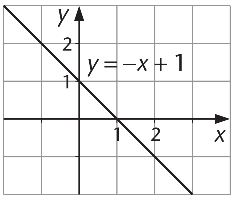
Kertausosa

1. a) $y = -x + 1$

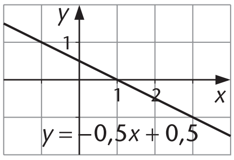


b)

$$-2y - x + 1 = 0$$

$$-2y = x - 1 \quad \Big|:(-2)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

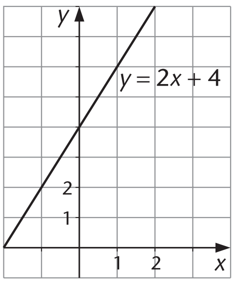


c)

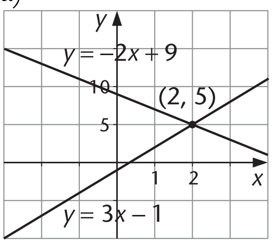
$$4x - 2y + 3 = -5$$

$$-2y = -4x - 8 \quad \Big|:(-2)$$

$$y = 2x + 4$$



2. a)



b) $3x + 3x = 6$

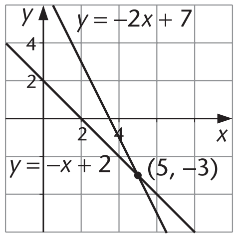
$$3y = -3x + 6 \quad \Big|:3$$

$$y = -x + 2$$

ja

$$y + 2x - 7 = 0$$

$$y = -2x + 7$$



3. Merkitään
x = merirosvorahat (kg) hinta: 6 €/kg
y = suklaatryffelit (kg) hinta: 7 €/kg

a) $6x + 7y = 5{,}0$

b) $y = 200\,\text{g} = 0{,}2\,\text{kg}$

$$6x + 7 \cdot 0{,}2 = 5{,}0$$

$$6x + 1{,}4 = 5{,}0$$

$$6x = 3{,}6 \quad \Big|:6$$

$$x = 0{,}6 \ \text{(kg)}$$

Vastaus:
a) $6x + 7y = 5{,}0$ (€)
b) 600 g

4. a)

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x + 5y = 0 \\ -x + 4y = 27 \end{cases} \\ \hline 9y = 27 \\ y = 3 \end{array}$$

(+)

$$x + 5 \cdot 3 = 0$$

$$x = -15$$

b) $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$

Sijoitetaan $y = x + 1$ yhtälöön $-x + 2y = 1$.

$$-x + 2(x+1) = 1$$
$$-x + 2x + 2 = 1$$
$$x = -1$$

$$y = -1 + 1 = 0$$

Vastaus:
a) $x = -15$, $y = 3$
b) $x = -1$, $y = 0$

5. a) $\begin{cases} 3x - y = 2 & \vert \cdot 2 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 6x - 2y = 4 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases} \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

tosi

Yhtälöparilla ääretön määrä ratkaisuja.

Kirjoitetaan yhtälöt ratkaistussa muodossa.

$$\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ -y &= -3x + 2 \\ y &= 3x - 2 \end{aligned} \quad \text{ja} \quad \begin{aligned} -6x + 2y &= -4 \\ 2y &= 6x - 4 \quad \vert :2 \\ y &= 3x - 2 \end{aligned}$$

Leikkauspisteitä on siis ääretön määrä, mutta niiden on toteutettava suoran $y = 3x - 2$ yhtälö.

b) $\begin{cases} y = -x + 4 \\ y + x + 5 = 0 \end{cases}$

Sijoitetaan $y = -x + 4$ yhtälöön $y + x + 5 = 0$.

$$-x + 4 + x + 5 = 0$$
$$9 = 0$$

epätosi

Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

Vastaus:
a) Kaikki suoran $y = 3x - 2$ pisteet.
b) Ei ratkaisua

6. a) $\begin{cases} 3x + 4y = -2 & \vert \cdot 5 \\ 5x + 3y = 4 & \vert \cdot (-3) \end{cases}$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 15x + 20y = -10 \\ -15x - 9y = -12 \end{cases} \\ \hline 11y = -22 \\ y = -2 \end{array}$$

$$3x + 4 \cdot (-2) = -2$$
$$3x - 8 = -2$$
$$3x = 6 \quad \vert :3$$
$$x = 2$$

b) $\begin{cases} 5x + 4y = 3 & \vert \cdot (-4) \\ 4x + 5y = 3 & \vert \cdot 5 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -20x - 16y = -12 \\ 20x + 25y = 15 \end{cases} \\ \hline 9y = -3 \end{array}$$

$$y = \frac{3}{9}$$

$$y = \frac{1}{3}$$

$$4x+5\cdot\frac{1}{3}=3$$
$$4x+\frac{5}{3}=3$$
$$4x=3-\frac{5}{3}$$
$$4x=1\frac{1}{3} \quad |:4$$
$$x=\frac{1}{3}$$

c) $\begin{cases}2x+4y=3 & |\cdot(-2)\\ 4x+3y=3\end{cases}$

$$+\begin{cases}-4x-8y=-6\\ 4x+3y=3\end{cases}$$
$$-5y=-3$$
$$y=\frac{3}{5}$$

$$2x+4\cdot\frac{3}{5}=3$$
$$2x+\frac{12}{5}=3$$
$$2x=\frac{3}{5} \quad |:2$$
$$x=\frac{3}{10}$$

