MAB 0: Kertauskurssi

Opettaja: Timo.Lehtonen @ tyk.fi
Aika ja paikka: ma, ke klo 18:40-20:00, luokka 46.

Alustava aikataulu:

ma 8.1.	Peruslaskutoimitukset
ke 10.1.	Murtoluvut ja likiarvot
ma 15.1.	Potenssilasku, neliöjuuret, muuttuja
ke 17.1.	Polynomilausekkeet ja sieventäminen
ma 22.1.	Yhtälön käsite
ke 24.1.	Funktion käsite
ma 29.1.	Funktioiden kuvaajat ja sovellukset
ke 31.1.	Geometriaa: Pituudet, tasokuviot, avaruusgeometria.
ma 5.2.	Prosenttilaskua: muutos, kasvu ja vähenevyys
ke 7.2.	Prosenttilaskua: verranto ja sovellukset
ma 12.2.	Kertausta, koeharjoittelua
to 15.2.	LOPPUKOE klo 17.00, luokka 46.

Kurssin tarkoituksena on kerrata peruskoulussa opittuja matematiikan peruskäsitteitä sekä vahvistaa lukiomatematiikassa tarvittavia taitoja.

Lisämateriaalia kurssille löytyy koulumme peda.net-ympäristöstä:
http://peda.net/helsinki/tyk/tya/lukio/matematiikka-lyhyt/mab0

Laskemiseen saat tukea matematiikkaklinikassa:
Maanantai 16:00-16:40, luokka 46 (Janne Lemberg)
Keskiviikko 16:00-16:40, luokka 46 (Matti Kylä-Rekola)
Torstai 16:00-16:40, luokka 49 (Frans Hartikainen)

Kurssi arvostellaan loppukokeen ja tuntiaktiivisuuden perusteella.

Ilmoitathan löytämistäsi virheistä ja epäselvyyksistä kurssimonisteessa.
Tämä versio on päivitetty 9.1.2018.

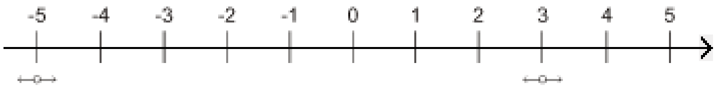
Peruslaskutoimitukset

Yhteenlaskettava + yhteenlaskettava = summa

Vähenevä — vähentäjä = erotus

Kertoja · kerrottava = tulo (Kertojaa ja kerrottavaa kutsutaan myös tulon tekijöiksi.) Jaettava : jakaja = osamäärä

Yhteen- ja vähennyslaskuissa liikutaan **lukusuoralla**.



$-5+8=3$ $3-8=-5$

$-3-1=-4$ $-3+2=-1$

Luvun **vastaluku** saadaan lisäämällä miinusmerkki luvun eteen.

Esim. luvun $+5$ vastaluku on $-(+5)=-5$. Luvun -5 vastaluku on $-(-5)=+5$.

Kerto- ja jakolaskujen merkkisäännöt:

$2\cdot 2=4$ $-2\cdot 2=-4$ $2\cdot(-2)=-4$ $-2\cdot(-2)=4$

$4:2=2$ $-4:2=-2$ $4:(-2)=-2$ $-4:(-2)=2$

Laskujärjestys:

1. Sulkeet, sisimmistä alkaen
2. Kerto- ja jakolaskut vasemmalta oikealle
3. Yhteen- ja vähennyslaskut vasemmalta oikealle

Laskulait:

- $a+b=b+a$ esim. $3-5=-5+3$ (vaihdantalaki)
- $a\cdot b=b\cdot a$ esim. $-3\cdot 2=2\cdot(-3)$ (liitäntälaki)
- $a(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ esim. $2(3+4)=2\cdot 3+2\cdot 4$ (osittelulaki)

Esimerkkejä:

$$1-[3+(2-8)]=1-[3+(-6)]=1-[3-6]=1-[-3]=1+3=4$$

$$20+6:2\cdot 3-4=20+3\cdot 3-4=20+9-4=25$$
$$(20+6):2\cdot(3-4)=26:2\cdot(-1)=13\cdot(-1)=-13$$

Laskutehtäviä:

1. a) $12+13+14-25$
   b) $6-8-10+12$
   c) $6-(8-10)-12$
   d) $2\cdot 18+30:6-8\cdot 5:10$
   e) $(1-8)-(1-9)-(1-10)$

2. a) $15-24:3\cdot 2$
   b) $15-24:(3\cdot 2)$
   c) $(15-24):3\cdot 2$

3. a) $50:(-25)\cdot(-3)$
   b) $-3\cdot(-4):(-2)+1$
   c) $(2-5)\cdot(2-3)$

4. a) $100-\{80-[60-(40-20)]\}$
   b) $[7-(4-3)\cdot 2]\cdot(6-4\cdot 2)$

5. Käytä osittelulakia hyödyksi ja laske
   a) $27\cdot 95+27\cdot 5$
   b) $68\cdot 13-68\cdot 3$
   c) $-31\cdot 55-31\cdot 45$

6. a) Vähennä lukujen -7 ja 15 summasta lukujen $-5, -2$ ja 4 tulo.
   b) Kirjoita lauseke, joka saadaan, kun lukujen -6 ja 2 osamäärään lisätään lukujen -5 ja 3 tulo. Laske lausekkeen arvo.

