koska määrää kuvaavan funktion F kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, löytyy bakteerien määrän suurin arvo paraabelin huipusta eli derivaatan nollakohdasta.

Bakteerien määrä on suurimmillaan, kun lämpötila on 26°C.

c) Bakteerin määrä

$$\begin{aligned} F(26) &= -0{,}3125 \cdot 26^2 + 16{,}25 \cdot 26 \\ &= 211{,}25 \\ &\approx 211 \text{ (bakteeria)} \end{aligned}$$

187. Nuolen korkeus

$h(t) = 1{,}9 + 24{,}5t - 4{,}9t^2$

$h'(t) = 24{,}5 - 9{,}8t$

Derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} 24{,}5 - 9{,}8t &= 0 \\ -9{,}8t &= -24{,}5 \\ t &= 2{,}5 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $h'(0) = 24{,}5 - 9{,}8 \cdot 0 = 24{,}5 > 0$
- $h'(3) = 24{,}5 - 9{,}8 \cdot 3 = -4{,}9 < 0$

Merkkikaavio:

	0	2,5
h'	+	−
h	↗	↘

a) Korkeus on suurin, kun on kulunut 2,5 s.

b) Korkeus hetkellä $t = 2{,}5$:

$$\begin{aligned} h(2{,}5) &= 1{,}9 + 24{,}5 \cdot 2{,}5 - 4{,}9 \cdot 2{,}5^2 \\ &= 32{,}525 \\ &\approx 33 \end{aligned}$$

Korkeus on 33 m.

188. $f(t) = -400t^2 + 2000t$

a) $f'(t) = -800t + 2000$

Derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} -800t + 2000 &= 0 \\ -800t &= -2000 \\ t &= 2{,}5 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $f'(2) = -800 \cdot 2 + 2000 = 400 > 0$
- $f'(3) = -800 \cdot 3 + 2000 = -400 < 0$

Merkkikaavio:

	0	2,5
f'	+	–
f	↗	↘

$f(2{,}5) = -400 \cdot 2{,}5^2 + 2000 \cdot 2{,}5 = 2500$

Lääkkeen määrä oli suurimmillaan, kun lääkkeen antamisesta oli kulunut 2,5 tuntia. Lääkettä oli tällöin 2500 mg.

b) Leikkauksen aikana

$$-400t^2 + 2000t \geq 1600$$

$$-400t^2 + 2000t - 1600 \geq 0$$

Merkitään $g(t) = -400t^2 + 2000t - 1600$

g:n nollakohdat:

$$-400t^2 + 2000t - 1600 = 0 \quad \Big| :(-400)$$

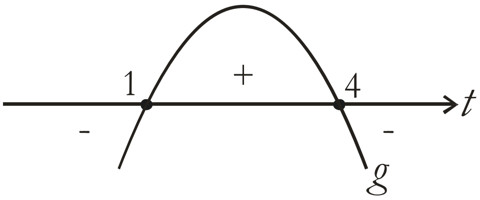
$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$t = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$t = 4 \quad \text{tai} \quad t = 1$$

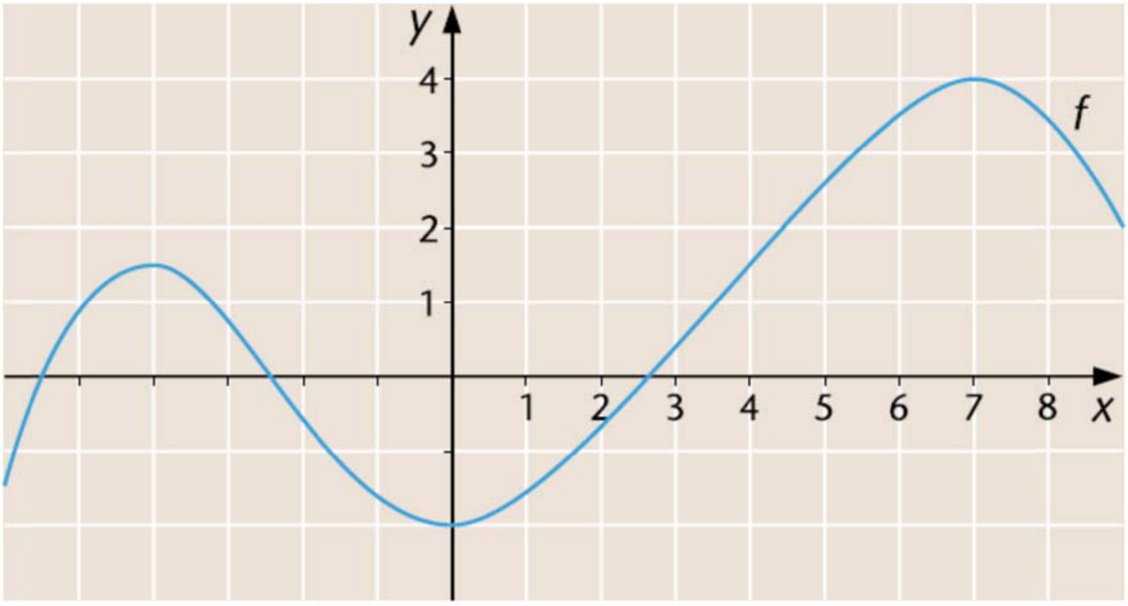
g:n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



$g(t) \geq 0$ kun $1 \leq t \leq 4$

Leikkaus saattoi siis kestää enintään 3 h.

189.



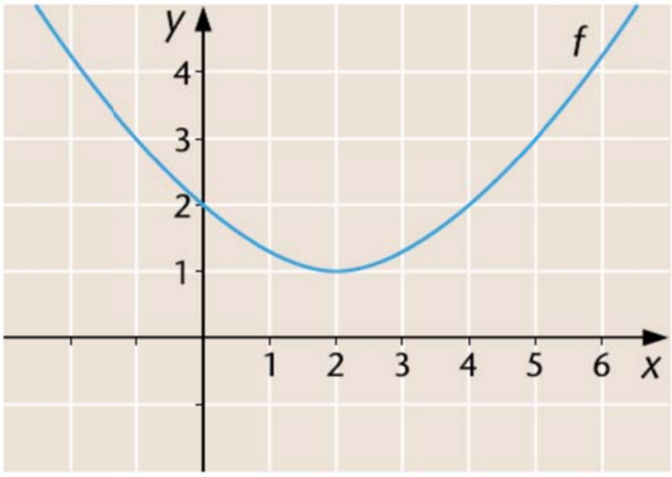
a) f saa suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa $x \approx 7$.

b) f saa pienimmän arvonsa derivaatan nollakohdassa $x \approx 0$.

c) suurin arvo $f(7) \approx 4$

pienin arvo $f(0) \approx -2$

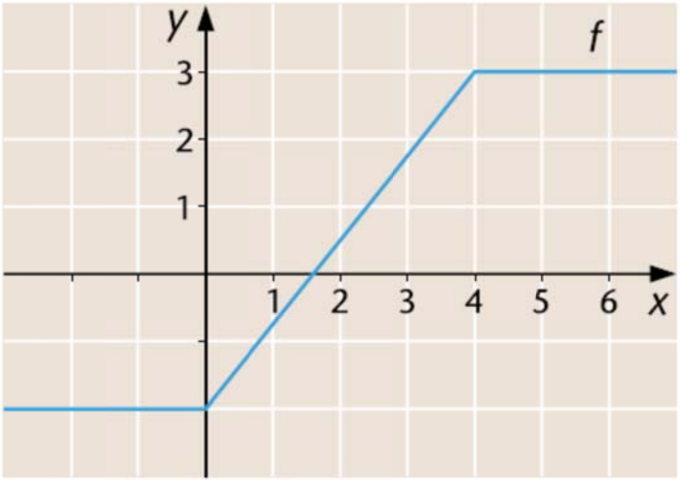
190. a) *f* saa pienimmän arvonsa derivaatan nollakohdassa $x \approx 2$.



Pienin arvo $f(2) \approx 1$

Koska *f* ei ole määritelty suljetulla välillä, ei suurinta arvoa ole.

b) *f* saa suurimman arvonsa välin $[4, \infty[$ kaikissa kohdissa.



Suurin arvo on 3.

f saa pienimmän arvonsa välin $]-\infty, 0]$ kaikissa kohdissa.

Pienin arvo on -2.

191. $g'(x) = -2x - 4$

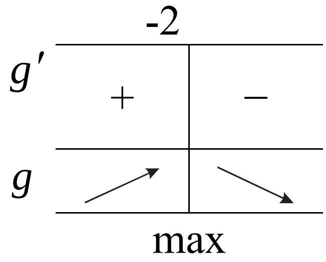
Derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} -2x - 4 &= 0 \\ -2x &= 4 \quad \big| :(-2) \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $g'(-3) = -2 \cdot (-3) - 4 = 2 > 0$
- $g'(0) = -2 \cdot 0 - 4 = -4 < 0$

Merkkikaavio:



Suurin arvo kohdassa $x = -2$.

$g(-2) = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 1 = 5$

192. $r'(x) = 6x - 18$

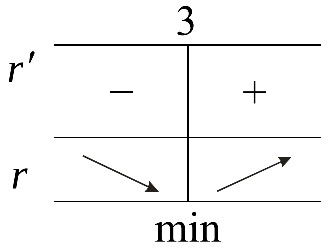
Derivaatan nollakohta:

$$6x - 18 = 0$$
$$6x = 18 \quad \Big| :6$$
$$x = 3$$

Derivaatan merkki:

- $r'(0) = 6 \cdot 0 - 18 = -18 < 0$
- $r'(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6 > 0$

Merkkikaavio:



Pienin arvo kohdassa $x = 3$.

$r(3) = 3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 5 = -22$

193. $f\,'(x) = 0{,}2x + 0{,}2$

Derivaatan nollakohta:

$$
\begin{aligned}
0{,}2x + 0{,}2 &= 0 \\
0{,}2x &= -0{,}2 \qquad \big|:0{,}2 \\
x &= -1
\end{aligned}
$$

a) $x \in [-5{,}1]$

Derivaatan merkki:

- $f\,'(-2) = 0{,}2 \cdot (-2) + 0{,}2 = -0{,}2 < 0$
- $f\,'(0) = 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}2 = 0{,}2 > 0$

	-5		-1		1
$f\,'$		$-$		$+$	
f		↘		↗	
	max		min		max

$$f(-5) = 0{,}1 \cdot (-5)^2 + 0{,}2 \cdot (-5) - 0{,}5 = 1$$

$$f(-1) = 0{,}1 \cdot (-1)^2 + 0{,}2 \cdot (-1) - 0{,}5 = -0{,}6$$

$$f(1) = 0{,}1 \cdot 1^2 + 0{,}2 \cdot 1 - 0{,}5 = -0{,}2$$

Suurin arvo 1

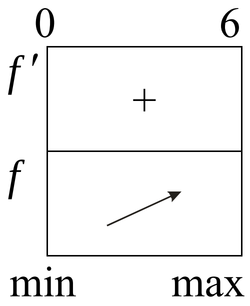
Pienin arvo -0,6

b) $x \in [0, 6]$

Derivaatan nollakohta $x = -1$ ei kuulu em. välille.

Derivaatan merkki:

$f'(0) = 0{,}2 > 0$



$f(0) = 0{,}1 \cdot 0^2 + 0{,}2 \cdot 0 - 0{,}5 = -0{,}5$

$f(6) = 0{,}1 \cdot 6^2 + 0{,}2 \cdot 6 - 0{,}5 = 4{,}3$

Suurin arvo 4,3

Pienin arvo -0,5

194. $f'(x) = 6 - x$

Derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} 6 - x &= 0 \\ -x &= -6 \quad \Big| :(-1) \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $f'(1) = 6 - 1 = 5 > 0$
- $f'(7) = 6 - 7 = -1 < 0$

	0		6		10
f'		$+$		$-$	
f		↗		↘	
	min		max		min

$$f(0) = 6 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 0$$

$$f(6) = 6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 6^2 = 18$$

$$f(10) = 6 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 10^2 = 10$$

Suurin arvo 18
Pienin arvo 0

195. $t'(x) = 3x^2 + 18x - 21$

Derivaatan nollakohdat:

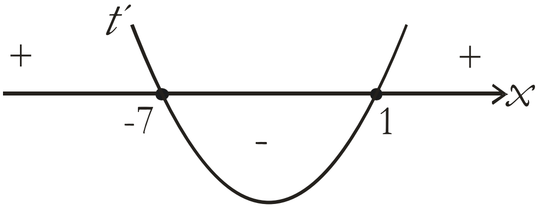
$$3x^2 + 18x - 21 = 0$$

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-21)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-18 \pm 24}{6}$$

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = -7$$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Merkkikaavio:

-2 1 5

t'	$-$	$+$
t	↘	↗

max min max

$$t(-2) = (-2)^3 + 9 \cdot (-2)^2 - 21 \cdot (-2) + 1 = 71$$

$$t(1) = 1^3 + 9 \cdot 1^2 - 21 \cdot 1 + 1 = -10$$

$$t(5) = 5^3 + 9 \cdot 5^2 - 21 \cdot 5 + 1 = 246$$

Suurin arvo 256
Pienin arvo -10

196. $g'(x) = -6x^2 + 6x - 12$

Derivaatan nollakohdat:

$$-6x^2 + 6x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-6) \cdot (-12)}}{2 \cdot (-6)}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{-252}}{-12}$$

Derivaatalla ei ole nollakohtia.

Derivaatan merkki välillä $x \in \left[-1,1\right]$:

$g'(0) = -6 \cdot 0^2 + 6 \cdot 0 - 12 = -12 < 0$

	-1		1
g'		–	
g		↘	
	max		min

Suurin arvo

$g(-1) = -2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) - 8 = 9$

Pienin arvo

$g(1) = -2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 - 8 = -19$

197. Luku x

Luvun neliö x^2

Summa

$$s(x) = x^2 + x$$
$$s'(x) = 2x + 1$$

Derivaatan nollakohta:

$$2x + 1 = 0$$
$$2x = -1 \quad \Big| :2$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

Derivaatan merkki:

- $s'(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1 < 0$
- $s'(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$

Merkkikaavio:

		$-\frac{1}{2}$	
s'	$-$		$+$
s	↘		↗
		min	

Summan s pienin arvo on kohdassa $x = -\frac{1}{2}$.

Summa $s\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

Kysytty luku on $-\frac{1}{2}$. Summa on $-\frac{1}{4}$.

198. Veden tilavuus

$V(T) = 0{,}0079T^2 - 0{,}0663T + 1000{,}1$, $0° \leq T \leq 10$ °C

$V'(T) = 0{,}0158T - 0{,}0663$

Derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} 0{,}0158T - 0{,}0663 &= 0 \\ 0{,}0158T &= 0{,}0663 \\ T &= 4{,}196... \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $V'(0) = 0{,}0158 \cdot 0 - 0{,}0663 = -0{,}0663 < 0$
- $V'(5) = 0{,}0158 \cdot 5 - 0{,}0663 = 0{,}0127 > 0$

Merkkikaavio:

	0		4,19…		10
V'		–		+	
V		↘		↗	
	max		min		max

$V(0) = 0{,}0079 \cdot 0^2 - 0{,}0663 \cdot 0 + 1000{,}1 = 1000{,}1$

$V(10) = 0{,}0079 \cdot 10^2 - 0{,}0663 \cdot 10 + 1000{,}1 = 1000{,}227$

Tilavuus on suurin, kun lämpötila on $10\,°\mathrm{C}$.

199. Lämpötila $x(t) = -0{,}02t^2 + 0{,}61t + 4{,}00$, $0 \le t \le 24$
$x'(t) = -0{,}04t + 0{,}61$

Derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} -0{,}04t + 0{,}61 &= 0 \\ -0{,}04t &= -0{,}61 \\ t &= 15{,}25 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $x'(0) = -0{,}04 \cdot 0 + 0{,}61 = 0{,}61 > 0$
- $x'(16) = -0{,}04 \cdot 16 + 0{,}61 = -0{,}03 < 0$

Merkkikaavio:

0 15,25 24

x'	+	–
x	↗	↘

min max min

$x(0) = -0{,}02 \cdot 0^2 + 0{,}61 \cdot 0 + 4{,}00 = 4{,}00$

$x(24) = -0{,}02 \cdot 24^2 + 0{,}61 \cdot 24 + 4{,}00 = 7{,}12$

Lämpötila oli suurin, kun $t = 15{,}25$ eli klo 15.15

Lämpötila oli matalin, kun $t = 0$ eli klo 0.00.

200. Veden tilavuus

$$V(t) = 520(20-t)^2 = 520(20-t)(20-t)$$
$$= 520\left(400-20t-20t+t^2\right)$$
$$= 520\left(400-40t+t^2\right)$$
$$= 520t^2 - 20800t + 208000$$

a) Säiliö on tyhjä, kun

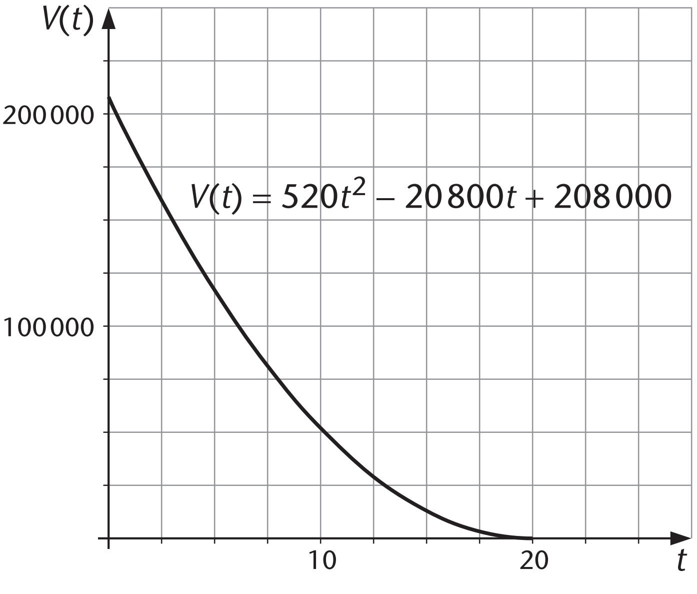
$$520t^2 - 20800t + 208000 = 0$$

$$t = \frac{-(-20800) \pm \sqrt{(-20800)^2 - 4 \cdot 520 \cdot 208000}}{2 \cdot 520}$$

$$t = \frac{20800 \pm 0}{1040}$$

$$t = 20$$

eli 20 minuutin kuluttua.

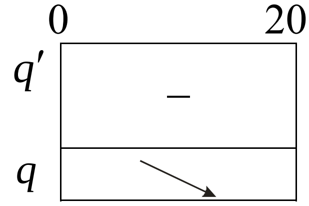


b) $V'(t) = 1040t - 20800$

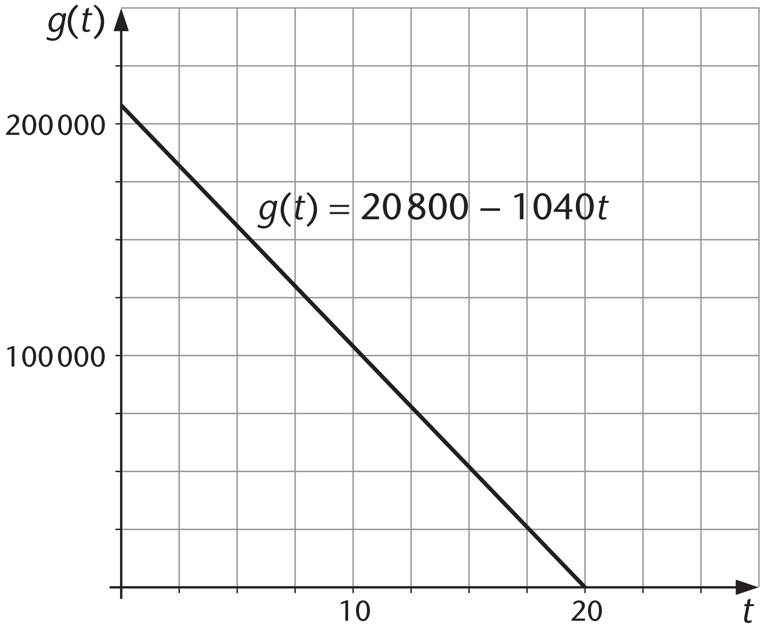
$$\begin{aligned} q(t) &= -V'(t) \\ &= -(1040t - 20800) \\ &= 20800 - 1040t \end{aligned}$$

Funktion q suurin arvo:

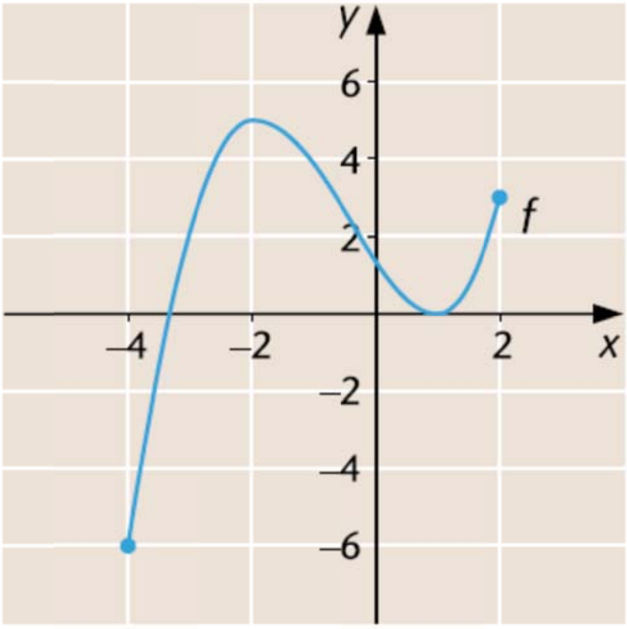
$$q'(t) = -1040 < 0$$



q saa suurimman arvonsa hetkellä $t = 0$ eli heti tyhjentymisen alkaessa.



201. Funktio *f* saa suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa $x \approx -2$.



$f(-2) \approx 5$

Funktio *f* saa pienimmän arvonsa välin päätepisteessä $x = -4$.