Vastaus:

a) $x=2$, $y=-2$

b) $x=y=\frac{1}{3}$

c) $x=\frac{3}{10}$, $y=\frac{3}{5}$

7. a) $\begin{cases}-3(2x+y)=36\\ 2(2x+4)=2+x\end{cases}$

$$\begin{cases}-6x-3y=36\\ 4x+8=2+x\end{cases}$$

$$\begin{cases}-6x-3y=36\\ 3x+2y=2 & |\cdot 2\end{cases}$$

$$+\begin{cases}-6x-3y=36\\ 6x+4y=4\end{cases}$$
$$y=40$$

$$3x+2\cdot 40=2$$
$$3x+80=2$$
$$3x=-78 \quad |:3$$
$$x=-26$$

b) $\begin{cases}-0{,}3x+7y=5(x+2y+2)\\ 3(2{,}1x+y)=x+2\end{cases}$

$$\begin{cases}-0{,}3x+7y=5x+10y+10\\ 6{,}3x+3y=x+2\end{cases}$$

$$+\begin{cases}-5{,}3x-3y=10\\ 5{,}3x+3y=2\end{cases}$$
$$0=12$$

epätosi

ei ratkaisua

Vastaus:

a) $x=-26$, $y=40$

b) ei ratkaisua

8. Merkitään x = 2 kpl pakkausten lkm.
y = 6 kpl pakkausten lkm.

$$\begin{cases} x + y = 70 & \big| \cdot (-2) \\ 2x + 6y = 260 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -2x - 2y = -140 \\ 2x + 6y = 260 \end{cases} \\ \hline 4y = 120 \\ y = 30 \end{array}$$

$$x + 30 = 70$$
$$x = 40$$

Vastaus:
Kahden kappaleen pakkauksia 40 kpl
Kuuden kappaleen pakkauksia 30 kpl

9. Merkitään
x = yhdessä taksissa matkustavien lkm.
y = yhdessä bussissa matkustavien lkm.
(keskimäärin)

$$\begin{cases} 136x + 68y = 3196 & \big| \cdot (-106) \\ 124x + 106y = 4806 & \big| \cdot 68 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -14416x - 7208y = -338776 \\ 8432x + 7208y = 326808 \end{cases} \\ \hline -5984x \qquad = -11968 \\ x = 2 \end{array}$$

$$136 \cdot 2 + 68y = 3196$$
$$272 + 68y = 3196$$
$$68y = 2924 \quad \big| :68$$
$$y = 43$$

Vastaus: Bussissa saapui keskimäärin 43 matkustajaa. Taksissa saapui keskimäärin 2 matkustajaa.

10. Merkitään x = Pekan tuntipalkka (€)
y = Jarin tuntipalkka (€)

$$\begin{cases} 10x + 14y = 110 & \big| \cdot 9 \\ 9x + 17y = 121 & \big| \cdot (-10) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 90x + 126y = 990 \\ -90x - 170y = -1210 \end{cases} \\ \hline -44y = -220 \\ y = 5 \end{array}$$

Kun $y = 5$, niin
$$9x + 17 \cdot 5 = 121$$
$$9x + 85 = 121$$
$$9x = 36 \quad \big| :9$$
$$x = 4$$

Vastaus:
Pekan tuntipalkka 4 €, Jarin tuntipalkka 5 €

11. Merkitään lukuja kirjaimilla x ja y.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 - y^2 = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ x^2 - y^2 = -15 \end{cases}$$

Sijoitetaan $y = -x + 1$ yhtälöön
$x^2 - y^2 = -15$.

$$x^2 - (-x + 1)^2 = -15$$
$$x^2 - (x^2 - 2x + 1) = -15$$
$$x^2 - x^2 + 2x - 1 = -15$$
$$2x = -14 \quad \big| :2$$
$$x = -7$$

Kun $x = -7$, niin $y = -(-7) + 1 = 8$.

Vastaus: Luvut ovat -7 ja 8.

12. Merkitään x = 1,5-prosenttinen liuos (l)
y = 20,0-prosenttinen liuos (l)

	1,5-pros.	20,0-pros.	Koko liuos
Liuoksen määrä	x	y	1,5
Suolan määrä	$0{,}015x$	$0{,}20y$	$0{,}10\cdot 1{,}5$

Saadaan yhtälöt:

$$\begin{cases} x + y = 1{,}5 \\ 0{,}015x + 0{,}20y = 0{,}10\cdot 1{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1{,}5 & \big|\cdot(-0{,}20) \\ 0{,}015x + 0{,}20y = 0{,}15 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -0{,}20x - 0{,}20y = -0{,}3 \\ 0{,}015x + 0{,}20y = 0{,}15 \end{cases} + \\ \hline -0{,}185x = -0{,}15 \end{array}$$

$$x = \frac{0{,}15}{0{,}185}$$

$$x = 0{,}8108...$$

$$x \approx 0{,}81$$

Kun $x = 0{,}81$, niin

$$0{,}81 + y = 1{,}5$$

$$y = 0{,}69$$

Vastaus:
1,5-prosenttista liuosta 0,81 l
20-prosenttista liuosta 0,69 l

13. a)

$$\begin{cases} 3x - 5y + z = 5 \\ -2x + 5y + z = 5 \\ x - 10y + z = -4 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan niistä sama tuntematon y.