Läksytehtäviä:

1. a) $5+5\cdot 2+(-4-26):3+5$
   b) $6\cdot 6:3+3$
   c) $(12-5-4-3)\cdot 6-(7-8)$

2. a) $(1-8)-(1-9)+(1-10):3$
   b) $2\cdot(15-24)+3\cdot 2$

3. Käytä laskulakeja hyödyksi ja laske
   a) $784\cdot 84+216\cdot 84$
   b) $(2-13)\cdot 1390-1289\cdot(2-13)$

4. Kirjoita lauseke ja laske lausekkeen arvo
   a) Lukujen 20 ja 4 osamäärä kerrottuna luvun 5 vastaluvulla
   b) Lukujen 12 ja 4 summa jaettuna luvulla 8

Murtoluvut

Murtoluvulla tarkoitetaan kahden kokonaisluvun osamäärää (jakolaskua).

Jaettava luku on murtoluvun *osoittaja*, jakaja on murtoluvun *nimittäjä*.

Murtolukuja ovat esimerkiksi $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{7}$.

Myös kokonaisluvut voidaan esittää murtolukumuodossa, esim. $2=\frac{2}{1}$.

Jos murtoluvun osoittaja on suurempi kuin nimittäjä, esitetään se yleensä *sekalukuna*, jossa on kokonaisosa erotettu, esim. $\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$.
Vastaavasti sekaluku voidaan muuttaa murtoluvuksi $3\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$.

Murtoluvun arvo ei muutu, jos sen osoittaja ja nimittäjä kerrotaan tai jaetaan samalla luvulla. Kertomista kutsutaan *laventamiseksi* ja jakamista *supistamiseksi*.

Yleensä laskutoimituksessa lavennamme murtolukuja saman nimisiksi yhteen- ja vähennyslaskua varten. Lopullinen ratkaisu on tapana supistaa mahdollisimman pieneksi sekaluvuksi.

Yhteen- ja vähennyslaskuissa murtolukujen tulee olla samannimisiä. Silloin laskemme murtolukujen osoittajat yhteen, nimittäjä ei muutu.
Tavallisesti eri muotoiset murtoluvut kerrotaan toistensa nimittäjillä.

Esim. $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{4}{12}+\frac{9}{12}=\frac{13}{12}=1\frac{1}{12}$ $\quad 1\frac{3}{4}-2\frac{1}{2}=\frac{7}{4}-\frac{5}{2}=\frac{7}{4}-\frac{10}{4}=\frac{-3}{4}$

Kertolaskuissa kerromme osoittajat ja nimittäjät yhteen.

Esim. $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{10}{6}=1\frac{4}{6}=1\frac{2}{3}$ $\quad -4\cdot1\frac{1}{2}=\frac{-4}{1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{-12}{2}=-6$

Jakolaskussa kerromme jaettavan jakajan *käänteisluvulla*.

Esim. $\frac{2}{3}:\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$.

Murtolukuja koskevat samat laskusäännöt kuin kokonaislukujakin. Kaikki lukiomatematiikka pohjaa näiden laskutoimitusten käyttöön – mitä paremmin ne hallitsee, sitä helpompi on käsitellä myöhemmin lausekkeita ja yhtälöitä.

Laskutehtäviä:

7. a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{4}+\frac{4}{5}$ d) $\frac{1}{10}-\frac{1}{5}$

8. a) $2\frac{1}{4}+3\frac{3}{5}$ b) $\frac{7}{8}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$

c) $\frac{5}{6}+\frac{2}{3}-\frac{5}{12}$ d) $1\frac{2}{5}-\frac{4}{5}$

9. a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}$

c) $7\cdot 2\frac{1}{3}$ d) $-3\cdot 3\frac{3}{4}$

10. a) $\frac{2}{3}:\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}:\frac{3}{4}$

c) $7:\ \frac{4}{7}$ d) $-1\frac{2}{3}:2\frac{2}{3}$

11. a) $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}$ b) $\left(\frac{1}{9}-\frac{5}{6}\right):\frac{2}{3}$

c) $\left(1-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\right):1\frac{1}{3}$ d) $\left(1-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}$

Läksytehtäviä:

1. a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{3}\cdot 1\frac{1}{5}$ d) $2\frac{3}{4}:3$

2. a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$

b) $\frac{-2}{3}\cdot\frac{2}{3}:\left(\frac{-1}{3}\right)$

c) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}:\frac{1}{2}$

3. Palkasta menee $\frac{1}{4}$ veroihin, $\frac{1}{5}$ vuokraan ja $\frac{1}{6}$ ruokaan. Kuinka suuri osa palkasta jää muihin menoihin?

Potenssilaskut

Jos sama luku kerrotaan itsellään monta kertaa, voidaan se kirjoittaa potenssimuotoon.
Tätä käytetään erityisesti silloin, jos käsittelemme jotain tuntematonta lukua (muuttuja).
Silloin merkitsemme lukua jollakin kirjaimella (yleensä x).

Esim. $x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4$

Esimerkissä x on potenssin *kantaluku* ja 4 on potenssin *eksponentti*.

Eksponentti vaikuttaa vain sitä edeltävään positiiviseen lukuun. Jos kantalukua halutaan laajentaa, pitää se merkitä sulkeisiin.

Esim. $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$ mutta $(-2)^4 = -2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

Potenssin määritelmän perusteella pätevät seuraavat laskukaavat:

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ (tulon potenssi)

¿ $\frac{a}{b}$ ¿ ¿ (osamäärän potenssi)

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (samankantaisten potenssien tulo)

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (samankantaisten potenssien osamäärä)

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ (potenssin potenssi)

Näitä kaavoja hyödynnetään pääasiassa silloin, kun laskussa esiintyy muuttujia. Laskun kirjoittamista mahdollisimman yksinkertaisen muotoon kutsutaan *sieventämiseksi*.

Lisäksi on muutama erikoistapaus:

$a^1 = a$ $a^0 = 1$ $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

Luvun neliöjuuri $\sqrt{a}$ on se luku, jonka neliö (eli potenssiin kaksi) on a .

