3.1 Yhtälöpari ja leikkauspisteet

161.

a) Molemmat yhtälöt toteutuvat suorien leikkauspisteessä. Etsitään kuvasta leikkauspisteen koordinaatit.

Koska leikkauspiste on (2, 1), yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

b) Molemmat yhtälöt toteutuvat paraabelien leikkauspisteissä. Etsitään kuvasta leikkauspisteiden koordinaatit.

Koska leikkauspisteet ovat (−2, 2) ja (0, −2), yhtälöparin ratkaisut ovat $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$ tai $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$.

162.

a) Sijoitetaan annetut muuttujien arvot yhtälöihin ja tutkitaan toteuttaako ne yhtälöt.

$$\begin{cases} 6x-2y=4 \\ y=5x-6 \end{cases} \qquad \left| \begin{array}{l} x=2 \\ y=4 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 6\cdot 2-2\cdot 4=4 \\ 4=5\cdot 2-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4=4 \\ 4=4 \end{cases}$$

Yhtälöt toteutuvat, joten $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ on yhtälöparin ratkaisu.

b) Sijoitetaan annetut muuttujien arvot yhtälöihin ja tutkitaan toteuttaako ne yhtälöt.

$$\begin{cases} y=3x-2 \\ -2x+y=1 \end{cases} \qquad \left| \begin{array}{l} x=2 \\ y=4 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} y=3\cdot 2-2 \\ -2\cdot 2+4=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4=4 \\ 0=1 \end{cases}$$

Toinen yhtälö ei toteudu, joten $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ ei ole yhtälöparin ratkaisu.

163.

Piste $(-3, 5) = \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$. Sijoitetaan pisteen koordinaatit yhtälöihin ja tutkitaan toteuttaako ne yhtälöt.

$$\begin{cases} y = -3x - 4 \\ y = x + 8 \end{cases} \qquad \left| \begin{array}{l} x = -3 \\ y = 5 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 5 = -3 \cdot (-3) - 4 \\ 5 = -3 + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = 5 \\ 5 = 5 \end{cases}$$

Yhtälöt toteutuvat, joten piste $(-3, 5)$ on suorien leikkauspiste.

164.

a) Yhtälöparin ensimmäinen yhtälö on jo valmiiksi ratkaistussa muodossa, joten ratkaistaan yhtälö sijoitusmenetelmällä.

Sijoitetaan ensimmäisestä y:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön y:n paikalle.

$$\begin{cases} y = 2x+1 \\ 2x+y+3=0 \end{cases}$$

$$2x+(2x+1)+3=0$$

Saadaan yhtälö $2x+(2x+1)+3=0$, joka sisältää vain tuntemattoman x.

Ratkaistaan saadusta yhtälöstä x.

$$\begin{aligned} 2x+(2x+1)+3&=0 \\ 2x+2x+1+3&=0 \\ 4x&=-4 \qquad |:4 \\ x&=-1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu muuttujan arvo $(x=-1)$ jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön.

Sijoitetaan $x=-1$ ensimmäiseen yhtälöön $y=2x+1$.

$$y = 2\cdot(-1)+1=-1$$

Joten yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$.

b) Yhtälöparin ensimmäinen yhtälö on jo valmiiksi ratkaistussa muodossa, joten ratkaistaan yhtälö sijoitusmenetelmällä.

Sijoitetaan ensimmäisestä x:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön x:n paikalle.

$$\begin{cases} x = 3y + 2 \\ -x + 5y = 8 \end{cases}$$

$$-(3y + 2) + 5y = 8$$

Saadaan yhtälö $-(3y + 2) + 5y = 8$, joka sisältää vain tuntemattoman y.

Ratkaistaan saadusta yhtälöstä y.

$$\begin{aligned} -(3y + 2) + 5y &= 8 \\ -3y - 2 + 5y &= 8 \\ 2y &= 10 \qquad |:2 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu muuttujan arvo $(y = 5)$ jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön.

Sijoitetaan $y = 5$ ensimmäiseen yhtälöön $x = 3y + 2$.

$$x = 3 \cdot 5 + 2 = 17$$

Joten yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x = 17 \\ y = 5 \end{cases}$.

165.

a) Yhtälöparin toinen yhtälö on jo valmiiksi ratkaistussa muodossa, joten ratkaistaan yhtälö sijoitusmenetelmällä.

Sijoitetaan ensimmäisestä y:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön y:n paikalle.

$$\begin{cases} 2x+3y+23=0 \\ y=3x-4 \end{cases}$$

$$2x+3\cdot(3x-4)+23=0$$

Saadaan yhtälö $2x+3\cdot(3x-4)+23=0$, joka sisältää vain tuntemattoman x. Ratkaistaan saadusta yhtälöstä x.

$$\begin{aligned} 2x+3\cdot(3x-4)+23&=0 \\ 2x+9x-12+23&=0 \\ 11x&=-11 \quad |:11 \\ x&=-1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu muuttujan arvo $(x=-1)$ jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön.

Sijoitetaan $x=-1$ toiseen yhtälöön $y=3x-4$.

$$y=3\cdot(-1)-4=-7$$

Joten yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x=-1 \\ y=-7 \end{cases}$.

b) Yhtälöparin toinen yhtälö on jo valmiiksi ratkaistussa muodossa, joten ratkaistaan yhtälö sijoitusmenetelmällä.

Sijoitetaan ensimmäisestä y:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön y:n paikalle.

$$\begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$3x - 6 \cdot (x + 1) = 0$$

Saadaan yhtälö $3x - 6 \cdot (x + 1) = 0$, joka sisältää vain tuntemattoman x.

Ratkaistaan saadusta yhtälöstä x.

$$\begin{aligned} 3x - 6 \cdot (x + 1) &= 0 \\ 3x - 6x - 6 &= 0 \\ 3x &= -6 \qquad \Big| : 3 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu muuttujan arvo $(x = -2)$ jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön.

Sijoitetaan $x = -2$ toiseen yhtälöön $y = x + 1$.

$$y = -2 + 1 = -1$$

Joten yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$.

166.

Muodostetaan suorien yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan leikkauspiste sijoitusmenetelmällä.

$$\begin{cases} y = 3x+1 \\ y = -x+1 \end{cases}$$

$$3x+1 = -x+1$$

Saadaan yhtälö $3x+1=-x+1$, joka sisältää vain tuntemattoman *x*.

Ratkaistaan saadusta yhtälöstä *x*.

$$\begin{aligned} 3x+1 &= -x+1 \\ 4x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu muuttujan arvo $(x=0)$ jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön.

Sijoitetaan $x=0$ toiseen yhtälöön $y=-x+1$.

$$y = -0+1 = 1$$

Joten yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ ja leikkauspiste on $(0,1)$.

167.

Muodostetaan suorien yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan leikkauspiste sijoitusmenetelmällä.

$$\begin{cases} y = 5x - 4 \\ y = x + 4 \end{cases}$$

$$5x - 4 = x + 4$$

Saadaan yhtälö $5x - 4 = x + 4$, joka sisältää vain tuntemattoman x.

Ratkaistaan saadusta yhtälöstä x.

$$\begin{aligned} 5x - 4 &= x + 4 \\ 4x &= 8 \qquad \Big|:4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu muuttujan arvo $(x = 2)$ jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön.

Sijoitetaan $x = 2$ toiseen yhtälöön $y = x + 4$.

$$y = 2 + 4 = 6$$

Joten yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$ ja leikkauspiste on (2, 6).