$f(-4) \approx -6$

202. $g'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

Derivaatan nollakohdat:

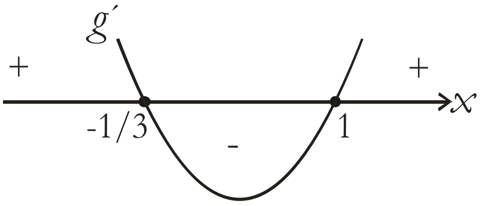
$3x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{1}{3}$$

Derivaatan g' kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Merkkikaavio:

		$-\frac{1}{3}$		1	
g'	+		−		+
g	↗		↘		↗
		max		min	

Maksimi

$$g\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\left(-\frac{1}{3}\right)+2=\frac{59}{27}=2\frac{5}{27}$$

Minimi

$$g(1)=1^3-1^2-1+2=1$$

203. $f(x) = 4x^3 - 11x^2 - 14x - 25$, $x \in [-2, 4]$

$f'(x) = 12x^2 - 22x - 14$

Derivaatan nollakohdat:

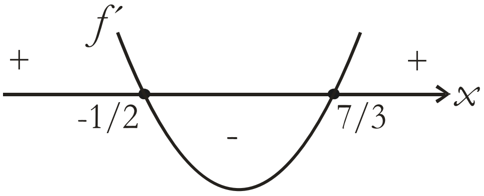
$12x^2 - 22x - 14 = 0$

$$x = \frac{-(-22) \pm \sqrt{(-22)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-14)}}{2 \cdot 12}$$

$$x = \frac{22 \pm 34}{24}$$

$$x = \frac{7}{3} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{1}{2}$$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Merkkikaavio:

	-2		$-\frac{1}{2}$		$\frac{7}{3}$		4
f'		+		−		+	
f		↗		↘		↗	
	min		max		min		max

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 11 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 14 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 25 = -21\frac{1}{4}$$

$$f(4) = 4 \cdot 4^3 - 11 \cdot 4^2 - 14 \cdot 4 - 25 = -1$$

Suurin arvo -1.

204. Olkoon kysytyt luvut x ja y.

$$x + y = 250$$
$$y = 250 - x$$

Lukujen tulo

$$t(x) = x \cdot (250 - x)$$
$$= 250x - x^{\prime 2}$$

$$t'(x) = 250 - 2x$$

Derivaatan nollakohta:

$$250 - 2x = 0$$
$$-2x = -250 \qquad \big| :(-2)$$
$$x = 125$$

Derivaatan merkki:

- $t'(0) = 250 - 2 \cdot 0 = 250 > 0$
- $t'(200) = 250 - 2 \cdot 200 = -150 < 0$

Merkkikaavio:

	125	
t'	+	−
t	↗	↘
	max	

Funktiolla t on suurin arvo kohdassa $x = 125$.

Kysytyt luvut ovat siis 125 ja 125.

205. $v(x) = 2{,}0x(0{,}5 - 2x) = 1{,}0x - 4{,}0x^2 \qquad 0 \le x \le 0{,}25$

$v'(x) = 1{,}0 - 8{,}0x$

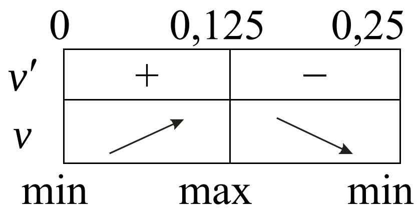
Derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} 1{,}0 - 8{,}0x &= 0 \\ -8{,}0x &= -1{,}0 \\ x &= 0{,}125 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $v'(0{,}1) = 1{,}0 - 8{,}0 \cdot 0{,}1 = 0{,}2 > 0$
- $v'(0{,}2) = 1{,}0 - 8{,}0 \cdot 0{,}2 = -0{,}6 < 0$

Merkkikaavio:

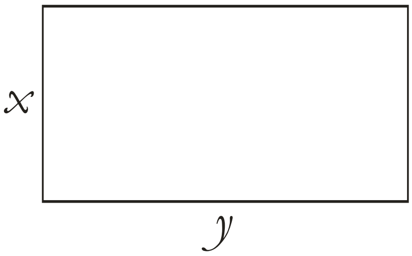


Reaktion nopeus suurin, kun $x = 0{,}125$ eli konsentraatio on

$0{,}125\ \frac{\text{mol}}{\text{l}}$.

3.3 Derivaatan geometrisia sovelluksia

206.



$$2x + 2y = 140$$
$$2y = 140 - 2x \quad \Big| :2$$
$$y = 70 - x$$

Sivujen pituudet ovat positiivisia:

$x > 0$ ja $70 - x > 0$

$$-x > -70 \quad \Big| :(-1)$$
$$x < 70$$

$x \in \left]0, 70\right[$

Ala $A(x) = xy$

$$= x(70 - x)$$
$$= 70x - x^2$$

$A'(x) = 70 - 2x$

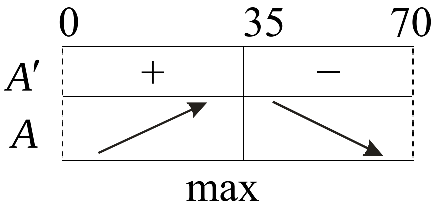
$A'(x) = 0$ kun

$$70 - 2x = 0$$
$$-2x = -70$$
$$x = 35$$

Derivaatan merkki:

- $A'(10) = 70 - 2 \cdot 10 = 50 > 0$
- $A'(40) = 70 - 2 \cdot 40 = -10 < 0$

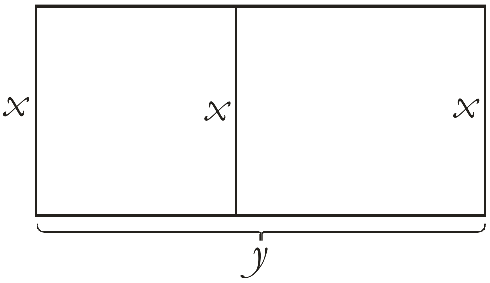
Merkkikaavio:



Ala on suurin, kun $x = 35$.
Sivut ovat tällöin 35 m ja $(70 - 35)\text{ m} = 35\text{ m}$.

Ala $A(x) = 70 \cdot 35 - 35^2 = 1225$ eli 1225 m^2.

207.



$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 180 \\ 2y &= 180 - 3x \quad \Big| :2 \\ y &= 90 - 1{,}5x \end{aligned}$$

Sivujen pituudet ovat positiivisia:

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad 90 - 1{,}5x > 0$$

$$-1{,}5x > -90 \quad \Big| :(-1{,}5)$$

$$x < 60$$

$$x \in \left]0, 60\right[$$

Ala

$$\begin{aligned} A(x) &= xy \\ &= x(90-1{,}5x) \\ &= 90x-1{,}5x^2 \end{aligned}$$

$$A'(x) = 90-3x$$

$A'(x)=0$ kun

$$\begin{aligned} 90-3x &= 0 \\ -3x &= -90 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $A'(10) = 90-3\cdot 10 = 60 > 0$
- $A'(40) = 90-3\cdot 40 = -30 < 0$

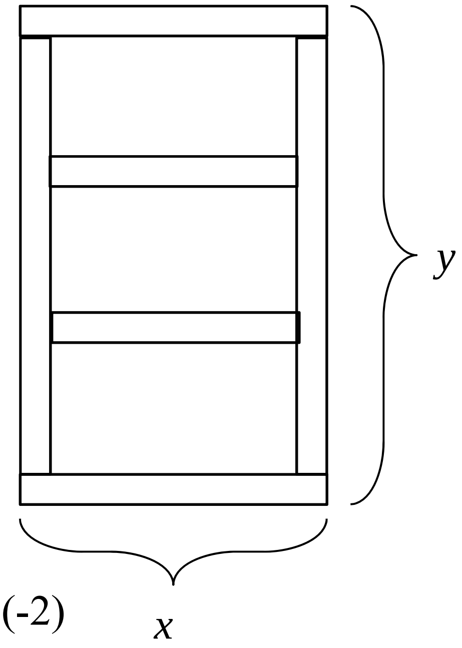
Merkkikaavio:

	0		30		60
A'		+		−	
A		↗		↘	
			max		

Ala on suurin, kun $x = 30$.

Sivut ovat tällöin 30 m ja $(90-1{,}5\cdot 30)$ m $= 45$ m.

208. Lautaa käytettävissä 3,0 m = 300 cm.



$$\begin{aligned} 2x+2(x-4)+2(y-4)&=300 \\ 2x+2x-8+2y-8&=300 \\ 2y&=316-4x \quad |:2 \\ y&=158-2x \end{aligned}$$

Sivujen pituuksien oltava positiivisia:

$x > 0$ ja $158 - 2x > 0$

$-2x > -158 \quad | : (-2)$

$x < 79$

$x \in \left]0, 79\right[$

Hyllykkö täyttää seinältä pinta-alan, jonka suuruus on

$$\begin{aligned} A(x) &= xy \\ &= x(158-2x) \\ &= 158x-2x^2 \end{aligned}$$

$A'(x) = 158 - 4x$

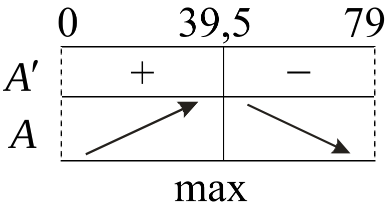
Derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} 158-4x&=0 \\ -4x&=-158 \quad |:(-4) \\ x&=39{,}5 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $A'(10) = 158 - 4 \cdot 10 = 118 > 0$
- $A'(50) = 158 - 4 \cdot 50 = -42 < 0$

Merkkikaavio:

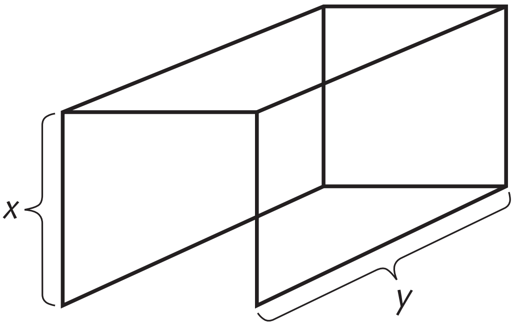


Ala on suurin, kun $x = 39{,}5$.

Mitat ovat tällöin:

leveys 39,5 m ja korkeus $(158 - 2 \cdot 39{,}5)\ \text{m} = 71\ \text{m}$.

209.



$$7x + 4y = 36$$

$$4y = 36 - 7x \quad \Big| :4$$

$$y = 9 - 1{,}75x$$

Sivut ovat positiivisia:

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad 9 - 1{,}75x > 0$$

$$-1{,}75x > -9 \qquad \big| :(-1{,}75)$$

$$x < 5{,}14...$$

$x \in \left]0; 5{,}14...\right[$

Tilavuus

$$V(x) = x^2 y$$

$$= x^2(9 - 1{,}75x)$$

$$= 9x^2 - 1{,}75x^3$$

$V'(x) = 18x - 5{,}25x^2$

$V'(x) = 0$ kun

$$18x - 5{,}25x^2 = 0$$

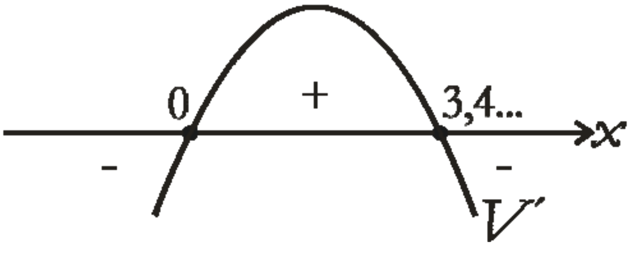
$$x(18 - 5{,}25x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 18 - 5{,}25x = 0$$

$$-5{,}25x = -18$$

$$x = 3{,}42...$$

Derivaatan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli:

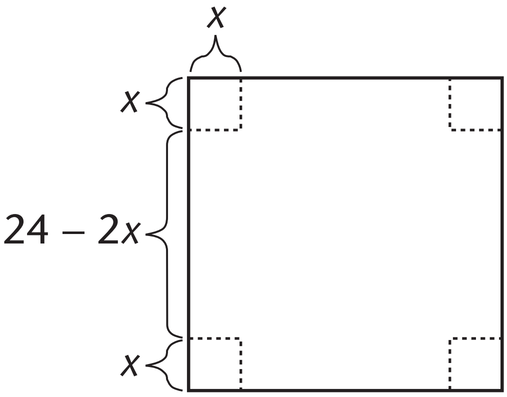


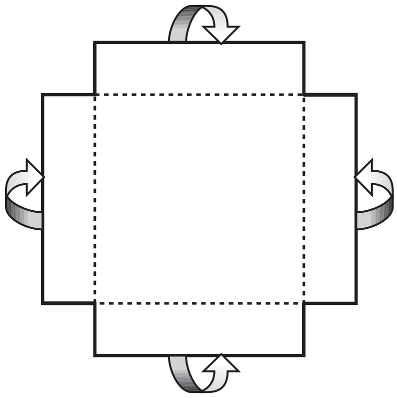
	0		3,42…		5,14..
V'		+		−	
V		↗		↘	
			max		

Tilavuus on suurin, kun $x = 3{,}42...$

Mitat ovat tällöin: 3,4 m, 3,4m ja $(9 - 1{,}75 \cdot 3{,}42...)$ m $\approx 3{,}0$ m

210.





Sivujen pituudet positiivisia:

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad 24 - 2x > 0$$

$$-2x > -24$$

$$x < 12$$

$$x \in \left]0,12\right[$$

Tilavuus

$$\begin{aligned} V(x) &= x(24-2x)^2 \\ &= x(24-2x)(24-2x) \\ &= x\left(576-96x-+4x^2\right) \\ &= 576x-96x^2+4x^3 \end{aligned}$$

$$V'(x) = 576 - 192x + 12x^2$$

$V'(x) = 0$ kun

$12x^2 - 192x + 576 = 0$

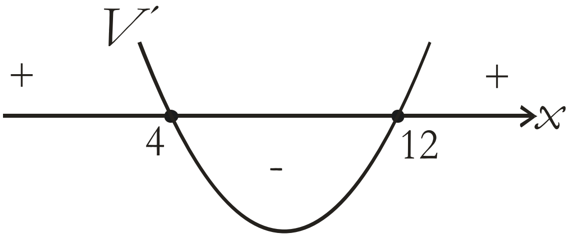
$$x = \frac{-(-192) \pm \sqrt{(-92)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 576}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{192 \pm 96}{24}$$

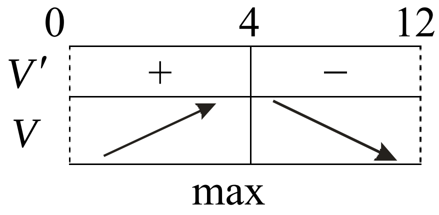
$$x = 12 \quad \text{tai} \quad x = 4$$

Vain $x = 4$ kuuluu välille $]0,12[$.

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



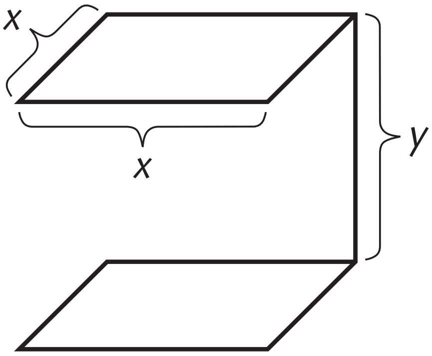
Merkkikaavio:



Tilavuus on suurin, kun $x = 4$.

Poisleikattavan neliön sivun pituus täytyy olla 4,0 cm.

211.



$$8x + y + 2 = 50$$

$$y = 48 - 8x$$

Sivujen pituudet positiivisia:

$x > 0$ ja $48 - 8x > 0$

$$-8x > -48$$

$$x < 6$$

$$x \in \left]0, 6\right[$$

Tilavuus

$$\begin{aligned} V(x) &= x^2 y \\ &= x^2(48 - 8x) \\ &= 48x^2 - 8x^3 \end{aligned}$$

$$V'(x) = 96x - 24x^2$$

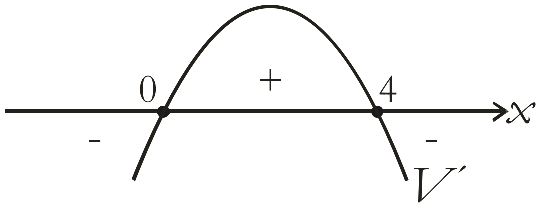
$V'(x) = 0$ kun

$$96x - 24x^2 = 0$$
$$x(96 - 24x) = 0$$

$x = 0$ tai $96 - 24x = 0$

$$-24x = -96$$
$$x = 4$$

Derivaatan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli:



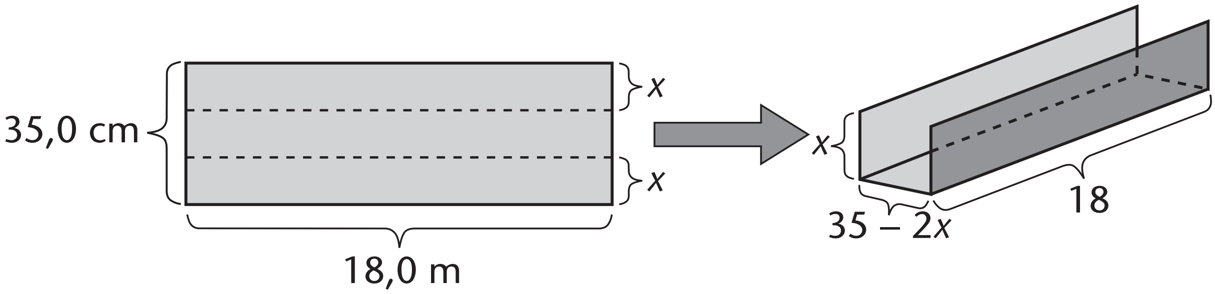
Merkkikaavio:

	0	4	6
V'	+	−	
V	↗	↘	
		max	

Tilavuus on suurin, kun $x = 4$.

Neliön sivu on siis 4 cm ja kehikon korkeus
$(48 - 8 \cdot 4)$ cm $= 16$ cm.

212.



Sivujen pituudet positiivisia:

$x > 0$ ja $35 - 2x > 0$

$-2x > -35$

$x < 17{,}5$

$x \in \left]0;17{,}5\right[$

Tilavuus

$$V(x) = 18x(35 - 2x) = 630x - 36x^2$$

$V'(x) = 630 - 72x$

$V'(x) = 0$ kun

$630 - 72x = 0$

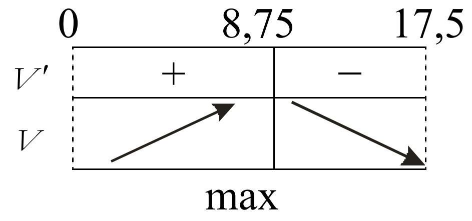
$-72x = -630$

$x = 8{,}75$

Derivaatan merkki:

- $V'(1) = 630 - 72 \cdot 1 = 558 > 0$
- $V'(10) = 630 - 72 \cdot 10 = -90 < 0$

Merkkikaavio:

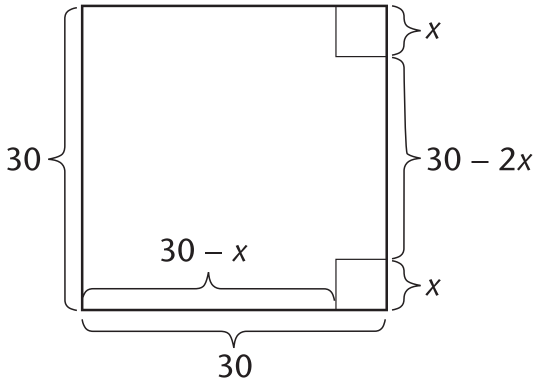


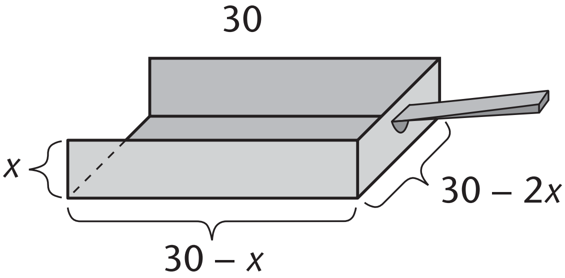
Tilavuus on suurin, kun $x = 8{,}75$.

Kourun mitat ovat:

korkeus 8,75 cm
leveys $(35 - 2 \cdot 8{,}75)\text{ cm} = 17{,}5\,\text{cm}$
pituus 18,0 cm

213. Koska neliön ala on $900\,\text{cm}^2$, neliön sivu on 30 cm.





Sivujen pituudet positiivisia:

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad 30 - 2x > 0$$

$$-2x > -30$$

$$x < 15$$

$$x \in \left]0{,}15\right[$$

Tilavuus

$$\begin{aligned} V(x) &= x(30 - x)(30 - 2x) \\ &= x\left(900 - 60x - 30x + 2x^2\right) \\ &= 900x - 90x^2 + 2x^3 \end{aligned}$$

$$V'(x) = 900 - 180x + 6x^2$$

$V'(x) = 0$ kun

$$900 - 180x + 6x^2 = 0$$

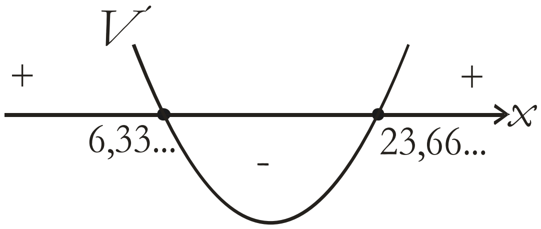
$$x = \frac{-(-180) \pm \sqrt{(-180)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 900}}{2 \cdot 6}$$

$$x = \frac{180 \pm 103{,}92...}{12}$$

$$x = 23{,}66... \quad \text{tai} \quad x = 6{,}33...$$

Juurista vain jälkimmäinen kuuluu välille $x \in \left]0{,}15\right[$.