Esim. $\sqrt{9} = 3$, sillä $3^2 = 9$.
Neliöjuuri voidaan ottaa vain positiivisista luvuista, sillä luvun neliö on aina positiivinen.

Esim. $2^2=4$ ja $(-2)^2=4$ myös. $\sqrt{4}=2$, mutta $\sqrt{-4}$ ei voi määritellä.

Laskutehtäviä:

12. a) $(-5)^2$ b) -5^2

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ d) $\frac{2^2}{3}$

13. a) $(3\cdot x)^3$ b) $3^3+(-3)^3$

c) $(-1)^{12}$ d) $(-1)^{99}$

14. a) $(2^3)^2-(2^2)^3$

b) $(-3)^3+(-3)^2+(-3)^1$

c) $2^1+2^0+2^{-1}$

d) $3^2\cdot 3^{-3}$

15. Sievennä

a) $x^7\cdot x^8$ b) $(x^7)^8$

c) $\left(\frac{x}{3}\right)^3$ d) $\frac{x\cdot x\cdot x^3}{x^4}$

16. a) $\sqrt{3^2+4^2}$ b) $\sqrt{10^2-6^2}$

c) $\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}$

17. Päättele, mikä on tuntematon luku x ?

a) $x^2=121$ b) $x^2=0$

c) $x^2=10$ d) $x^2=-4$

Läksytehtäviä:

1. a) $1^3+2^2\cdot 5^2$

b) $(-2)^3-(-3)^2$

c) $3^2+\sqrt{9}\cdot\sqrt{16}$

d) $-2^2\cdot 2^{-2}+2^0$

2. a) $\frac{1}{2}^2 \quad +\left(\frac{1}{2}\right)^2$

b) $\sqrt{16}+\sqrt{9}+\sqrt{(16+9)}$

c) $2^3-2^3\cdot\sqrt{13^0}$

d) $(-1)^5-\sqrt{4^2+3^2}$

Polynomilausekkeet

Kuten potenssilaskuissa huomasimme, jos meillä on laskutoimituksessa mukana tuntemattomia lukuja, emme voi saada laskusta varsinaista vastausta. Voimme kuitenkin sieventää laskutoimituksen (eli lausekkeen) mahdollisimman siistiin muotoon.

Laskusääntöjen perusteella voimme *yhdistää* samat muuttujat.

Esim. $x+x+x=3\cdot x=3x$ (Kertolaskuissa on tapana jättää kertomerkki pois näkyvistä.)

Tätä sievennettyä muotoa, jossa meillä on kerroin ja muuttuja, kutsutaan nimellä *termi*.

Vastaavasti $a+b+a+b=2a+2b$.

Muuttujia a ja b emme voi yhdistää, sillä ne ovat eri muotoisia.

$x^2+x+x^2+4x=2x^2+5x$.

Tässäkin x^2 ja x ovat eri muotoisia, sillä niiden arvo riippuu x :n arvosta.

Sievennettyä, eri muotoisista termeistä koostuvaa summalauseketta kutsutaan *polynomiksi*.

$2x^2-2x+4-x^2+x-7$ =

$2x^2-x^2-2x+x+4-7$ = *(vaihdantalaki)*

$(2-1)x^2+(-2+1)x+(4-7)$ = *(osittelulaki)*

$1x^2+(-1x)+(-3)$ = *sievennettynä*

x^2-x-3 .

Lausekkeisiin pätevät myös samat laskulait kuin muihin lukuihin.
Vastaluku vaikuttaa kaikkiin termeihin ja kertolaskuissa kerrotaan kaikki termit.

Esim. $(x+1)+(x+1)=x+1+x+1=2x+2$ $(x+1)-(x+1)=x+1-x-1=0$

$3-(x^2-3x+1)=3-x^2+3x-1=-x^2+3x+2$

$2(x-1)-3(x-1)=2\cdot x+2\cdot(-1)-3\cdot x-3\cdot(-1)=2x-2-3x+3=-x$.

Laskutehtäviä:

18. Sievennä
   a) $x+4+(2x-5)$
   b) $x-(2x-4)$
   c) $4x\cdot 2x^2$
   d) $-3x^2\cdot(-2x^2)$
19. Sievennä
   a) $3(x+2)$
   b) $-2x(3x-2)$
   c) $3x^2(-2x^2+3x-5)$

20. Sievennä
   a) $(7x+3)\cdot 4x-3x$
   b) $5a-3(2a+6)=¿$
   c) $5x\cdot(-4x)-3(x^2+2x)$
21. Sievennä
   a) $-x^2-(3x+2)-4(-x-5)+x(x-2)$
   b) $-x^2-\left[-(x-2x^2)+(-x-x^2)\right]$

Läksytehtäviä:

1. Sievennä
   a) $2x-(x+3)+(2-2x)$
   b) $5x-2(x+3)$
   c) $x(x-3)-x+3$

2. Sievennä
   a) $(3x-2)-(x+3)+(-2+2x)$
   b) $2(x-3)-3(x+3)$
   c) $a(a+1)-a(a-1)$

Yhtälö

Merkintää, jossa kaksi lauseketta merkitään yhtä suureksi, kutsutaan *yhtälöksi*.

Valitaan esimerkiksi ensimmäisen asteen polynomilauseke $x+1$ ja yhdestä vakiotermistä (numerosta koostuva lauseke) 3.

Merkitään nämä yhtä suuriksi: $x+1=3$.

Sellaista muuttujaa, jolla yhtälö on totta, kutsutaan yhtälön ratkaisuksi.
Esimerkin tapauksessa yhtälön ratkaisu on $x=2$, sillä $2+1=3$, mikä on totta.
Sijoittamalla mikä tahansa muu luku x:n paikalle, yhtälöstä tulee epätotta.