(1)

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 3x - 5y + z = 5 \\ -2x + 5y + z = 5 \end{cases} + \\ \hline x + 2z = 10 \end{array}$$

(2)

$$\begin{cases} -2x + 5y + z = 5 & \big|\cdot 2 \\ x - 10y + z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -4x + 10y + 2z = 10 \\ x - 10y + z = -4 \end{cases} + \\ \hline -3x + 3z = 6 \end{array}$$

Saadaan uusi yhtälöpari:

$$\begin{cases} x + 2z = 10 & \big|\cdot 3 \\ -3x + 3z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 3x + 6z = 30 \\ -3x + 3z = 6 \end{cases} + \\ \hline 9z = 36 \end{array}$$

$$z = 4$$

Kun $z = 4$, niin

$$x + 2\cdot 4 = 10$$

$$x + 8 = 10$$

$$x = 2$$

Kun $z = 4$ ja $x = 2$, niin

$$2 - 10y + 4 = -4$$

$$-10y = -10 \quad \big|:(-10)$$

$$y = 1$$

b)

$$\begin{cases} -3x+3z=3 & \text{I} \\ -2y+4z=-5 & \text{II} \\ -10x+4y=-2 & \text{III} \end{cases}$$

Ratkaistaan yhtälöstä I tuntematon x ja sijoitetaan se muihin yhtälöihin.

$$-3x+3z=3$$
$$-3x=-3z+3 \quad |:(-3)$$
$$x=z-1$$

Saadaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} -2y+4z=-5 \\ -10(z-1)+4y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2y+4z=-5 \\ -10z+10+4y=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2y+4z=-5 & |\cdot 2 \\ 4y-10z=-12 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -4y+8z=-10 \\ 4y-10z=-12 \end{cases}$$
$$-2z=-22$$
$$z=11$$

Kun $z=11$, niin

$$-2y+4\cdot 11=-5$$
$$-2y=-49 \quad |:(-2)$$
$$y=24\frac{1}{2}$$

Kun $z=11$ ja $y=24\frac{1}{2}$, niin
$x=z-1=11-1=10$.

Vastaus:

a) $x=2$, $y=1$, $z=4$

b) $x=10$, $y=24\frac{1}{2}$, $z=11$

14. a)

$$\begin{cases} 3t+4r=2s-3 \\ 3(s+t)+4=2(s+1{,}5t+2{,}5) \\ -6s-4(s-t-2)=3(2-r) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3t+4r=2s-3 \\ 3s+3t+4=2s+3t+5 \\ -6s-4s+4t+8=6-3r \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4r-2s+3t=-3 \\ s=1 \\ 3r-10s+4t=-2 \end{cases}$$

Sijoitetaan $s=1$ kahteen muuhun yhtälöön.

$$4r-2\cdot 1+3t=-3$$
$$4r+3t=-1$$

$$3r-10\cdot 1+4t=-2$$
$$3r+4t=8$$

Saadaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} 4r+3t=-1 & |\cdot 3 \\ 3r+4t=8 & |\cdot(-4) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 12r+9t=-3 \\ -12r-16t=-32 \end{cases}$$
$$-7t=-35$$
$$t=5$$

Kun $t=5$, niin

$$3r+4\cdot 5=8$$
$$3r+20=8$$
$$3r=-12 \quad |:3$$
$$r=-4$$

b)

$$\begin{cases} 7(c-a)=4+b \\ 9(a+c)=-6b \\ -3b+2c=5(2a+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7c-7a=4+b \\ 9a+9c=-6b \\ -3b+2c=10a+5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7a-b+7c=4 \\ 9a+6b+9c=0 \\ -10a-3b+2c=5 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan niistä sama tuntematon *b*.

(1)

$$\begin{cases} -7a-b+7c=4 & \mid\cdot 6 \\ 9a+6b+9c=0 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -42a-6b+42c=24 \\ 9a+6b+9c=0 \end{cases}$$

$$-33a+51c=24$$

(2)

$$\begin{cases} -7a-b+7c=4 & \mid\cdot(-3) \\ -10a-3b+2c=5 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 21a+3b-21c=-12 \\ -10a-3b+2c=5 \end{cases}$$

$$11a-19c=-7$$

Saadaan uusi yhtälöpari:

$$\begin{cases} -33a+51c=24 \\ 11a-19c=-7 & \mid\cdot 3 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -33a+51c=24 \\ 33a-57c=-21 \end{cases}$$

$$-6c=3$$

$$c=-0{,}5$$

Kun $c=-0{,}5$, niin

$$11a-19\cdot(-0{,}5)=-7$$

$$11a+9{,}5=-7$$

$$11a=-16{,}5 \quad \mid :11$$

$$a=-1{,}5$$

Kun $c=-0{,}5$ ja $a=-1{,}5$, niin

$$-7\cdot(-1{,}5)-b+7\cdot(-0{,}5)=4$$

$$10{,}5-b-3{,}5=4$$

$$-b=-3 \quad \mid :(-1)$$

$$b=3$$

Vastaus:

a) $r=-4$, $s=1$, $t=5$

b) $a=-1{,}5$; $b=3$, $c=-0{,}5$

15. Paraabeli $y=ax^2+bx+c$

$(-4,-64)$ $\quad -64=a\cdot(-4)^2+b\cdot(-4)+c$

$(-1,-4)$ $\quad -4=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c$

$(2, 2)$ $\quad 2=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c$

Saadaan yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 16a-4b+c=-64 \\ a-b+c=-4 \\ 4a+2b+c=2 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan niistä sama tuntematon *c*.