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



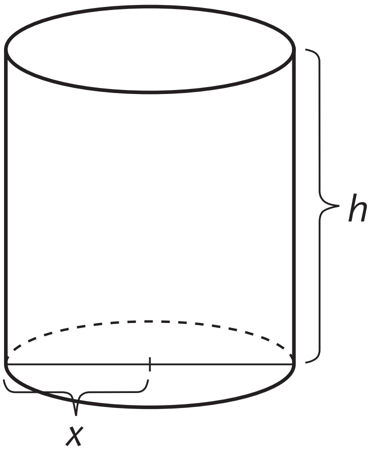
	0		6,33…		15
V'		+		−	
V		↗		↘	
			max		

Tilavuus on suurin, kun $x = 6{,}339...$

Tällöin rikkalapion mitat ovat:

- $(30 - 6{,}33...)\ \text{cm} = 23{,}66...\text{cm} \approx 23{,}7\,\text{cm}$
- $(30 - 2 \cdot 6{,}33...)\ \text{cm} = 17{,}32...\text{cm} \approx 17{,}3\,\text{cm}$
- $6{,}339...\text{cm} \approx 6{,}34\,\text{cm}$

214.



$$2x + h = 20$$

$$h = 20 - 2x$$

Sivujen pituudet positiivisia:

$x > 0$ ja $20 - 2x > 0$

$$-2x > -20$$

$$x < 10$$

$$x \in \left]0, 10\right[$$

Tilavuus

$$\begin{aligned} V(x) &= \pi x^2 \cdot h \\ &= \pi x^2 (20 - 2x) \\ &= \pi \left(20x^2 - 2x^3\right) \end{aligned}$$

$$V'(x) = \pi\left(40x - 6x^2\right)$$

$V'(x) = 0$ kun

$$\pi\left(40x - 6x^2\right) = 0 \quad \big| : \pi$$

$$40x - 6x^2 = 0$$

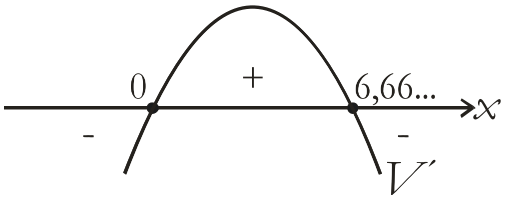
$$x(40 - 6x) = 0$$

$x = 0$ tai $40 - 6x = 0$

$$-6x = -40$$

$$x = \frac{40}{6} = 6{,}66\ldots$$

Derivaatan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Merkkikaavio:

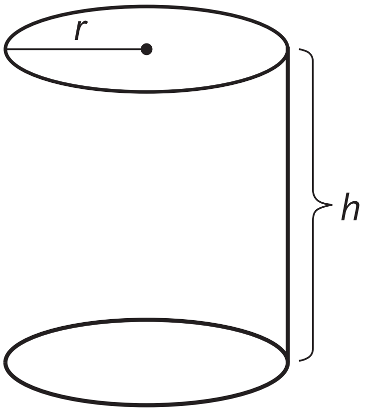
	0		$\frac{40}{6}$		10
V'		+		−	
V		↗		↘	
			max		

Tilavuus on suurin, kun $x = \frac{40}{6} = 6\frac{2}{3}$.

$$V\left(\frac{40}{6}\right) = \pi\left(20\cdot\left(\frac{40}{6}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{40}{6}\right)^3\right) = 930{,}84... \approx 931$$

Tilavuus on 931, kun lieriön korkeus on $6\frac{2}{3} \approx 6{,}7$.

215.



$$2 \cdot 2\pi r + h = 1$$

$$h = 1 - 4\pi r$$

Pituudet positiivisia:

$r > 0$ ja $1 - 4\pi r > 0$

$$-4\pi r > -1$$

$$r < \frac{1}{4\pi} \approx 0{,}08 \quad \text{(m)}$$

$$r \in \left]0, \frac{1}{4\pi}\right[$$

Säde voi siis vaihdella 0 m – 0,08 m eli 0 cm – 8,0 cm

Tilavuus

$$\begin{aligned} V(r) &= \pi r^2 h \\ &= \pi r^2 (1 - 4\pi r) \\ &= \pi (r^2 - 4\pi r^3) \end{aligned}$$

$$V'(r) = \pi (2r - 12\pi r^2)$$

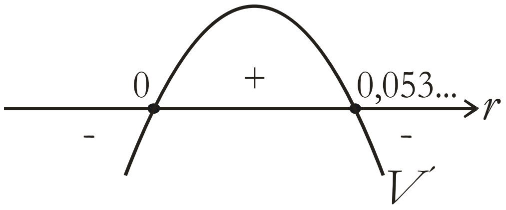
$V'(r) = 0$ kun

$$2r - 12\pi r^2 = 0$$
$$r(2 - 12\pi r) = 0$$

$r = 0$ tai $2 - 12\pi r = 0$

$$-12\pi r = -2$$
$$r = \frac{2}{12\pi} = \frac{1}{6\pi}$$
$$r = 0{,}053...$$

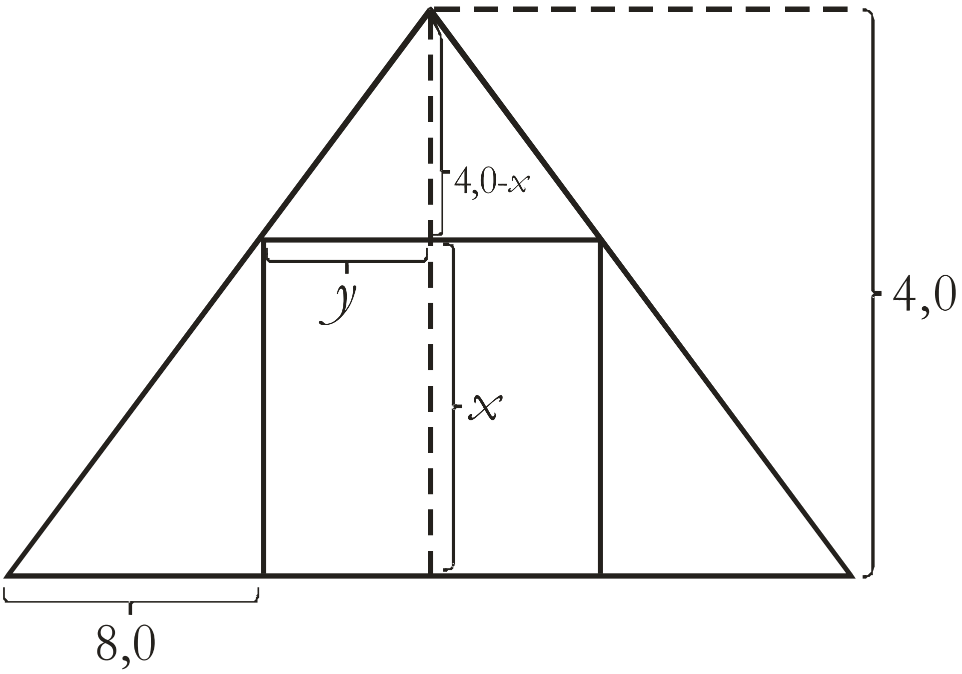
Derivaatan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



	0		$\frac{1}{6\pi}$		$\frac{1}{4\pi}$
V'		+		−	
V		↗		↘	
			max		

Tilavuus on suurin, kun $r = \frac{1}{6\pi}\,\text{m} \approx 0{,}053\,\text{m} = 5{,}3\,\text{cm}$.

216.



Yhdenmuotoisuuden perusteella

$$\frac{4-x}{4}=\frac{y}{8}$$

$$4y=32-8x$$

$$y=8-2x$$

Ala $A(x)=2yx$

$$=2(8-2x)\cdot x$$

$$=16x-4x^2$$

Pituudet positiivisia:

$x>0$ ja $8-2x>0$

$$-2x>-8$$

$$x<4$$

$x\in\,]0,4[$

$A'(x) = 16 - 8x$

$A'(x) = 0$ kun

$$\begin{aligned} 16 - 8x &= 0 \\ -8x &= -16 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $A'(1) = 16 - 8 \cdot 1 = 8 > 0$
- $A'(3) = 16 - 8 \cdot 3 = -8 < 0$

Merkkikaavio:

	0		2		4
A'		+		−	
A		↗		↘	
			max		

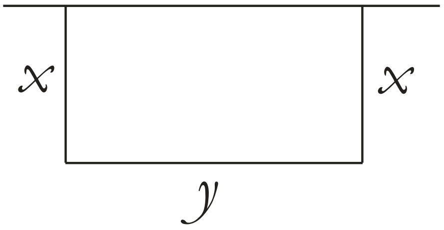
Ala on suurin, kun $x = 2$.

Suorakulmion mitat ovat siis:

kanta $2 \cdot (8 - 2 \cdot 2{,}0)$ cm $= 8{,}0$ cm

korkeus 2,0 cm

217.



$$2x + y = 24$$
$$y = 24 - 2x$$

Sivujen pituudet positiivisia:

$x > 0$ ja $24 - 2x > 0$

$$-2x > -24$$
$$x < 12$$

$x \in \left]0,12\right[$

Ala

$$A(x) = xy$$
$$= x(24 - 2x)$$
$$= 24x - 2x^2$$

$A'(x) = 24 - 4x$

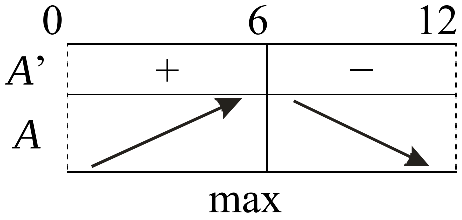
$A'(x) = 0$ kun

$$24 - 4x = 0$$
$$-4x = -24$$
$$x = 6$$

Derivaatan merkki:

- $A'(5) = 24 - 4 \cdot 5 = 4 > 0$
- $A'(5) = 24 - 4 \cdot 7 = -4 < 0$

Merkkikaavio:



Ala on suurin, kun $x = 6$.

Aitauksen mitat:

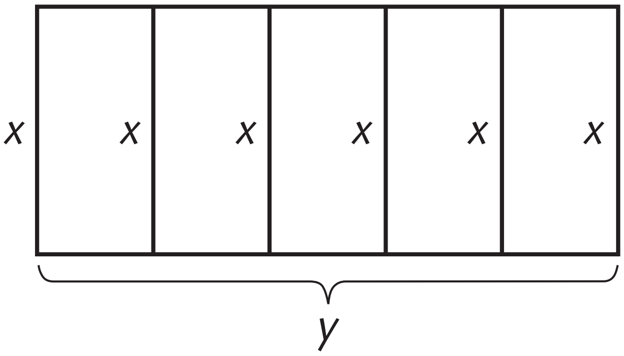
kanta $(24 - 2 \cdot 6)\ \text{m} = 12\,\text{m}$

korkeus 6 m

Ala on $6\,\text{m} \cdot 12\,\text{m} = 72\,\text{m}^2$

218.

$$6x + 2y = 45$$
$$2y = 45 - 6x$$
$$y = 22{,}5 - 3x$$



Sivujen pituudet positiivisia:

$x > 0$ ja $22{,}5 - 3x > 0$

$-3x > -22{,}5$

$x < 7{,}5$

$x \in \left]0; 7{,}5\right[$

Ala

$$\begin{aligned} A(x) &= xy \\ &= x(22{,}5 - 3x) \\ &= 22{,}5x - 3x^2 \end{aligned}$$

$A'(x) = 22{,}5 - 6x$

$A'(x) = 0$ kun

$$\begin{aligned} 22{,}5 - 6x &= 0 \\ -6x &= -22{,}5 \quad |:(-6) \\ x &= 3{,}75 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $A'(1) = 22{,}5 - 6 \cdot 1 = 16{,}5 > 0$
- $A'(4) = 22{,}5 - 6 \cdot 4 = -1{,}5 < 0$

Merkkikaavio:

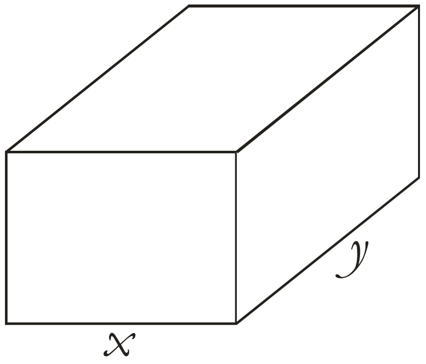
	0	3,75	7,5
A'	+	−	
A	↗	↘	
	max		

Ala on suurin, kun $x = 3{,}75$.

Koska koko alueen leveys on $(22{,}5 - 3 \cdot 3{,}75)$ m $= 11{,}25$ m.

Yhden karsinan leveys $\frac{11{,}25 \text{ m}}{5} = 2{,}25$ m ja korkeus 3,75 m.

219.



$$x + y + 20 = 115$$
$$y = 95 - x$$

Sivujen pituudet positiivisia:

$x > 0$ ja $95 - x > 0$

$$-x > -95$$
$$x < 95$$

$x \in \left]0, 95\right[$

Tilavuus

$$\begin{aligned} V(x) &= 20xy \\ &= 20x(95 - x) \\ &= 1900x - 20x^2 \end{aligned}$$

$$V'(x) = 1900 - 40x$$

$V'(x) = 0$ kun

$$\begin{aligned} 1900 - 40x &= 0 \\ -40x &= -1900 \\ x &= 47{,}5 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $V'(1) = 1900 - 40 \cdot 1 = 1860 > 0$
- $V'(50) = 1900 - 40 \cdot 50 = -100 < 0$

Merkkikaavio:

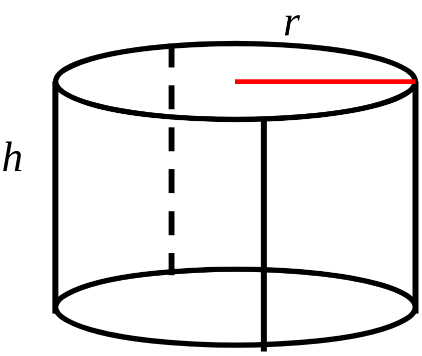
	0		47,5		95
V'		+		−	
V		↗		↘	
			max		

Tilavuus on suurin, kun $x = 47{,}5$.

$$\begin{aligned} V(47{,}5) &= 1900 \cdot 47{,}5 - 20 \cdot 47{,}5^2 \\ &= 45125 \\ &\approx 45000 \end{aligned}$$

Laukun tilavuus on $45000\,\text{cm}^3 = 45\,\text{dm}^3 = 45\,\text{l}$

220. Kehikon rakentamiseen käytössä 2,0 m = 200 cm rautalankaa.



$$2\cdot 2\pi r+4h=200$$

$$4h=200-4\pi r \quad |:4$$

$$h=50-\pi r$$

Pituudet positiivisia:

$r>0$ ja $50 - \pi r > 0$

$$-\pi r>-100 \quad |:(-\pi)$$

$$r<\frac{100}{\pi}=31{,}8...$$

$$r\in \left]0,\frac{100}{\pi}\right[$$

Tilavuus

$$V(x)=\pi r^2 h$$

$$=\pi r^2(50-\pi r)$$

$$=50\pi r^2-\pi^2 r^3$$

$$V'(x)=100\pi r-3\pi^2 r^2$$

$V'(x) = 0$ kun

$100\pi r - 3\pi^2 r^2 = 0$

$r(100\pi - 3\pi^2 r) = 0$

$r = 0$ tai $100\pi - 3\pi^2 r = 0$

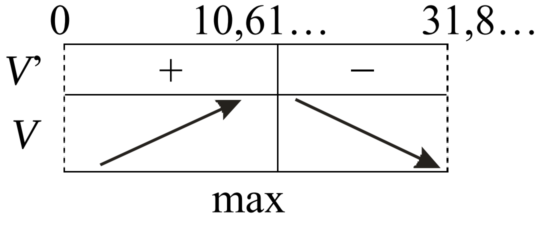
$$-3\pi^2 r=-100\pi \quad |:(-3\pi^2)$$

$$r=\frac{100}{3\pi}=10{,}61...$$

Derivaatan merkki:

- $V'(1) = 100\pi \cdot 1 - 3\pi^2 \cdot 1^2 = 284{,}55...$
- $V'(12) = 100\pi \cdot 12 - 3\pi^2 \cdot 12^2 = -493{,}75...$

Merkkikaavio:



Tilavuus on suurin, kun säde $r = 10{,}61...\text{cm} \approx 11\text{ cm}$.

Kehikon korkeus tällöin

$h = 50 - \pi r = 50 - \pi \cdot 10{,}61\ldots\text{ cm} = 16{,}66\ldots\text{ cm} \approx 17\text{ cm}$

3.4 Derivaatan sovelluksia talouselämästä

221. $f(x) = -\frac{1}{240}x^2 + \frac{11}{24}x,\ 0 \le x \le 80$

$$f'(x) = -\frac{2}{240}x + \frac{11}{24}$$

$f'(x) = 0$ kun

$$-\frac{2}{240}x + {}^{10)}\frac{11}{24} = 0$$

$$-\frac{2}{240}x + \frac{110}{240} = 0 \qquad \Big| \cdot 240$$

$$-2x + 110 = 0$$

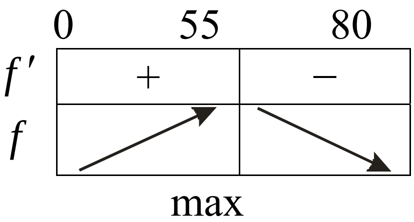
$$-2x = -110$$

$$x = 55$$

Derivaatan merkki:

- $f'(0) = -\frac{2}{240} \cdot 0 + \frac{11}{24} = \frac{11}{24} > 0$
- $f'(60) = -\frac{2}{240} \cdot 60 + \frac{11}{24} = -\frac{1}{24} < 0$

Merkkikaavio:



Verokertymä on suurin, kun veroaste on 55 %.

222. Myynnistä saatavat tulot

$$T(x) = x(2500 - 55x) = 2500x - 55x^2$$

$T'(x) = 2500 - 110x$

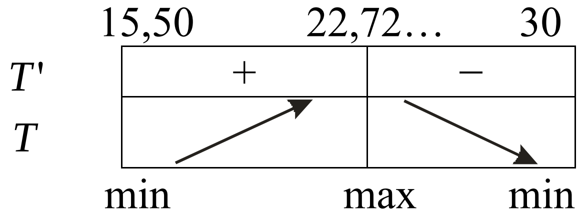
Derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} 2500 - 110x &= 0 \\ -110x &= -2500 \quad |:(-110) \\ x &= 22{,}72... \end{aligned}$$

Derivaatan merkki kun x on välillä [15,50; 30]:

- $T'(20) = 2500 - 110 \cdot 20 = 300 > 0$
- $T'(25) = 2500 - 110 \cdot 25 = -250 < 0$

Merkkikaavio:



a) Myynnistä saatavat tulot olisivat mahdollisimman suuret, kun hinta x = 22,7272… € ≈ 22,70 €

b) Myyntituloilla kaksi minimikohtaa x = 15,50 ja x = 30.

- $T(15{,}50) = 2500 \cdot 15{,}50 - 55 \cdot 15{,}50^2 = 25536{,}30$
- $T(30) = 2500 \cdot 30 - 55 \cdot 30^2 = 25500$

Pienimmät myyntitulot, kun myyntihinta on 30 €.

c) Pienimmät myyntitulot 25 500 €

Suurimmat myyntitulot saadaan, kun x = 22,72… €:

$T(22{,}72...) = 2500 \cdot 22{,}72... - 55 \cdot 22{,}72...^2 = 28409{,}10$

Suurimmat myyntitulot noin 28400 €

223. Kävijämäärä $q(x) = 1300 - 325x$

Maksutulo $m(x) = x(1300 - 325x) = 1300x - 325x^2$

$0 \le x \le 3{,}0$

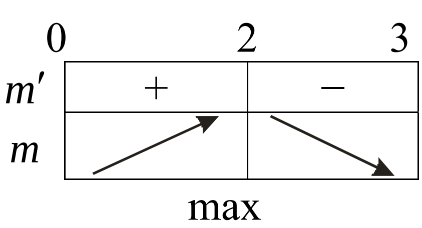
$m'(x) = 1300 - 650x$

$m'(x) = 0$ kun

$$\begin{aligned} 1300 - 650x &= 0 \\ -650x &= -1300 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $m'(1) = 1300 - 650 \cdot 1 = 650 > 0$
- $m'(2{,}5) = 1300 - 650 \cdot 2{,}5 = -325 < 0$



Maksutulo suurin, kun lipun hinta on 2,0 €.

224. Hinta x €/kpl

Myynti/kk $72000-180x$

Myyntitulo

$$m(x)=x(72000-180x)=72000x-180x^2$$

$$x\in[150,400]$$

$$m'(x)=72000-360x$$

$m'(x)=0$ kun

$$72000-360x=0$$

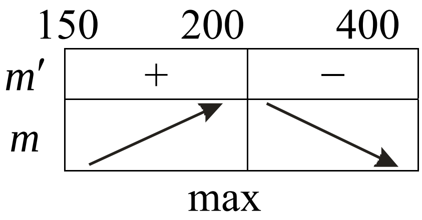
$$-360x=-72000$$

$$x=200$$

Derivaatan merkki:

- $m'(160)=72000-360\cdot 160=14400>0$
- $m'(300)=72000-360\cdot 300=-36000<0$

Merkkikaavio:



Myyntitulo on suurin, kun hinta on 200 €.

225. Myyntihinta x €/kg, $x \in [2{,}10; 4{,}50]$

Myyntimäärä $q(x) = 140 - 15{,}9x$

Myyntitulot $m(x) = x(140 - 15{,}9x) = 140x - 15{,}9x^2$

$x \in [2{,}10; 4{,}50]$

Myynnin arvojen vaihtelu saadaan selville myynnin suurimman ja pienimmän arvon avulla.

$m'(x) = 140 - 31{,}8x$

Derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} 140 - 31{,}8x &= 0 \\ -31{,}8x &= -140 \quad |:(-31{,}8) \\ x &= 4{,}402... \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $m'(3) = 140 - 31{,}8 \cdot 3 = 44{,}6 > 0$
- $m'(4{,}45) = 140 - 31{,}8 \cdot 4{,}45 = -1{,}51 < 0$

Merkkikaavio:

2,10 4,40… 4,50

m'	+	−
m	↗	↘

minimit: $m(2{,}10) = 140 \cdot 2{,}10 - 15{,}9 \cdot 2{,}10^2 = 223{,}88...$

$m(4{,}50) = 140 \cdot 4{,}50 - 15{,}9 \cdot 4{,}50^2 = 308{,}02...$

maksimi: $m(4{,}40...) = 140 \cdot 4{,}40... - 15{,}9 \cdot 4{,}40...^2 = 308{,}17...$

Myyntitulot vaihtelivat välillä 224 € - 308 €.

226. Myyntihinta p (€)

Menekki $q(p) = 8000 - 235p$

Myyntitulo $p(8000 - 235p)$

Ostohinta $18(8000 - 235p)$

Bruttovoitto

$$\begin{aligned} b(x) &= p(8000 - 235p) - 18(8000 - 235p) \\ &= 8000p - 235p^2 - 14400 + 4230p \\ &= -235p^2 + 12230p - 14400 \end{aligned}$$

$p > 0$ ja $8000 - 235p > 0$

$$-235p > -8000$$

$$p < 34{,}04...$$

$x \in \left]0; 34{,}04...\right[$

$b'(p) = -470p + 12230$

$b'(p) = 0$ kun

$$-470p + 12230 = 0$$

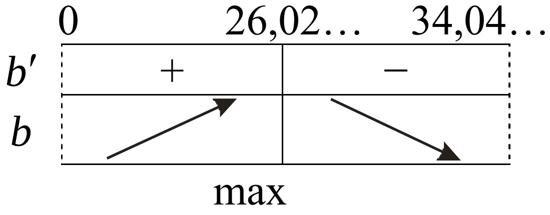
$$-470p = -12230$$

$$p = 26{,}021...$$

Derivaatan merkki:

- $b'(1) = -470 \cdot 1 + 12230 = 11760 > 0$
- $b'(30) = -470 \cdot 30 + 12230 = -1870 < 0$

Merkkikaavio:



Bruttovoitto on suurin, kun myyntihinta on $26{,}02... € \approx 26 €$.