Yhtälön ratkaiseminen perustuu siihen, että voimme yhtälön molemmille puolille lisätä, vähentää kertoa tai jakaa saman luvun. Silloin lausekkeet ovat edelleen yhtä suuria.

Ensimmäisen asteen yhtälön ratkaisussa muokataan yhtälö sellaiseen muotoon, että toiselle puolelle saadaan x ja toiselle puolelle lukuarvo. Esimerkiksi

$$
\begin{aligned}
3x-1&=x+5 && \mid -x \\
3x-1-x&=x+5-x && \\
2x-1&=5 && \mid +1 \\
2x-1+1&=5+1 && \\
2x&=6 && \mid :2 \\
\frac{2x}{2}&=\frac{6}{2} && \\
x&=3
\end{aligned}
$$

(yhtälön molemmilta puolilta vähennetään sama x)

Yhtälön ratkaisu on x = 3. Ratkaisun voi tarkistaa sijoittamalla.

$$
\begin{aligned}
3\cdot 3-1&=3+5 \\
9-1&=8 \\
8&=8.
\end{aligned}
$$

Yhtälö on tosi.

Joskus 1. asteen yhtälölle ei löydetä ratkaisua ja joskus ratkaisuna voivat olla kaikki luvut.

esim.

$$
\begin{aligned}
x+4&=x \\
x+4-x&=x-x \\
4&=0
\end{aligned}
$$

Yhtälö on aina epätosi.
Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

$$
\begin{aligned}
x+4&=x+4 \\
x+4-x&=x+4-x \\
4&=4
\end{aligned}
$$

Yhtälö on aina tosi.
Ratkaisuksi kelpaavat kaikki x:n arvot.

Laskutehtäviä:

22. a) $2x + 4 = 8$
    b) $5x - 2 = 8$
    c) $9 = 3x$

23. a) $4x - 3 = 3x - 10$
    b) $x + 9 = 5 - x$
    c) $-2x + 5 = -3x + 9$

24. a) $-2x + 2 = -x - 10$
    b) $2(x - 2) = 3(x - 2)$
    c) $-4x = -6x$

25. a) $4(x+2) = 2(x-3)$
    b) $2x=5x-9$
    c) $7x + 4 = 4x + 7$

26. a) $(3+x) - (2x-3) = 0$
    b) $5(x-1) + 1 = x - 3(1-x)$

27. a) $4x + (5x - 6) = 12 + 3x$
    b) $5(2x - 1) + x = 6x - (3 - 4x)$

Läksytehtäviä:

1 a) $3x+5=20-2x$

b) $2(4x-5)+10=16$

c) $4x-2(2x+6)=12$

2 a) $2x-6=10-2x$

b) $2(3x+5)-(10+x)=0$

c) $3x-4=4x-(4+x)$

Funktio

Lauseketta voidaan käyttää *funktiona*.
Silloin antamalla muuttujalle eri arvoja saamme lausekkeelle arvoja.

Esim. käytetään lauseketta $3x+1$ funktiona.

Nyt voimme antaa x:lle eri arvoja. Jos päätämme, että x = 2, niin $3\cdot 2+1=7$.
Eli jos muuttujan arvo on 2, funktion arvo on 7.

Funktiolle on tapana antaa jokin nimi (yleensä *f*) ja nimen perään merkitä sulkeisiin funktiossa käytettävät muuttujat. Silloin voimme helposti nähdä muuttujan ja sitä vastaavan funktion arvon.

esim.

$$f(x)=x^2+x-1$$
$$f(2)=2^2+2-1=4+2-1=5$$
$$f(0)=0^2+0-1=-1$$

$$f(-1)=(-1)^2+(-1)-1$$
$$1-1-1=-1$$

$$g(a)=-a+4$$
$$g(1)=-1+4=3$$
$$g(-1)=-(-1)+4=1+4=5$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{2}+4=\frac{-1}{2}+\frac{8}{2}=\frac{7}{2}=3\frac{1}{2}$$

Laskutehtäviä:

28. $f(x)=3x-5.$ Laske
a) $f(5)$ b) $f(0)$
c) $f(-3)$ d) $f\left(\frac{5}{3}\right)$

29. $g(x)=-2x+3$. Laske
a) $g(9)$ b) $g(0)$
c $g\left(-1\frac{1}{2}\right)$ d) $g\left(\frac{3}{4}\right)$

30. $f(a)=a^2-3a+4$. Laske
a) $f(3)$ b) $f(-1)$
c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ d) $f(0)$

31. Olkoot $f(x)=-2x+4$ ja $g(x)=3x+11$. Millä muuttujan x arvolla funktiot saavat saman arvon?
Milloin $f(x)$ saa arvon 20?
Milloin $g(x)$ saa arvon -22 ?
Vihje: Muodosta yhtälöt.

