

YHTEINEN TEKIJÄ

TEHTÄVIEN RATKAISUT

Luku 1.1

1. Kaikki luvut on kokonaislukuja. Luonnollisia lukuja ovat 35, 7 ja 0.

2.

a) Luvun 35 vastaluku on -35 , koska $35 + (-35) = 0$.

b) Luvun 7 vastaluku on -7 , koska $7 + (-7) = 0$.

c) Luvun 0 vastaluku on 0, koska $0 + 0 = 0$.

d) Luvun -1 vastaluku on 1, koska $-1 + 1 = 0$.

e) Luvun -13 vastaluku on 13, koska $-13 + 13 = 0$.

3.

a) $|35| = 35$

b) $|7| = 7$

c) $|0| = 0$

d) $|-1| = 1$

e) $|-13| = 13$

4.

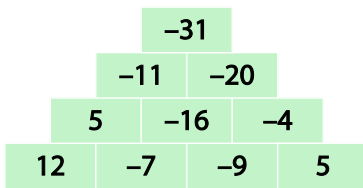
a) $7 + (-15) = 7 - 15 = -8$

b) $-6 + (-9) = -6 - 9 = -15$

c) $-10 - 3 = -13$

d) $-17 - (-5) = -17 + 5 = -12$

5.



6.

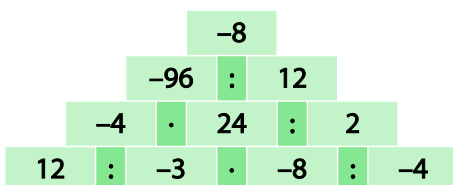
a) $-2 \cdot (-15)$
 $= 30$

b) $5 \cdot (-1) \cdot 7 \cdot (-2)$
 $= -5 \cdot 7 \cdot (-2)$
 $= -35 \cdot (-2)$
 $= 70$

c) $18 : (-3)$
 $= -6$

d) $-240 : (-8) : (-2)$
 $= 30 : (-2)$
 $= -15$

7.



8.

$$\begin{aligned} \text{a) } 21 - 18 : 3 \\ &= 21 - 6 \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } -3 \cdot 8 + 2 \\ &= -24 + 2 \\ &= -22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 5 - 4 \cdot (2 - 6 : 3) \\ &= 5 - 4 \cdot (2 - 2) \\ &= 5 - 4 \cdot 0 \\ &= 5 - 0 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 10 : (-22 + 6 \cdot 4) - 9 \\ &= 10 : (-22 + 24) - 9 \\ &= 10 : 2 - 9 \\ &= 5 - 9 \\ &= -4 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} \text{a) } 24 : 6 - 9 \cdot 2 \\ &= 4 - 9 \cdot 2 \\ &= 4 - 18 \\ &= -14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Suurin arvo:} \\ 24 : (6 - 9 \cdot 2) \\ &= 24 : (6 - 18) \\ &= 24 : (-12) \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pienin arvo:} \\ 24 : (6 - 9) \cdot 2 \\ &= 24 : -3 \cdot 2 \\ &= -8 \cdot 2 \\ &= -16 \end{aligned}$$

10.

a)

$$\begin{aligned} &80 + (17 + 20) \\ &= 80 + (20 + 17) \\ &= (80 + 20) + 17 \\ &= 100 + 17 = 117 \end{aligned}$$

Vaihdantalaki: lukujen 17 ja 20 järjestys voidaan vaihtaa.

Liitântälaki: summa $80 + 20$ voidaan laskea ensin.

b)

$$\begin{aligned} &4 \cdot 76 \cdot 25 \\ &= 4 \cdot 25 \cdot 76 \\ &= 100 \cdot 76 = 7600 \end{aligned}$$

Vaihdantalaki: lukujen 76 ja 4 järjestys voidaan vaihtaa.

c)

$$\begin{aligned} &4 \cdot 769 + 6 \cdot 769 \\ &= 769 \cdot (4 + 6) \\ &= 769 \cdot 10 = 7690 \end{aligned}$$

Osittelulaki: luku 769 voidaan erottaa yhteiseksi tekijäksi.

Lasketaan $4 + 6$.

11.

a)

$$-359 + 687 + 360$$

$$= -359 + 360 + 687$$

$$= 1 + 687 = 688$$

Vaihdantalaki: lukujen 687 ja 360 järjestys voidaan vaihtaa.

b)

$$75 \cdot 102$$

$$= 75 \cdot (100 + 2)$$

$$= 75 \cdot 100 + 75 \cdot 2$$

$$= 7500 + 150 = 7650$$

Puretaan luku 102 summaksi $100 + 2$.

Osittelulaki: yhteenlaskettavat voidaan kertoa erikseen luvulla 75.

c)

$$-89 \cdot 145 + 145 \cdot (-11)$$

$$= 145 \cdot (-89) + 145 \cdot (-11)$$

$$= 145 \cdot (-11 - 89)$$

$$= 145 \cdot (-100) = -14500$$

Vaihdantalaki: lukujen -89 ja 145 järjestys voidaan vaihtaa.