(1)

$$\begin{cases} 16a-4b+c=-64 & \mid\cdot(-1) \\ a-b+c=-4 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -16a+4b-c=64 \\ a-b+c=-4 \end{cases}$$

$$-15a+3b=60$$

(2)
$$\begin{cases} a-b+c=-4 & \big| \cdot(-1) \\ 4a+2b+c=2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -a+b-c=4 \\ 4a+2b+c=2 \end{cases} \\ \hline 3a+3b=6 \end{array}$$

Saadaan yhtälöpari:
$$\begin{cases} -15a+3b=60 & \big| \cdot(-1) \\ 3a+3b=6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 15a-3b=-60 \\ 3a+3b=6 \end{cases} \\ \hline 18a=-54 \\ a=-3 \end{array}$$

Kun $a=-3$, niin
$$3\cdot(-3)+3b=6$$
$$-9+3b=6$$
$$3b=15 \quad \big| :3$$
$$b=5$$

Kun $a=-3$ ja $b=5$, niin
$$-3-5+c=-4$$
$$-8+c=-4$$
$$c=4$$

Vastaus: $y=-3x^2+5x+4$

16. Merkitään x = Sallan patukat (kpl)
y = Annen patukat (kpl)
z = Sirkan patukat (kpl)

Saadaan yhtälöt:
$$\begin{cases} x+y+z=15 \\ x=1{,}5z \\ x=y+1 \end{cases}$$

Sijoitetaan $x=y+1$ kahteen muuhun yhtälöön.

$$\begin{cases} y+1+y+z=15 \\ y+1=1{,}5z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y+z=14 \\ y-1{,}5z=-1 & \big| \cdot(-2) \end{cases}$$

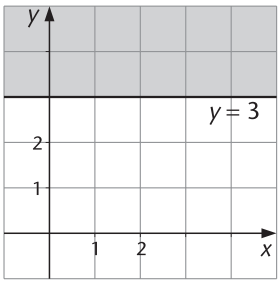
$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2y+z=14 \\ -2y+3z=2 \end{cases} \\ \hline 4z=16 \\ z=4 \end{array}$$

Kun $z=4$, niin
$x=1{,}5\cdot 4=6$

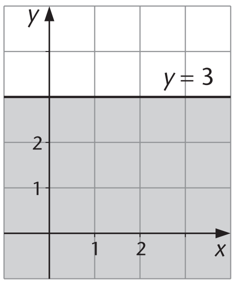
Kun $x=6$, niin
$6=y+1$
$y=5$

Vastaus:
Salla 6 kpl, Anne 5 kpl ja Sirkka 4 kpl.

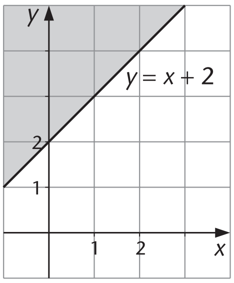
17. a) $y \geq 3$



b) $y < 3$



c) $y \geq x + 2$

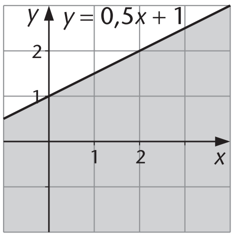


18. a)

$$x > 2y - 2$$

$$2y < x + 2 \quad \Big| : 2$$

$$y < \frac{1}{2}x + 1$$

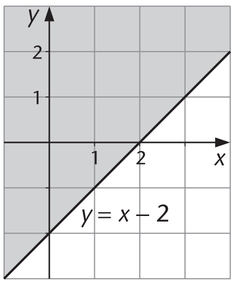


b)

$$4x - y \leq 2y + x + 6$$

$$-3y \leq -3x + 6 \quad \Big| :(-3)$$

$$y \geq x - 2$$



19. Suorat:

$x = -1$

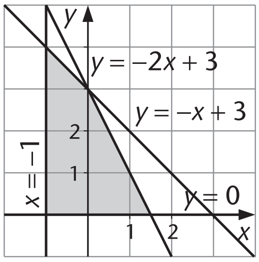
$y = 0,$ ja

$y = -x + 3$

$$2y + 4x = 6$$

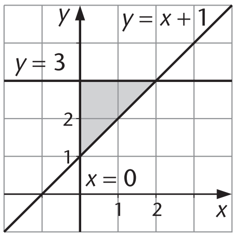
$$2y = -4x + 6 \quad \Big| :2$$

$$y = -2x + 3$$



20. a)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 3 \\ y \geq x + 1 \end{cases}$$

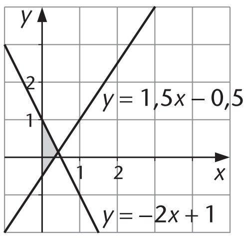


b)

$$\begin{cases} 4x \leq -2y + 2 \\ 2y \geq 3x - 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y \leq -4x + 2 & \Big| :2 \\ 2y \geq 3x - 1 & \Big| :2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq -2x + 1 \\ y \geq \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

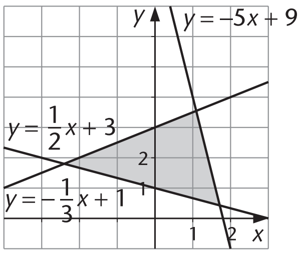


c)

$$\begin{cases} y < -5x + 9 \\ -x + 2y < 6 \\ 3y + x - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < -5x + 9 \\ 2y < x + 6 & |:2 \\ 3y > -x + 3 & |:3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < -5x + 9 \\ y < \frac{1}{2}x + 3 \\ y > -\frac{1}{3}x + 1 \end{cases}$$



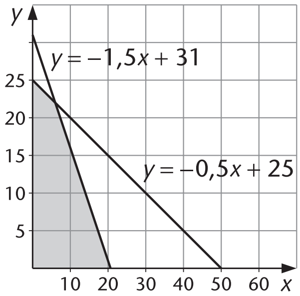
21. Merkitään x = ruisvoileipien lkm.
y = vehnävoileipien lkm.

	Ruis x	Vehnä y	Yhteensä max
Kinkkuviipaleet	3	2	62
Juustoviipaleet	1	2	50

Saadaan epäyhtälöt:

$$\begin{cases} 3x + 2y \le 62 & |:2 \\ x + 2y \le 50 & |:2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \le -1{,}5x + 31 \\ y \le -0{,}5x + 25 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



22. a) Suurin tai pienin arvo löytyy tarkasteltavan monikulmion kärkipisteissä.