Läksytehtäviä:

1. Olkoon $f(x)=2x-1$ ja $g(x)=-x+2$. Laske

a) $f(3)$ b) $f(-3)$ c) $g(3)$ d) $g(-3)$ e) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ f) $g\left(\frac{-1}{3}\right)$

g) Ratkaise yhtälö $f(x)=g(x)$

2. Jos auton nopeutta (km/h) merkitään muuttujalla x, saadaan jarrutusmatka (m) laskettua funktiosta $f(x)=\frac{x^2}{98,1}$ Laske jarrutusmatkan pituus, kun auton nopeus on
a) 40 km/h b) 80 km/h c) 0 km/h

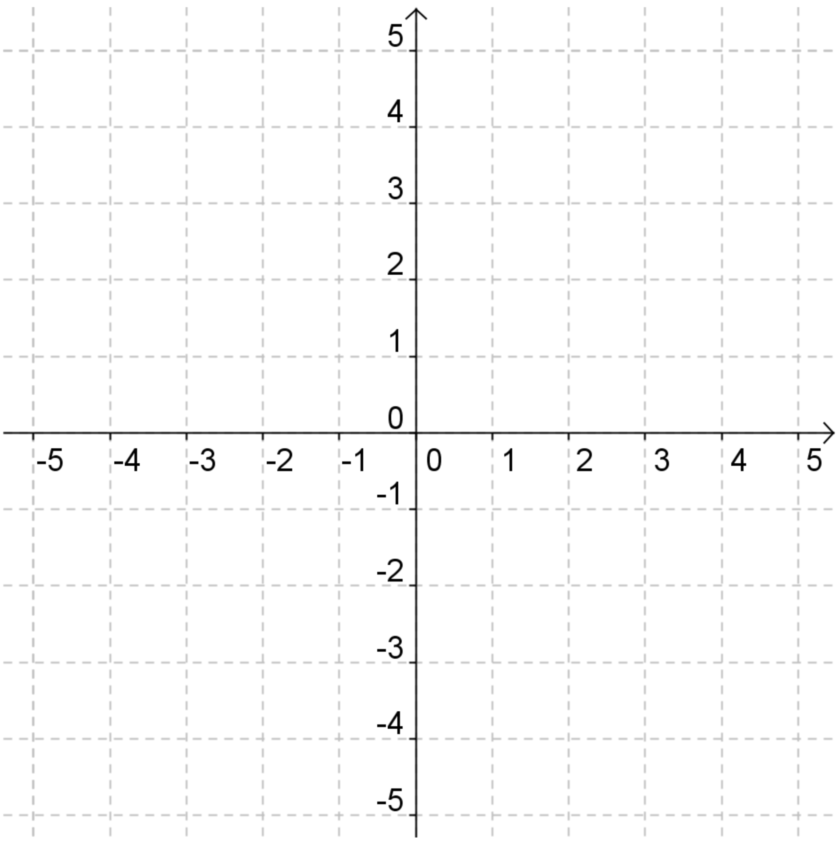
Pyöristä vastaus metrien tarkkuuteen.
Voit käyttää laskinta.

Lausekkeita, jotka sisältävät muuttujan (yleensä ***x***) voidaan käyttää **funktioina**:
Kun muuttujalle annetaan numeroarvo, koko lauseke saa numeroarvon.

Näiden arvojen avulla voidaan piirtää funktion kuvaaja koordinaatistoon. Muuttujan arvo (x) ja sitä vastaava funktion arvo (y) muodostavat yhdessä pisteen, jonka **koordinaatt**i on (x ,y).

Esim. Käytetään lauseketta $2x-3$ funktiona. Annetaan funktiolle nimi (yleensä *f*) ja merkitään $f(x)=2x-3$
Nyt sijoittamalla x:n paikalle eri lukuja, saadaan funktion arvoja y.

x	$f(x)=2x-3$	y	(x,y)



Tehtäviä:

Olkoot $f(x)=-2x+4$ ja $g(x)=-x+1$.
Piirrä funktioiden kuvaajat samaan koordinaatistoon. Mikä on kuvaajien leikkauspiste?

Ensimmäisen asteen funktioiden kuvaajat ovat **suoria** .

Hahmottele funktion f $(x)=x^2-4$ kuvaaja koordinaatistoon antamalla muuttujalle arvot $0,1,2,3,-1,-2,-3.$

Tällaista toisen asteen funktion kuvaajaa kutsutaan **paraabeliksi.**
Kolmannen asteen funktion kuvaaja on **hyperbeli**.

Funktioiden kuvaajia voimme piirtää graafisilla laskimilla sekä erilaisilla tietokoneohjelmilla, esimerkiksi tulevaisuudessa ylioppilaskokeissa tullaan käyttämään *geogebraa*.

Yksi hyväksi todettu piirto-ohjelma löytyy osoitteesta http://**desmos.com**.

Piirrä seuraavat funktiot piirto-ohjelmalla, ja vastaa kysymyksiin:
$f(x)=-2x^2+2x+6$. Mikä on suurin arvo, jonka tämä funktio voi saada? Mikä on silloin muuttujan arvo?

Funktion suurinta ja pienintä mahdollista arvoa kutsutaan **ääriarvoksi**.

Joskus funktiolle ei voida määritellä ääriarvoja, mutta löydetään **paikalliset ääriarvot**, joissa funktio vaihtaa suuntaa.
Etsi seuraavien funktioiden paikalliset ääriarvot ja/tai paikalliset ääriarvot.

$f(x)=x^3+6x^2-4$ $\qquad g(x)=x^4+2x^3+3$ $\qquad h(x)=\dfrac{4x}{x^2+1}$

Funktioiden ääriarvoja voidaan laskea funktion **derivaatan** avulla (*valinnaisella kurssilla).*

Ratkaise kuvaajan avulla soveltavat tehtävät:

- Auton bensiininkulutus K (litroissa) riippuu nopeudesta v (km/h) seuraavasti: $k(v)=0{,}01v^2-1{,}5v+60$, kun nopeus on välillä $[60{,}100]$. Millä nopeudella auton kulutus on pienimmillään, ja montako litraa se tällöin on?