Osittelulaki: luku 145 voidaan erottaa yhteiseksi tekijäksi.

12.

a) Lukujen 12 ja -15 summa on $12 + (-15) = 12 - 15 = -3$.

b) Lukujen 12 ja -15 summa on -3 , jonka vastaluku on 3 .

c) Lukujen 12 ja -15 vastalukujen summa on $-12 + 15 = 3$.

13. a) $(7 - 15) : (-4)$

$$= -8 : (-4)$$

$$= 2$$

b) $-(-5) - (-26)$

$$= 5 + 26$$

$$= 31$$

c) $2 \cdot (-6) + (-4)$

$$= -12 - 4$$

$$= -16$$

14. a) $-17 - (-6) = -11$

Siis lämpötila laski 11 astetta.

b) $-17 + 9 = -8$

Lämpötila oli -8 astetta.

c) $\frac{-3 + (-17)}{2} = \frac{-20}{2} = -10$

Keskiarvo on -10 °C.

15. Summan arvo on kolme kertaa keskimmaisessä ruudussa oleva luku.

a)

1	0	-7
-10	-2	6
3	-4	-5

b)

-11	1	-2
5	-4	-13
-6	-9	3

16. a) Merkintä $-x = -1$ tarkoittaa, että luvun x vastaluku on -1 . Siten $x = 1$.

b) Merkintä $-x = 16$ tarkoittaa, että luvun x vastaluku on 16 . Siten $x = -16$.

c) Merkintä $-x = 0$ tarkoittaa, että luvun x vastaluku on 0 . Siten $x = 0$.

d) Luku ja luvun vastaluvun arvo on sama, kun $x = 0$.

17. a) Yhtälö $|x| = 6$ toteutuu, kun luvun x etäisyys luvusta 0 on 6 . Siten $x = 6$ tai $x = -6$.

b) Yhtälö $|x| = 0$ toteutuu, kun luvun x etäisyys luvusta 0 on 0 . Siten $x = 0$.

c) Mikään luku ei toteuta yhtälöä $|x| = -3$, koska itseisarvo on aina vähintään nolla.

d) Mikään luku ei toteuta yhtälöä $|-x| = -2$, koska itseisarvo on aina vähintään nolla.

$$\begin{aligned}
 18. \text{ a) } a - b & \\
 &= 5 - (-8) \\
 &= 5 + 8 \\
 &= 13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } -(a - b) & \\
 &= -a + b \\
 &= -5 - 8 \\
 &= -13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } -a - (-b) & \\
 &= -a + b \\
 &= -5 - 8 \\
 &= -13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19. \text{ a) } 3 \cdot (-2) & \\
 &= -2 + (-2) + (-2) \\
 &= -2 - 2 - 2 \\
 &= -6
 \end{aligned}$$

Tulo $3 \cdot (-2)$ on negatiivinen luku.

b) Koska yhtälössä $2 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 = 0$ tulo $2 \cdot 3 = 6$, niin tulon $(-2) \cdot 3$ täytyy olla -6 .

c) Koska $3 + (-3) = 0$, niin $(-2) \cdot (3 + (-3)) = (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot (-3) = 0$.

Koska yhtälössä $(-2) \cdot 3 + (-2) \cdot (-3) = 0$ tulo $(-2) \cdot 3 = -6$, niin $(-2) \cdot (-3)$ täytyy olla 6 .

20. a) Jakolaskun määritelmän mukaan $\frac{m}{n} = q$ täsmälleen silloin, kun $m = nq$.

Jos olisi olemassa sellainen luku q , että $\frac{3}{0} = q$, niin silloin olisi $0 \cdot q = 3$. Mutta tämä on mahdotonta.

b) Osamäärässä $\frac{0}{0} = q$ arvo q ei ole yksikäsitteinen, koska $0 \cdot q = 0$ kaikilla luvun q arvoilla.

21.

a) Luvut ovat toistensa vastalukuja, jos niiden summa on nolla. Lasketaan lukujen summa.

$$\begin{aligned} &(\pi - 2) + (-\pi + 2) \\ &= \pi - 2 - \pi + 2 \\ &= \pi - \pi - 2 + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Luvut ovat toistensa vastalukuja, jos niiden summa on nolla. Lasketaan lukujen summa.

$$\begin{aligned} &(a - 5) + (5 - a) \\ &= a - 5 + 5 - a \\ &= a - a - 5 + 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

22.

a) Merkintä $-a < 0$ tarkoittaa, että luvun a vastaluku on negatiivinen. Siten luku a on positiivinen, $a > 0$.

b) Merkintä $-a > 0$ tarkoittaa, että luvun a vastaluku on positiivinen. Siten luku a on negatiivinen, $a < 0$.

c) Luvun a itseisarvo $|a|$ on yhtä suuri kuin vastaluku $-a$, kun $a = 0$.

d) Luvun a itseisarvo $|a|$ on suurempi kuin vastaluku $-a$, kun $a > 0$.