227.

Sämpylän hinta (€)	Päivämyynti (kpl)
$0{,}40$	1200
$0{,}40 + 0{,}1$	$1200 - 200$
$0{,}40 + 0{,}1 \cdot 2$	$1200 - 200 \cdot 2$
$0{,}40 + 0{,}1 \cdot 3$	$1200 - 200 \cdot 3$
$0{,}40 + 0{,}1x$	$1200 - 200x$

Kun hintaa nostettu 0,10 € x kertaa, myyntitulo

$$\begin{aligned} m(x) &= (0{,}40 + 0{,}1x)(1200 - 200x) \\ &= 480 - 80x + 120x - 20x^2 \\ &= -20x^2 + 40x + 480 \end{aligned}$$

$0{,}40 + 0{,}1x > 0 \qquad 1200 - 200x > 0$

$0{,}1x > -0{,}40 \qquad -200x > -1200$

$x > -4 \qquad x < 6$

$-4 < x < 6$

$m'(x) - 40x + 40$

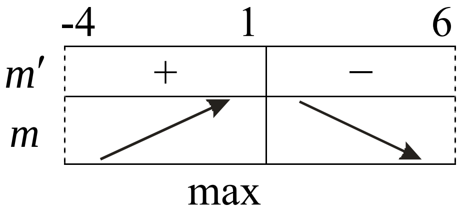
$m'(x) = 0$ kun

$$
\begin{aligned}
-40x + 40 &= 0 \\
-40x &= -40 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

Derivaatan merkki:

- $m'(0) = -40 \cdot 0 + 40 = 40 > 0$
- $m'(2) = -40 \cdot 2 + 40 = -40 < 0$

Merkkikaavio:



Myyntitulo on suurin, kun $x = 1$.
Tällöin myyntihinta on $(0{,}40 + 0{,}1 \cdot 1)€ = 0{,}50\,€$.

228.

Alepäivä	Hinta (€)	Myynti (kpl)
1	120	200
2	$120-10$	$200+50$
3	$120-10\cdot 2$	$200+50\cdot 2$
4	$120-10\cdot 3$	$200+50\cdot 3$
x	$120-10\cdot(x-1)$	$200+50(x-1)$

Myyntitulo

$$\begin{aligned} m(x) &= \left(120-10(x-1)\right)\left(200+50(x-1)\right) \\ &= \left(120-10x+10\right)\left(200+50x-50\right) \\ &= \left(130-10x\right)\left(150+50x\right) \\ &= 19500+6500x-1500x-500x^2 \\ &= -500x^2+5000x+19500 \end{aligned}$$

Positiivisuusehdot:

$$\begin{aligned} 120-10(x-1) &> 0 & \qquad 200+50(x-1) &> 0 \\ 120-10x+10 &> 0 & 200+50x-50 &> 0 \\ -10x &> -130 & 50x &> -150 \\ x &< 13 & x &> -3 \end{aligned}$$

Koska lisäksi $x>0$, $x\in\left]0,13\right[$.

$$m'(x)=-1000x+5000$$

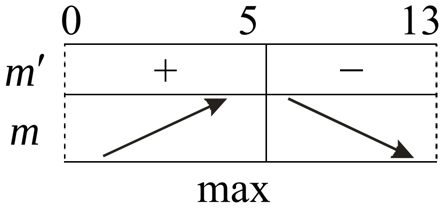
$m'(x)=0$ kun

$$\begin{aligned} -1000x+5000 &= 0 \\ -1000x &= -5000 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $m'(1) = -1000 \cdot 1 + 5000 = 4000 > 0$
- $m'(6) = -1000 \cdot 6 + 5000 = -1000 < 0$

Merkkikaavio:



a) Myyntitulo on suurin, kun $x = 5$.
Tällöin on alennusmyynnin 5. päivä.

b) Suurin myyntitulo

$$m(5) = -500 \cdot 5^2 + 5000 \cdot 5 + 19500 = 32000\,€$$

229.

Henkilöitä yrityksessä	Tuotto/myyjä
24	6500
24 + 1	6500 – 200
24 + 2	$6500 - 200 \cdot 2$
24 + 3	$6500 - 200 \cdot 3$
$24 + x$	$6500 - 200x$

Kuukauden myyntitulo

$$\begin{aligned} m(x) &= (24 + x)(6500 - 200x) \\ &= 156000 - 4800x + 6500x - 200x^2 \\ &= -200x^2 + 1700x + 156000 \end{aligned}$$

Positiivisuusehdot:

$$24 + x > 0 \qquad\qquad 6500 - 200x > 0$$

$$x > -24 \qquad\qquad -200x > -6500$$

$$x < 32{,}5 \approx 33$$

$$x \in \left]-24, 33\right[$$

Lisäksi *x* on kokonaisluku.

$$m'(x) = -400x + 1700$$

$m'(x) = 0$ kun

$$-400x + 1700 = 0$$

$$x = 4{,}25$$

Derivaatan merkki:

- $m'(0) = -400 \cdot 0 + 1700 = 1700 > 0$
- $m'(5) = -400 \cdot 5 + 1700 = -300 < 0$

Merkkikaavio:

	-24		4,25		33
m'		+		−	
m		↗		↘	
			max		

Myyntitulo on suurin, kun $x = 4{,}25 \approx 4$.

a) Yrityksen kannattaa siis pitää palkkalistoillaan $24 + 4 = 28$ henkilöä.

b) Suurin myyntitulo

$$m(4) = -200 \cdot 4^2 + 1700 \cdot 4 + 156000 = 159600\,€$$

230.

Hinta (€)	Myynti (kpl)
1,20	200
$1{,}20 + 0{,}1$	$200 - 10$
$1{,}20 + 0{,}1 \cdot 2$	$200 - 10 \cdot 2$
$1{,}20 + 0{,}1 \cdot 3$	$200 - 10 \cdot 3$
$1{,}20 + 0{,}1x$	$200 - 10x$

Voitto

$$\begin{aligned} v(x) &= (1{,}20 + 0{,}1x)(200 - 10x) - 0{,}90(200 - 10x) \\ &= 240 - 12x + 20x - x^2 - 180 + 9x \\ &= -x^2 + 17x + 60 \end{aligned}$$

Positiivisuusehdot:

$1{,}20 + 0{,}1x > 0$	$200 - 10x > 0$
$0{,}1x > -1{,}20$	$-10x > -200$
$x > -12$	$x < 20$

$x \in \left]-12, 20\right[$

$v'(x) = -2x + 17$

$v'(x) = 0$ kun

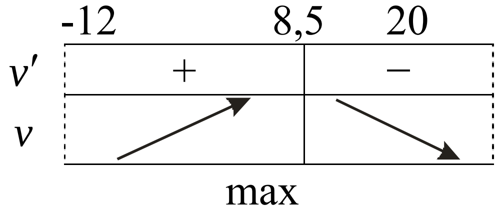
$$-2x + 17 = 0$$

$$x = 8{,}5$$

Derivaatan merkki:

- $v'(0) = -2 \cdot 0 + 17 = 17 > 0$
- $v'(10) = -2 \cdot 10 + 17 = -3 < 0$

Merkkikaavio:



Suurimmat voitot saadaan, kun $x = 8{,}5$.
Tällöin leivän hinta on $(1{,}20 + 0{,}1 \cdot 8{,}5)€ = 2{,}05\,€$

231.

Hinta (€)	Myynti (kpl)
35	25
35 + 1	25 – 1
35 + 2	25 – 2
35 + x	25 - x

Tulo mainoskustannusten jälkeen

$$\begin{aligned} V(x) &= (35 + x)(25 - x) - 0{,}3(25 - x) \\ &= 875 - 35x + 25x - x^2 - 7{,}5 + 0{,}3 \\ &= -x^2 - 9{,}7x + 867{,}5 \end{aligned}$$

Positiivisuusehdot:

$$35 + x > 0 \qquad\qquad 25 - x > 0$$

$$x > -35 \qquad\qquad -x > -25$$

$$x < 25$$

$x \in \left]-35, 25\right[$

$V'(x) = -2x - 9{,}7$

$V'(x) = 0$ kun

$$-2x - 9{,}7 = 0$$

$$x = -4{,}85$$

Derivaatan merkki:

- $V'(-5) = -2 \cdot (-5) - 9{,}7 = 0{,}3 > 0$
- $V'(0) = -2 \cdot 0 - 9{,}7 = -9{,}7 < 0$

Merkkikaavio:

	-35		-4,85		25
v'		+		−	
v		↗		↘	
			max		

Voitto on suurin, kun $x = -4{,}85$.

Tossujen hinta on tällöin $(35 - 4{,}85)€ = 30{,}15\,€$.

232. **Jos OVH-hintaa alennetaan:**

OVH (€)	Myynti (kg)
$13{,}20$	120
$13{,}20-0{,}05$	$120+3$
$13{,}20-0{,}05\cdot 2$	$120+3\cdot 2$
$13{,}20-0{,}05\cdot 3$	$120+3\cdot 3$
$13{,}20-0{,}05x$	$120+3x$

Voitto

$$\begin{aligned} v(x) &= (13{,}20-0{,}05x)(120+3x)-10(120+3x) \\ &= 1584+39{,}6x-6x-0{,}15x^2-1200-30x \\ &= -0{,}15x^2+3{,}6x+384 \end{aligned}$$

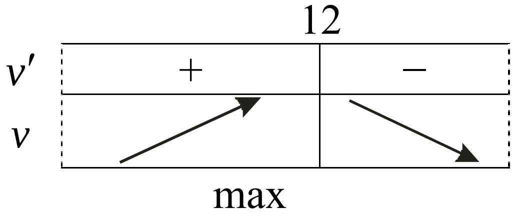
$$v'(x) = -0{,}3x+3{,}6$$

$v'(x)=0$ kun

$$\begin{aligned} -0{,}3x+3{,}6 &= 0 \\ -0{,}3x &= -3{,}6 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $v'(10) = -0{,}3\cdot 10+3{,}6 = 0{,}6 > 0$
- $v'(13) = -0{,}3\cdot 13+3{,}6 = -0{,}3 < 0$



Voitto on suurin, kun $x=12$.

$$v(12) = -0{,}15\cdot 12^2+3{,}6\cdot 12+384 = 405{,}6 \text{ (€)}$$

Jos OVH-hintaa korotetaan:

Voitto

$$\begin{aligned} k(x) &= (13{,}20 + 0{,}1x)(120 - 2x) - 10(120x - 2x) \\ &= 1584 - 26{,}4x + 12x - 0{,}2x^2 - 1200 + 20x \\ &= -0{,}2x^2 + 5{,}6x + 384 \end{aligned}$$

$$k'(x) = -0{,}4x + 5{,}6$$

$k'(x) = 0$ kun

$$-0{,}4x + 5{,}6 = 0$$

$$x = 14$$

Derivaatan merkki:

- $k'(13) = -0{,}4 \cdot 13 + 5{,}6 = 0{,}4 > 0$
- $k'(15) = -0{,}4 \cdot 15 + 5{,}6 = -0{,}4 < 0$

	14	
k'	+	−
k	↗	↘
	max	

Voitto on suurin, kun $x = 14$.

$$k(14) = -0{,}2 \cdot 14^2 + 5{,}6 \cdot 14 + 384 = 423{,}2 \text{ (€)}$$

Voittofunktio *k* tuottaa suuremman arvon.
Kun $x = 14$, kalan OVH-hinta on $(13{,}20 + 14 \cdot 0{,}1)€ = 14{,}60\,€$

4. Kertausosa

1. a) $f(x)=-\frac{3}{4}x-12$

$f(x)=0$, kun

$$-\frac{3}{4}x-12=0$$

$$-\frac{3}{4}x=12 \quad \Big| :\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$x=-16$$

b) $f(x)=2x^2+4x-6$

$f(x)=0$, kun

$$2x^2+4x-6=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 2\cdot(-6)}}{2\cdot 2}$$

$$x=\frac{-4\pm 8}{4}$$

$$x=1 \text{ tai } x=-3$$

2. Paraabeli $y = ax^2 + bc + c$ aukeaa

- ylöspäin, jos $a > 0$
- alaspäin, jos $a < 0$

a) Funktion $g(x) = 3x^2 - x - 1$ kuvaaja on paraabeli, jolle $a = 3 > 0$. Se aukeaa ylöspäin.

b) Funktion $g(x) = -x - x^2 = -x^2 - x$ kuvaaja on paraabeli, jolle $a = -1 < 0$. Se aukeaa alaspäin.

3. Funktio leikkaa *x*-akselin kohdassa *f*(*x*) = 0.

a) $-x + 5 = 0$

$$-x = -5$$
$$x = 5$$

b) $4x^2 - 11x + 6 = 0$

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6}}{2 \cdot 4}$$
$$= \frac{11 \pm 5}{8}$$
$$x = 2 \qquad \text{tai} \qquad x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

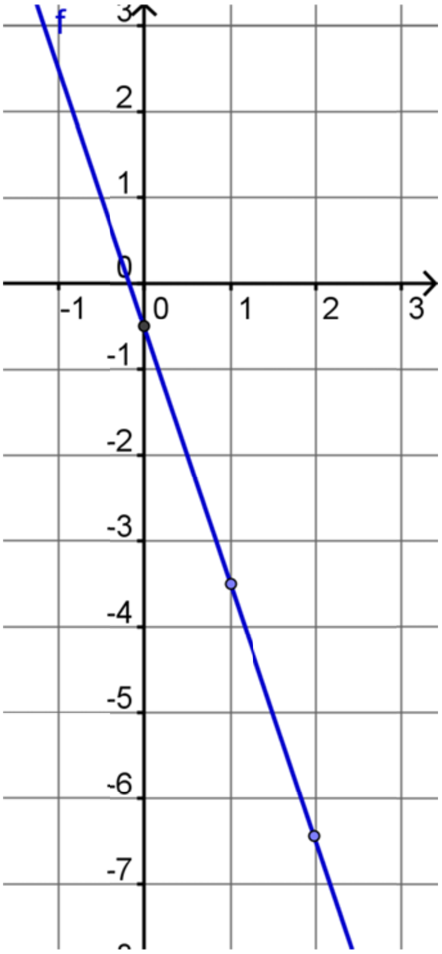
4. a) Sievennetään ensin funktion lauseketta.

$$f(x) = -x - \frac{4x+1}{2}$$

$$= -x - \frac{4x}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= -x - 2x - \frac{1}{2}$$

$$= -3x - \frac{1}{2}$$



x	$f(x) = -3x - \frac{1}{2}$
0	$-\frac{1}{2}$
1	$-3\frac{1}{2}$
2	$-6\frac{1}{2}$

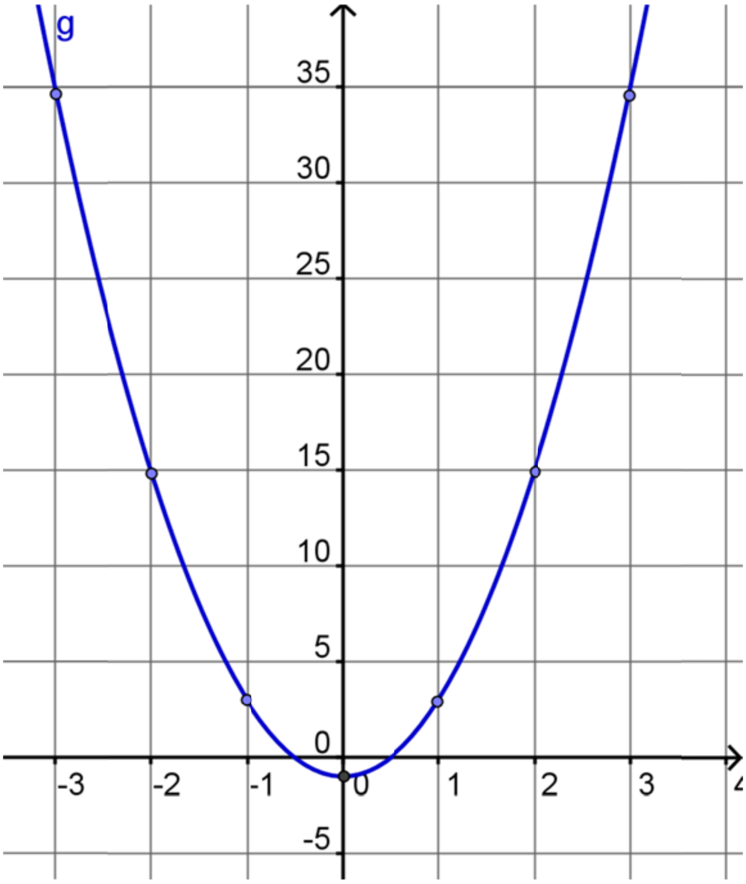
Piste (-1, 3) on kuvaajalla, jos f(-1) = 3.

$$f(1) = -3 \cdot (-1) - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2} \neq 3$$

Piste ei ole kuvaajalla

b) $g(x) = 4x^2 - 1$

x	$g(x) = 4x^2 - 1$
0	-1
1	3
2	15
3	35
-1	3
-2	15
-3	35



Piste (-1, 3) on kuvaajalla, jos $f(-1) = 3$.

$$f(-1) = 4 \cdot (-1)^2 - 1 = 3$$

Piste on kuvaajalla.

5. a) ***x*-akseli:**

$$f(x)=0$$

$$\frac{x-1}{4}+x=0 \quad |\cdot 4$$

$$x-1+4x=0$$

$$5x=1$$

$$x=\frac{1}{5}$$

Pisteessä $\left(\frac{1}{5},0\right)$

***y*-akseli:**

$$f(0)=\frac{0-1}{4}+0=-\frac{1}{4}$$

Pisteessä $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$

b) ***x*-akseli:**

$$f(x)=0$$

$$(x-1)(-3x+2)=0$$

$$x-1=0 \quad \text{tai} \quad -3x+2=0$$

$$x=1 \qquad\qquad -3x=-2 \quad |:(-3)$$

$$x=\frac{2}{3}$$

Pisteissä (1, 0) ja $\left(\frac{2}{3},0\right)$

***y*-akseli:**

$$f(0)=(0-1)(-3\cdot 0+2)=-2$$

Pisteessä (0, -2)

6. a) $0 \leq x \leq 3$

b) $-5 \leq x \leq 15$

c) $x > 0{,}2$

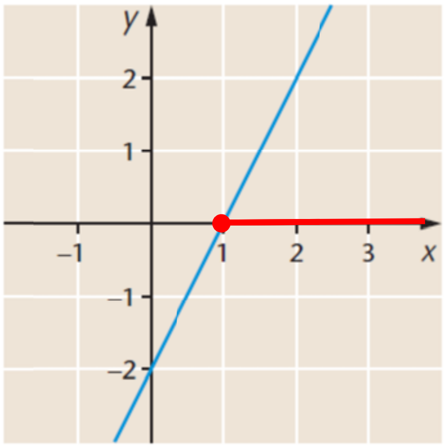
d) $x \leq 12$

7. a) $x \in]1,8[$

b) $x \in]26,30]$

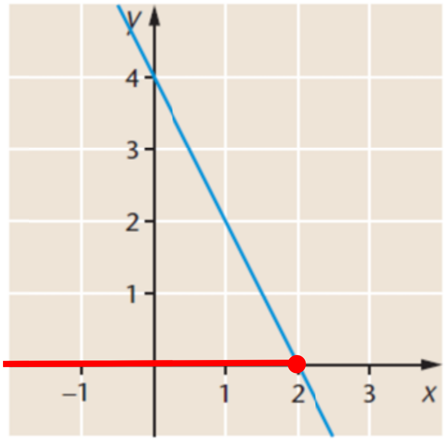
c) $x \in [-4,\infty[$

8. a)



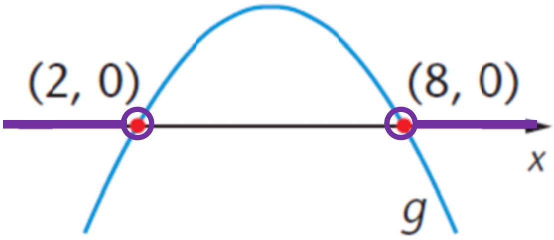
$f(x) \geq 0$, kun
$x \geq 1$

b)



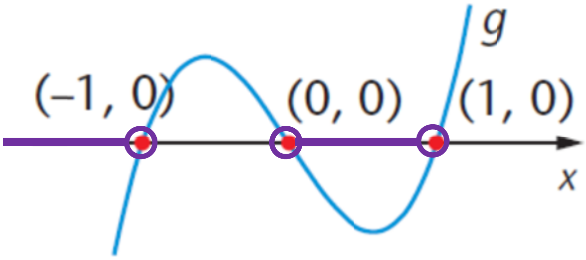
$f(x) \geq 0$, kun
$x \leq 2$

9. a)



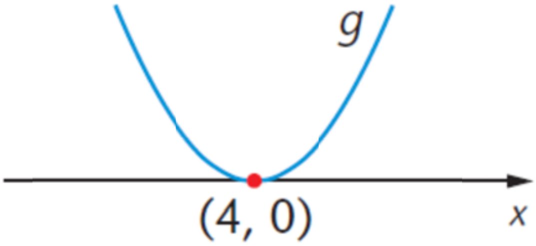
$g(x) < 0$, kun
$x < 2$ tai $x > 8$

b)



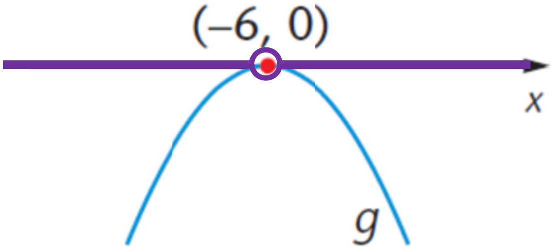
$g(x) < 0$, kun
$x < -1$ tai $0 < x < 1$

c)



$g(x)$ ei ole negatiivinen millään muuttujan x arvolla.

d)



$g(x) < 0$, kun
$x \neq -6$

10. a)

$$-2(4x-3)<x-(3x-2)$$

$$-8x+6<x-3x+2$$

$$-8x-x+3x<2-6$$

$$-6x<-5 \qquad \Big| :(-6)$$

$$x>\frac{2}{3}$$

b)

$$3x-\frac{2x}{3}\geq\frac{2x+5}{2}$$

$$^{6)}\frac{3x}{1}-{}^{2)}\frac{2x}{3}\geq{}^{3)}\frac{2x+5}{2}$$

$$\frac{18x}{6}-\frac{4x}{6}\geq\frac{6x+15}{6} \qquad \Big| \cdot 6$$

$$18x-4x\geq 6x+15$$

$$8x\geq 15$$

$$x\geq\frac{15}{8}$$

11. $x^2 - 3x + 2 \leq 0$

Tarkastellaan funktiota $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Nollakohdat:

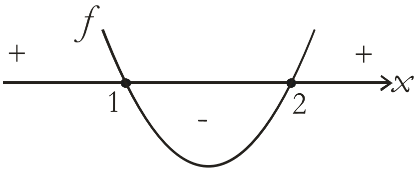
$x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

f:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli:



$f(x) \leq 0$ kun $1 \leq x \leq 2$.

b)

$x > 5x^2$

$x - 5x^2 > 0$

Tarkastellaan funktiota $f(x) = x - 5x^2$.