Erään vuorokauden aikana ulkoilman lämpötila x (celsiusta) hetkellä t (tuntia) seuraa funktiota $x(t)=-0{,}02t^2+0{,}61t+4{,}00$, kun $0\leq t\leq 24$. Milloin lämpötila on korkeimmillaan ja milloin matalimmillaan? [YO-tehtävä 6, kevät 1998]

Yksikkömuunnoksia

Geometrian tehtäviin liittyy usein pituuksien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskemista. Ennen tehtävän ratkaisua tulee kiinnittää huomiota suureiden yksiköihin, sillä

- yhteenlaskut voidaan suorittaa vain, jos yksiköt ovat samat
- suureiden vertailu onnistuu vain, jos ne ovat samassa yksikössä
- yhtälöissä kummallakin puolella tulee olla samat yksiköt

Yksiköitä voidaan muuttaa kertomalla tai jakamalla sopivalla **suhdeluvulla**.

Suure	Muunnokset	Esimerkit
Pituus	· 10 ↓ km, hm, dam, **m**, dm, cm, mm ↑ : 10 Seuraavaan yksikköön muunnettaessa kerrotaan tai jaetaan luvulla 10.	3,5 m = 35 dm = 350 cm = 3500 mm 184 dm = 18,4 m = 1,84 dam = 0,184 hm
Massa	· 10 ↓ kg, hg, dag, **g**, dg, cg, mg ↑ : 10	0,35 g = 3,5 dg = 35 cg = 350 mg 1200 dg = 120 g = 12 dag = 1,2 hg
Vetoisuus	· 10 ↓ hl, dal, l, **dl**, cl, ml ↑ : 10	2,3 dal = 23 l = 230 dl = 2300 cl 4500 ml = 450 cl = 45 dl = 4,5 l
Pinta-ala	· 100 ↓ km^2, ha, a, $\mathbf{m^2}$, dm^2, cm^2, mm^2 ↑ : 100 Seuraavaan yksikköön muunnettaessa kerrotaan tai jaetaan luvulla 100.	3,1 ha = 310 a = 31 000 m^2 250 cm^2 = 2,5 dm^2 = 0,025 m^2
Tilavuus	· 1000 ↓ km^3, hm^3, dam^3, $\mathbf{m^3}$, dm^3, cm^3, mm^3 ↑ : 1000 Seuraavaan yksikköön muunnettaessa kerrotaan tai jaetaan luvulla 1000. Tilavuusmitat voidaan muuntaa vetomitoiksi.	2600 mm^3 = 2,6 cm^3 = 0,0026 dm^3 0,061 m^3 = 61 dm^3 = 61 000 cm^3 1 m^3 = 1000 l 1 dm^3 = 1 l

Laskutehtäviä:

32. Muunna pituuden yksiköt
    a) 0,567 m (cm)
    b) 1m (km)
    c) 1,07 dm (m)

33. Muunna pinta-alojen yksiköt
    a) 1,5 m^2 (a)
    b) 1100 m^2 (ha)
    c) 1,73265 km^2 (a)

34. Muunna tilaavuksien yksiköt
    a) 1,7 m^3 (dm^3)
    b) 1,73 m^3 (cm^3)
    c) 15630000 m^3 (km^3)

35. Muunna vetomitat
    a) 6 dl (l)
    b) 7,96 l (ml)
    c) 17 ml (dl)

36. Muunna tilavuudet
    a) 27 m^3 (l)
    b) 0,54 dm^3 (dl)
    c) 17 ml (cm^3)

37. a) Metsäalue on neliön muotoinen. Sivun pituus on 5 km. Kuinka monta hehtaaria alue on pinta-alaltaan?

    b) Purkin pohja on suorakulmion muotoinen ja sen sivut ovat 25 cm ja 20 cm. Purkin korkeus on 40 cm. Kuinka monta litraa vettä mahtuu purkkiin? Tilavuus lasketaan kertomalla pohjan pinta-ala korkeudella.

    c) Puutarhamulta painaa 1,3 tonnia/m^3 Kuinka paljon painaa 50 litran multasäkki?

Läksytehtäviä:

1. Muunna yksiköt
   a) 14500 m (km)
   b) 47 a (m^2)
   c) 42,5 m^3 (dm^3)
   d) 50 cm^3 (l)
   e) 1 m^3 (dl)

2. a) Juoma-astian tilavuus on n. 4 litraa. Astiaan kaadetaan kahden 1,5 litran pullon sisältö. Kuinka monta jääpalaa astiaan voi lisätä? Jääpala on kuution mutoinen, ja jokainen sivu on 2 cm pitkä. (Kuution tilavuus laskentaan kertomalla pituus, leveys ja korkeus)

   b) Uima-allas on 10 m pitkä, 4 m leveä ja 150 cm syvä. Kuinka paljon maksaa täyttää uima-allas vedellä, kun veden hinta on 0,008 € / litra?

Prosenttilasku

Prosentti tarkoittaa sadasosaa: $1 = \frac{1}{100} = 0{,}01$

Prosenttiluku voidaan muuttaa desimaaliluvuksi jakamalla sadalla, esim. $13 = \frac{13}{100} = 0{,}13$.

Desimaaliluku muutetaan prosenttiluvuksi kertomalla sadalla, esim. $0{,}55 = 0{,}55 \cdot 100 = 55$.

Prosenttiluku kuvaa osuutta kokonaisuudesta.
Prosentteja on helpoin laskea *prosenttikertoimen* avulla.

Esim. Lasketaan 50 prosenttia luvusta 32.
Muutetaan prosenttiluku desimaaliluvuksi: $50 = 0{,}50$. Silloin voidaan laskea $0{,}5 \cdot 32 = 16.$

Prosenttikertoimen avulla voimme helposti laskea prosenttimuutoksia.

Esimerkkinä vuokra 700€, joka kasvaa 12%. Alkuperäinen vuokra on kokonaisuus (100%), joten uusi vuokra on siis 100 $+12 = 112$ alkuperäisestä. $112 = 1{,}12$.