Luku 1.2

23.

a) Luku -2 voidaan esittää murtolukuna $-\frac{2}{1}$.

b) Luku $1\frac{1}{5}$ voidaan esittää murtolukuna $\frac{6}{5}$.

c) Luku $3,14$ voidaan esittää murtolukuna $\frac{314}{100}$.

d) Luku $-0,333$ voidaan esittää murtolukuna $-\frac{333}{1000}$.

24. a) Lavennetaan.

$$^3) \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{3}{15}$$

Asetetaan suuruusjärjestykseen.

$$\frac{1}{5} < \frac{4}{15}$$

b) Lavennetaan.

$$^3) \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{15}{18}$$

$$^2) \frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{14}{18}$$

Asetetaan suuruusjärjestykseen.

$$\frac{5}{6} > \frac{7}{9}$$

c) Lavennetaan.

$$^{30}) \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 30}{3 \cdot 30} = \frac{30}{90}$$

$$^{10}) \frac{2}{9} = \frac{2 \cdot 10}{9 \cdot 10} = \frac{20}{90}$$

$$^9) \frac{3}{10} = \frac{3 \cdot 9}{10 \cdot 9} = \frac{27}{90}$$

Asetetaan suuruusjärjestykseen.

$$\frac{1}{3} > \frac{3}{10} > \frac{2}{9}$$

25. a) Supistetaan.

$$\frac{6}{9} \stackrel{(3)}{=} \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{8}{12} \stackrel{(4)}{=} \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$$

Asetetaan suuruusjärjestykseen.

$$\frac{6}{9} = \frac{8}{12}$$

b) Supistetaan.

$$\frac{3}{75} \stackrel{(3)}{=} \frac{3:3}{75:3} = \frac{1}{25}$$

$$\frac{8}{100} \stackrel{(4)}{=} \frac{8:4}{100:4} = \frac{2}{25}$$

Asetetaan suuruusjärjestykseen.

$$\frac{3}{75} < \frac{8}{100}$$

c) Supistetaan.

$$-\frac{60}{96} \stackrel{(12)}{=} -\frac{60:12}{96:12} = -\frac{5}{8}$$

$$-\frac{35}{40} \stackrel{(5)}{=} -\frac{35:5}{40:5} = -\frac{7}{8}$$

Asetetaan suuruusjärjestykseen.

$$-\frac{60}{96} > -\frac{35}{40}$$

26.

$$a) \overset{4)}{\frac{6}{5}} + \overset{5)}{\frac{1}{4}} = \frac{24}{20} + \frac{5}{20} = \frac{24+5}{20} = \frac{29}{20}$$

$$b) \frac{15}{12} - \overset{4)}{\frac{4}{3}} = \frac{15}{12} - \frac{16}{12} = \frac{15-16}{12} = \frac{-1}{12} = -\frac{1}{12}$$

$$c) 3\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} - \frac{1 \cdot 3 + 2}{3} = \overset{3)}{\frac{7}{2}} - \overset{2)}{\frac{5}{3}} = \frac{21}{6} - \frac{10}{6} = \frac{11}{6}$$

$$d) 5 - \frac{3}{4} = \overset{4)}{\frac{5}{1}} - \frac{3}{4} = \frac{20}{4} - \frac{3}{4} = \frac{20-3}{4} = \frac{17}{4}$$

27.

$$a) \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{5} \cdot \frac{1}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}$$

$$b) \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{3}{\cancel{12}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{5 \cdot 1}{3 \cdot 1} = \frac{5}{3}$$

$$c) 1\frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{11}{8} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{11 \cdot 1}{8 \cdot 4} = -\frac{11}{32}$$

$$d) 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 4} = \frac{15}{4}$$

28. a) Luvun 8 käänteisluku on $\frac{1}{8}$, koska $8 \cdot \frac{1}{8} = 1$.

b) Luvun $\frac{1}{5}$ käänteisluku on 5, koska $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$.

c) Luvun $-\frac{5}{6}$ käänteisluku on $-\frac{6}{5}$, koska $-\frac{5}{6} \cdot (-\frac{6}{5}) = 1$.

d) Luvun -1 käänteisluku on -1 , koska $-1 \cdot (-1) = 1$.

e) Luvun $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ käänteisluku on $\frac{3}{7}$, koska $\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7} = 1$.

f) Luvun $0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ käänteisluku on $\frac{5}{2} = 2,5$, koska $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = 1$.