1. kärkipiste (0, 0)

2. kärkipiste suoran $y = -x + 4$
y-akselin leikkaiskohta, (0,4)

3. kärkipiste suoran $y = -x + 4$ ja
$y = -5x + 6$ leikkauspiste:

$$-x + 4 = -5x + 6$$

$$4x = 2 \quad |:4$$

$$x = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$y = -0{,}5 + 4 = 3{,}5$$

Saadaan piste (0,5; 3,5).

4. kärkipiste suoran $y = -5x + 6$ nollakohta

$$-5x + 6 = 0$$

$$-5x = -6 \quad |:(-5)$$

$$x = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

Saadaan piste (1,2; 0).

Kärkipiste	Lausekkeen $2x + y$ arvo
(0, 0)	$2 \cdot 0 + 0 = 0$ pienin
(0, 4)	$2 \cdot 0 + 4 = 4$
(0,5; 3,5)	$2 \cdot 0{,}5 + 3{,}5 = 4{,}5$ suurin
(1,2; 0)	$2 \cdot 1{,}2 + 0 = 2{,}4$

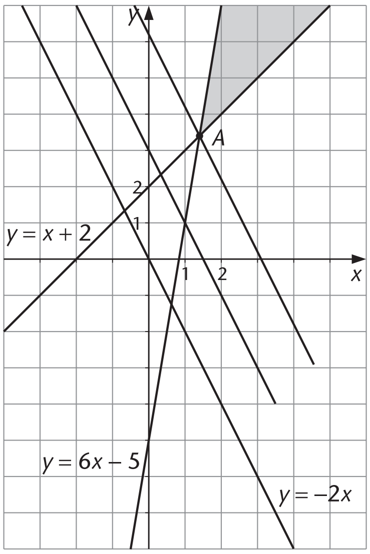
b) Suurin ja pienin arvo etsitään tutkimalla suorien $2x + y = c$ joukkoa. Kaikki tällaiset suorat ovat yhdensuuntaisia origon kautta kulkevan suoran $2x + y = 0$ kanssa $(y = -2x)$.

Pienin vakiotermin c arvo näyttäisi olevan suoralla, joka sivuaa tasoaluetta pisteessä A.
Suurin $y = x + 2$ ja $y = 6x - 5$ leikkauspiste:

$$x + 2 = 6x - 5$$

$$-5x = -7 \quad \big| :(-5)$$

$$x = \frac{7}{5} = 1{,}4$$



Kun $x = 1{,}4$, niin $y = 1{,}4 + 2 = 3{,}4$.
Siis $\mathrm{A} = (1{,}4; 3{,}4)$

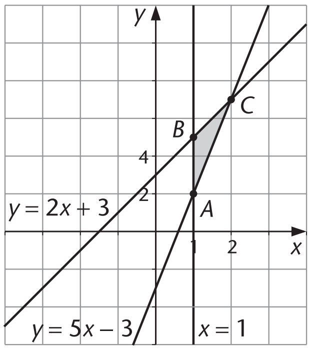
Lauseke $2x + y$ saa tällöin arvon $2 \cdot 1{,}4 + 3{,}4 = 6{,}2$. Kaikki tämän suoran yläpuolella olevat kulkevat tasoalueen poikki. Vakiotermi voi siis suurentua rajatta eli suurinta arvoa ei ole.

Vastaus:
a) Suurin arvo 4,5 , pienin arvo 0
b) Suurinta arvoa ei ole, pienin arvo 6,2

23.

$$\begin{cases} -5x + y \geq -3 \\ y \leq 2x + 3 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 5x - 3 \\ y \leq 2x + 3 \\ x \geq 1 \end{cases}$$



Lasketaan muodostuneen monikulmion kärkipisteet.

A:

$$\begin{cases} y = 5x - 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Sijoitetaan $x = 1$ yhtälöön $y = 5x - 3$.
$y = 5 \cdot 1 - 3 = 2$
Siis A = (1, 2).

B:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Sijoitetaan $x = 1$ yhtälöön $y = 2x + 3$.
$y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$
Siis B = (1, 5).

C:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 5x - 3 \end{cases}$$

$$2x + 3 = 5x - 3$$

$$-3x = -6 \quad \big| :(-3)$$

$$x = 2$$

$y = 2 \cdot 2 + 3 = 7$
Siis C = (2, 7).

Kärkipiste	Lausekkeen $-3x - 2{,}3y$ arvo
(1, 2)	$-3 \cdot 1 - 2{,}3 \cdot 2 = -7{,}6$ suurin
(1, 3)	$-3 \cdot 1 - 2{,}3 \cdot 3 = -9{,}9$
(2, 7)	$-3 \cdot 2 - 2{,}3 \cdot 7 = -22{,}1$ pienin

24.

	Iso kori x	Pieni kori y	Yhteensä max
Kuulat	40	20	$10 \cdot 100$
Pullot	3	1	70
Voitto	3,10	1,50	

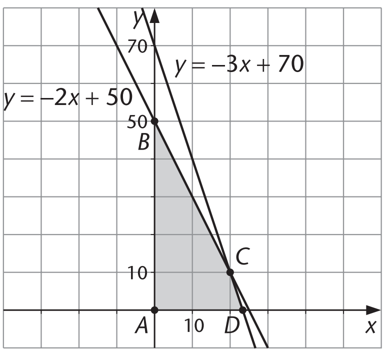
Optimoitava lauseke:
Voitto $= 3{,}10x + 1{,}50y$ (€)

Rajoittavat ehdot (taulukosta):

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 40x + 20y \leq 1000 \\ 3x + y \leq 70 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -2x + 50 \\ y \leq -3x + 70 \end{cases}$$

Ratkaistaan epäyhtälöryhmä. Piirretään suorat koordinaatistoon.