Uusi vuokra on siis $1{,}12 \cdot 700\,€ = 784\,€$.

Vastaavasti, 400€ maksava puhelin myydään 22% prosentin alennuksella. Alkuperäisestä 100%:sta vähennetään 22%, joten uusi hinta on $100 - 22 = 78$ alkuperäisestä. $78 = 0{,}78.$

Uusi hinta on siis $0{,}78 \cdot 400\,€ = 312\,€.$

Prosenttikerrointa hyödynnetään lukiomatematiikassa, koska sen avulla saamme helposti muodostettua yhtälöitä.

Esim. Sähkön hinta nousee ensin 20% ja sitten uudelleen 20%. Mikä oli alkuperäinen hinta, kun lopullinen hinta on 3,99 c / kwh?

$1{,}20 \cdot 1{,}20 \cdot x = 3{,}99 \qquad 1{,}44\,x = 3{,}99 \qquad x = \frac{3{,}99}{1{,}44} = 2{,}770833\ldots \qquad x \approx 2{,}77$

Alkuperäinen hinta oli n. 2,77 c / kwh.

38. Ilmoita prosentteina
a) 0,07 b) 0,70 c) 1,45
d) $\frac{1}{4}$ e) 2 f) $\frac{4}{125}$

39. Ilmoita lukuna
a) 8% b) 2,4% c) 57,23%
d) 0,3% e) 100% f) 453%

40. Laske luvusta 200
a) 12% b) 22,4% c) 50%
d) 85,4% e) 100% f) 200%

41. Erään rautamalmin rautapitoisuudeksi mitattiin 53,7%. Kuinka monta kilogramma rautaa saatiin 15,62 tonnin malmierästä?

42. Mikä luku on
a) 10% suurempi kuin 1500
b) 50% pienempi kuin 240
c) 25% pienempi kuin $3\frac{2}{3}$
d) 120% suurempi kuin 14,52

43. Korota hintoja kahdeksalla prosentilla
a)250 € b)1095 € c)99,50 € d)85 snt

44. Alennusmyynnissä tavaroiden hintoja laskettiin 15% Laske uudet hinnat.
a) televisio 800€ b) puhelin 320€
c) tietokone 750€ d) kamera 250€

45. Tuotteen hintaa 1350€ korotettiin joulumyyntiin 25%. Joulun jälkeen hinta alennettiin takaisin alkuperäiseksi. Kuinka monta prosenttia alennus oli?

46. Vedenpuhdistamon suodatin poistaa 55% epäpuhtauksista. Kuinka monta prosenttia epäpuhtauksista voidaan suodattaa, jos puhdistamolla on kaksi suodatinta peräkkäin?

47. Tuotteen hintaa nostettiin ensin 15% ja sitten alennettiin 15%. Kuinka monta prosenttia ja mihin suuntaan hinta muuttui alkuperäiseen verrattuna?

Läksytehtäviä:

5. Muunna prosenteiksi
a) 0,2 b) 0,004 c) 1,5

6. Laske
a) 15% luvusta 450
b) 75% luvusta 500
c) 140% luvusta 25

7. a) Vuosilisä korottaa kuukausipalkkaa 8%. Mikä on uusi palkka, kun ennen korotusta palkka oli 2400 €?

b) Kanta-asiakas saa 8% alennuksen ostoksista. Kuinka paljon ostokset maksavat, kun ennen alennusta kokonaishinta on 45,50 €?

8. Digitaalikamera myytiin 20% alennuksella, jolloin hinta oli 370€. Mikä oli alkuperäinen hinta?
Vihje: Muodosta yhtälö.

Vertailu prosenttiluvuilla

Prosenttiluvuilla voimme kuvata lukujen välisiä *suhteita*. Silloin vertaamme kahta lukua toisiinsa: vertailun kohde on silloin kokonaisuus (100%) mihin vertaamme.

Prosenttiosuus = $\frac{mitä\ verrataan}{mihin\ verrataan}$

Esim. Kuinka monta prosenttia luku 4 on luvusta 20? $\frac{4}{20}=0,2=20$. Luku 4 on 20% luvusta 20. Samalla voimme huomata, että luku 4 on 80% pienempi kuin luku 20. ($100\ -20=80$.

Kuinka monta prosenttia 20 on luvusta 4? $\frac{20}{4}=5=500$. Luku 20 on siis 500% luvusta 4. Luku 20 on 400% suurempi kuin luku 4. $(500\ -100\ =400\ )$.

Samalla tavalla voimme tehdä vertailua lukujen kesken.
Esim. Kuinka monta prosenttia 15 on suurempi kuin 12?

$\frac{15}{12}=1,25=125$. Luku 15 on 25% suurempi, kuin luku 12.

Kuinka monta prosenttia 12 on pienempi kuin kuin 15?

$\frac{12}{15}=0,8=80$. Luku 12 on 20% pienempi, kuin luku 15.

Voimme laskea prosenttiosuuksia myös laskemalla erotuksen (edellisissä 15-12=3) ja vertaamalla sitä kokonaisuuteen. $\frac{3}{12}=0,25=25$ ja $\frac{3}{15}=0,2=20$. Tässä laskemme samaa asiaa: Tärkeää on kiinnittää huomiota, mihin lukuun vertaamme (eli mikä on 100% kokonaisuus laskussa).

Asioita verratessa pitää huomata myös muuttaa vertailtavat asiat samaa yksikköön!