$$29. a) \frac{4}{15} : \frac{6}{5} = \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{6} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{3}{\cancel{15}} \cdot \underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{2}{9}$$

$$b) \frac{6}{7} : 3 = \frac{6}{7} : \frac{3}{1} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}} \cdot \overset{1}{\cancel{1}}}{\underset{1}{\cancel{7}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{2}{7}$$

$$c) \frac{1}{3} : \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{1} = \frac{1 \cdot 6}{3 \cdot 1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$d) 5 : \frac{3}{4} = \frac{5}{1} : \frac{3}{4} = \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 3} = \frac{20}{3}$$

$$30. a) -\frac{2}{5} + \left(-\frac{5}{12}\right) = -\overset{12)}{\frac{2}{5}} - \overset{5)}{\frac{5}{12}} = -\frac{24}{60} - \frac{25}{60} = -\frac{49}{60}$$

$$b) -\frac{2}{5} - \left(-\frac{5}{12}\right) = -\overset{12)}{\frac{2}{5}} + \overset{5)}{\frac{5}{12}} = -\frac{24}{60} + \frac{25}{60} = \frac{1}{60}$$

$$c) -\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{5}{12}\right) = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{6}{\cancel{12}}} = \frac{1}{6}$$

$$d) -\frac{2}{5} : \left(-\frac{5}{12}\right) = -\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) = \frac{2 \cdot 12}{5 \cdot 5} = \frac{24}{25}$$

31. a)

$$\begin{array}{cccc} & & -\frac{1}{56} & \\ & \frac{5}{14} & - & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{7} & \cdot & \frac{1}{2} & - & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{7} & + & \frac{2}{7} & \cdot & \frac{14}{8} & - & \frac{13}{8} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{cccc} & & \frac{1}{5} & \\ & \frac{1}{15} & : & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{10} & \cdot & \frac{2}{9} & \cdot & \frac{3}{2} \\ \frac{2}{5} & : & \frac{4}{3} & \cdot & \frac{1}{6} & : & \frac{1}{9} \end{array}$$

32.

$$a) -2 + 5 : \frac{1}{10} = -2 + \frac{5}{1} : \frac{1}{10} = -2 + \frac{5 \cdot 10}{1 \cdot 1} = -2 + \frac{5 \cdot 10}{1} = -2 + \frac{50}{1} = -2 + 50 = 48$$

$$b) \frac{14}{15} : \frac{7}{5} - \frac{1}{3} \cdot 7 = \frac{14}{15} \cdot \frac{5}{7} - \frac{1}{3} \cdot 7 = \frac{\overset{2}{\cancel{14}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{3}{15} \cdot \underset{1}{\cancel{7}}} - \frac{1 \cdot 7}{3 \cdot 1} = \frac{2}{3} - \frac{7}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$c) \frac{15+9}{5+3} \cdot \frac{5-3}{15-9} = \frac{24}{8} \cdot \frac{2}{6} = \frac{\overset{3}{\cancel{24}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{8} \cdot \underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{3}{3} = 1$$

$$d) \left(2 + \frac{2}{3}\right) : \left(1 - \frac{5}{3}\right) = \left(\frac{6}{3} + \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{3}{3} - \frac{5}{3}\right) = \frac{8}{3} : \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{\overset{4}{\cancel{8}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{3} \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = -\frac{4}{1} = -4$$

33.

$$a) 6\frac{2}{5} - \frac{5}{12} + 1\frac{3}{4} = \frac{116}{15} = 7\frac{11}{15}$$

$$b) 2\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} : 1\frac{5}{6} = \frac{49}{44} = 1\frac{5}{44}$$

34. Aluksi mansikkamehua oli $\frac{3}{4}$ litraa.

Kun Salma joi mehusta puolet, jäljelle jäi $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$ litraa.

Kun Ilja joi mehusta yhden kolmasosan, jäljelle jäi $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0,25$ litraa.

Aatokselle jäi siis $0,25 \text{ L} = 2,5 \text{ dl}$.

35. Lasketaan Ideatalo Oy:n osakkeiden osuus kaikista osakkeista.

$$1 - \frac{1}{8} - \frac{5}{9} = \frac{23}{72}$$

Kaikkiaan salkussa on 2 520 osaketta. Lasketaan Ideatalo Oy:n osakkeiden lukumäärä.

$$\frac{23}{72} \cdot 2\,520 = 805$$

Vastaus: Ideatalo Oy osakkeita on $\frac{23}{72}$ kaikista osakkeista, ja niitä on 805 kpl.

36. Kun Farid istutti taimista $\frac{2}{5}$, jäljelle jäi $\frac{3}{5}$.

Kun Harri istutti taimista $\frac{1}{3}$, jäljelle jäi $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

Jinin osuus 960 tainta oli siis $\frac{2}{5}$ kaikista taimista.

Taimia oli yhteensä $\frac{960}{2} \cdot 5 = 2\,400$.

Vastaus: Jin istutti $\frac{2}{5}$ kaikista taimista, ja taimia oli yhteensä 2 400 kpl.

37. Merkintä $\frac{1}{x}$ tarkoittaa luvun x käänteislukua.

a) Luvun $x = -1$ käänteisluku $\frac{1}{x} = -1$.

b) Luvun $x = \frac{1}{8}$ käänteisluku $\frac{1}{x} = 8$.

c) Luvun $x = \frac{5}{12}$ käänteisluku $\frac{1}{x} = \frac{12}{5}$.

d) Luvun $x = -\frac{6}{3} = -2$ käänteisluku $\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$.