168.

a) Kumpikaan yhtälöistä ei ole ratkaistussa muodossa. Ensimmäisestä yhtälöstä on kuitenkin helppo ratkaista lauseke muuttujalle *y*.

$$2y = -2x + 6 \qquad |:6$$
$$y = -x + 3$$

Sijoitetaan saatu *y*:n lauseke toiseen yhtälöön $4x + 4y = 12$.

$$4x + 4(-x + 3) = 12$$
$$4x - 4x + 12 = 12$$
$$0 = 0$$

Saatu väite $0 = 0$ on tosi. Mikä tahansa luku *x* toteuttaa yhtälön, joten yhtälöparilla on äärettömän monta ratkaisua (x, y).

Kaikki lukuparin (x, y) eivät kuitenkaan kelpaa yhtälöparin ratkaisuiksi. Ratkaistaan myös toisesta yhtälöstä lauseke muuttujalle *y*.

$$4x + 4y = 12$$
$$4y = -4x + 12 \qquad |:4$$
$$y = -x + 3$$

Huomataan, että kyseessä on saman suoran yhtälö.

Tällaisessa tilanteessa, jossa *x*-koordinaatille saadaan äärettömän monta ratkaisua, yhtälöparissa esiintyviä yhtälöitä kuvaa koordinaatistossa täsmälleen sama suora. Ratkaisuiksi kelpaavat kaikki tämän suoran pisteet (x, y). Eli ratkaisuna ovat kaikki suoran $y = -x + 3$ pisteet.

b) Yhtälöparin toinen yhtälö on jo valmiiksi ratkaistussa muodossa, joten ratkaistaan yhtälöpari sijoitusmenetelmällä.

$$\begin{cases} 3x+9y=18 \\ y=-\dfrac{1}{3}x-2 \end{cases}$$

$$3x+9\cdot\left(-\frac{1}{3}x-2\right)=18$$

Saadaan yhtälö $3x+9\cdot\left(-\frac{1}{3}x-2\right)=18$, joka sisältää vain tuntemattoman x.

Ratkaistaan saadusta yhtälöstä x.

$$\begin{aligned} 3x+9\cdot\left(-\frac{1}{3}x-2\right)&=18 \\ 3x-3x-18&=18 \\ 0&=36 \end{aligned}$$

Saatu väite $0=36$ on epätosi. Yhtälöllä ei ole ratkaisua, joten yhtälöparillakaan ei ole ratkaisua.

169.

a) Yhtälöparin ensimmäinen yhtälö on jo valmiiksi ratkaistussa muodossa, joten ratkaistaan yhtälöpari sijoitusmenetelmällä.

$$\begin{cases} y = \frac{2}{5}x + 3 \\ -4x + 10y = 50 \end{cases}$$

$$-4x + 10 \cdot \left(\frac{2}{5}x + 3\right) = 50$$

Saadaan yhtälö $-4x + 10 \cdot \left(\frac{2}{5}x + 3\right) = 50$, joka sisältää vain tuntemattoman x.

Ratkaistaan saadusta yhtälöstä x.

$$\begin{aligned} -4x + 10 \cdot \left(\frac{2}{5}x + 3\right) &= 50 \\ -4x + 4x + 30 &= 50 \\ 0 &= 20 \end{aligned}$$

Saatu väite $0 = 20$ on epätosi. Yhtälöllä ei ole ratkaisua, joten yhtälöparillakaan ei ole ratkaisua.

b) Yhtälöparin toinen yhtälö on jo valmiiksi ratkaistussa muodossa, joten ratkaistaan yhtälöpari sijoitusmenetelmällä.

$$\begin{cases} x-4y=1 \\ y=-\frac{1}{2}x+1 \end{cases}$$

$$x-4\cdot\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=1$$

Saadaan yhtälö $x-4\cdot\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=1$, joka sisältää vain tuntemattoman *x*.

Ratkaistaan saadusta yhtälöstä *x*.

$$\begin{aligned} x-4\cdot\left(-\frac{1}{2}x+1\right)&=1 \\ x+2x-4&=1 \\ 3x&=5 \qquad \Big|:3 \\ x&=\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu muuttujan arvo $\left(x=\frac{5}{3}\right)$ jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön.

Sijoitetaan $x = \frac{5}{3}$ ensimmäiseen yhtälöön $x - 4y = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} - 4y &= 1 \\ 4y &= \frac{2}{3} \qquad \Big| : 4 \\ y &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Joten yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}$.

170.

a) Muodostetaan yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan x ja y, jotka toteuttavat molemmat yhtälöt, sijoitusmenetelmällä.

$$\begin{cases} -3x+5y=6 \\ y=2x-3 \end{cases}$$

$$-3x+5\cdot(2x-3)=6$$

Saadaan yhtälö $-3x+5\cdot(2x-3)=6$, joka sisältää vain tuntemattoman x.

Ratkaistaan saadusta yhtälöstä x.

$$\begin{aligned} -3x+5\cdot(2x-3)&=6 \\ -3x+10x-15&=6 \\ 7x&=21 \qquad |:7 \\ x&=3 \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu muuttujan arvo $(x=3)$ jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön.

Sijoitetaan $x=3$ toiseen yhtälöön $y=2x-3$.

$$y=2\cdot3-3=3$$

Joten yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$ ja molemmat yhtälöt toteutuvat, kun $x=3$ ja $y=3$.

b) Kumpikaan yhtälöistä ei ole ratkaistussa muodossa. Ensimmäisestä yhtälöstä on kuitenkin helppo ratkaista lauseke muuttujalle *y*.

$$3y = 6x - 3 \qquad \Big| :3$$
$$y = 3x - 1$$

Sijoitetaan saatu *y*:n lauseke toiseen yhtälöön $x + y = 8$.

$$x + 2x - 1 = 8$$
$$3x = 9 \qquad \Big| :3$$
$$x = 3$$

Sijoitetaan saatu muuttujan arvo $(x = 3)$ jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön.

Sijoitetaan $x = 3$ ensimmäiseen yhtälöön $3y = 6x - 3$.

$$3y = 6 \cdot 3 - 3$$
$$3y = 15 \qquad \Big| :3$$
$$y = 5$$

Joten yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$ ja molemmat yhtälöt toteutuvat, kun $x = 3$ ja $y = 5$.

171.

a) Leikkauspisteissä toteutuvat molemmat yhtälöt, joten muodostetaan yhtälöpari. Ratkaistaan yhtälöpari sijoittamalla ensimmäisestä yhtälöstä y:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y - 2x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 - 3x + 2) - 2x + 4 = 0$$

Sievennetään yhtälöä ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} (x^2 - 3x + 2) - 2x + 4 &= 0 \\ x^2 - 3x - 2x + 2 + 4 &= 0 \\ x^2 - 5x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Käytetään ratkaisukaavaa.

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{5 + 1}{2} = 3 \text{ tai } x = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

Yhtälöllä on kaksi ratkaisua, joten suoralla ja paraabelilla on kaksi leikkauspistettä. Ratkaistaan leikkauspisteiden y-koordinaatit sijoittamalla saadut x:n arvot paraabelin $y = x^2 - 3x + 2$ lausekkeeseen.

Kun $x = 3$, niin $y = 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2$

Kun $x = 2$, niin $y = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$

Paraabelin ja suora leikkaavat pisteissä (3, 2) ja (2, 0).

172.

a) Ratkaistaan yhtälöpari sijoittamalla ensimmäisestä yhtälöstä y:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = -x^2 + 5x - 2 \end{cases}$$

$$2x - 6 = -x^2 + 5x - 2$$

Sievennetään yhtälöä ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} 2x - 6 &= -x^2 + 5x - 2 \\ x^2 - 3x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Käytetään ratkaisukaavaa.

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x = \frac{3+5}{2} = 4 \text{ tai } x = \frac{3-5}{2} = -1$$

Yhtälöllä on kaksi ratkaisua, joten suoralla ja paraabelilla on kaksi leikkauspistettä. Ratkaistaan leikkauspisteiden *y*-koordinaatit sijoittamalla saadut *x*:n arvot paraabelin $y = -x^2 + 5x - 2$ lausekkeeseen.