Nollakohdat:

$x - 5x^2 = 0$

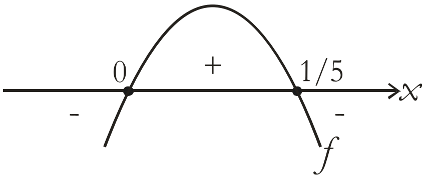
$x(1 - 5x) = 0$

$x = 0$ tai $1 - 5x = 0$

$-5x = -1$

$x = \frac{1}{5}$

f:n kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli:



$f(x) > 0$ kun $0 < x < \frac{1}{5}$

12.

$$(x-1)^2 > 1$$
$$(x-1)(x-1)-1 > 0$$
$$x^2 - x - x + 1 - 1 > 0$$
$$x^2 - 2x > 0$$

Merkitään $f(x) = x^2 - 2x$

f:n nollakohdat:

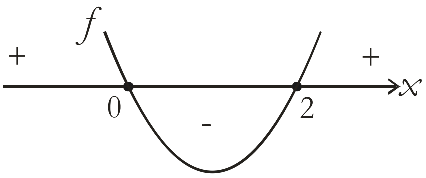
$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x = 0$ tai $x - 2 = 0$

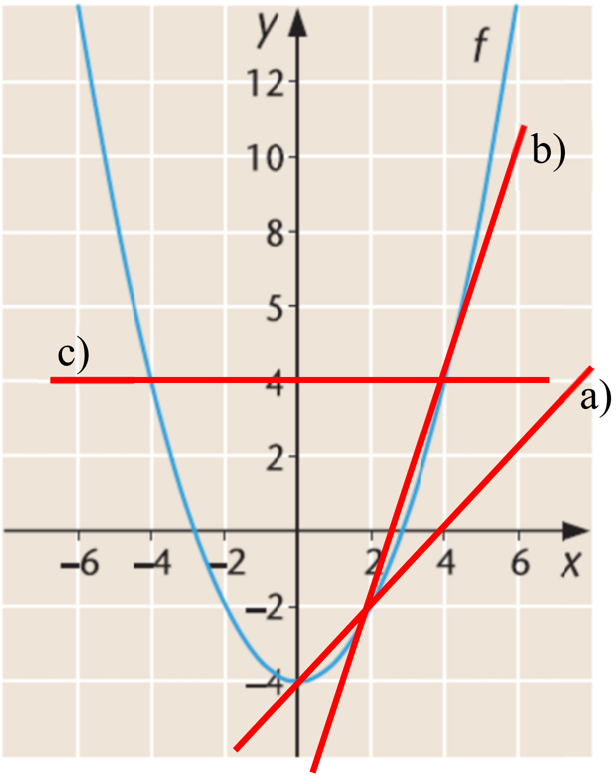
$x = 2$

f:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli:



$f(x) > 0$ eli $(x-1)^2 > 1$, kun $x < 0$ tai $x > 2$.

13. a) Kun lasketaan muutosnopeus välillä $[0,2]$, määritetään pisteiden (0, -4) ja (2, -2) kautta piirretyn suoran kulmakerroin:



$$\frac{-2-(-4)}{2-0}=\frac{2}{2}=1$$

b) Pisteiden (2, -2) ja (4, 4) kautta piirretyn suoran kulmakerroin:

$$\frac{-2-4}{2-4}=3$$

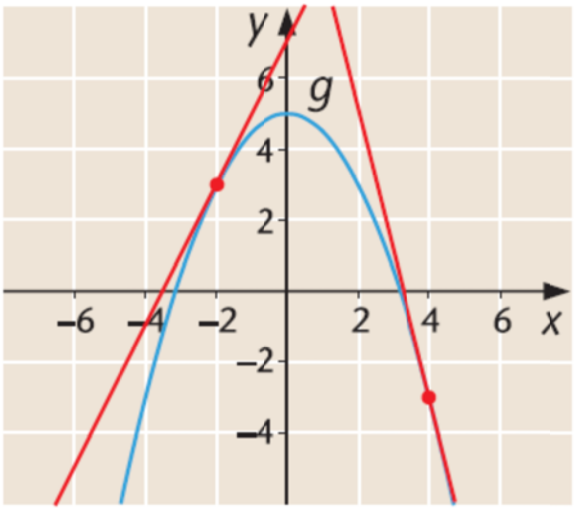
c) Pisteiden (-4 ,4) ja (4, 4) kautta piirretyn suoran kulmakerroin:

$$\frac{4-4}{-4-4}=0$$

14. a) Kohtaan $x = -2$ piirretty tangentti kulkee pisteiden (-2, 3) ja (0, 7) kautta.

Tangentin kulmakerroin:

$$\frac{3-7}{-2-0} = \frac{-4}{-2} = 2$$

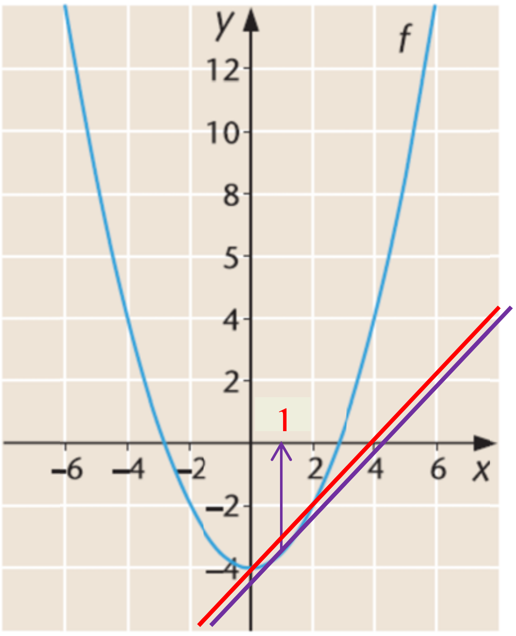


b) Kohtaan $x = 4$ piirretty tangentti kulkee pisteiden (4, -3) ja (2, 5) kautta.

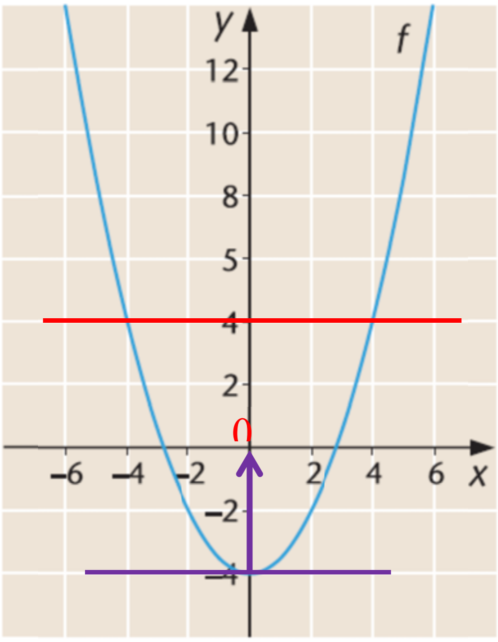
Tangentin kulmakerroin:

$$\frac{5-(-3)}{2-4} = \frac{8}{-2} = -4$$

15. a) kohdassa $x \approx 1$



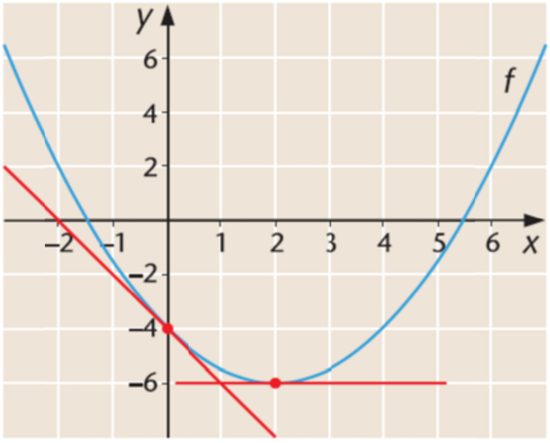
b) kohdassa $x = 0$



16. Funktion *f* kuvaaja kulkee pisteiden (0, -4) ja (2, -6) kautta. Näin ollen

$f(0) = -4$

$f(2) = -6$



Kohtaan $x = 0$ piirretty tangentti kulkee pisteiden (0, -4) ja (-2, 0) kautta. Sen kulmakerroin on

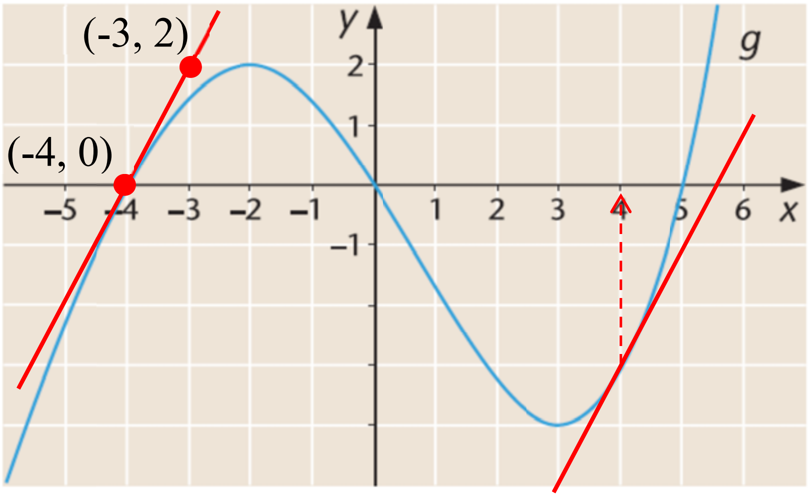
$$\frac{0-(-4)}{-2-0} = \frac{4}{-2} = -2\,.$$

Kohtaan $x = 2$ piirretty tangentti on *x*-akselin suuntainen ja sen kulmakerroin on nolla. Niinpä $f'(2) = 0$.

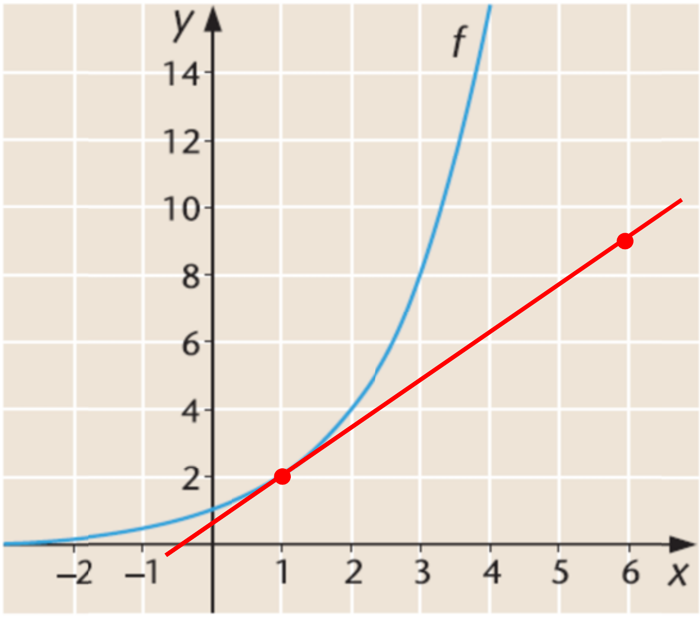
17. a) Kohtaan x = -4 piirretyn tangentin kulmakerroin on:

$$k = \frac{2-0}{-3-(-4)} = \frac{2}{1} = 2 \qquad f'(-4) \approx 2$$

b) Yhdensuuntainen tangenttisuora löytyy kohdasta x = 4, joen tässä kohdassa derivaatalla on sama arvo.



18. Kohtaan $x = 1$ piirretty tangentti kulkee pisteiden (1, 2) ja (6, 9) kautta.



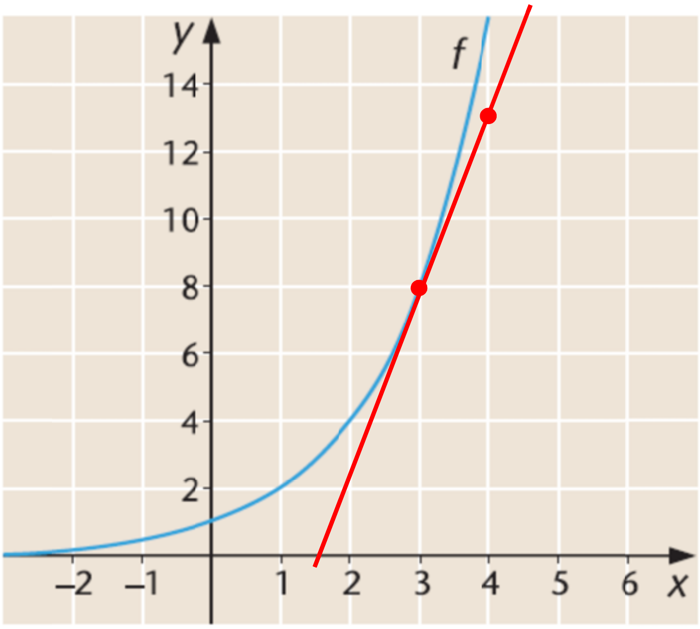
Sen kulmakerroin on

$$\frac{9-2}{6-1} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

eli $f'(1) \approx 1{,}4$.

Huom!
Piirrostarkkuudesta riippuen yhtä hyväksyttäviä tuloksia olisivat arvot välillä $]1{,}2[$.

Kohtaan $x = 3$ piirretty tangentti kulkee pisteiden (3, 8) ja (4, 13) kautta.



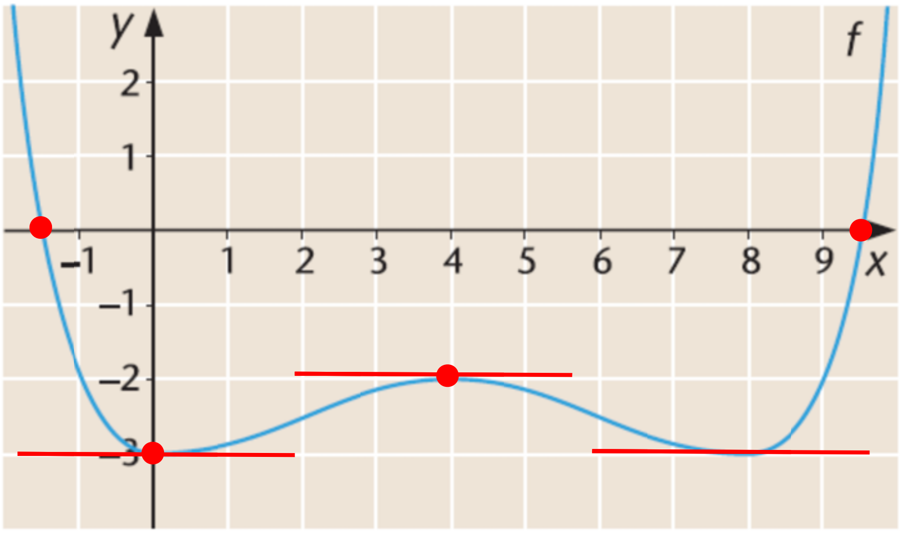
Koska sen kulmakerroin

on $\frac{13-8}{4-3} = \frac{5}{1} = 5$,

$f(3) \approx 5$.

19. a) Nollakohdissa g:n kuvaaja leikkaa x-akselin.

$g(x) = 0$ kun $x \approx -1{,}5$ tai $x \approx 9{,}5$.



b) Derivaatan nollakohdissa tangenttisuora on vaakasuora (eli suoran kulmakerroin on nolla).

Derivaatan nollakohtia ovat: $x \approx 0$, $x \approx 4$ ja $x \approx 8$

20. a) $\mathrm{D}(-4) = 0$

b) $\mathrm{D}(5x) = 5$

c) $\mathrm{D}(x^4) = 4 \cdot x^{4-1} = 4x^3$

d) $\mathrm{D}(-3x+12) = \mathrm{D}(-3x) + \mathrm{D}(12) = -3$

e) $\mathrm{D}(-4x^7) = -4 \cdot 7x^{7-1} = -28x^6$

f) $\mathrm{D}(x^2 + 6x) = \mathrm{D}(x^2) + \mathrm{D}(6x) = 2x + 6$

21. a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 7$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} - 5 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 1 \\ &= 6x^2 - 10x - 1 \end{aligned}$$

b) $f(t) = 3t(4t - 1) = 12t^2 - 3t$

$$f'(t) = 24t - 3$$

c) Sievennetään ensin funktion lauseke:

$$\begin{aligned} f(a) &= (6 - 5a)^2 \\ &= (6 - 5a)(6 - 5a) \\ &= 36 - 30a - 30a + 25a^2 \\ &= 25a^2 - 60a + 36 \end{aligned}$$

$$f'(a) = 50a - 60$$

d) $f(x) = \dfrac{9x^3 - 6x}{3} = 3x^3 - 2x$

$$f'(x) = 9x^2 - 2$$

22. Sievennetään ensin funktion lauseke:

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^3(x-1)+x(x-2)(x+2) \\ &= x^4-x^3+x\left(x^2+2x-2x-4\right) \\ &= x^4-x^3+x\left(x^2-4\right) \\ &= x^4-x^3+x^3-4x \\ &= x^4-4x \end{aligned}$$

Derivaatta: $Q'(x)=4x^3-4$

$$Q(-2)=(-2)^4-4\cdot(-2)=16+8=24$$

$$Q'(-2)=4\cdot(-2)^3-4=4\cdot(-8)-4=-36$$

23. $f(x)=4x^2-5x+1$ ja $g(x)=-6x^2-2x-5$

$f'(x)=8x-5$ $g'(x)=-12x-2$

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(f+g) &= \mathrm{D}\left(4x^2-5x+1-6x^2-2x-5\right) \\ &= \mathrm{D}\left(-2x^2-7x-4\right) \\ &= -4x-7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{D}f+\mathrm{D}g &= f'(x)+g'(x) \\ &= 8x-5-12x-2 \\ &= -4x-7 \end{aligned}$$

Näin ollen $\mathrm{D}(f+g)=\mathrm{D}f+\mathrm{D}g$ funktioille *f* ja *g*.

24. a) Derivoidaan ensin funktio.

$$f'(x) = 3 \cdot 1 + 0 = 3$$

$$f'(2) = 3$$

b) Funktion derivaatta:

$$f'(x) = 4 \cdot 3x^2 - \frac{3}{2} \cdot 1 = 12x^2 - \frac{3}{2}$$

$$f'(2) = 12 \cdot 2^2 - \frac{3}{2} = 12 \cdot 4 - 1\frac{1}{2} = 46\frac{1}{2}$$

25. a) $f(x) = 5x^2 - 4x$

$f'(x) = 10x - 4$

$f'(x) = 0$ kun

$$\begin{aligned} 10x - 4 &= 0 \\ 10x &= 4 \quad \Big| :10 \\ x &= \frac{2}{5} \\ x &= 0{,}4 \end{aligned}$$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x$

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 36$

$f'(x) = 0$ kun

$3x^2 - 12x - 36 = 0$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-36)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{12 \pm 24}{6}$$

$x = 6$ tai $x = -2$

26. $f(x) = -x^2 + tx - 2$

$f'(x) = -2x + t$

Koska $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$,

$$-2 \cdot \frac{3}{2} + t = 0$$

$$-3 + t = 0$$

$$t = 3$$

27. Derivoidaan funktio

$$f'(x)=3x^2+2\cdot 2x-4\cdot 1=3x^2+4x-4$$

Ratkaistaan yhtälö

$$f'(x)=0$$

$$3x^2+4x-4=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 3\cdot(-4)}}{2\cdot 3}$$

$$x=\frac{-4\pm 8}{6}$$

$$x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \qquad \text{tai} \qquad x=\frac{-12}{6}=-2$$

28. Funktion kuvaaja on paraabeli, jonka huippu löytyy derivaatan nollakohdasta.

Derivoidaan funktio:

$$f'(x)=-3\cdot 2x+18=-6x+18$$

Derivaatan nollakohta:

$$-6x+18=0$$

$$-6x=-18 \quad |:(-6)$$

$$x=3$$

Huippupisteen x-koordinaatti on $x = 3$.

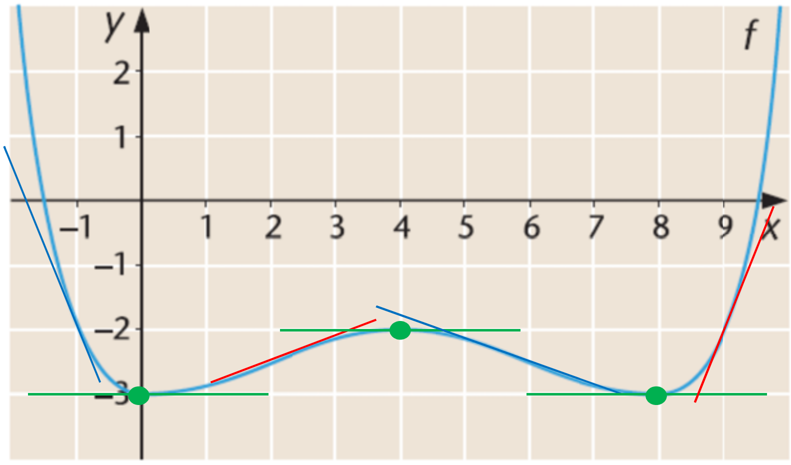
Huippupisteen y-koordinaatti $y=f(3)=-3\cdot 3^2+18\cdot 3-3=24$

Huippupiste (-3, 24).