38.

a) Merkintä $\frac{1}{x} = 13$ tarkoittaa, että luvun x käänteisluku on 13. Siis $x = \frac{1}{13}$.

b) Merkintä $\frac{1}{x} = -\frac{5}{12}$ tarkoittaa, että luvun x käänteisluku on $-\frac{5}{12}$. Siis $x = -\frac{12}{5}$.

c) Merkintä $\frac{1}{x} = -1$ tarkoittaa, että luvun x käänteisluku on -1 . Siis $x = -1$.

d) Merkintä $\frac{1}{x} = x$ tarkoittaa lukua, joka on yhtä suuri kuin oma käänteislukunsa.

Siis $x = 1$ tai $x = -1$.

39.

$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{7}{18}$

40. a) $\frac{3}{7}ab = \frac{3}{7} \cdot (-6) \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{7}$

b) $\frac{3}{7}ab = \frac{3}{7} \cdot \frac{35}{12} \cdot \frac{4}{5} = 1$

41.

1) $x = 3,45454545\dots$

2) $100x = 345,454545\dots$

3) $100x - x = 345,454545\dots - 3,454545\dots = 342$

4) $99x = 100x - x = 342$

$$x = \frac{342}{99}$$

42.

a)

1) $x = 1,0101010\dots$

2) $100x = 101,0101010\dots$

3) $100x - x = 101,0101010\dots - 1,0101010\dots = 100$

4) $99x = 100x - x = 100$

$$x = \frac{100}{99}$$

b)

1) $x = 4,999999\dots$

2) $100x = 499,99999\dots$

3) $100x - x = 499,99999\dots - 4,99999\dots = 495$

4) $99x = 100x - x = 495$

$$x = \frac{495}{99} = 5$$

c)

1) $x = 3,918918918\dots$

2) $1000x = 3918,918918\dots$

3) $1000x - x = 3918,918918\dots - 3,918918\dots = 3915$

4) $999x = 1000x - x = 3915$

$$x = \frac{3915}{999}$$

d)

1) $x = 2,023232323\dots$

2) $10x = 20,232323\dots$

3) $1000x = 2023,23232323\dots$

4) $990x = 1000x - 10x = 2023,232323\dots - 20,232323\dots = 2003$

$$x = \frac{2003}{990}$$

43.

a) Lasketaan jakolaskua jakokulmassa, kunnes desimaalit alkavat toistua.

$$\begin{array}{r} 0, 1 4 2 8 5 7 1 \\ 7 \overline{) 1 0 0 0 0 0 0 0} \\ \underline{7} \\ 3 0 \\ \underline{2 8} \\ 2 0 \\ \underline{1 4} \\ 6 0 \\ \underline{5 6} \\ 4 0 \\ \underline{3 5} \\ 5 0 \\ \underline{4 9} \\ 1 0 \\ \underline{7} \\ 3 0 \end{array}$$

Erotus on jokin luvuista 1–6. Viimeistään seitsemäs erotus on sama kuin jokin aikaisempi ja jakolasku alkaa toistaa itseään.

b) Jokaisessa jakolaskun vaiheessa erotus on jokin luvuista 1, ..., $n - 1$. Viimeistään n :s erotus on sama kuin jokin aikaisempi. Jakson pituus on $n - 1$ numeroa.

44. a) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, siis $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

b) $\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$, siis $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10}$

$$\frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}, \text{ siis } \frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

c) $\frac{22}{25} - \frac{1}{2} = \frac{19}{50}$, siis $\frac{22}{25} = \frac{1}{2} + \frac{19}{50}$

$$\frac{19}{50} - \frac{1}{3} = \frac{7}{150}, \text{ siis } \frac{19}{50} = \frac{1}{3} + \frac{7}{150}$$

$$\frac{7}{150} - \frac{1}{22} = \frac{1}{825}, \text{ siis } \frac{22}{25} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{22} + \frac{1}{825}$$

Luku 1.3

45.

Sijoitetaan luku 6 yhtälöön muuttujan x paikalle.

$$6 + 4 = 2 \cdot 6 - 3$$

$$10 = 12 - 3$$

$$10 = 9$$

Tämä on epätosi, joten luku 6 ei ole yhtälön $x + 4 = 2x - 3$ ratkaisu.

Sijoitetaan luku 7 yhtälöön muuttujan x paikalle.

$$7 + 4 = 2 \cdot 7 - 3$$

$$11 = 14 - 3$$

$$11 = 11$$

Tämä on tosi, joten luku 7 on yhtälön $x + 4 = 2x - 3$ ratkaisu.

Sijoitetaan luku 8 yhtälöön muuttujan x paikalle.

$$8 + 4 = 2 \cdot 8 - 3$$

$$12 = 16 - 3$$

$$12 = 13$$

Tämä on epätosi, joten luku 8 ei ole yhtälön $x + 4 = 2x - 3$ ratkaisu.