Kun $x = 4$, niin $y = -4^2 + 5 \cdot 4 - 2 = -16 + 20 - 2 = 2$.

Kun $x = -1$, niin $y = -(-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 2 = -1 - 5 - 2 = -8$.

Yhtälöparin ratkaisut ovat $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ tai $\begin{cases} x = -1 \\ y = -8 \end{cases}$.

b) Ratkaistaan yhtälöpari sijoittamalla ensimmäisestä yhtälöstä y:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ x^2 - y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - (-2x + 3) + 4 = 0$$

Sievennetään yhtälöä ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} x^2 - (-2x + 3) + 4 &= 0 \\ x^2 + 2x - 3 + 4 &= 0 \\ x^2 + 2x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Käytetään ratkaisukaavaa.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 0}{2}$$

$$x = \frac{-2}{2} = -1$$

Sijoitetaan saatu muuttujan arvo $(x = -1)$ jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön.

Sijoitetaan $x=-1$ paraabelin yhtälöön $x^2-y+4=0$.

$$
\begin{aligned}
(-1)^2-y+4&=0\\
y&=1+4\\
y&=5
\end{aligned}
$$

Yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$.

173.

a) Ratkaistaan yhtälöpari sijoittamalla toisesta yhtälöstä y:n lauseke ensimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{cases} 4x + y = 3 \\ y = -x^2 - x + 3 \end{cases}$$

$$4x + (-x^2 - x + 3) = 3$$

Sievennetään yhtälöä ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} 4x + (-x^2 - x + 3) &= 3 \\ -x^2 + 4x - x &= 0 \\ -x^2 + 3x &= 0 \\ x(-x + 3) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{tai} \quad -x + 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Yhtälöllä on kaksi ratkaisua, joten suoralla ja paraabelilla on kaksi leikkauspistettä. Ratkaistaan leikkauspisteiden y-koordinaatit sijoittamalla saadut x:n arvot paraabelin $y = -x^2 - x + 3$ lausekkeeseen.

Kun $x = 0$, niin $y = -0^2 - 0 + 3 = 3$.

Kun $x = 3$, niin $y = -3^2 - 3 + 3 = -9 - 3 + 3 = -9$.

Yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ tai $\begin{cases} x = 3 \\ y = -9 \end{cases}$.

b) Ratkaistaan yhtälöpari sijoittamalla toisesta yhtälöstä y:n lauseke ensimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ y = 2x^2 - 3x + 4 \end{cases}$$

$$2x - (2x^2 - 3x + 4) = 1$$

Sievennetään yhtälöä ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} 2x - (2x^2 - 3x + 4) &= 1 \\ 2x - 2x^2 + 3x - 4 &= 1 \\ -2x^2 + 5x - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Käytetään ratkaisukaavaa.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-5)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{-15}}{-4}$$

Koska juurrettava on negatiivinen luku, ei yhtälöllä ole ratkaisuja, täten ei yhtälöparillakaan ole ratkaisuja.

174.

a) Leikkauspisteissä toteutuvat molemmat yhtälöt, joten muodostetaan yhtälöpari. Ratkaistaan yhtälöpari sijoittamalla ensimmäisestä yhtälöstä y:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{cases} y = 5x - 2 \\ 15x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$15x - 3 \cdot (5x - 2) = 6$$

Saadaan yhtälö $15x - 3 \cdot (5x - 2) = 6$, joka sisältää vain tuntemattoman x.

Ratkaistaan saadusta yhtälöstä x.

$$\begin{aligned} 15x - 3 \cdot (5x - 2) &= 6 \\ 15x - 15x + 6 &= 6 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Saatu väite $0 = 0$ on tosi. Mikä tahansa luku x toteuttaa yhtälön, joten yhtälöparilla on äärettömän monta ratkaisua (x, y).

Kaikki lukuparin (x, y) eivät kuitenkaan kelpaa yhtälöparin ratkaisuiksi. Ratkaistaan myös toisesta yhtälöstä lauseke muuttujalle y.

$$\begin{aligned} 15x - 3y &= 6 \\ -3y &= -15x + 6 && \big| : (-3) \\ y &= 5x - 2 \end{aligned}$$

Huomataan, että kyseessä on saman suoran yhtälö.

Tällaisessa tilanteessa, jossa x-koordinaatille saadaan äärettömän monta ratkaisua, yhtälöparissa esiintyviä yhtälöitä kuvaa koordinaatistossa täsmälleen sama suora. Ratkaisuiksi kelpaavat kaikki tämän suoran pisteet (x, y). Eli ratkaisuna ovat kaikissa suoran $y = 5x - 2$ pisteissä.

b) Leikkauspisteissä toteutuvat molemmat yhtälöt, joten muodostetaan yhtälöpari. Ratkaistaan yhtälöpari sijoittamalla ensimmäisestä yhtälöstä y:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{cases} y = 5x - 2 \\ y = x^2 + 8x - 12 \end{cases}$$

$$5x - 2 = x^2 + 8x - 12$$

Sievennetään yhtälöä ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} 5x - 2 &= x^2 + 8x - 12 \\ x^2 + 8x - 5x - 12 + 2 &= 0 \\ x^2 + 3x - 10 &= 0 \end{aligned}$$

Käytetään ratkaisukaavaa.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$x = \frac{-3+7}{2} = 2 \text{ tai } x = \frac{-3-7}{2} = -5$$

Yhtälöllä on kaksi ratkaisua, joten suoralla ja paraabelilla on kaksi leikkauspistettä. Ratkaistaan leikkauspisteiden y -koordinaatit sijoittamalla saadut x:n arvot paraabelin $y = x^2 + 8x - 12$ lausekkeeseen.

Kun $x = 2$, niin $y = 2^2 + 8 \cdot 2 - 12 = 4 + 16 - 12 = 8$.

Kun $x = -5$, niin $y = (-5)^2 + 8 \cdot (-5) - 12 = 25 - 40 - 12 = -27$.

Suora leikkaa paraabelin pisteissä (2, 8) ja (−5, −27).

175.

Leikkauspisteissä toteutuvat molemmat yhtälöt, joten muodostetaan yhtälöpari. Ratkaistaan yhtälöpari sijoittamalla ensimmäisestä yhtälöstä y:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{cases} y = 2x^2 - x - 1 \\ y = x^2 + 3x + 4 \end{cases}$$

$$2x^2 - x - 1 = x^2 + 3x + 4$$

Sievennetään yhtälöä ja ratkaistaan siitä x.

$$2x^2 - x - 1 = x^2 + 3x + 4$$
$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

Käytetään ratkaisukaavaa.

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2}$$
$$x = \frac{4 \pm 6}{2}$$
$$x = \frac{4+6}{2} = 5 \text{ tai } x = \frac{4-6}{2} = -1$$

Yhtälöllä on kaksi ratkaisua, joten paraabeleilla on kaksi leikkauspistettä. Ratkaistaan leikkauspisteiden y-koordinaatit sijoittamalla saadut x:n arvot paraabelin $y = x^2 + 3x + 4$ lausekkeeseen.

Kun $x = -1$, niin $y = (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 4 = 1 - 3 + 4 = 2$

Kun $x = 5$, niin $y = 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 = 25 + 15 + 4 = 44$

Paraabelit leikkaavat toisensa pisteissä (−1, 2) ja (5, 44).