29. a) $f'(x) = 0$, kun $x \approx 0$ tai $x \approx 4$ tai $x \approx 8$

b) $f'(x) > 0$, kun $0 < x < 4$ tai $x > 8$

c) $f'(x) < 0$, kun $x < 0$ tai $4 < x < 8$



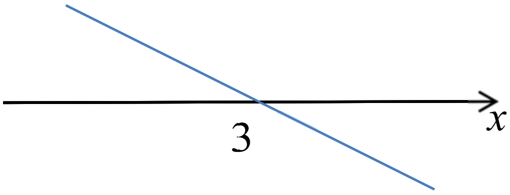
30. Derivoidaan funktio:

$$g'(x) = -3 \cdot 2x + 18 \cdot 1 = -6x + 18$$

Derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ -6x + 18 &= 0 \\ -6x &= -18 \quad |:(-6) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Derivaattafunktion kuvaaja:



$g\,'(x) \le 0$, kun $x \ge 3$

31. $g(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2$

Derivaatta: $g'(x)=x^2-4x$

$g'(x)=0$ kun

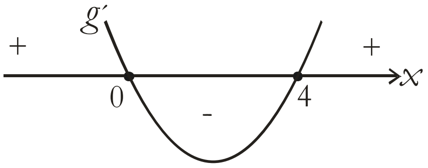
$x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$

$x=0$ tai $x-4=0$

$x=4$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



$g'(x)\le 0$, kun $0\le x\le 4$

32. Derivaatta: $f'(x)=3x^2+2x+3$

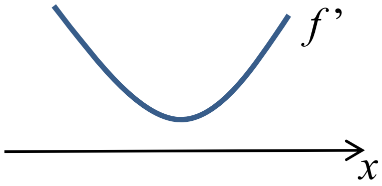
Derivaatan nollakohdat:

$$3x^2+2x+3=0$$

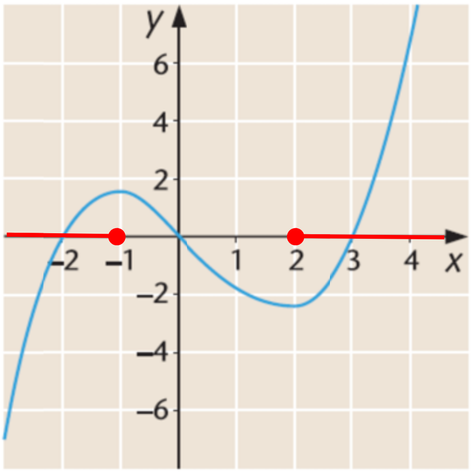
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot3\cdot3}}{2\cdot3}=\frac{-2\pm\sqrt{-32}}{6}$$

Derivaatalla ei ole nollakohtia, joten derivaatan kuvaaja ei leikkaa x-akselia.

Koska derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, saa derivaatta aina positiivisia arvoja.

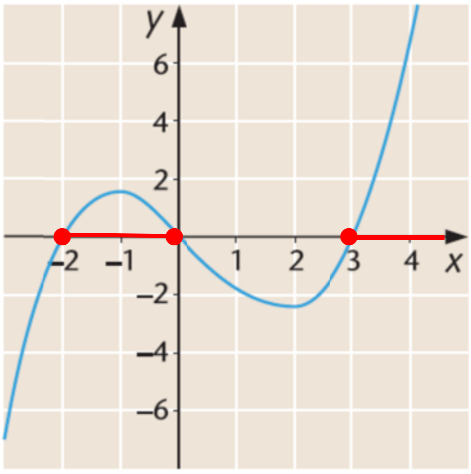


33. a) Derivaatta saa positiivisia arvoja (tai arvon nolla), kun funktio on kasvava.



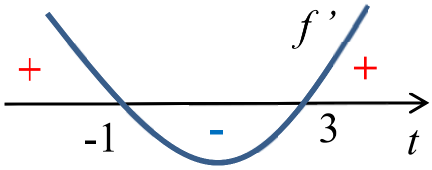
Funktio *g* on kasvava, kun $x \leq -1$ tai $x \geq 2$.

b) Funktio saa positiivisia arvoja, kun kuvaaja kulkee *x*-akselin yläpuolella.



Funktion *g* on siis kasvava, kun $-2 \leq x \leq 0$ tai $x \geq 3$.

34. Hahmotellaan derivaatan kuvaaja.



Derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio:

	-1	3	
f'	+	-	+
f	↗	↘	↗

Funktio *f* on kasvava, kun $t \leq -1$ tai $t \geq 3$.

35. $g(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 3x^2$

Derivoidaan funktio

$$g'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 6x$$

Derivaatan nollakohdat

$$g'(x) = 0, \text{ kun}$$

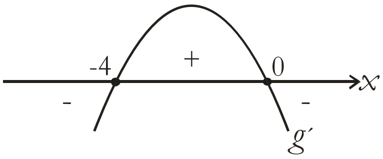
$$-\frac{3}{2}x^2 - 6x = 0$$

$$x\left(-\frac{3}{2}x - 6\right) = 0$$

$$x = 0 \qquad \text{tai} \qquad -\frac{3}{2}x - 6 = 0$$

$$x = -4$$

Derivaatan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli:



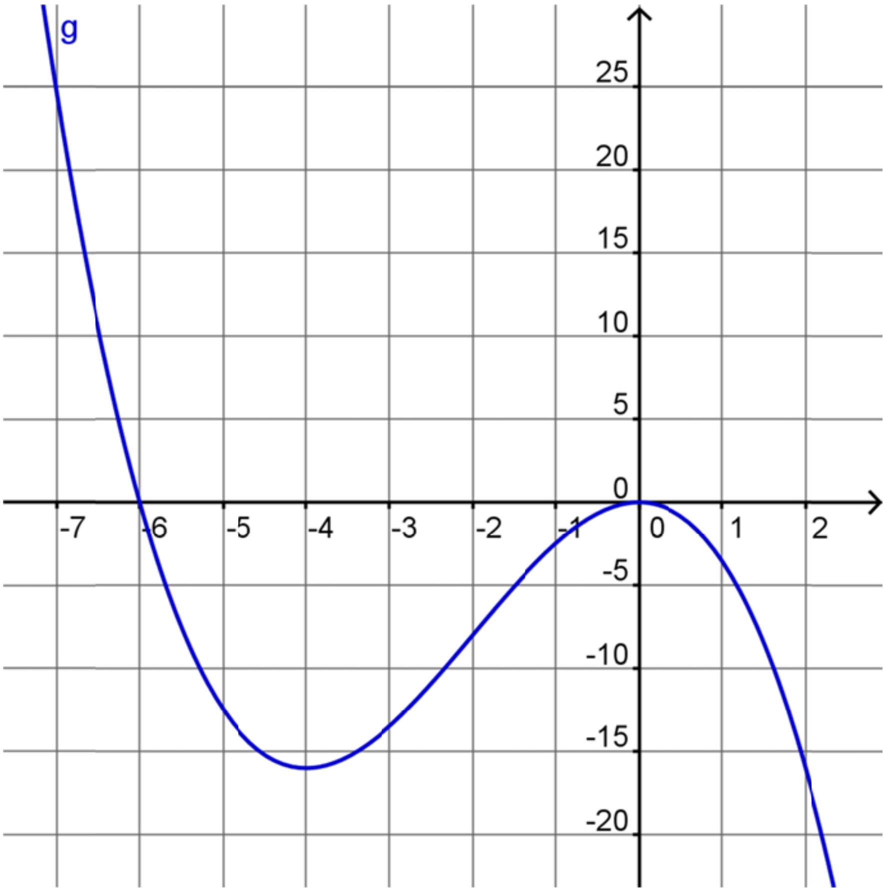
Merkkikaavio ja kulkukaavio:

-7 -4 0 2

g'	-	+	-
g	↘	↗	↘

Lasketaan funktion arvoja kuvaajan piirtämiseksi.

x	$g(x) = -\frac{1}{2}x^3 - 3x^2$
-7	$g(-7) = -\frac{1}{2}\cdot(-7)^3 - 3\cdot(-7)^2 = 24{,}5$
-6	$g(-6) = 0$
-5	$g(-5) = -12{,}5$
-4	$g(-4) = -16$
-3	$g(-3) = -13{,}5$
-2	$g(-2) = -8$
-1	$g(-1) = -2{,}5$
0	$g(0) = 0$
1	$g(1) = -3{,}5$
2	$g(2) = -16$



36. $f(x) = 0{,}5x^2 + 5x - 2$

Derivoidaan funktio:
$f'(x) = x + 5$

Derivaatan nollakohdat:
$f'(x) = 0$ kun
$x + 5 = 0$
$x = -5$

Derivaatan merkki:

- $f'(-6) = -6 + 5 = -1 < 0$
- $f'(0) = 0 + 5 = 5 > 0$

Merkkikaavio ja kulkukaavio:

5

f’	-	+
f	↘	↗

Funktio kasvava, kun $x \geq -5$.
Tällöin funktion arvot kasvavat, kun muuttujan arvot kasvavat.

Koska $-4{,}998 > -4{,}999$
niin $f(-4{,}998) > f(-4{,}999)$.

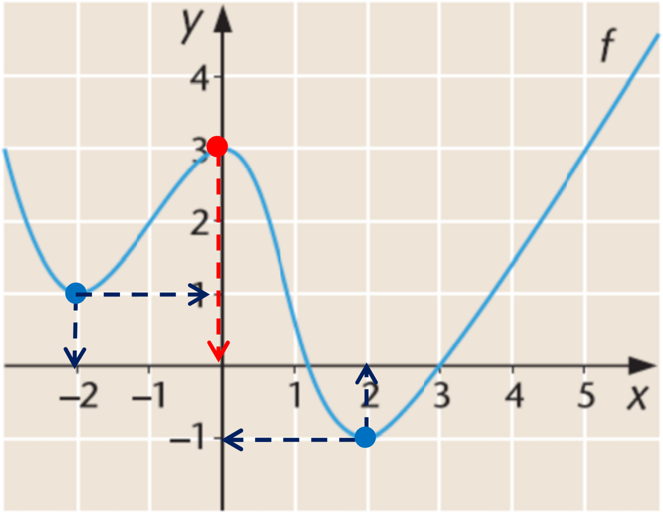
37. Minimikohdat:

$x \approx -2$

$x \approx 2$

Maksimikohta:

$x \approx 0$



Minimiarvot:

$f(-2) \approx 1$

$f(2) = -1$

Maksimiarvo:

$f(0) \approx 3$

38. a) $g(x) = 1{,}5x^2 - 6x + 2$

$g'(x) = 3x - 6$

$g'(x) = 0$ kun

$$
\begin{aligned}
3x - 6 &= 0 \\
3x &= 6 \qquad \Big| :3 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Derivaatan merkki:

- $g'(0) = 3 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$
- $g'(3) = 3 \cdot 3 - 6 = 3 > 0$

Merkki- ja kulkukaavio:

		2	
g’	-		+
g	↘		↗
		min	

Minimiarvo $g(2)=1{,}5\cdot 2^2-6\cdot 2+2=-4$

b) $g(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^2-x$

$g'(x)=x^2-\frac{3}{2}x-1$

$g'(x)=0$ kun

$x^2-\frac{3}{2}x-1=0 \quad |\cdot 2$

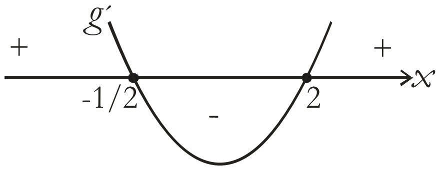
$2x^2-3x-2=0$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}$$

$$x=\frac{3\pm 5}{4}$$

$$x=2 \quad \text{tai} \quad x=-\frac{1}{2}$$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli:



Merkki- ja kulkukaavio: $\frac{1}{2}$ 2

g’	+	-	+
g	↗	↘	↗

max min

Maksimiarvo

$$g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{48}$$

Minimiarvo

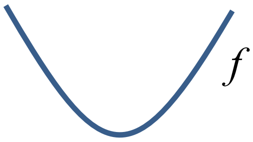
$$g(2)=\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{3}{4}\cdot 2^2-2=-\frac{7}{3}=-2\frac{1}{3}$$

39. $f(x) = 5x^2 + 2ax + a + 1$

$f'(x) = 10x + 2a$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 0, \text{ joten} \\ 10 \cdot (-1) + 2a &= 0 \\ -10 + 2a &= 0 \\ 2a &= 10 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

Koska f:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, $x = -1$ on minimikohta.



Minimi: $f(-1) = 5 \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1) + 6 = 1$

40. $f(x) = -0{,}016x^2 + 1{,}0x + 2{,}0$, $x \in [0, 64]$

$f'(x) = -0{,}032x + 1{,}0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \text{ kun} \\ -0{,}032x + 1{,}0 &= 0 \\ -0{,}032x &= -1{,}0 \\ x &= 31{,}25 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $f'(1) = -0{,}032 \cdot 1 + 1{,}0 = 0{,}968 > 0$
- $f'(32) = -0{,}032 \cdot 32 + 1{,}0 = -0{,}024 < 0$

Merkki- ja kulkukaavio:

31,25

f'	+	-
f	↗	↘

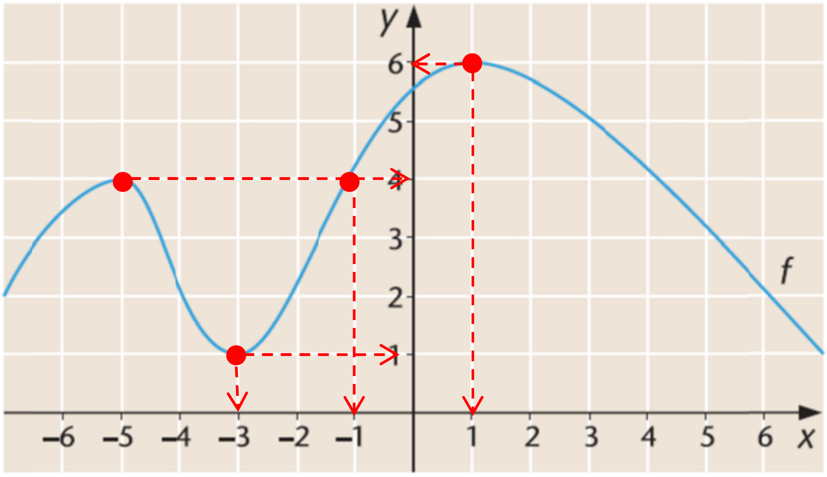
max

Heiton korkeuden maksimikohta on $x = 31{,}25$.
Tällöin

$$\begin{aligned} f(31{,}25) &= -0{,}016 \cdot 31{,}25^2 + 1{,}0 \cdot 31{,}25 + 2{,}0 \\ &= 17{,}625 \\ &\approx 18 \end{aligned}$$

Heitto käy 18 m korkeudessa.

41.



a) Suurin arvo on 6, joka saadaan kohdassa $x \approx 1$.

b) Välillä $[-7, -2]$ suurin arvo on 4 ja pienin arvo on 1.

c) Välillä $[-4, -1]$ suurin arvo 4 saadaan kohdassa $x = -1$
Pienin arvo 1 saadaan kohdassa $x = -3$.

d) Funktio saa arvon 6 kohdassa $x = 1$. Funktio saa arvon 5 esimerkiksi kohdassa $x = 3$. Niinpä välillä $[1, 3]$ tai $[0, 3]$ f saa mainitut suurimman ja pienimmän arvon.

42. $f(x) = 2x^2 - 8x - 1, \quad x \in [-5, 3]$

$f'(x) = 4x - 8$

$f'(x) = 0$ kun

$$4x - 8 = 0$$

$$4x = 8 \qquad |:4$$

$$x = 2$$

Derivaatan merkki:

- $f'(0) = 4 \cdot 0 - 8 = -8 < 0$
- $f'(2{,}5) = 4 \cdot 2{,}5 - 8 = 2 > 0$

Merkki- ja kulkukaavio:

	-5		2		3
f’		-		+	
f		↘		↗	
	max		min		max

Lasketaan funktion ääriarvot:

- $f(-5) = 2 \cdot (-5)^2 - 8 \cdot (-5) - 1 = 89$
- $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 1 = -9$
- $f(3) = 2 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 - 1 = -7$

Vastaus: Suurin arvo 89, pienin arvo -9

43. a) *p* ei voi saada negatiivisia arvoja eli $-0{,}0875t^2 + 0{,}7t \geq 0$

p:n nollakohdat:

$$-0{,}0875t^2 + 0{,}7t = 0$$
$$t(-0{,}0875t + 0{,}7) = 0$$

$t = 0$ tai $-0{,}0875t + 0{,}7 = 0$

$$t = 8$$

Funktio on määritelty, kun $t \in [0{,}8]$.

b) Derivoidaan funktio:

$$p'(t) = -0{,}175t + 0{,}7$$

Derivaatan nollakohta:

$$p'(t) = 0 \text{ kun}$$

$$-0{,}175t + 0{,}7 = 0$$

$$t = 4$$

Derivaatan merkki:

- $p'(0) = -0{,}175 \cdot 0 + 0{,}7 = 0{,}7 > 0$
- $p'(5) = -0{,}175 \cdot 5 + 0{,}7 = -0{,}175 < 0$

Merkki- ja kulkukaavio:

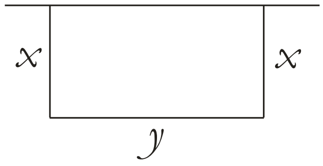
	0		4		8
p ’		+		-	
p		↗		↘	
	min		max		min

Suurin arvo saadaan, kun $x = 4$ eli neljän tunnin kuluttua juomisen aloittamisesta.

Suurin arvo on $p(4) = -0{,}0875 \cdot 4^2 + 0{,}7 \cdot 4 = 1{,}4$

Veren alkoholipitoisuus on siis 1,4 ‰.

44. Merkitään aitauksen sivuja kirjaimilla x ja y.



$$2x + y = 22$$
$$y = 22 - 2x$$

Sivun pituuden tulee olla positiivinen, joten:

$x > 0$ ja $y > 0$

$$22 - 2x > 0$$
$$-2x > -22$$
$$x < 11$$

$x \in \left]0,11\right[$

Muodostetaan pinta-alalle funktio

$$A(x) = x(22 - 2x) = 22x - 2x^2$$

Derivoidaan:

$$A'(x) = 22 - 4x$$

Derivaatan nollakohta:

$$22 - 4x = 0$$
$$-4x = -22 \,\big|\, :(-4)$$
$$x = 5{,}5$$

Derivaatan merkki:

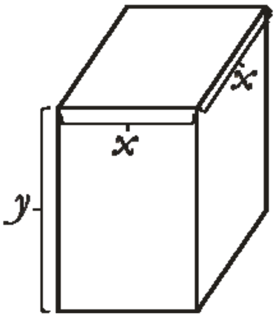
- $A'(1) = 22 - 4 \cdot 1 = 18 > 0$
- $A'(6) = 22 - 4 \cdot 6 = -2 < 0$

Merkki- ja kulkukaavio:

	0	5,5	11
A'	+		-
A	↗		↘
		max	

Alan arvo suurin, kun $x = 5{,}5$.
Aitauksen mitat tällöin 5,5 m ja $(22 - 2 \cdot 5{,}5)\ \text{m} = 11\,\text{m}$

45. Merkitään pohjaneliön sivuja kirjaimella x ja korkeutta kirjaimella y.



$$8x + 4y = 56$$

$$4y = 56 - 8x \qquad |:4$$

$$y = 14 - 2x$$

Sivujen pituudet positiivisia:

$x > 0$ ja $y > 0$

$$14 - 2x > 0$$

$$-2x > -14$$

$$x < 7$$

$x \in \left]0, 7\right[$

Muodostetaan funktio tilavuudelle:

$$V(x) = x^2(14 - 2x) = 14x^2 - 2x^3$$

Derivoidaan:

$$V'(x) = 28x - 6x^2$$

Derivaatan nollakohdat:

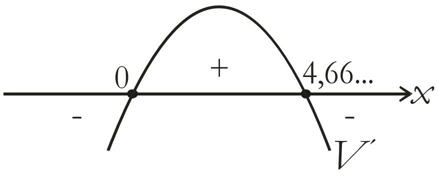
$$28x - 6x^2 = 0$$

$$x(28 - 6x) = 0$$

$x = 0$ tai $28 - 6x = 0$

$$x = \frac{28}{6} = 4\frac{2}{3}$$

Derivaatan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



Merkki- ja kulkukaavio:

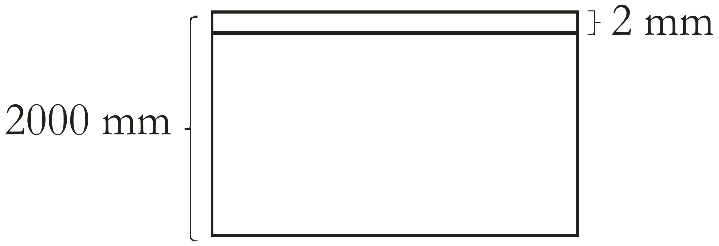
	0	$4\frac{2}{3}$	7
V'	+		-
V	↗		↘
		max	

Tilavuus V on suurin, kun $x = 4\frac{2}{3}$.

$$V\left(4\frac{2}{3}\right) = 14 \cdot \left(4\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(4\frac{2}{3}\right)^3 = 101{,}62... \approx 102$$

Suurin tilavuus on 102 cm^3.

46.

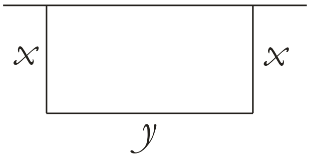


2 mm:n paksuisia nauhoja saadaan leikattua

$\frac{2000\,\text{mm}}{2\,\text{mm}} = 1000$ kappaletta.

Didon rajaaman alueen ympärysmitta on siis

$1000 \cdot 2{,}5\,\text{m} = 2500\,\text{m}$.



Merkitään alueen sivujen pituuksia kirjaimilla x ja y.

$$2x + y = 2500$$
$$y = 2500 - 2x$$

Sivujen pituudet positiivisia:

$x > 0$ ja $y > 0$

$$2500 - 2x > 0$$
$$x < 1250$$

$$x \in \left]0,1250\right[$$

Muodostetaan pinta-alaa kuvaava funktio:

$$A(x) = x(2500 - 2x) = 2500x - 2x^2$$

Derivaatta:

$$A'(x) = 2500 - 4x$$

Derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} 2500 - 4x &= 0 \\ -4x &= -2500 \qquad \big| :(-4) \\ x &= 625 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $A'(100) = 2500 - 4 \cdot 100 = 2100 > 0$
- $A'(1000) = 2500 - 4 \cdot 1000 = -1500 < 0$

Merkki- ja kulkukaavio:

0 625 1250

A'	+	-
A	↗	↘

max

Ala on suurin, kun $x = 625$.
Alueen mitat ovat tällöin 625 m ja $(2500 - 2 \cdot 625)\ \text{m} = 1250\ \text{m}$.

Suurin ala on

$$\begin{aligned} A(625) &= 2500 \cdot 625 - 2 \cdot 625^2 \\ &= 781250\ (\text{m}^2) \end{aligned}$$

eli n. 78 ha.

47. $m(x) = 320x - 5x^2$, $x \in [28,36]$.

Derivaatta:

$$m'(x) = 320 - 10x$$

Derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} 320 - 10x &= 0 \\ -10x &= -320 \\ x &= 32 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $m'(30) = 320 - 10 \cdot 30 = 20 > 0$
- $m'(33) = 320 - 10 \cdot 33 = -10 < 0$

Merkki- ja kulkukaavio:

28 32 36

m'	+	-
m	↗	↘

max

Myyntitulo on suurin, kun $x = 32$ eli myyntihinta on 32 €.
Myyntitulo on tällöin

$$m(32) = 320 \cdot 32 - 5 \cdot 32^2 = 5120$$

Suurin myyntitulo on siis 5120 €.