Nollakohdat:

$$-2x + 50 = 0$$
$$-2x = -50 \quad |:2$$
$$x = 25$$

$$-3x + 70 = 0$$
$$-3x = -70 \quad |:(-3)$$
$$x = 23\frac{1}{3}$$

Lasketaan suotuisan tasoalueen kärkipisteet, sillä optimiarvo saadaan jossakin kärkipisteessä.

A = (0, 0)

B = (0, 50)
Suoran $y = -2x + 50$ y-akselin leikkauskohta.

C:
Suorien $y = -2x + 50$ ja $y = -3x + 70$ leikkauspiste.

$$-2x + 50 = -3x + 70$$
$$x = 20$$

Kun $x = 20$, niin $y = -2 \cdot 20 + 50 = 10$
Siis C = (20, 10).

D = $\left(23\frac{1}{3}, 0\right)$
Suoran $y = -3x + 70$ nollakohta.

Lasketaan optimoitavan lausekkeen arvo kärkipisteissä.

Kärkipiste	$3{,}10x + 1{,}50y$
(0, 0)	$3{,}10 \cdot 0 + 1{,}50 \cdot 0 = 0$
(0, 50)	$3{,}10 \cdot 0 + 1{,}50 \cdot 50 = 75$
(20, 10)	$3{,}10 \cdot 20 + 1{,}50 \cdot 10 = 77$ suurin
$\left(23\frac{1}{3}, 0\right)$	$3{,}10 \cdot 23\frac{1}{3} + 1{,}50 \cdot 0 = 72\frac{1}{3}$

Suurin voitto, kun $x = 20$ ja $y = 10$.

Vastaus:
Isoja koreja 20 kpl ja pieniä koreja 10 kpl.

25. Huom! Kirjan 1. painoksessa on virhe tehtävänannossa. Yksikköhintojen tulisi olla: Rehu A 0,10 € ja Rehu B 0,40 €.

Merkitään x = rehu A
y = rehu B

Taulukosta saadaan optimoitava lauseke ja rajoitusehdot.

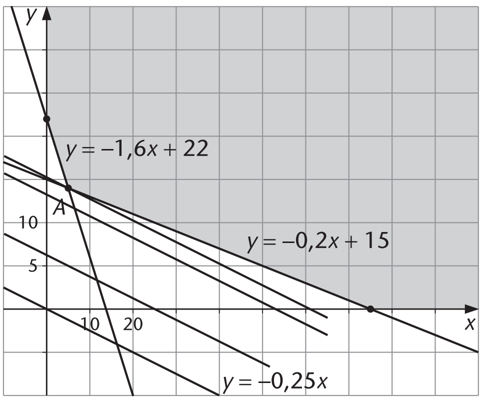
Optimoitava lauseke:
$\text{kustannukset} = 0{,}10x + 0{,}40y$ (€)

Rajoittavat ehdot:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 160x + 100y \geq 2200 \\ 2x + 10y \geq 150 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq -1{,}6x + 2{,}2 \\ y \geq -0{,}2x + 15 \end{cases}$$

Ratkaistaan epäyhtälöryhmä. Piirretään suorat koordinaatistoon.



Nollakohdat:

$$-1{,}6x + 22 = 0$$
$$-1{,}6x = -22 \quad |:(-1{,}6)$$
$$x = 13{,}75$$

$$-0{,}2x + 15 = 0$$
$$-0{,}2x = -15 \quad |:(-0{,}2)$$
$$x = 75$$

Koska suotuisa alue ei ole rajoitettu, optimiarvo etsitään tutkimalla suorien $0{,}10x + 0{,}50y = c$ joukkoa. Kaikki tällaiset suorat ovat yhdensuuntaisia origon kautta kulkevan suoran $0{,}10x + 0{,}40y = 0$ kanssa.

Piirretään siis suora $y = -0{,}25x$.

Lasketaan suorien $y = -0{,}2x + 15$ ja $y = -1{,}6x + 22$ leikkauspiste A:

$$-0{,}2x + 15 = -1{,}6x + 22$$
$$1{,}4x = 7 \quad |:1{,}4$$
$$x = 5$$

Kun $x = 5$, niin $y = -0{,}2 \cdot 5 + 15 = 14$.
Siis A = (5, 14).

Vastaus:
5 yksikköä rehua A
14 yksikköä rehua B

26. Merkitään x = salkku (lkm.)
y = iltalaukku (lkm.)

	Raaka-aine (kg)	Työaika (h)	Hinta (€)
Salkku x	4,0	3	160
Laukku y	0,5	1	50
Yhteensä max	200	250	

Taulukosta saadaan:

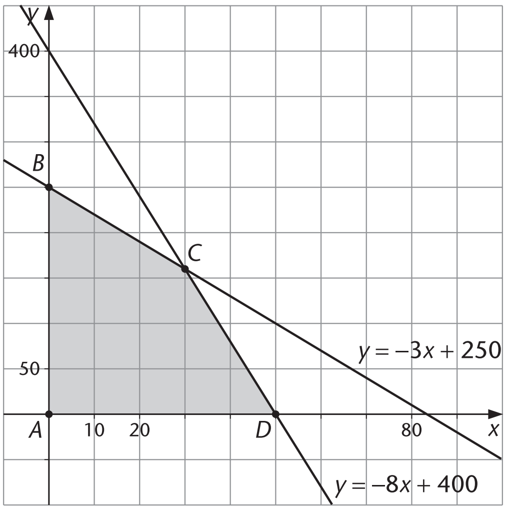
Optimoitava lauseke
$\text{myyntitulo} = 160x + 50y$

Rajoitusehdot:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4{,}0x + 0{,}5y \leq 200 \\ 3x + y \leq 250 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -8x + 400 \\ y \leq -3x + 250 \end{cases}$$

Ratkaistaan epäyhtälöryhmä. Piirretään suorat.