176.

a) Leikkauspisteissä toteutuvat molemmat yhtälöt, joten muodostetaan yhtälöpari. Ratkaistaan yhtälöpari sijoittamalla ensimmäisestä yhtälöstä y:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 7 \\ 9x - y = 3 \end{cases}$$

$$9x - (-x^2 + 4x - 7) = 3$$

Sievennetään yhtälöä ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} 9x - (-x^2 + 4x - 7) &= 3 \\ 9x + x^2 - 4x + 7 &= 3 \\ x^2 + 5x + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Käytetään ratkaisukaavaa.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{-5 + 3}{2} = -1 \text{ tai } x = \frac{-5 - 3}{2} = -4$$

Yhtälöllä on kaksi ratkaisua, joten suoralla ja paraabelilla on kaksi leikkauspistettä. Ratkaistaan leikkauspisteiden y-koordinaatit sijoittamalla saadut x:n arvot paraabelin $y=-x^2+4x-7$ lausekkeeseen.

Kun $x=-1$, niin $y=-(-1)^2+4\cdot(-1)-7=-1-4-7=-12$

Kun $x=-4$, niin $y=-(-4)^2+4\cdot(-4)-7=-16-16-7=-39$

Paraabeli leikkaa suoran pisteissä (−1, −12) ja (−4, −39).

b) Leikkauspisteissä toteutuvat molemmat yhtälöt, joten muodostetaan yhtälöpari. Ratkaistaan yhtälöpari sijoittamalla ensimmäisestä yhtälöstä y:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 7 \\ y = x^2 + 3x - 7 \end{cases}$$

$$-x^2 + 4x - 7 = x^2 + 3x - 7$$

Sievennetään yhtälöä ja ratkaistaan siitä x.

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x - 7 &= x^2 + 3x - 7 \\ 2x^2 - x &= 0 \\ x(2x-1) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x - 1 &= 0 \\ 2x &= 1 \quad \big| :2 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Yhtälöllä on kaksi ratkaisua, joten paraabeleilla on kaksi leikkauspistettä. Ratkaistaan leikkauspisteiden y -koordinaatit sijoittamalla saadut x:n arvot paraabelin $y = -x^2 + 4x - 7$ lausekkeeseen.

Kun $x = 0$, niin $y = -0^2 + 4 \cdot 0 - 7 = -7$

Kun $x = \frac{1}{2}$, niin $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} - 7 = -\frac{1}{4} + 2 - 7 = -\frac{21}{4}$

Paraabelit leikkaavat pisteissä $(0, -7)$ ja $\left(\frac{1}{2}, -\frac{21}{4}\right)$.

177.

a) Sijoitetaan yhtälöihin $x=-2$ ja $y=1$ sekä sievennetään ne.

$$\begin{cases} -3ax+4by=6 \\ ay=2x+b \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x=-2 \\ y=1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} -3a\cdot(-2)+4b\cdot 1=6 \\ a\cdot 1=2\cdot(-2)+b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a+4b=6 \\ a=b-4 \end{cases}$$

b) Ratkaistaan yhtälöpari $\begin{cases} 6a+4b=6 \\ a=b-4 \end{cases}$ sijoittamalla jälkimmäisestä yhtälöstä *a*:n yhtälö ylempään yhtälöön.

$$\begin{cases} 6a+4b=6 \\ a=b-4 \end{cases}$$

$$6(b-4)+4b=6$$

Saadaan yhtälö $6(b-4)+4b=6$, joka sisältää vain tuntemattoman *b*.

Ratkaistaan saadusta yhtälöstä *b*.

$$\begin{aligned} 6(b-4)+4b&=6 \\ 6b-24+4b&=6 \\ 10b&=30 \qquad \Big| :10 \\ b&=3 \end{aligned}$$

Sijoittamalla saatu *b*:n arvo jälkimmäiseen yhtälöön, saadaan *a*:n arvo

$$a=3-4=-1$$

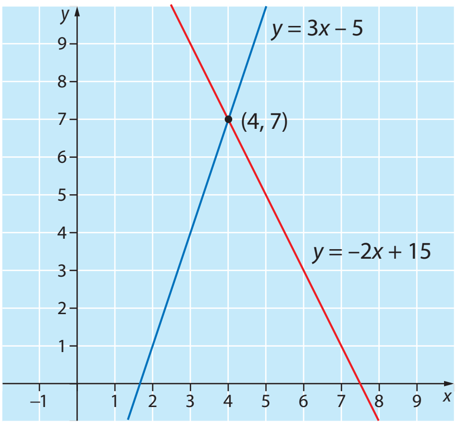
Yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} b=3 \\ a=-1 \end{cases}$.

178.

a) Muutetaan jälkimmäinen yhtälö muotoon $y = ax + b$.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 15 \\ y &= -2x + 15 \end{aligned}$$

Piirretään laskimella suorien kuvaajat koordinaatistoon.



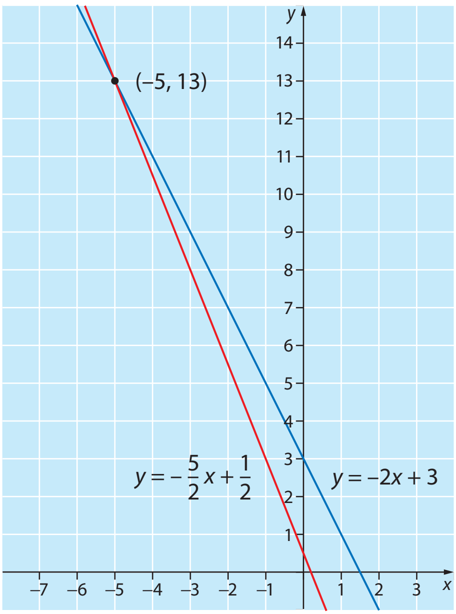
Molemmat yhtälöt toteutuvat suorien leikkauspisteissä. Etsitään laskimella kuvasta leikkauspisteen koordinaatit.

Koska leikkauspiste on (4, 7), yhtälöparin ratkaisu on $x = 4$ ja $y = 7$.

b) Muutetaan ensimmäinen yhtälö muotoon $y = ax + b$.

$$5x + 2y = 1$$
$$y = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$$

Piirretään laskimella suorien kuvaajat koordinaatistoon.



Molemmat yhtälöt toteutuvat suorien leikkauspisteissä. Etsitään laskimella kuvasta leikkauspisteen koordinaatit.

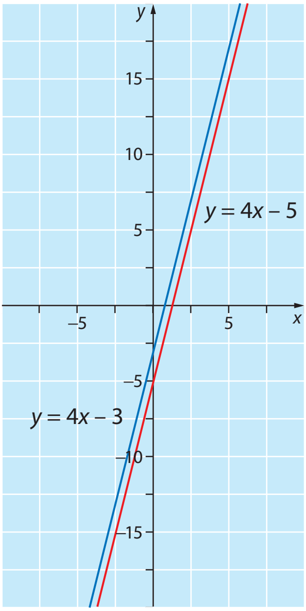
Koska leikkauspiste on (−5, 13), yhtälöparin ratkaisu on $x = -5$ ja $y = 13$.

179.

a) Muutetaan jälkimmäinen yhtälö muotoon $y = ax + b$.

$$8x - 2y = 10$$
$$y = 4x - 5$$

Piirretään laskimella suorien kuvaajat koordinaatistoon.

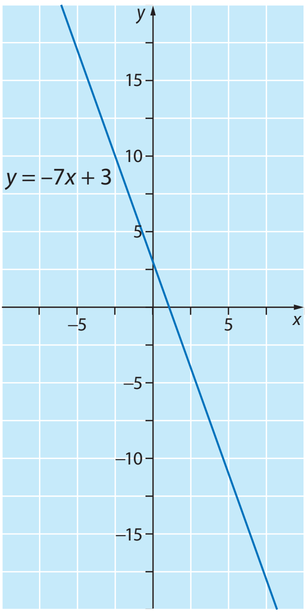


Yhtälöparilla ei ole ratkaisua, koska suorat ovat yhdensuuntaiset.

b) Muutetaan ensimmäinen yhtälö muotoon $y = ax + b$.

$$14x + 2y = 6$$
$$y = -7x + 3$$

Piirretään laskimella suorien kuvaajat koordinaatistoon.