Vastaus: 7

46.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x - 6 &= 0 && | +6 \\ 2x &= 6 && | :2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 5x - 3 &= 2x && | -2x, +3 \\ 5x - 2x &= 3 \\ 3x &= 3 && | :3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } -5x + 6 &= x - 12 && | -x, -6 \\ -5x - x &= -12 - 6 \\ -6x &= -18 && | :(-6) \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $x = 3$ b) $x = 1$ c) $x = 3$

47.

$$\begin{aligned} \text{a) } -13 + 9x &= 2 && | +13 \\ 9x &= 15 && | :9 \\ x &= \frac{15}{9} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3x + 12 &= 4x && | -4x, -12 \\ 3x - 4x &= -12 \\ -x &= -12 && | :(-1) \\ x &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x + 11 &= 11 - 5x && | +5x, -11 \\ x + 5x &= 0 \\ 6x &= 0 && | :6 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Vastaus: a) $x = \frac{5}{3}$ b) $x = 12$ c) $x = 0$

48.

a) $4(x+2) = 3(x-1)$

$$4 \cdot x + 4 \cdot 2 = 3 \cdot x - 3 \cdot 1$$

$$4x + 8 = 3x - 3$$

$$4x - 3x = -3 - 8$$

$$x = -11$$

b) $8x - 3 = 2(x+1) + 7$

$$8x - 3 = 2x + 2 + 7$$

$$8x - 2x = 2 + 7 + 3$$

$$6x = 12 \quad | :6$$

$$x = 2$$

c) $-2(7+2x) = 2x+3$

$$-14 - 4x = 2x + 3$$

$$-4x - 2x = 3 + 14$$

$$-6x = 17 \quad | :(-6)$$

$$x = -\frac{17}{6}$$

Vastaus: a) $x = -11$ b) $x = 2$ c) $x = -\frac{17}{6}$

49.

a) $8 - x = 3 \cdot x$

$$8 - x = 3x$$

$$-x - 3x = -8$$

$$-4x = -8 \quad | :(-4)$$

$$x = 2$$

b) $2x + 3 = 18 - 3x$

$$2x + 3x = 18 - 3$$

$$5x = 15 \quad | :5$$

$$x = 3$$

Vastaus: a) $8 - x = 3x$, $x = 2$ b) $2x + 3 = 18 - 3x$, $x = 3$

50.

Lasketaan ensin yhtälön $2x + 5 = 3x$ juuret.

$$2x + 5 = 3x$$

$$2x - 3x = -5$$

$$-x = -5$$

$$x = 5$$

Tutkitaan seuraavaksi toteuttaako luku 5 yhtälön $7 - 2(x + 1) = 6x$.

$$7 - 2(5 + 1) = 6 \cdot 5$$

$$7 - 2 \cdot 6 = 30$$

$$7 - 12 = 30$$

$$-5 = 30$$

Tämä on epätosi, joten luku 5 ei toteuta yhtälöä $7 - 2(x + 1) = 6x$.

Vastaus: Eivät toteuta.

51.

$$\text{a) } 1 + \frac{x}{3} = 5 \quad | \cdot 3$$

$$3 + x = 15$$

$$x = 15 - 3$$

$$x = 12$$

$$\text{b) } 2x = \frac{7x}{4} + 5 \quad | \cdot 4$$

$$8x = 7x + 20$$

$$8x - 7x = 20$$

$$x = 20$$

$$\text{c) } \frac{x}{2} - 1 = \frac{5x}{6} \quad | \cdot 6$$

$$\frac{6x}{2} - 6 = 5x$$

$$3x - 6 = 5x$$

$$3x - 5x = 6$$

$$-2x = 6 \quad | : (-2)$$

$$x = -3$$

Vastaus: a) $x = 12$ b) $x = 20$ c) $x = -3$

52.

$$\text{a) } x - \frac{x}{4} = \frac{3}{2} \quad | \cdot 4$$

$$4x - x = \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$3x = 6 \quad | : 3$$

$$x = 2$$

$$\text{b) } x - \frac{3x+1}{15} = \frac{1}{3} \quad | \cdot 15$$

$$15x - (3x+1) = \frac{15}{3}$$

$$15x - 3x - 1 = 5$$

$$12x = 5 + 1$$

$$12x = 6 \quad | : 12$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \frac{x}{5} + x = \frac{x+1}{2} + 3 \quad | \cdot 10$$

$$2x + 10x = 5(x+1) + 30$$

$$12x = 5x + 5 + 30$$

$$12x - 5x = 35$$

$$7x = 35 \quad | : 7$$

$$x = 5$$

Vastaus: a) $x = 2$ b) $x = \frac{1}{2}$ c) $x = 5$

53.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x}{4} &= x + 2 && | \cdot 4 \\ x &= 4x + 8 \end{aligned}$$

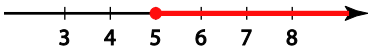
$$\begin{aligned} x - 4x &= 8 \\ -3x &= 8 && | : (-3) \\ x &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x + (-4)}{2} &= \frac{x}{3} && | \cdot 6 \\ 3(x - 4) &= 2x && | -3x \\ 3x - 12 &= 2x \\ 3x - 2x &= 12 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

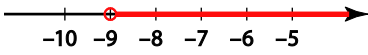
Vastaus: a) $\frac{x}{4} = x + 2, \quad x = -\frac{8}{3}$ b) $\frac{x + (-4)}{2} = \frac{x}{3}, \quad x = 12$

54.