Nollakohdat:

$-8x + 400 = 0$

$-8x = -400 \quad |:(-8)$

$x = 50$

$-3x + 250 = 0$

$-3x = -250 \quad |:(-3)$

$x = 83\frac{1}{3}$

Lasketaan suotuisan alueen kärkipisteet, sillä optimiarvo saadaan jossakin kärkipisteessä.

A = (0, 0)

B = (0, 250)
Suoran $y = -3x + 250$ y-akselin leikkauskohta.

C:
Suorien $y = -3x + 250$ ja $y = -8x + 400$ leikkauspiste.

$-3x + 250 = -8x + 400$

$5x = 150 \quad |:5$

$x = 30$

Kun $x = 30$, niin $y = -3 \cdot 30 + 250 = 160$.

Siis C = (30, 160).

D = (50, 0)
Suoran $y = -8x + 400$ nollakohta.

Lasketaan optimoitavan lausekkeen arvo kärkipisteissä.

Kärkipiste	$160x + 50y$
(0, 0)	$160 \cdot 0 + 50 \cdot 0 = 0$
(0, 250)	$160 \cdot 0 + 50 \cdot 250 = 12500$
(30, 160)	$160 \cdot 30 + 50 \cdot 160 = 12800$ suurin
(50, 0)	$160 \cdot 50 + 50 \cdot 0 = 8000$

Suurin myyntitulo, kun $x = 30$ ja $y = 160$.

Vastaus:
Salkkuja 30 kpl ja iltalaukkuja 160 kpl.

27. a) $a_n = n^2 - 15n$

$a_{18} = 18^2 - 15 \cdot 18 = 54$

b) $a_n = \dfrac{2}{3n - 15}$

$a_{18} = \dfrac{2}{3 \cdot 18 - 15} = \dfrac{2}{39}$

28. a) $a_n = n^2 + 2n - 7$

$n^2 + 2n - 7 = 8$

$n^2 + 2n - 15 = 0$

$$n = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1}$$

$$n = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$n = \frac{-2 + 8}{2} = 3 \text{ tai } n = \frac{-2 - 8}{2} = -5$$

joista $n = -5$ ei käy, koska $n > 0$.

Siis $a_3 = 8$ eli 3. jäsen on 8.

b) $a_n = 3n^2 + 4n + 2$

$$3n^2 + 4n + 2 = 8$$
$$3n^2 + 4n - 6 = 0$$

$$n = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3}$$
$$n = \frac{-4 \pm \sqrt{88}}{6}$$
$$n = 0{,}896... \text{ tai } n = -2{,}230...$$

Koska n ei ole positiivinen kokonaisluku, niin luku 8 ei kuulu jonoon.

Vastaus:
a) on
b) ei ole

29. a) 4, 8, 12, 16

Seuraava jäsen saadaan lisäämällä edelliseen luku 4.

$$a_1 = 4$$
$$a_2 = 4 + 4 = 2 \cdot 4 = 8$$
$$a_3 = 4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$$
$$a_4 = 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \cdot 4 = 16$$
$$\vdots$$
$$a_n = 4n$$

b) 3, 5, 3, 5

Seuraava jäsen saadaan esimerkiksi lisäämällä tai vähentämällä luvusta 4 luku 1.

$$a_1 = 4 + (-1)^1 = 3$$
$$a_2 = 4 + (-1)^2 = 5$$
$$a_3 = 4 + (-1)^3 = 3$$
$$\vdots$$
$$a_n = 4 + (-1)^n$$

c) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$

Seuraava jäsen saadaan jakamalla edellinen luvulla 3 eli kertomalla luvulla $\frac{1}{3}$.

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 3 \cdot \frac{1}{3}$$
$$a_3 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$a_4 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$
$$\vdots$$
$$a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Vastaus:
a) $a_n = 4n$
b) $a_n = 4 + (-1)^n$
c) $a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

30. a)
$$a_1 = 20$$
$$a_2 = 20 + 4 = 24$$
$$a_3 = 20 + 2 \cdot 4 = 28$$
$$a_4 = 20 + 3 \cdot 4 = 32$$
$$\vdots$$
$$\begin{aligned} a_n &= 20 + (n-1) \cdot d \\ &= 20 + 4n - 4 \\ &= 4n + 16 \end{aligned}$$

b) Yleinen jäsen edellisen kohdan mukaan on $a_n = 4n + 16$

c) 2 viikkoa = 14 päivää
$a_{14} = 4 \cdot 14 + 16 = 72$ (sivua)

Vastaus:
a) 20, 24, 28, 32, …
b) $a_n = 4n + 16$
c) 72 sivua

31. 1, -3, -7, -11, …

a) Aritmeettinen jono
$a_1 = 1$
$d = -3 - 1 = -7 - (-3) = -4$

Yleinen jäsen
$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 1 + (n-1)\cdot(-4) \\ &= 1 - 4n + 4 \\ &= -4n + 5 \end{aligned}$$

b) $a_{21} = -4\cdot 21 + 5 = -79$

32. 67, 62, 57, 52, ...