Ratkaisuja ovat kaikki suora $y = -7x + 3$ pisteet, koska suorat ovat sama suora.

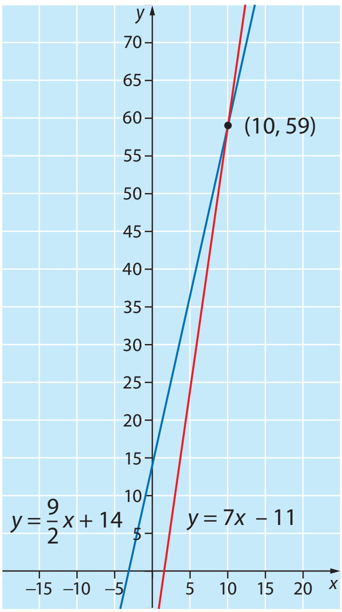
180.

Muutetaan jälkimmäinen yhtälö muotoon $y = ax + b$.

$$9x - 2y = -28$$

$$y = \frac{9}{2}x + 14$$

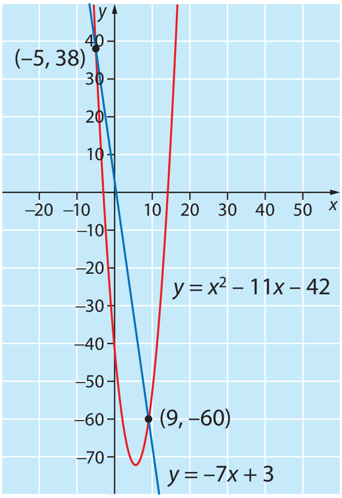
Piirretään laskimella suorien kuvaajat koordinaatistoon.



Leikkauspiste on (10, 59).

181.

Piirretään laskimella kuvaajat koordinaatistoon.



Suora ja paraabeli leikkaavat pisteissä (−5, 38) ja (9, −60).

182.

Yhtälöparin jälkimmäinen yhtälö on jo valmiiksi ratkaistussa muodossa, joten ratkaistaan yhtälö sijoitusmenetelmällä.

Sijoitetaan jälkimmäisestä y:n lauseke ensimmäiseen yhtälöön y:n paikalle.

$$\begin{cases} 6x-3y=6 \\ y=-2x+1 \end{cases}$$

$$6x-3\cdot(-2x+1)=6$$

Saadaan yhtälö $6x-3\cdot(-2x+1)=6$, joka sisältää vain tuntemattoman x. Ratkaistaan saadusta yhtälöstä y.

$$\begin{aligned} 6x-3\cdot(-2x+1)&=6 \\ 6x+6x-3&=6 \\ 12x&=9 \qquad |:12 \\ x&=\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu muuttujan arvo $\left(x=\frac{3}{4}\right)$ jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön.

Sijoitetaan $x=\frac{3}{4}$ jälkimmäiseen yhtälöön $y=-2x+1$.

$$y=-2\cdot\frac{3}{4}+1=-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

183.

a) Kumpikaan yhtälöistä ei ole ratkaisussa muodossa. Jälkimmäisestä yhtälöstä on kuitenkin helppo ratkaista lauseke muuttujalle *y*.

$$6y = 4x - 6 \qquad |:6$$
$$y = \frac{2}{3}x - 1$$

Sijoitetaan saatu *y*:n lauseke ensimmäiseen yhtälöön $2x - 3y = 3$.

$$2x - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}x - 1\right) = 3$$
$$2x - 2x + 3 = 3$$
$$0 = 0$$

Saatu väite $0 = 0$ on tosi. Mikä tahansa luku *x* toteuttaa yhtälön, joten yhtälöparilla on äärettömän monta ratkaisua (x, y).

Kaikki lukuparin (x, y) eivät kuitenkaan kelpaa yhtälöparin ratkaisuiksi. Ratkaistaan myös toisesta yhtälöstä lauseke muuttujalle *y*.

$$2x - 3y = 3$$
$$-3y = -2x + 3 \qquad |:(-3)$$
$$y = \frac{2}{3}x - 1$$

Huomataan, että kyseessä on saman suoran yhtälö.

Tällaisessa tilanteessa, jossa x-koordinaatille saadaan äärettömän monta ratkaisua, yhtälöparissa esiintyviä yhtälöitä kuvaa koordinaatistossa täsmälleen sama suora. Ratkaisuiksi kelpaavat kaikki tämän suoran pisteet (x, y). Eli ratkaisuna ovat kaikki suoran $y = \frac{2}{3}x - 1$ pisteet.

b) Yhtälöparin toinen yhtälö on jo valmiiksi ratkaistussa muodossa, joten ratkaistaan yhtälö sijoitusmenetelmällä.

Sijoitetaan ensimmäisestä y:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön y:n paikalle.

$$\begin{cases} y = -4x + 5 \\ 8x + 2y = -3 \end{cases}$$

$$8x + 2 \cdot (-4x + 5) = 3$$

Saadaan yhtälö $8x + 2 \cdot (-4x + 5) = 3$, joka sisältää vain tuntemattoman x. Ratkaistaan saadusta yhtälöstä x.

$$\begin{aligned} 8x + 2 \cdot (-4x + 5) &= 3 \\ 8x - 8x + 10 &= 3 \\ 0 &= -7 \end{aligned}$$

Saatu väite $0 = -7$ on epätosi. Yhtälöllä ei ole ratkaisua, joten yhtälöparillakaan ei ole ratkaisua.

184.

a) Leikkauspisteissä toteutuvat molemmat yhtälöt, joten muodostetaan yhtälöpari. Ratkaistaan yhtälöpari sijoittamalla ensimmäisestä yhtälöstä y:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{cases} y = 2x - 9 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$x - 2 \cdot (2x - 9) = 6$$

Saadaan yhtälö $x - 2 \cdot (2x - 9) = 6$, joka sisältää vain tuntemattoman x. Ratkaistaan saadusta yhtälöstä x.

$$\begin{aligned} x - 2 \cdot (2x - 9) &= 6 \\ x - 4x + 18 &= 6 \\ -3x &= -12 \qquad \Big| : (-3) \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Sijoitetaan saatu muuttujan arvo $(x = 4)$ jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön.

Sijoitetaan $x = 4$ toiseen yhtälöön $x - 2y = 6$.

$$\begin{aligned} 4 - 2y &= 6 \\ -2y &= 2 \qquad \Big| : (-2) \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Suorat leikkaavat pisteessä (4, −1).

b) Leikkauspisteissä toteutuvat molemmat yhtälöt, joten muodostetaan yhtälöpari. Ratkaistaan yhtälöpari sijoittamalla ensimmäisestä yhtälöstä y:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{cases} y = 2x - 9 \\ y = 2x^2 - 3x - 12 \end{cases}$$

$$2x - 9 = 2x^2 - 3x - 12$$

Sievennetään yhtälöä ja ratkaistaan siitä x.

$$2x - 9 = 2x^2 - 3x - 12$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

Käytetään ratkaisukaavaa.

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$x = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$x = \frac{5+7}{4} = 3 \text{ tai } x = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$

Yhtälöllä on kaksi ratkaisua, joten suoralla ja paraabelilla on kaksi leikkauspistettä. Ratkaistaan leikkauspisteiden *y*-koordinaatit sijoittamalla saadut *x*:n arvot paraabelin $y = 2x^2 - 3x - 12$ lausekkeeseen.