Esim. 50 snt 2 eurosta: $\frac{50\,snt}{2\,€}=\frac{0,5\,€}{2\,€}=0,25=25$ %

Yleisesti kannattaa käyttää jakolaskua vertailuun ja prosenttikerrointa muutosten laskemiseen. Näillä kahdella keinolla löydämme vastaukset kaikkiin prosenttilaskuongelmiin ja voimme muodostaa myös yhtälöt, kun niitä tarvitsemme.

48. Kuinka monta prosenttia
    a) luku 45 on luvusta 270?
    b) 30 euroa on 50 eurosta?
    c) $\frac{2}{5}$ on luvusta $1\frac{2}{3}$?
    d) 500 g on 4 kg:sta?
    e) 24 m^2 on 12 aarista?

49. Vuoka nousi 550 eurosta 600 euroon. Kuinka monta prosenttia muutos oli?

50. Kuinka monta prosenttia
    a) luku 60 on suurempi kuin luku 40?
    b) luku 40 on pienempi kuin luku 60?

51. Pankki laski opintolainan korkoa 6,25 prosentista 5,85 prosenttiin. Kuinka monta prosenttia korko laski? (Huom! *Prosenttiyksikköinä* laina laskee 0,4 prosenttia, tämä on kuitenkin eri asia kuin prosenttiosuus/-muutos)

52. Kirjolohen hinta on 3,20 € / kg ja silakan hinta on 1,30 € / kg. Montako prosenttia halvempaa on silakka kuin kirjolohi?

53. Sokerin kulutus laski 44 kg:sta 41 kg:aan. Montako prosenttia kulutus pieneni?

54. Ravintolan myynti oli kesäkuussa 15 000 € ja heinäkuussa 14 000 €. Montako prosenttia suurempi on kesäkuun myynti kuin heinäkuun myynti?

55. Tuotteen hintaa alennettiin 18%. Kuinka monta prosenttia
    a) uusi hinta on alkuperäisestä hinnasta
    b) vanha hinta on uudesta hinnasta?

56. Kuinka paljon suolaa on liotettava 6,0 kg:n vettä, jotta saataisiin neliprosenttinen suolaliuos?

Tehtävien ratkaisut:

1 a) 14 b) 0 c) -4 d)37 e)10

2 a)-1 b)11 c)-6

3 a) 6 b)-5 c) 3

4 a) 60 b)-10

5 a) 2700 b) 680 c) -3100

6 a) -32 b) -18

7 a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $1\frac{1}{20}$ d) $\frac{-1}{10}$

8 a) $5\frac{17}{20}$ b) $\frac{-3}{8}$ c) $1\frac{1}{12}$ d) $\frac{3}{5}$

9 a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $16\frac{1}{3}$ d) $-11\frac{1}{4}$

10 a) 1 b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{4}{49}$ d) $\frac{5}{8}$

11 a) $\frac{7}{12}$ b) $-1\frac{1}{12}$ c) $\frac{-1}{3}$ d $\frac{13}{20}$

12 a) 25 b)-25 c) $\frac{4}{9}$ d) $1\frac{1}{3}$

13 a) $27x^3$ b)0 c) 1 d)-1

14 a)0 b)-21 c) $3\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$

15 a) x^{15} b) x^{56} c) $\frac{x^3}{27}$ d) x

16 a) 5 b)8 c)3

17 a) ± 11 b)0 c) $\pm\sqrt{10}$ d)ei ratkaisua

18 a) 3x-1 b) -x+4 c) $8x^3$ d) $6x^4$ 19 a) 3x+6 b) $-6x^2+4x$

c) $-6x^4+9x^3-15x^2$

20 a) $28x^2+9x$ b) $-a-18$

c) $-23x^2-6x$

21 a) $-x+22$ b) $-2x^2+2x$

22 a) x=2 b) x=2 c) x=3

23 a) x=-7 b) x=-2 c) x=4

24 a) x=12 b) x=2 c) x=0

25 a) x=-7 b) x=3 c) x=1

26 a) x=6 b) x=1

27 a) x=3 b) x=2

28 a) 10 b)-5 c)-14 d)0

29 a)-15 b)3 c)0 d) $1\frac{1}{2}$

30 a)4 b)8 c) $2\frac{3}{4}$ d)4

31 x= $-1\frac{2}{5}$ x= -8 x= -11

32 a) 56,7 m b) 1000 km c) 0,107 m

33 a) 0,015 a b) 0,11 ha c) 17326,5 a

34 a) 1700 dm^3 b)17300 cm^3 c) 0,01563 km^3

35 a) 0,6 l b) 7961 ml c) 0,17 dl

36 a) 27000 l b) 5,3 dl c) 17 cm^3

37 a) 2500 ha b) 20 l c) 65 kg

38 a)7% b)70% c)145% d)25% e)200%)3,2%

39 a)0,08 b)0,024 c)0,5723 d)0,003 e)1 f)2

40 a) 24 b) 44,8 c) 100 d) 170,8 e)200 f) 400

41 838,794 kg ≈ 839 kg

42 a) 1650 b) 120 c) $\frac{11}{12}$ d) 31,944

43 a) 270€ b) 1182,60€ c) 108,46€ d) 91,8 snt

44 a) 680 € b) 272 € c) 637,50 € d) 212,50 €

45 alennus oli 20%

46 voitiin suodattaa 30,25% epäpuhtauksista

47 2,25% pienempi alkuperäiseen verrattuna

48 a)16,66..%≈17% b)60% c)24% d)12,5% e)2%

49 9,0909...% ≈ 9,1 %

50 a) 50 % b) 33,333... % ≈ 33%

51 Korkoprosentti laski 6,4 %

52 59,375 % ≈ 59 % halvempaa

54 kulutus pieneni 6,8181…% ≈ 6,8%

55 a) 82 % b) 121,951..% ≈ 122%

56 0,25 kg = 250 g