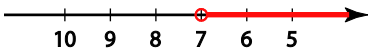
$$\begin{aligned} \text{a) } 4x &\geq 20 \quad | :4 \\ x &\geq 5 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{b) } -5x - 45 &< 0 \\ -5x &< 45 \quad | :(-5) \\ x &> -9 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{c) } 3x - 4 &> 17 \\ 3x &> 17 + 4 \\ x &> 21 \quad | :3 \\ x &> 7 \end{aligned}$$



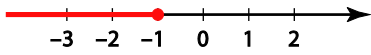
55.

a) $13x - 8 \geq 14x - 7$

$$13x - 14x \geq -7 + 8$$

$$-x \geq 1 \quad | :(-1)$$

$$x \leq -1$$



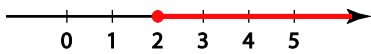
b) $x - 4 \geq 2(1 - x)$

$$x - 4 \geq 2 - 2x$$

$$x + 2x \geq 2 + 4$$

$$3x \geq 6 \quad | :3$$

$$x \geq 2$$



c) $-2x - 3(2x - 1) < 13$

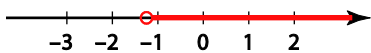
$$-2x - 6x + 3 < 13$$

$$-8x < 13 - 3$$

$$-8x < 10 \quad | :(-8)$$

$$x > -\frac{10}{8}$$

$$x > -\frac{5}{4}$$



56.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x - 6 &< 4 \\ 2x &< 4 + 6 \\ 2x &< 10 & | :2 \\ x &< 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2x - 6 &> 0 \\ 2x &> 6 & | :2 \\ x &> 3 \end{aligned}$$

Vastaus: $2x - 6 < 4, x < 5$ b) $2x - 6 > 0, x > 3$

57.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{2} - \frac{x}{3} &> \frac{1}{4} & | \cdot 12 \\ \frac{12}{2} - \frac{12x}{3} &> \frac{12}{4} \\ 6 - 4x &> 3 \\ -4x &> 3 - 6 \\ x &< -3 & | :(-4) \\ x &< \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x}{3} - \frac{2x-3}{15} &< x & | \cdot 15 \\ \frac{15x}{3} - \frac{15(2x-3)}{15} &< 15x \\ 5x - (2x-3) &< 15x \\ 5x - 2x + 3 &< 15x \\ 5x - 2x - 15x &< -3 \\ -12x &< -3 & | :(-12) \\ x &> \frac{3}{12} \\ x &> \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Vastaus: a) $x < \frac{3}{4}$ b) $x > \frac{1}{4}$

58.

a) $4x + 5(2 - x) = 3x + 2$
 $x = 2$

b) $2x - 4(14x - 6) = 0$
 $x = \frac{4}{9}$

c) $x - \frac{3 - 5x}{2} = 9x - 18$
 $x = 3$

Vastaus: a) $x = 2$ b) $x > \frac{1}{4}$ c) $x = 3$

59.

a) $3(x - 7) < 6x - 3$
 $x > -6$

b) $2 - 3(4x + 1) \geq 2x - 3$
 $x \leq \frac{1}{7}$

c) $\frac{2x + 1}{3} - x > \frac{2x - 2}{5}$
 $x < 1$

Vastaus: a) $x > -6$ b) $x \leq \frac{1}{7}$ c) $x < 1$

60.

a) $6(1-x) = 6$

$$6 - 6x = 6$$

$$-6x = 6 - 6$$

$$-6x = 0 \quad | :(-6)$$

$$x = 0$$

b) $10 - 15x = 7 - 3(5x - 1)$

$$10 - 15x = 7 - 15x + 3$$

$$-15x + 15x = 7 + 3 - 10$$

$$0 = 0$$

Tosi

Yhtälö on tosi riippumatta muuttujan x arvosta, joten yhtälön toteuttavat kaikki luvut.

c) $4(1-x) = 2(3-2x)$

$$4 - 4x = 6 - 4x$$

$$-4x + 4x = 6 - 4$$

$$0 = 2$$

Epätosi

Yhtälö on epätosi riippumatta muuttuja x arvosta, joten yhtälöä ei toteuta mikään luku.

Vastaus: a) $x = 0$ b) Yhtälön toteuttavat kaikki luvut. c) Yhtälö ei toteuta mikään luku.