Kun $x = 3$, niin $y = 2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3 - 12 = 18 - 9 - 12 = -3$

Kun $x = -\frac{1}{2}$, niin $y = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 12 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 12 = -10$

Suora leikkaa paraabelin pisteissä (3, −3) ja $\left(-\frac{1}{2}, -10\right)$.

185.

Ratkaistaan yhtälöpari sijoittamalla ensimmäisestä yhtälöstä y:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{cases} y = -3x^2 + 5x + 8 \\ y = -2x^2 + x - 4 \end{cases}$$

$$-3x^2 + 5x + 8 = -2x^2 + x - 4$$

Sievennetään yhtälöä ja ratkaistaan siitä x.

$$-3x^2 + 5x + 8 = -2x^2 + x - 4$$
$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

Käytetään ratkaisukaavaa.

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{2}$$

$$x = \frac{4+8}{2} = 6 \text{ tai } x = \frac{4-8}{2} = -2$$

Yhtälöllä on kaksi ratkaisua, joten paraabeleilla on kaksi leikkauspistettä. Ratkaistaan leikkauspisteiden y-koordinaatit sijoittamalla saadut x:n arvot paraabelin $y = -2x^2 + x - 4$ lausekkeeseen.

Kun $x = 6$, niin $y = -2 \cdot 6^2 + 6 - 4 = -72 + 6 - 4 = -70$

Kun $x = -2$, niin $y = -2 \cdot (-2)^2 + (-2) - 4 = -8 - 2 - 4 = -14$

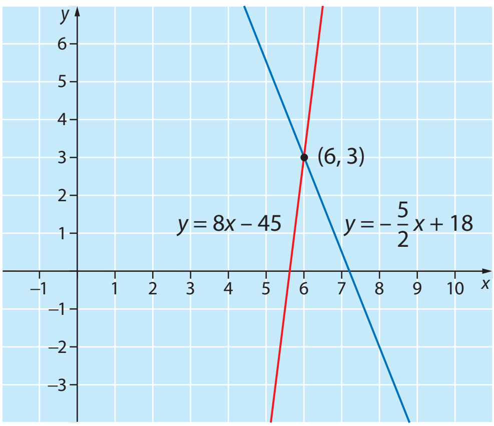
Yhtälöparin ratkaisut ovat $\begin{cases} x = 6 \\ y = -70 \end{cases}$ ja $\begin{cases} x = -2 \\ y = -14 \end{cases}$.

186.

a) Muutetaan jälkimmäinen yhtälö muotoon $y = ax + b$.

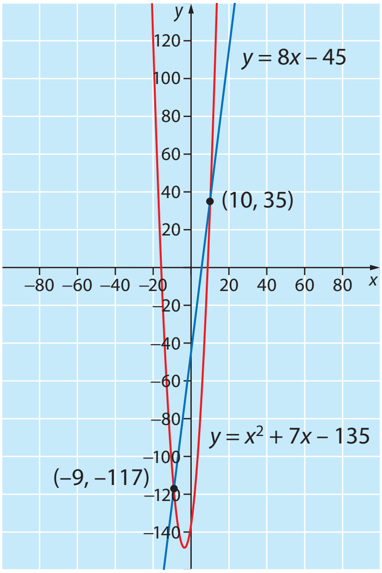
$$5x + 2y = 36$$
$$2y = -5x + 36 \quad \Big|:2$$
$$y = -\frac{5}{2}x + 18$$

Piirretään laskimella suorien kuvaajat koordinaatistoon.



Suorien leikkauspiste on (6, 3)

b) Piirretään laskimella kuvaajat koordinaatistoon.



Suora leikkaa paraabelin pisteissä (−9, −117) ja (10, 35).

3.2 Yhtälöpari sovellustehtävissä

187.

a) Kun jälkimmäinen yhtälö kerrotaan puolittain luvulla 3, tuntematon y saadaan eliminoitua yhtälöparista.

$$\begin{cases} 3y + x = 5 \\ -y - 5x = 3 \end{cases} \qquad |\cdot 3$$

$$+\begin{cases} 3y + x = 5 \\ -3y - 15x = 9 \end{cases}$$

$$-14x = 14 \qquad |:(-14)$$

$$x = -1$$

Sijoitetaan $x = -1$ yhtälöön $-y - 5x = 3$ ja ratkaistaan y.

$$-y - 5\cdot(-1) = 3$$

$$-y + 5 = 3$$

$$-y = -2 \qquad |:(-1)$$

$$y = 2$$

Yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$.

b) Kun jälkimmäinen yhtälö kerrotaan puolittain luvulla −5 ja ensimmäinen yhtälö kerrotaan luvulla 2, tuntematon y saadaan eliminoitua yhtälöparista.

$$\begin{cases} 7x+5y=3 & \big| \cdot 2 \\ 3x+2y=3 & \big| \cdot(-5) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 14x+10y=6 \\ -15x-10y=-15 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -x&=-9 \quad \big| :(-1) \\ x&=9 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x=9$ yhtälöön $3x+2y=3$ ja ratkaistaan y.

$$\begin{aligned} 3\cdot 9+2y&=3 \\ 27+2y&=3 \\ 2y&=-24 \quad \big| :2 \\ y&=-12 \end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x=9 \\ y=-12 \end{cases}$.

188.

Kun jälkimmäinen yhtälö kerrotaan puolittain luvulla 2, tuntematon x saadaan eliminoitua yhtälöparista.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 1 \qquad \qquad \qquad \Big| \cdot 2 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$5y = 6 \qquad \qquad \qquad \Big| : 5$$

$$y = \frac{6}{5}$$

Sijoitetaan $y = \dfrac{6}{5}$ yhtälöön $2x + y = 4$ ja ratkaistaan x.

$$2x + \frac{6}{5} = 4$$

$$2x = \frac{14}{5} \qquad \qquad \qquad \Big| : 2$$

$$x = \frac{7}{5}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x = \dfrac{7}{5} \\ y = \dfrac{6}{5} \end{cases}$.

189.

a) Kun jälkimmäinen yhtälö kerrotaan puolittain luvulla -1, tuntematon y saadaan eliminoitua yhtälöparista.

$$\begin{cases} 2-x-y=0 \\ 2-2x-y=0 \end{cases} \qquad \Big| \cdot(-1)$$

$$\begin{array}{l} +\begin{cases} 2-x-y=0 \\ -2+2x+y=0 \end{cases} \\ \hline \qquad\qquad x=0 \end{array}$$

Sijoitetaan $x=0$ yhtälöön $2-x-y=0$ ja ratkaistaan y.

$$\begin{aligned} 2-0-y&=0 \\ y&=2 \end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$.

b) Sievennetään molemmat yhtälöt.

$$2(x+3y)-1=0 \qquad\qquad -2(3x-2y)-8=0$$
$$2x+6y-1=0 \qquad\qquad -6x+4y-8=0$$

Kun ensimmäinen yhtälö kerrotaan puolittain luvulla 3, tuntematon *x* saadaan eliminoitua yhtälöparista.

$$\begin{cases} 2x+6y-1=0 & \Big|\cdot 3 \\ -6x+4y-8=0 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 6x+18y-3=0 \\ -6x+4y-8=0 \end{cases}$$

$$22y-11=0$$
$$22y=11 \qquad \Big|:22$$
$$y=\frac{1}{2}$$

Sijoitetaan $y=\frac{1}{2}$ yhtälöön $2x+6y-1=0$ ja ratkaistaan *x*.

$$2x+6\cdot\frac{1}{2}-1=0$$
$$2x+3-1=0$$
$$2x=-2 \qquad \Big|:2$$
$$x=-1$$

Yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$.

190.