48.

Hinta (€)	Katsojamäärä (kpl)
8	650
$8+0{,}50$	$650-50$
$8+0{,}50\cdot 2$	$650-50\cdot 2$
$8+0{,}50\cdot 3$	$650-50\cdot 3$
$8+0{,}50x$	$650-50x$

Myyntitulo

$$\begin{aligned} m(x) &= (8+0{,}50x)(650-50x) \\ &= 5200-400x+325x-25x^2 \\ &= -25x^2-75x+5200 \end{aligned}$$

Hinta ja katsojamäärä positiivisia:

$$\begin{aligned} 8+0{,}50x &> 0 \\ 0{,}50x &> -8 \\ x &> -16 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 650-50x &> 0 \\ -50x &> 650 \\ x &< 13 \end{aligned}$$

$$x \in \left]-16{,}13\right[$$

Derivaatta:

$$m'(x) = -50x-75$$

Derivaatan nollakohta:

$$\begin{aligned} -50x-75 &= 0 \\ -50x &= 75 \\ x &= -1{,}5 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $m'(-2) = -50 \cdot (-2) - 75 = 25 > 0$
- $m'(0) = -50 \cdot 0 - 75 = -75 < 0$

Merkki- ja kulkukaavio:

	-16		-1,5		13
m'		+		-	
m		↗		↘	
			max		

Myyntitulo on suurin, kun $x = -1{,}5$.

Lipun hinta on tällöin $8 + 0{,}50 \cdot (-1{,}5) = 7{,}25$ (€).

1. Harjoituskoe

1. a) Toisen asteen termin kerroin positiivinen, joen paraabeli aukeaa ylöspäin.

b) ***f*(*x*) =0**

$$-5x-3=0$$

$$-5x=3 \quad |:(-5)$$

$$x=-\frac{3}{5}$$

***g*(*x*) = 0**

$$2x^2-8=0$$

$$2x^2=8 \quad |:2$$

$$x^2=4$$

$$x=\pm 2$$

c) *y*-akselin leikkauspisteessä *x* = 0

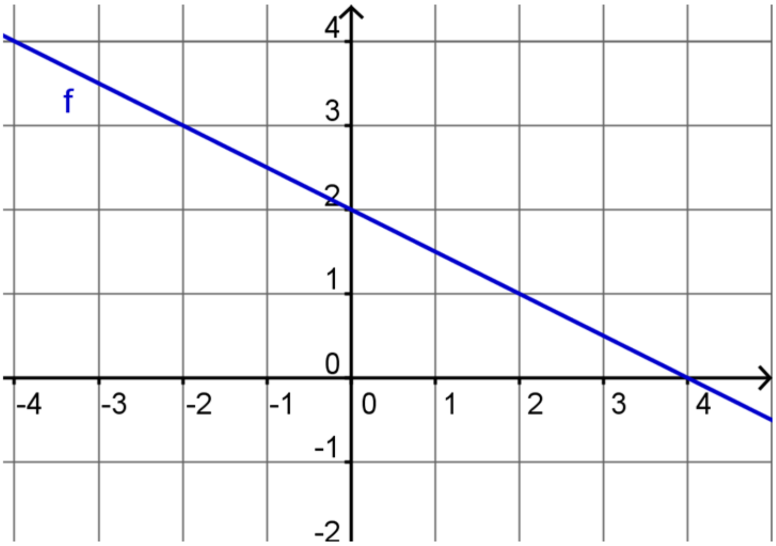
- $f(0)=3\cdot 0-1=-1$, pisteessä (0, -1)
- $g(0)=-0^2-6=-6$, pisteessä (0, -6)

d) sijoitetaan *x* = -1

- $f(-1)=-(-1)+2=3$
- $g(-1)=-2\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)-1=-6$

2. $f(x) = x - \frac{3x-4}{2} = \frac{2x}{2} - \frac{3x-4}{2} = \frac{-x+4}{2} = -\frac{1}{2}x + 2$

x	$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$
0	2
2	1
4	0



Piste kuvaajalla, jos $f(3) = \frac{1}{2}$.

$$f(3) = -\frac{1}{2} \cdot 3 + 2 = \frac{1}{2}$$

Piste on kuvaajalla.

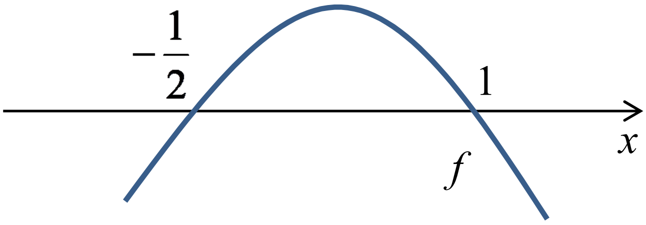
3. Nollakohdat:

$$-2x^2+x+1=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-2)\cdot1}}{2\cdot(-2)}$$

$$x=\frac{-1\pm3}{-4}$$

$$x=-\frac{1}{2}\quad\text{tai}\quad x=1$$



$f(x)\geq0$, kun $-\frac{1}{2}\leq x\leq1$

Huippu nollakohtien puolivälissä (derivaatan nollakohdassa).

Huipun x-koordinaatti on $x_0=\frac{-\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{1}{4}$.

Huipun y-koordinaatti on $y_0=-2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}+1=1\frac{1}{8}$

Eli huippu pisteessä $\left(\frac{1}{4},1\frac{1}{8}\right)$.

4. a) Jos kolmion piiri on 24 cm ja hypotenuusan pituus x cm, on kateettien yhteenlaskettu pituus

$$24 - x \text{ (cm)}.$$

Koska kolmio on tasakylkinen, ovat molemmat kateetit yhtä pitkät. Tällöin kummankin kateetin pituus on

$$\frac{24-x}{2} = 12 - \frac{1}{2}x$$

b) Suorakulmaisen kolmion pinta-ala saadaan kateettien avulla.

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{\left(12 - \frac{1}{2}x\right)\left(12 - \frac{1}{2}x\right)}{2} \\
&= \frac{144 - 6x - 6x + \frac{1}{4}x^2}{2} \\
&= \frac{144 - 12x + \frac{1}{4}x^2}{2} \\
&= 72 - 6x + \frac{1}{8}x^2
\end{aligned}$$

5. a) $f'(x) = 4$

b) $f'(x) = 5 \cdot 3x^{3-1} - 6 \cdot 2x^{2-1} = 15x^2 - 12x$

c) Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-3) \\ &= x^2 - 3x + x - 3 \\ &= x^2 - 2x - 3 \end{aligned}$$

$f'(x) = 2x - 2$

d) $f(x) = \dfrac{8x^5 - 4x^3 + x^2}{2} = 4x^5 - 2x^3 + \dfrac{1}{2}x^2$

$f'(x) = 20x^4 - 6x^2 + x$

6. $g'(t) = 4t + 6$

a) g on kasvava, kun $g'(t) \geq 0$ eli

$$\begin{aligned} 4t + 6 &\geq 0 \\ 4t &\geq -6 \\ t &\geq -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

b) $g(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + 6 \cdot (-3) - 16 = -16$

g:n kuvaaja kulkee pisteen (-3, 16) kautta.

$g'(-3) = 4 \cdot (-3) + 6 = -6$

Pisteeseen (-3, -16) piirretyn tangentin kulmakerroin on -6.

7. $g(t) = 2t^3 + 6t^2 - 1$

$g'(t) = 6t^2 + 12t$

$g'(t) = 0$ kun

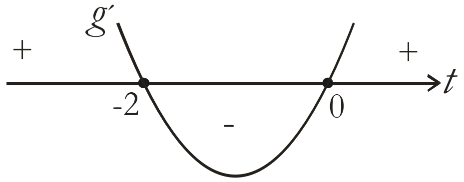
$6t^2 + 12t = 0$

$6t(t+2) = 0$

$6t = 0$ tai $t + 2 = 0$

$t = 0$ $\quad$ $t = -2$

Derivaatan g' kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli:



-2 $\qquad$ 0

g'	+	-	+
g	↗	↘	↗

max $\qquad$ min

Funktiolla ei ole suurinta arvoa, mutta sillä on kaksi ääriarvoa:

- Maksimi: $g(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 1 = 7$
- Minimi: $g(0) = 2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 1 = -1$

8. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4,\ x \in [-5,1]$

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

Derivaatan nollakohdat:

$$3x^2 - 4x = 0$$

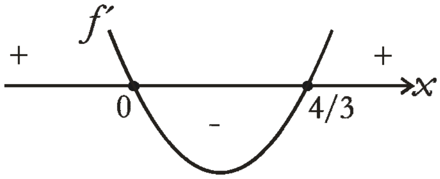
$$x(3x - 4) = 0$$

$x = 0$ tai $3x - 4 = 0$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Nollakohdista $x = \frac{4}{3}$ ei kuulu tarkasteltavalle välille $[-5,1]$.

	-5		0		1
f'		+		−	
f		↗		↘	
	min		max		min

Lasketaan ääriarvot:

- $f(-5) = (-5)^3 - 2\cdot(-5)^2 - 4 = -179$
- $f(0) = 0^3 - 2\cdot 0^2 - 4 = -4$
- $f(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 - 4 = -5$

Suurin arvo -4, pienin arvo -179

2. Harjoituskoe

1. a) $f(0) \approx -1, \quad f(-2) \approx 1$

b) $f(x) = 0$ kun

$x \approx -3$ tai $x \approx -1$ tai $x \approx 2$ tai $x \approx 4$

c) $f'(x) = 0$ kun

$x \approx -3$ tai $x \approx -2$ tai $x \approx 1$ tai $x \approx 3$ tai $x \approx 4$

d) Pienin arvo -2

e) Suurin arvo 0

2. a)

$$\begin{aligned} 6(x+2) &< 8x+14 \\ 6x+12 &< 8x+14 \\ -2x &< 2 \quad \Big| :(-2) \\ x &> -1 \end{aligned}$$

b) $x^2 - x - 12 \geq 0$

Merkitään $f(x) = x^2 - x - 12$

Funktion f nollakohdat:

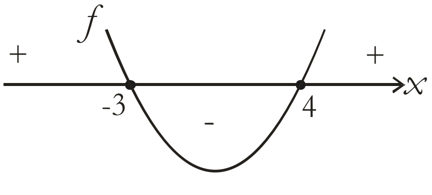
$x^2 - x - 12 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$x = 4 \quad \text{tai} \quad x = -3$$

f:n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli:



$f(x) \geq 0$ kun $x \leq -3$ tai $x \geq 4$

3. a) $f(t)=-t^4+\frac{3}{5}t^3-t+2$

$f'(t)=-4t^3+\frac{9}{5}t^2-1$

b) $g(r)=-\left(2r^2+6\right)=-2r^2-6$

$g'(r)$ = -4r

c) Sievennetään ensin funktion lauseke.

$$\begin{aligned} h(x) &= (x+3)\left(-x^3+6x\right) \\ &= -x^4+6x^2-3x^3+18x \\ &= -x^4-3x^3+6x^2+18x \end{aligned}$$

$h'(x)=-4x^3-9x^2+12x+18$

4. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Derivaatan nollakohdat:

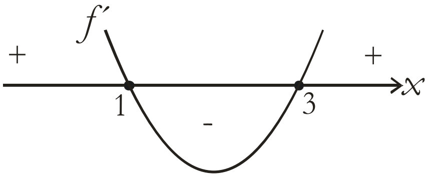
$3x^2 - 12x + 9 = 0$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{12 \pm 6}{6}$$

$x = 3$ tai $x = 1$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli:



	1	3	
f'	+	−	+
f	↗	↘	↗
	max	min	

Ääriarvot:

- maksimi $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 5 = 9$
- minimi $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 5 = 5$

Funktio on kasvava, kun $x \leq 1$ tai $x \geq 3$.

5. Paraabelin $y = 4ax^2 - 24x + 8$ huipussa derivaatta saa arvon nolla:

$y'(x) = 8ax - 24$

$y'(x) = 0$ kun

$$\begin{aligned} 8ax - 24 &= 0 \\ 8ax &= 24 \\ x &= \frac{24}{8a} \end{aligned}$$

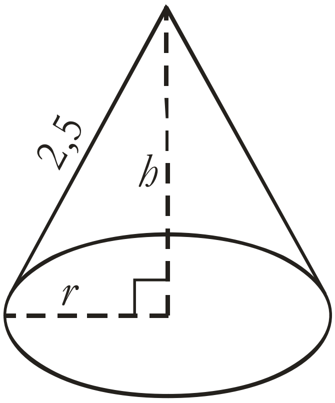
Huipun x-koordinaatti on $\frac{1}{3}$, joten saadaan yhtälö:

$$\begin{aligned} \frac{24}{8a} &= \frac{1}{3} \\ \frac{3}{a} &= \frac{1}{3} \\ a &= 9 \end{aligned}$$

Kun $a = 9$ ja $x = \frac{1}{3}$,

$$y = 4 \cdot 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 - 24 \cdot \frac{1}{3} + 8 = 4.$$

6. Merkitään ympyräkartion pohjan sädettä kirjaimella *r* ja kartion korkeutta kirjaimella *h*.



$$r^2 + h^2 = 2{,}5^2$$
$$r^2 = 6{,}25 - h^2$$

Tilavuus

$$\begin{aligned} V(h) &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3}\pi\left(6{,}25 - h^2\right)h \\ &= \frac{\pi}{3}\left(6{,}25h - h^3\right) \end{aligned}$$

Derivaatta

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}\left(6{,}25 - 3h^2\right)$$

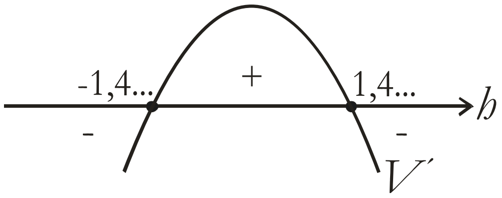
Derivaatan nollakohdat

$$\frac{\pi}{3}\left(6{,}25-3h^2\right)=0 \qquad \Big| :\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned}
6{,}25-3h^2 &= 0\\
-3h^2 &= -6{,}25\\
h^2 &= 2{,}083...\\
h &= \pm 1{,}443...
\end{aligned}$$

Näistä vain positiivinen arvo kelpaa.

Derivaatan V' kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli.



1,44…

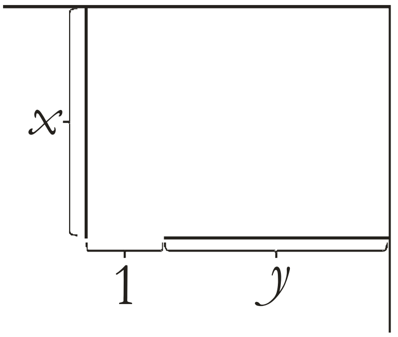
V'	+	-
V	↗	↘

Tilavuus V on suurin, kun korkeus $h = 1{,}443... \approx 1{,}4\,(\mathrm{m})$

Tilavuus on tällöin

$$\begin{aligned}
V(1{,}44...) &= \frac{\pi}{3}\left(6{,}25\cdot 1{,}44...-1{,}44...^3\right)\\
&= 6{,}297...\\
&\approx 6{,}3\ (\mathrm{m}^3)
\end{aligned}$$

7. Merkitään aitauksen aidattuja osia kirjaimilla x ja y.



$$x + y = 10$$
$$y = 10 - x$$

Sivujen pituudet positiivisia:

$$x > 0 \quad \text{ja} \quad y > 0$$
$$10 - x > 0$$
$$-x > -10$$
$$x < 10$$

$$x \in \left]0,10\right[$$

Muodostetaan funktio pinta-alalle

$$\begin{aligned} A(x) &= x(1 + 10 - x) \\ &= x(11 - x) \\ &= 11x - x^2 \end{aligned}$$

Derivaatta

$$A'(x) = 11 - 2x$$

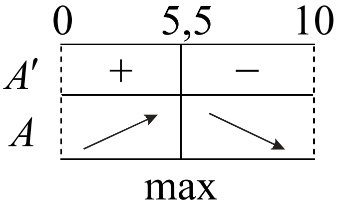
Derivaatan nollakohdat

$$\begin{aligned} 11 - 2x &= 0 \\ -2x &= -11 \\ x &= 5{,}5 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $A'(1) = 11 - 2 \cdot 1 = 9 > 0$
- $A'(6) = 11 - 2 \cdot 6 = -1 < 0$

Merkkikaavio:



Ala on suurin, kun $x = 5{,}5$.

$$A(5{,}5) = 11 \cdot 5{,}5 - 5{,}5^2 = 30{,}25 \approx 30 \text{ (m}^2\text{)}$$

3. Harjoituskoe

1. a)

$$5x+3(x-2)>10x-2$$

$$5x+3x-6>10x-2$$

$$-2x>4 \quad |:(-2)$$

$$x<-2$$

b) $f(x)=8x-7x^2$

$$f'(x)=8-14x$$

$$f'(-1)=8-14\cdot(-1)=22$$

$f'(x)=0$ kun

$$8-14x=0$$

$$-14x=-8$$

$$x=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$$

2. a) $f(x) = -4x^3 + 18x^2 - 24x + 2$

$$f'(x) = -12x^2 + 36x - 24$$

Derivaatan nollakohdat:

$$-12x^2 + 36x - 24 = 0 \quad \big| :12$$

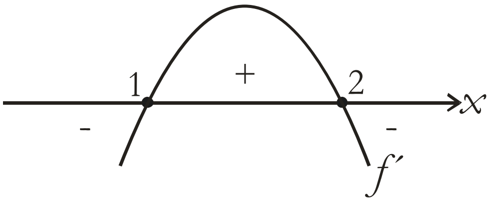
$$-x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{-2}$$

$$x = 1 \quad \text{tai} \quad x = 2$$

Derivaatan kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli:



		1	2
f'	$-$	$+$	$-$
f	↘	↗	↘

f on kasvava, kun $1 \le x \le 2$.

b) $f(x) = 4 - x^2$

$f'(x) = -2x$

$f'(x) = 0$ kun

$-2x = 0$

$x = 0$

		0	
f'	+		−
f	↗		↘

f on vähenevä, kun $x \geq 0$.

$h(x) = 8x^3 - 18x^2 - 24x + 6$

$h'(x) = 24x^2 - 36x - 24$

$h'(x) = 0$ kun

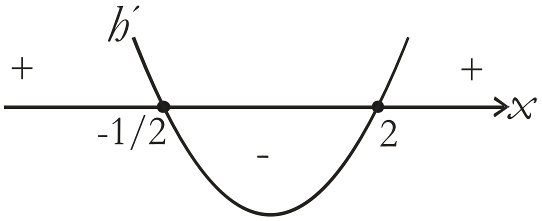
$24x^2 - 36x - 24 = 0$

$$x = \frac{-(-36) \pm \sqrt{(-36)^2 - 4 \cdot 24 \cdot (-24)}}{2 \cdot 24}$$

$$x = \frac{36 \pm 60}{48}$$

$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{1}{2}$$

Derivaatan h' kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli:



$-\frac{1}{2}$ $\quad 2$

h'	+	−	+
h	↗	↘	↗

h on vähenevä välillä $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$.

Molemmat funktiot h ja f ovat siis väheneviä, kun $0 \leq x \leq 2$.

3. $f(x) = -x^2 + 2{,}25x - 0{,}875$

a) Lasketaan funktion f nollakohdat:

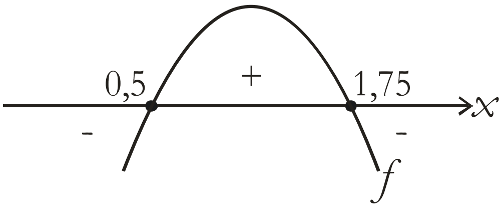
$-x^2 + 2{,}25x - 0{,}875 = 0$

$$x = \frac{-2{,}25 \pm \sqrt{2{,}25^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-0{,}875)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-2{,}25 \pm 1.25}{-2}$$

$$x = 1{,}75 \quad \text{tai} \quad x = 0{,}5$$

Funktion *f* kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli:



Puron leveys on (1,75 – 0,5) m = 1,25 m.

b) Huippukohta on nollakohtien puolivälissä:

$$\frac{0,5+1,75}{2}=1,125$$

Huipun *y*-koordinaatti:

$$\begin{aligned} f(1,125) &= -1,125^2+2,25\cdot 1,125-0,875 \\ &= 0,3906... \\ &\approx 0,39 \end{aligned}$$

Korkein kohta 39 cm päässä.

4. $f(x)=4x^2-8x$

$f'(x)=8x-8$

$f'(x)=0$ kun

$$\begin{aligned} 8x-8&=0 \\ 8x&=8 \qquad |:8 \\ x&=1 \end{aligned}$$

a) Derivaatan nollakohta kuuluu välille $[0, 3]$.

Derivaatan merkki:

- $f'(0) = 8 \cdot 0 - 8 = -8 < 0$
- $f'(2) = 8 \cdot 2 - 8 = 8 > 0$

Merkkikaavio:

	0		1		3
f'		−		+	
f		↘		↗	
	max		min		max

- $f(0) = 4 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 = 0$
- $f(1) = 4 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 = -4$
- $f(3) = 4 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 = 12$

Suurin arvo 12.
Pienin arvo -4.

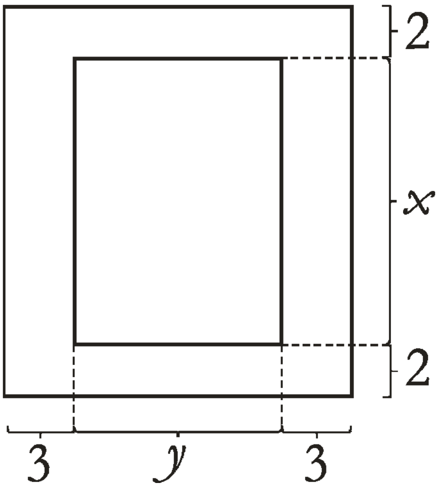
b) Derivaatan nollakohta ei kuulu välille $[4, \infty[$.

	4	
f'		+
f		↗
	min	

$f(4) = 4 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 = 32$

Pienin arvo 32.
Ei suurinta arvoa.