61.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{x}{2} - \frac{2x}{3} &= -\frac{x}{6} + 1 && | \cdot 6 \\ 3x - 2 \cdot 2x &= -x + 1 \\ 3x - 4x + x &= 1 \\ 0 &= 1 \\ &\text{Epätosi} \end{aligned}$$

Yhtälö on epätosi riippumatta muuttuja x arvosta, joten yhtälöä ei toteuta mikään luku.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \frac{x+2}{2} - \frac{x-2}{10} &= \frac{2x+6}{5} && | \cdot 10 \\ 5(x+2) - (x-2) &= 2(2x+6) \\ 5x+10 - x+2 &= 4x+12 \\ 5x - x - 4x &= 12 - 10 - 2 \\ 0 &= 0 \\ &\text{Tosi} \end{aligned}$$

Yhtälö on tosi riippumatta muuttujan x arvosta, joten yhtälön toteuttavat kaikki luvut.

Vastaus: a) Yhtälö ei toteuta mikään luku. b) Yhtälön toteuttavat kaikki luvut.

62.

$$\begin{aligned} ax + 2a &= 5x + a + 1 && \text{Siirretään } 2a \text{ oikealle puolelle ja } 5x \text{ vasemmalle puolelle} \\ ax - 5x &= a + 1 - 2a \\ ax - 5x &= 1 - a \\ x(a - 5) &= 1 - a && | : (a - 5) \\ x &= \frac{1 - a}{a - 5} \end{aligned}$$

Koska luvulla 0 ei voi jakaa, niin yhtälöllä ei ole ratkaisua, kun

$$a - 5 = 0$$

$$a = 5.$$

Vastaus: $x = \frac{-a+1}{a-5}$, Ei ratkaisua, kun $a = 5$.

63.

a) Ratkaistaan yhtälöstä muuttuja x .

$$5(2 - 2x) = 3a - 10x$$

$$10 - 10x = 3a - 10x$$

$$-10x + 10x = 3a - 10$$

$$0 = 3a - 10$$

Yhtälön toteuttavat kaikki luvut, kun myös yhtälön oikealla puolella on luku 0.

Siis: $3a - 10 = 0$

$$3a = 10 \quad | :3$$

$$a = \frac{10}{3}$$

b) Ratkaistaan yhtälöstä muuttuja x .

$$ax - 1 = 3x - a$$

$$ax - 3x = -a + 1$$

$$x(a - 3) = -a + 1 \quad | : (a - 3)$$

$$x = \frac{-a + 1}{a - 3}$$

Koska luvulla 0 ei voi jakaa, niin yhtälöllä ei ole yhtään ratkaisua, kun $a = 3$.

Vastaus: a) $a = \frac{10}{3}$ b) $a = 3$

64.

a) $x + 4(2x - 5) > 10(x - 2)$

$$x + 8x - 20 > 10x - 20$$

$$x + 8x - 10x > -20 + 20$$

$$-x > 0 \quad | :(-1)$$

$$x < 0$$

b) $5 - 8(1 - x) \leq 8x$

$$5 - 8 + 8x \leq 8x$$

$$8x - 8x \leq -5 + 8$$

$$0 \leq 3$$

Tosi

Epäyhtälö on tosi riippumatta muuttujan x arvosta, joten epäyhtälön toteuttavat kaikki luvut.

c) $\frac{2x}{3} - \frac{3-2x}{12} > \frac{5x}{6} \quad | \cdot 12$

$$4 \cdot 2x - (3 - 2x) > 2 \cdot 5x$$

$$8x - 3 + 2x > 10x$$

$$8x + 2x - 10x > 3$$

$$0 > 3$$

Epätosi

Epäyhtälö on epätosi riippumatta muuttuja x arvosta, joten epäyhtälöä ei toteuta mikään luku.

Vastaus: a) $x < 0$ b) Epäyhtälön toteuttavat kaikki luvut. c) Epäyhtälöä ei toteuta mikään luku.

65.

Ratkaistaan epäyhtälö.

$$4 - 3(x + 6) < 6x + 1$$

$$4 - 3x - 18 < 6x + 1$$

$$-3x - 6x < 1 - 4 + 18$$

$$-9x < 15 \quad | :(-9)$$

$$x > -\frac{15}{9}$$

$$x > -\frac{5}{3}$$

Epäyhtälö toteutuu, kun $x > -\frac{5}{3}$, joten jokainen epänegatiivinen ($x \geq 0$) luku toteuttaa epäyhtälön.

66.

Ratkaistaan ensin epäyhtälö $5x - 7 > 6(x - 2)$.

$$5x - 7 > 6(x - 2)$$

$$5x - 7 > 6x - 12$$

$$5x - 6x > -12 + 7$$

$$-x > -5 \quad | \cdot (-1)$$

$$x < 5$$

Ratkaistaan seuraavaksi epäyhtälö $3(x - 1) < 2(1 + x) + 1$.

$$3(x - 1) < 2(1 + x) + 1$$

$$3x - 3 < 2 + 2x + 1$$

$$3x - 2x < 2 + 1 + 3$$

$$x < 6$$

Näin huomataan, että jos luku toteuttaa epäyhtälön $5x - 7 > 6(x - 2)$ eli toteuttaa ehdon $x < 5$, niin se toteuttaa myös epäyhtälön $3(x - 1) < 2(1 + x) + 1$ eli toteuttaa ehdon $x < 6$.