Sievennetään molemmat yhtälöt.

$$2x+(a+1)y=5 \qquad\qquad 3x+(a-2)y=a$$
$$2x+ay+y=5 \qquad\qquad 3x+ay-2y=a$$

Kun jälkimmäinen yhtälö kerrotaan puolittain luvulla 2 ja ensimmäinen yhtälö kerrotaan luvulla −3, tuntematon x saadaan eliminoitua yhtälöparista.

$$\begin{cases} 2x+ay+y=5 & \big|\cdot(-3) \\ 3x+ay-2y=a & \big|\cdot 2 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -6x-3ay-3y=-15 \\ 6x+2ay-4y=2a \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -ay-7y&=2a-15 \\ y(-a-7)&=2a-15 \qquad \big|:(-a-7) \\ y&=\frac{2a-15}{-a-7} \end{aligned}$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisuja, jos

$$\begin{aligned} -a-7&=0 \\ a&=-7 \end{aligned}$$

191.

Merkitään aikuisten lippujen määrää kirjaimella x ja lasten lippujen määrää kirjaimella y. Kootaan tehtävän tiedot taulukkoon ja muodostetaan sen avulla tarvittavat yhtälöt.

	Määrä	Kertynyt raha
Aikuisten lippu	x	$10x$
Lasten lippu	y	$5y$
Yhteensä	$x + y$	$10x + 5y$

Koska lippuja myytiin yhteensä 300, saadaan yhtälö $x+y=300$.

Koska lipuista kertyi 2100 € rahaa, saadaan yhtälö $10x+5y=2100$

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan se yhteenlaskumenetelmällä.

$$\begin{cases} x+y=300 & \left| \cdot(-5) \right. \\ 10x+5y=2100 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -5x-5y=-1500 \\ 10x+5y=2100 \end{cases}$$

$$5x=600 \quad |:5$$

$$x=120$$

Sijoitetaan $x=120$ yhtälöön $x+y=300$.

$$120+y=300$$

$$y=180$$

Aikuisten lippuja myytiin 120 kpl ja lasten lippuja 180 kpl.

192.

Merkitään lehmien määrää kirjaimella x ja kanojen määrää kirjaimella y. Kootaan tehtävän tiedot taulukkoon ja muodostetaan sen avulla tarvittavat yhtälöt.

	Määrä	Jalkoja
Lehmiä	x	$4x$
Kanoja	y	$2y$
Yhteensä	$x + y$	$4x + 2y$

Koska eläimiä on yhteensä 32, niin saadaan yhtälö $x+y=32$.

Koska eläimillä on jalkoja yhteensä 88, niin saadaan yhtälö $4x+2y=88$.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan se yhteenlaskumenetelmällä.

$$\begin{cases} x+y=32 & \mid\cdot(-2) \\ 4x+2y=88 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -2x-2y=-64 \\ 4x+2y=88 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x&=24 \quad \mid :2 \\ x&=12 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x=12$ yhtälöön $x+y=32$.

$$\begin{aligned} 12+y&=32 \\ y&=20 \end{aligned}$$

Lehmiä on 12 ja kanoja 20.

193.

Merkitään kahvin hintaa kirjaimella *x* ja munkin hintaa kirjaimella *y*.

Koska viisi kahvia ja kahdeksan munkkia maksavat yhteensä 22 €, saadaan yhtälö $5x+8y=22$.

Koska neljä kahvia ja kuusi munkkia maksavat yhteensä 17 €, saadaan yhtälö $4x+6y=17$.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan se yhteenlaskumenetelmällä.

$$\begin{cases} 5x+8y=22 & \quad \left|\cdot 3\right. \\ 4x+6y=17 & \quad \left|\cdot(-4)\right. \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 15x+24=66 \\ -16x-24y=-68 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -x&=-2 \quad \left|\cdot(-1)\right. \\ x&=2 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $x=2$ yhtälöön $5x+8y=22$.

$$\begin{aligned} 5\cdot 2+8y&=22 \\ 8y&=12 \quad \left|:8\right. \\ y&=\frac{3}{2}=1,5 \end{aligned}$$

Kahvin hinta on 2 € ja munkin hinta on 1,5 €.

194.

Merkitään kakkujen määrää kirjaimella x ja piirakoiden määrää kirjaimella y. Kootaan tehtävän tiedot taulukkoon ja muodostetaan sen avulla tarvittavat yhtälöt.

	Määrä	Kananmunien kulutus	Jauhojen kulutus
Kakkuja	x	$2x$	$5x$
Piirakoita	y	$2y$	$2{,}5y$
Yhteensä	$x + y$	$2x + 2y$	$5x + 2{,}5y$

Koska kananmunia käytetään yhteensä 352, saadaan yhtälö $2x + 2y = 352$.

Koska jauhoja käytetään yhteensä 62 litraa, eli 620 desilitraa, saadaan yhtälö $5x + 2{,}5y = 620$.

Muodostetaan yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 352 \\ 5x + 2{,}5y = 620 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuna on $y = 104$ ja $x = 72$.

Kakkuja leivotaan 72 ja piirakoita 104.

195.

Merkitään aikuisten määrää kirjaimella x ja lasten määrää kirjaimella y. Kootaan tehtävän tiedot taulukkoon ja muodostetaan sen avulla tarvittavat yhtälöt.

	Määrä	Rannekkeisiin käytetty rahamäärä
Aikuisia	x	$27x$
Lapsia	y	$16y$
Yhteensä	$x + y$	$27x + 16y$

Koska lomailijoita oli yhteensä 40, saadaan yhtälö $x + y = 40$.

Koska rannekkeisiin käytettiin yhteensä 772 €, saadaan yhtälö $27x + 16y = 772$.

Muodostetaan yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 27x + 16y = 772 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuna on $y = 28$ ja $x = 12$.

Aikuisia oli 12 ja lapsia 28.

196.

Merkitään maalin A määrää kirjaimella x ja maalin B määrää kirjaimella y. Kootaan tehtävän tiedot taulukkoon ja muodostetaan sen avulla tarvittavat yhtälöt.

	Määrä	Keltaisen pigmentin kulutus	Sinisen pigmentin kulutus
Maali A	x	$80x$	$110x$
Maali B	y	$120y$	$90y$
Yhteensä	$x + y$	$80x + 120y$	$110x + 90y$

Koska keltaista pigmenttiä käytettiin yhteensä $3,2\ \text{kg} = 3200\ \text{g}$, saadaan yhtälö $80x + 120y = 3200$

Koska sinistä pigmenttiä käytettiin yhteensä $3,5\ \text{kg} = 3500\ \text{g}$, saadaan yhtälö $110x + 90y = 3500$.

Muodostetaan yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 80x + 120y = 3200 \\ 110x + 90y = 3500 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuna on $y = 12$ ja $x = 22$.

Maalia A valmistetaan 22 litraa ja maalia B valmistetaan 12 litraa.

197.

a) Kootaan tiedot taulukkoon.