5. Merkitään peilin mittoja kirjaimilla x ja y.



$$2(y+6)+2(x+4)=95$$
$$2y+12+2x+8=95$$
$$2y=75-2x$$
$$y=37{,}5-x$$

Pituudet positiivisia:

$x>0$ ja $37{,}5-x>0$

$x<37{,}5$

$x \in \,]0;37{,}5[$

Peilin ala ilman kehyksiä:

$$A(x)=xy$$
$$=x(37{,}5-x)$$
$$=37{,}5x-x^2$$

$$A'(x)=37{,}5-2x$$

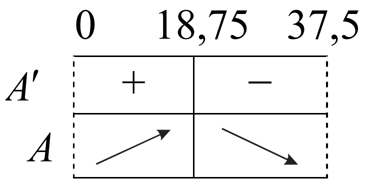
$A'(x)=0$ kun

$$37{,}5-2x=0$$
$$-2x=-37{,}5$$
$$x=18{,}75$$

Derivaatan merkki:

- $A'(1) = 37{,}5 - 2 \cdot 1 = 35{,}5 > 0$
- $A'(20) = 37{,}5 - 2 \cdot 20 = -2{,}5 < 0$

Merkkikaavio:



Ala on suurin, kun $x = 18{,}75$.

Peilin mitat ovat tällöin $18{,}75\,\text{cm} \approx 19\,\text{cm}$ ja
$(37{,}5 - 18{,}75)\text{cm} = 18{,}75\,\text{cm} \approx 19\,\text{cm}$

6. Voittoa kuvaa funktio

$$\begin{aligned} v(x) &= 50x - \left(500 + 4x + 0{,}2x^2\right) \\ &= 50x - 500 - 4x - 0{,}2x^2 \\ &= -0{,}2x^2 + 46x - 500 \end{aligned}$$

$$v'(x) = -0{,}4x + 46$$

$v'(x) = 0$ kun

$$\begin{aligned} -0{,}4x + 46 &= 0 \\ -0{,}4x &= -46 \quad \Big| :(-0{,}4) \\ x &= 115 \end{aligned}$$

Derivaatan merkki:

- $v'(110) = -0{,}4 \cdot 110 + 46 = 2 > 0$
- $v'(120) = -0{,}4 \cdot 120 + 46 = -2 < 0$

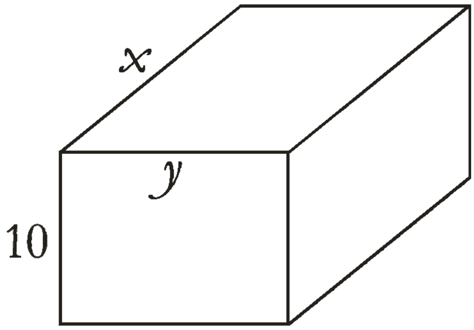
Merkkikaavio:

		115	
v'	+		−
v	↗		↘
		max	

Voitto suurin, kun $x = 115$.

Voitto $v(115) = -0{,}2 \cdot 115^2 + 46 \cdot 115 - 500 = 2145$ (€)

7. Merkitään laatikon pituutta ja leveyttä kirjaimilla x ja y.



$$2x + 2y = 80$$
$$2y = 80 - 2x$$
$$y = 40 - x$$

Pituudet positiivisia:

$x > 0$ ja $40 - x > 0$

$x < 40$

$x \in \left]0, 40\right[$

Tilavuus

$$V(x) = 10x(40 - x)$$
$$= 400x - 10x^2$$

$$V'(x) = 400 - 20x$$

$V'(x) = 0$ kun

$$400 - 20x = 0$$
$$-20x = -400$$
$$x = 20$$

Derivaatan merkki:

- $V'(10) = 400 - 20 \cdot 10 = 200 > 0$
- $V'(30) = 400 - 20 \cdot 30 = -200 < 0$

Merkkikaavio:

	0		20		40
V'		+		−	
V		↗		↘	
			max		

Tilavuus on suurin, kun $x = 20$.

$$V(20) = 400 \cdot 20 - 10 \cdot 20^2 = 4000$$

Suurin tilavuus on $4000\,\mathrm{cm}^3 = 4\,\mathrm{dm}^3 = 4\,\mathrm{l}$ eli laatikkoon mahtuu 3,5 l hiekkaa.

Vastaus: Pystyy valmistamaan.

5. Ekstrat

1. a) $-3 \leq x \leq 9$

b) $0 < x < 2$

c) $-1 < x \leq 3$

2. a) $x \leq 12$

b) $x \geq 1$

c) $x > -4$

3. a) $x \in [2,20]$

b) $x \in]-5,0[$

c) $x \in [8,10[$

4. a) $x \in]-\infty,3]$

b) $x \in]-\infty,5[$

c) $x \in [27,\infty[$

5.

Lukusuoraesitys	Epäyhtälö-merkintä	Hakasulku-merkintä
	$x \leq -5$	$x \in \left]-\infty, -5\right]$
	$x > -3$	$x \in \left]-3, \infty\right[$
	$-11 < x < 13$	$x \in \left]-11, 13\right[$
	$-1 \leq x < 6$	$x \in \left[-1, 6\right[$
	$2 < x \leq 9$	$x \in \left]2, 9\right]$

6. a) $0 \leq x \leq 6$

b) $x \leq -1$

c) $x > -5$

d) $-10 \leq x < 8$

7. a) $x \in [4,6]$

b) $x \in]-3,\infty[$

c) $x \in [1,\infty[$

d) $x \in]8,30]$

8. $x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$
$$x = 2 \quad \text{tai} \quad x = -3$$

Ratkaisuista vain $x = 2$ kuuluu välille $[0,3]$.

9. $-3x^2+2x+7=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-3)\cdot 7}}{2\cdot(-3)}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{88}}{-6}$$

$$x=\frac{-2+\sqrt{88}}{-6}=-1{,}23...$$

tai

$$x=\frac{-2-\sqrt{88}}{-6}=1{,}89...$$

Ratkaisuista vain $x=\frac{-2-\sqrt{88}}{-6}$ kuuluu välille $[-1,2]$.

10. $x^2-x-1=0$

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618...$$

tai

$$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-0{,}618...$$

Ratkaisuista vain $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ kuuluu avoimeen väliin

$\left]-1,\frac{3}{2}\right[$.

11. $2500x^2 + 625x + 39 = 0$

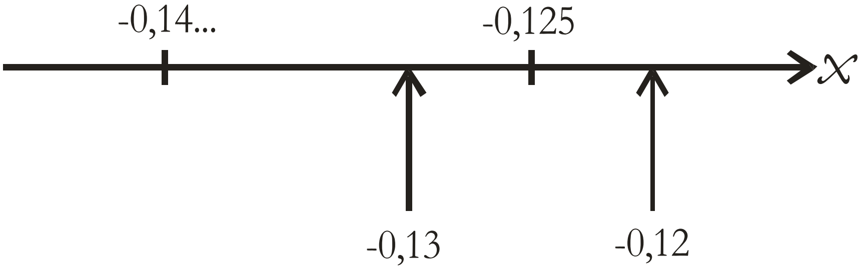
$$x = \frac{-625 \pm \sqrt{625^2 - 4 \cdot 2500 \cdot 39}}{2 \cdot 2500}$$

$$x = \frac{-625 \pm 25}{5000}$$

$$x = -\frac{3}{25} = -0{,}12 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{13}{100} = -0{,}13$$

Juuren on kuuluttava välille $\left[-\frac{1}{7}, -\frac{1}{8}\right]$.

$-\frac{1}{7} = -0{,}142...$ $\qquad$ $-\frac{1}{8} = -0{,}125$



Vain $x = -\frac{13}{100} = -0{,}13$ kelpaa.

12. Suoran $y = kx + b$ suuntakulmalle α pätee $\tan\alpha = k$, jossa k on kulmakerroin.

a) kun $y = \frac{1}{2}x + 1$, $k = \frac{1}{2}$

$$\tan\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha \approx 27°$$

b) kun $y = -\frac{3}{4}x - 5$, $k = -\frac{3}{4}$

$$\tan\alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\alpha \approx -37°$$

c) kun $y = 2x + 1$, $k = 2$

$$\tan\alpha = 2$$

$$\alpha \approx 63°$$

d) kun $y = -3x + 2$, $k = -3$

$$\tan\alpha = -3$$

$$\alpha \approx -72°$$

13. a) Suoran $y = 0{,}2x - 3$ kulmakerroin 0,2.

Suuntakulma α:

$$\tan\alpha = 0{,}2$$

$$\alpha \approx 11{,}3°$$

b) Suoran $y = 2 - 5x$ kulmakerroin -5.

Suuntakulma α:

$$\tan\alpha = -5$$

$$\alpha \approx -78{,}7°$$

14. Suuntakulmat:

A $\alpha = -63°$

B $\alpha = 43°$

C $\tan\alpha = \frac{10}{11}$

$\alpha \approx 42°$

D $\tan\alpha = -1{,}7$

$\alpha \approx -60°$

a) Suurin suuntakulma on suoralla B, joten se nousee jyrkimmin.

b) Pienin suuntakulma on suoralla A, joten se laskee jyrkimmin.

15. Suoran $y = -2x$ suuntakulma α:

$$\tan\alpha = -2$$
$$\alpha \approx -63{,}43°$$

Suoran $y = 0{,}2x - 2$ suuntakulma β:

$$\tan\beta = 0{,}2$$
$$\beta \approx 11{,}31°$$

Suoran $y = -\frac{2}{3}x - 1$ suuntakulma γ:

$$\tan\gamma = -\frac{2}{3}$$
$$\gamma \approx -33{,}69°$$

Suora $y = 0{,}2x - 2$ on nouseva, muut ovat laskevia.

16. Ratkaistaan yhtälö $-x^3+8x+1=0$ etsimällä funktion $f(x)=-x^3+8x+1$ nollakohta haarukoimalla välillä $[-3,-2]$.

testiarvo x	$f(x)=-x^3+8x+1$	väli
-2,5	-3,375	$[-3;-2,5]$
-2,6	-2,224	$[-3;-2,6]$
-2,7	-0,917	$[-3;-2,7]$
-2,8	0,552	$[-3;-2,8]$
-2,75	-0,203125	$[-2,8;-2,75]$
-2,76	-0,0554…	$[-2,8;-2,76]$
-2,77	0,093	$[-2,77;-2,76]$
-2,765	0,0190	$[-2,765;-2,76]$
-2,764	0,0041…	$[-2,764;-2,76]$
-2,763	-0,010…	$[-2,764;-2,763]$

Funktiolla on nollakohta välillä $[-2,764;-2,763]$ eli yhtälön $-x^3+8x+1=0$ ratkaisu on $x\approx-2,76$.

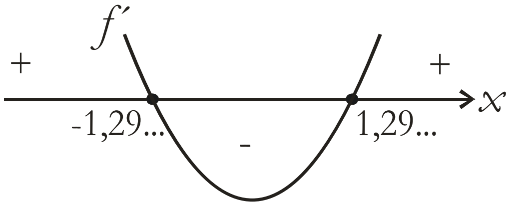
17. $f(x) = 0{,}2x^3 - x - 10$

$f'(x) = 0{,}6x^2 - 1$

$f'(x) = 0$ kun

$$0{,}6x^2 - 1 = 0$$
$$0{,}6x^2 = 1$$
$$x^2 = \frac{5}{3}$$
$$x = \pm 1{,}29...$$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



		-1,29…		1,29	
f'	+		−		+
f	↗		↘		↗
		max		min	

$f(-1{,}29...) = 0{,}2 \cdot (-1{,}29...)^3 - (-1{,}29...) - 10 = -9{,}139...$

$f(1{,}29…) = -10{,}86…$

$f(10) = 180$

$f(5) = 10$

$f(4) = -1{,}2$

- Funktio f kasvaa välillä $]-\infty;-1{,}29...]$, mutta koska maksimi on -9,139…, $f(x)<0$ em. välillä.

- Tämän jälkeen f vähenee saavuttaen minimin -10,86…
Funktiolla f ei ole nollakohtia välillä $]-\infty;-1{,}29...]$.

- Välillä $[1{,}29...;\infty[$ f on kasvava. Koska $f(5)>0$ ja $f(4)<0$, f: llä on yksi nollakohta välillä $[4,5]$.

testiarvo x	$f(x)=0{,}2^3-x-10$	väli
4,2	0,6176	$[4;4{,}2]$
4,1	-0,3158	$[4{,}1;4{,}2]$
4,15	0,144…	$[4{,}1;4{,}15]$
4,14	0,051…	$[4{,}1;4{,}14]$
4,13	-0,04…	$[4{,}13;4{,}14]$

f:n nollakohta on välillä $[4{,}13;4{,}14]$ eli nollakohdan yksidesimaalinen likiarvo on $x\approx 4{,}1$.

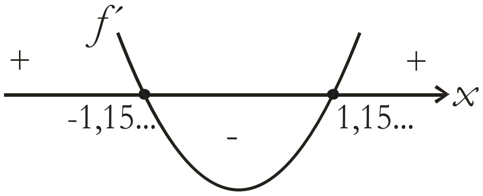
18. $f(x)=x^3-4x-2$

$$f'(x)=3x^2-4$$

$f'(x)=0$ kun

$$3x^2-4=0$$
$$3x^2=4$$
$$x^2=\frac{4}{3}$$
$$x=\pm 1{,}15...$$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



	-1,15…		1,15
f'	+	−	+
f	↗	↘	↗

Välillä $[1{,}15...;\infty[$ f on kasvava, joten sillä voi olla enintään yksi nollakohta.

$$f(2)=2^3-4\cdot 2-2=-2$$
$$f(3)=13$$

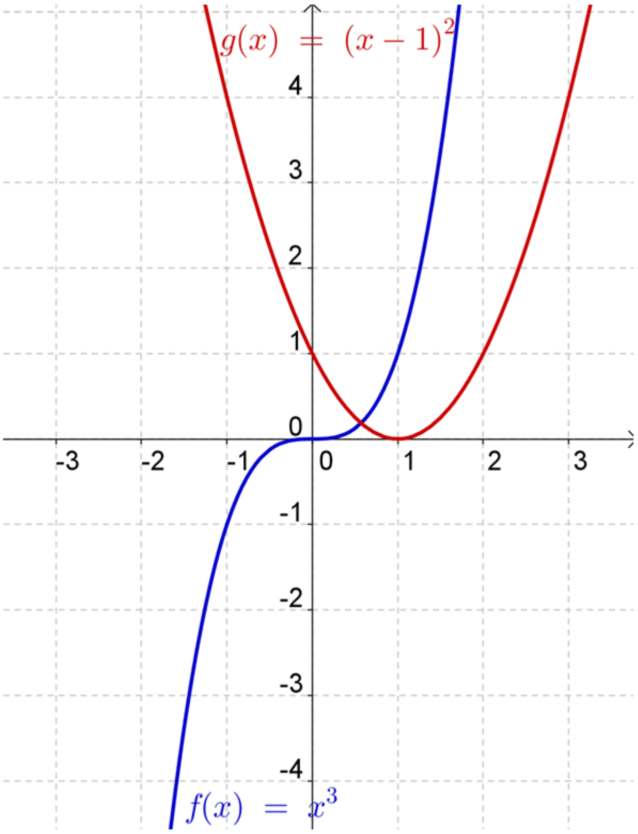
Nollakohta on välillä $]2,3[$.

testiarvo x	$f(x)=x^3-4x-2$	väli
2,1	-1,139	$[2,1;3]$
2,3	0,967	$[2,1;2,3]$
2,2	-0,152	$[2,2;2,3]$
2,25	0,39…	$[2,2;2,25]$
2,24	0,27…	$[2,2;2,24]$
2,23	1,16…	$[2,2;2,23]$
2,22	0,06…	$[2,2;2,22]$
2,21	-0,04…	$[2,2;2,21]$
2,215	0,007…	$[2,21;2,215]$
2,214	-0,003…	$[2,214;2,215]$
2,2144	0,00085…	$[2,214;2,2144]$

Nollakohta on välillä $[2,214;2,2144]$.

Tällöin likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella on $x \approx 2,21$.

19. Yhtälön $x^3 = (x-1)^2$ ratkaisu on $x \approx 0{,}5$.



Tarkennetaan juurta etsimällä funktion $f(x) = x^3 - (x-1)^2$ nollakohta.

testiarvo x	$f(x) = x^3 - (x-1)^2$	väli
0,5	-0,125	-
0,6	0,056	$[0{,}5; 0{,}6]$
0,51	-0,107…	$[0{,}51; 0{,}6]$
0,52	-0,08…	$[0{,}52; 0{,}6]$
0,53	-0,07…	$[0{,}53; 0{,}6]$
0,55	-0,03…	$[0{,}55; 0{,}6]$
0,56	-0,01…	$[0{,}56; 0{,}6]$
0,57	0,00029…	$[0{,}56; 0{,}57]$
0,569	-0,0015…	$[0{,}569; 0{,}57]$

Juuri on välillä $[0{,}569; 0{,}57]$ eli $x \approx 0{,}57$.

20. Matka $s(t) = 15t - 5t^2$

a) $s(1,0) = 15 \cdot 1,0 - 5 \cdot 1,0^2 = 10$ eli kuljettu matka on 10 m.

b) $v(t) = s'(t) = 15 - 10t$

$v(1,0) = 15 - 10 \cdot 1,0 = 5,0$

Nopeus on 5,0 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

21. Matka $s(t) = t^2 + t$, $t \geq 0$

a) Nopeus $v(t) = s'(t) = 2t + 1$

Alkunopeus: $v(0) = 1$ eli 1 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) Kiihtyvyys $a(t) = v'(t) = 2$

Kappale liikkuu tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä, kiihtyvyys on 2 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

22. Koska $\text{nopeus} = \dfrac{\text{matka}}{\text{aika}}$, $\quad \text{aika} = \dfrac{\text{matka}}{\text{nopeus}}$.

Alkumatkaan käytetty aika: $\quad t(s) = \dfrac{s}{14}, \quad 0 \le s \le 45$

Hetkellä $s = 45$ (km) aikaa on jo kulunut $\dfrac{45}{14}$ (h), joten

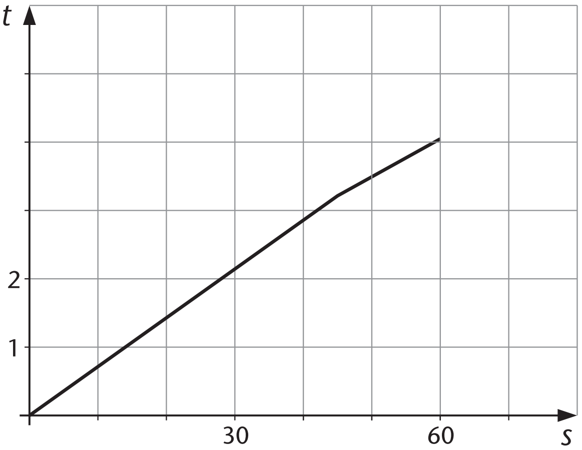
loppumatkan $s - 45$ ajanhetkillä:

$$t(s) = \frac{45}{14} + \frac{s-45}{18},\ 45 < s \le 60.$$

Yhdistettynä

$$t(s) = \begin{cases} \dfrac{s}{14},\ \ 0 \le s \le 45 \\ \dfrac{45}{14} + \dfrac{s-45}{18},\ \ 45 < s \le 60 \end{cases}$$

t:n kuvaaja:



Välillä $0 \le s \le 45$ $\qquad t'(s) = \dfrac{1}{14}$, joten $\qquad t'(15) = \dfrac{1}{14}$

23. Saappaan lentorata

$g(x) = -0{,}2x^2 + 0{,}2x + 2{,}5$

$g'(x) = -0{,}4x + 0{,}2$

a) Kun heitto lähtee, $x = 0$: $g'(0) = -0{,}4 \cdot 0 + 0{,}2 = 0{,}2$

Heittokulma:

$$\tan\alpha = 0{,}2$$
$$\alpha = 11{,}30...°$$
$$\alpha \approx 11°$$

b) Saapas osuu maahan, kun $g(x) = 0$ eli

$-0{,}2x^2 + 0{,}2x + 2{,}5 = 0$

$$x = \frac{-0{,}2 \pm \sqrt{0{,}2^2 - 4 \cdot (-0{,}2) \cdot 2{,}5}}{2 \cdot (-0{,}2)}$$

$$x = \frac{-0{,}2 \pm 1{,}428...}{-0{,}4}$$

$$x = -3{,}07... \quad \text{tai} \quad x = 4{,}070...$$

Juurista vain jälkimmäinen kelpaa.

Hetkellä $x = 4{,}070...$

$$g'(4{,}070...) = -0{,}4 \cdot 4{,}070... + 0{,}2 = -1{,}428...$$

Osumiskulma:

$$\tan\beta = -1{,}428...$$
$$\beta = -55{,}00...°$$
$$\beta \approx -55°$$

24. Nopeus $v(t)=t^3-2t^2+1{,}5t+1, \quad t\geq 0$

a) $v(2)=2^3-2\cdot 2^2+1{,}5\cdot 2+1=4$

Nopeus 2 s kuluttua on 4 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

b) $a(t)=v'(t)=3t^2-4t+1{,}5$

$a(3)=3\cdot 3^2-4\cdot 3+1{,}5=16{,}5$

Kiihtyvyys 3 s kuluttua on 16,5 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

25. Nopeus

$$v(t)=\frac{20}{27}t^3-\frac{140}{9}t^2+100t$$

$$v'(t)=\frac{20}{9}t^2-\frac{280}{9}t+100$$

$v'(t)=0$ kun

$$\frac{20}{9}t^2-\frac{280}{9}t+100=0 \quad \Big|\cdot 9$$

$$20t^2-280t+900=0 \quad \Big|:20$$

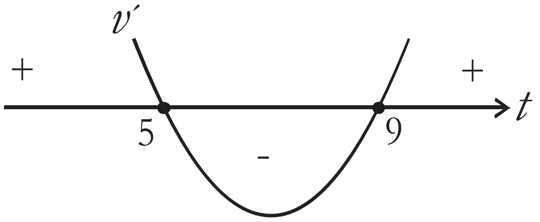
$$t^2-14t+45=0$$

$$t=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 1\cdot 45}}{2\cdot 1}$$

$$t=\frac{14\pm 4}{2}$$

$t=9$ tai $t=5$

Derivaatan kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli.



Merkkikaavio:

0 5 9 10

v'	+	−	+
v	↗	↘	↗

min max min max

- $v(5) = \frac{20}{27} \cdot 5^3 - \frac{140}{9} \cdot 5^2 + 100 \cdot 5 = 203{,}703...$
- $v(9) = \frac{20}{27} \cdot 9^3 - \frac{140}{9} \cdot 9^2 + 100 \cdot 9 = 180$
- $v(10) = \frac{20}{27} \cdot 10^3 - \frac{140}{9} \cdot 10^2 + 100 \cdot 10 = 185{,}18...$

a) Suurin nopeus, 204 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, saavutettiin 5 s kuluttua lähdöstä.

b) Pienin nopeus mutkassa, 180 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, saavutettiin 9 s kuluttua lähdöstä.