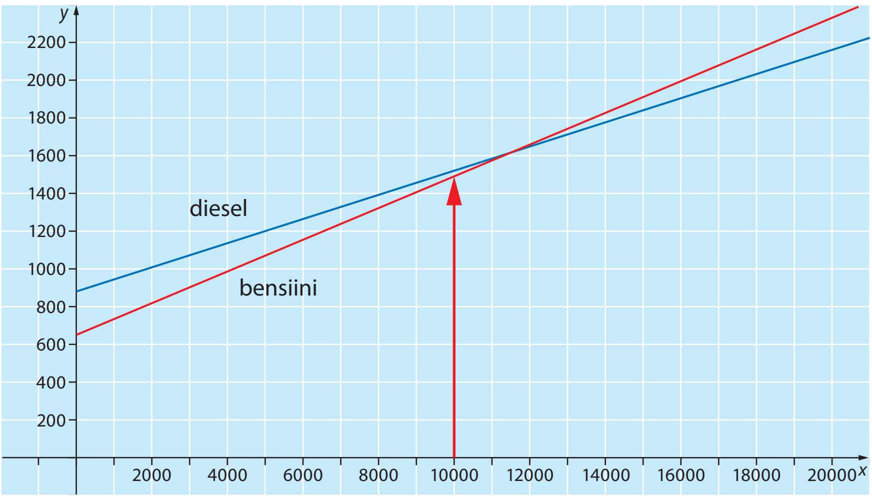
	Matka (km)	Polttoainekulut / km (€)	Kustannukset y (€)
Diesel	x	$0{,}064x$	$880 + 0{,}064x$
Bensiini	x	$0{,}084x$	$650 + 0{,}084x$

Riippuvuutta kuvaavat yhtälöt ovat:

Diesel $y = 880 + 0,064x$

Bensiini $y = 650 + 0,084x$

Piirretään kuvaajat samaan koordinaatistoon.



b) Kun ajokilometrejä kertyy 10000, bensiiniauto tulee halvemmaksi.

c) Ratkaistaan kilometrimäärä yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y = 880 + 0{,}064x \\ y = 650 + 0{,}084x \end{cases}$$

$$x = 11\,500$$

Kilometrimäärä pitää olla 11 500 km.

198.

a) Kootaan tiedot taulukkoon.

	Käyntikerrat	Käyntien kustannukset (€)	Kokonaiskustannukset y (€)
Pinnistys	x	$6x$	$6x$
Ponnistus	x	$2{,}80x$	$120 + 2{,}80x$

Riippuvuutta kuvaavat yhtälöt ovat:

Pinnistys $y = 6x$

Ponnistus $y = 2{,}8x + 120$

b) Lasketaan käyntikertojen määrä yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y = 6x \\ y = 2{,}8x + 120 \end{cases}$$

$$x = 37{,}5$$

Jotta kannattaa valita Ponnistus pitää käyntikertoja olla vähintään 38.

199.

a) Kootaan tiedot taulukkoon.

	Soitetut minuutit (josta joutuu maksamaan)	Puhelujen kustannukset (€)	Kokonaiskustannukset. y (€)
Liittymä A	$x - 500$	$0{,}1 \cdot (x-500)$	$19{,}90 + 0{,}1 \cdot (x-500)$
Liittymä B	$x - 500$	$0{,}15 \cdot (x-500)$	$14{,}90 + 0{,}15 \cdot (x-500)$

$$\begin{aligned} A(x) &= 19{,}90 + 0{,}1 \cdot (x - 500) \\ &= 0{,}1x - 30{,}1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= 14{,}90 + 0{,}15 \cdot (x - 500) \\ &= 0{,}15x - 60{,}1 \end{aligned}$$

b) Ratkaistaan kuukausittainen puheaika yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y = 0{,}1x - 30{,}1 \\ y = 0{,}15x - 60{,}1 \end{cases}$$

$$x = 600$$

Kuukausittainen puheaika pitää olla 600 min.

c) Lasketaan kummankin liittymän kokonaiskustannukset, kun $x = 1000$.

$A(1000) = 0{,}1 \cdot 1000 - 30{,}1 = 69{,}9$

$B(1000) = 0{,}15 \cdot 1000 - 60{,}1 = 89{,}9$

Lasketaan niiden erotus

$B(x) - A(x) = 89{,}9 - 69{,}9 = 20$

Kokonaishintojen välinen ero on 20 €.

200.

a) Lasketaan yhtälöpari yhteenlaskumenetelmällä.

$$\begin{cases} 4x + y = 3 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} \quad \Big| \cdot (-2)$$

$$+\begin{cases} 4x + y = 3 \\ -4x - 6y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -5y &= 5 \quad \Big| : (-5) \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Sijoitetaan $y = -1$ yhtälöön $4x + y = 3$.

$$\begin{aligned} 4x - 1 &= 3 \\ 4x &= 4 \quad \Big| : 4 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$.

b) Lasketaan yhtälöpari yhteenlaskumenetelmällä.

$$\begin{cases} -2x+2y=3 & \big| \cdot 5 \\ 3x-5y=-\dfrac{1}{2} & \big| \cdot 2 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -10x+10y=15 \\ 6x-10y=-1 \end{cases}$$

$$-4x = 14 \qquad \big| : (-4)$$

$$x = -\frac{7}{2}$$

Sijoitetaan $x=-\dfrac{7}{2}$ yhtälöön $-2x+2y=3$.

$$-2\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)+2y=3$$

$$2y=-4 \qquad \big| : 2$$

$$y=-2$$

Yhtälöparin ratkaisu on $\begin{cases} x=-\dfrac{7}{2} \\ y=-2 \end{cases}$.

201.

Merkitään kahden euron kolikoiden määrää kirjaimella x ja euron kolikoiden määrää kirjaimella y. Kootaan tehtävän tiedot taulukkoon ja muodostetaan sen avulla tarvittavat yhtälöt.

	Määrä	Arvo
Kahden euron kolikoita	x	$2x$
Euron kolikoita	y	y
Yhteensä	$x+y$	$2x+y$

Koska kolikoita on yhteensä 24, niin saadaan yhtälö $x+y=24$.

Koska rahaa on 39 €, niin saadaan yhtälö $2x+y=39$.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan se yhteenlaskumenetelmällä.

$$\begin{cases} x+y=24 & \quad \Big| \cdot(-1) \\ 2x+y=39 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} +\begin{cases} -x-y=-24 \\ 2x+y=39 \end{cases} \\ \hline x=15 \end{array}$$

Sijoitetaan $x=15$ yhtälöön $x+y=24$.

$$15+y=24$$
$$y=9$$

2 €:n kolikoita on 15 ja 1 €:n kolikoita 9.

202.

Merkitään banaanin grammamäärää kirjaimella *x* ja appelsiinin grammamäärää kirjaimella *y*. Kootaan tehtävän tiedot taulukkoon ja muodostetaan sen avulla tarvittavat yhtälöt.

	Määrä (g)	Energiaa (kcal)	Hiilihydraatteja (g)
Banaani	x	$0{,}84x$	$0{,}18x$
Appelsiini	y	$0{,}43y$	$0{,}089y$
Yhteensä	$x + y$	$0{,}84x + 0{,}43y$	$0{,}18x + 0{,}089y$

Koska jälkiruoka sisältää 118,8 kcal energiaa, saadaan yhtälö
$0{,}84x + 0{,}43y = 118{,}8$

Koska jälkiruoka sisältää 25,08 g hiilihydraatteja, saadaan yhtälö
$0{,}18x + 0{,}089y = 25{,}08$

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 0{,}84x + 0{,}43y = 118{,}8 \\ 0{,}18x + 0{,}089y = 25{,}08 \end{cases}$$

Laskin antaa tulokseksi $\begin{cases} x = 80 \\ y = 120 \end{cases}$, joten banaania on 80 g ja appelsiinia on 120 g.

203.

a) Kootaan tehtävän tiedot taulukkoon.

Lämmitys-muoto	Asutut vuodet	Energia-kustannukset (€)	Kokonais-kustannukset y (€)
Maalämpö	x	$750x$	$16500 + 750x$
Öljylämpö	x	$1800x$	$6500 + 1800x$

Kokonaiskustannuksia esittävät yhtälöt ovat:

Maalämpö $y = 750x + 16500$

Öljylämpö $y = 1800x + 6500$

b) Lasketaan yhtälöparilla vuosimäärä.

$$\begin{cases} y = 750x + 16\,500 \\ y = 1800x + 6500 \end{cases}$$

$$x = 9{,}5238$$
$$x \approx 10$$

Talossa on asuttava 10 täyttä vuotta, jotta maalämmön kustannukset ovat pienemmät.