Aritmeettinen jono
$a_1 = 67$
$d = 62 - 67 = 57 - 62 = -5$

a) Tutkitaan, milloin $a_n = -467$.
$$\begin{aligned} a_n &= -467 \\ a_1 + (n-1)\cdot d &= -467 \\ 67 + (n-1)\cdot(-5) &= -467 \\ 67 - 5n + 5 &= -467 \\ -5n &= -539 \quad |:(-5) \\ n &= 107{,}8 \end{aligned}$$

Koska n ei ole positiivinen kokonaisluku, niin -467 ei ole jonossa.

b) Tutkitaan, milloin $a_n = -673$.
$$\begin{aligned} a_n &= -673 \\ 67 + (n-1)\cdot(-5) &= -673 \\ 67 - 5n + 5 &= -673 \\ -5n &= -745 \quad |:(-5) \\ n &= 149 \end{aligned}$$

Koska n on positiivinen kokonaisluku, niin -673 on jonossa.

Vastaus:
a) ei ole
b) on

33. Aritmeettinen lukujono
$d = 7$
$a_{43} = -43$

Yleinen jäsen
$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

a)
$$\begin{aligned} a_{43} &= -43 \\ a_1 + (43-1)\cdot 7 &= -43 \\ a_1 + 42\cdot 7 &= -43 \\ a_1 + 294 &= -43 \\ a_1 &= -337 \end{aligned}$$

b) Yleinen jäsen, kun
$a_1 = -337$ ja $d = 7$:

$$\begin{aligned} a_n &= -337 + (n-1)\cdot 7 \\ &= -337 + 7n - 7 \\ &= 7n - 344 \end{aligned}$$

34. a) Aritmeettinen jono
$a_0 = 2{,}90\,\text{m}$ (etäisyys rantaan 0 m)
$a_1 = (2{,}90 + 0{,}4)\text{ m} = 3{,}30\text{ m}$
$a_2 = 2{,}90 + 2\cdot 0{,}4 = 3{,}70\text{ m}$
$a_3 = 2{,}90 + 3\cdot 0{,}4 = 4{,}10\text{ m}$
$\vdots$
$a_n = 2{,}90 + n\cdot 0{,}4\ \text{(m)}$ etäisyys rantaan n metriä

b) 120 m päässä rannasta eli etsitään 120. jäsentä jonossa.
$a_{120} = 2{,}90 + 120\cdot 0{,}4 = 50{,}9\ \text{(m)}$

Vastaus:
a) $a_n = 2{,}90 + 0{,}4n$
b) 50,9 m

35. a) Kerrokset muodostavat aritmeettisen jonon:

$a_1 = 32$ (m)

$a_2 = 32 + 4{,}5 = 36{,}5$ (m)

$a_3 = 32 + 2 \cdot 4{,}5$ (m)

$a_4 = 32 + 3 \cdot 4{,}5$ (m)

$\vdots$

$$\begin{aligned} a_n &= 32 + (n-1)\cdot 4{,}5 \\ &= 32 + 4{,}5n - 4{,}5 \\ &= 4{,}5n + 27{,}5 \text{ (m)} \end{aligned}$$

b) Lasketaan, milloin $a_n = 90{,}5$ (m).

$$4{,}5n + 27{,}5 = 90{,}5$$

$$4{,}5n = 63 \qquad |:4{,}5$$

$$n = 14$$

Vastaus:

a) $a_n = 4{,}5n + 27{,}5$ (m)

b) 14. kerros

36. a) $92 + 124 + 156 + .. + 572$

Aritmeettinen summa

$a_1 = 92$

$d = 124 - 92 = 156 - 124 = 32$

Lasketaan, montako lukua summassa on.

$$\begin{aligned} a_n &= 572 \\ a_1 + (n-1)\cdot d &= 572 \\ 92 + (n-1)\cdot 32 &= 572 \\ 92 + 32n - 32 &= 572 \\ 32n &= 512 \qquad |:32 \\ n &= 16 \end{aligned}$$

$$S_{16} = 16 \cdot \frac{92+572}{2} = 16 \cdot \frac{664}{2} = 5312$$

b) $101 + 95 + 89 + ... + (-61) + (-67)$

Aritmeettinen summa

$a_1 = 101$

$d = 95 - 101 = 89 - 95 = -6$

Lasketaan, montako lukua summassa on.

$$\begin{aligned} a_n &= -67 \\ a_1 + (n-1)\cdot d &= -67 \\ 101 + (n-1)\cdot(-6) &= -67 \\ 101 - 6n + 6 &= -67 \\ -6n &= -174 \qquad |:(-6) \\ n &= 29 \end{aligned}$$

$$S_{29} = 29 \cdot \frac{101-67}{2} = 493$$

37. 3, 5, 7, 9, …

Aritmeettinen jono

$a_1 = 3$

$d = 5 - 3 = 7 - 5 = 2$

$S_n > 2000$

Lasketaan ensin, milloin $S_n = 2000$.

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n = a_1 &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 3 + (n-1)\cdot 2 \\ &= 3 + 2n - 2 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= 2000 \\ n \cdot \frac{3+2n+1}{2} &= 2000 \qquad |\cdot 2 \\ n(2n+4) &= 4000 \\ 2n^2 + 4n - 4000 &= 0 \qquad |:2 \\ n^2 + 2n - 2000 &= 0 \end{aligned}$$

$$n = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-2000)}}{2\cdot 1}$$

$$n = \frac{-2 \pm \sqrt{8004}}{2}$$

$n = 43{,}732...$ tai $n = -45{,}732...$

joista $n = -45{,}732...$ ei käy, koska $n > 0$.

Jos $n = 43$, niin

$$S_{43} = 43 \cdot \frac{3 + 2 \cdot 43 + 1}{2} = 43 \cdot \frac{90}{2} = 1935 < 2000$$

Jos $n = 44$, niin

$$S_{44} = 44 \cdot \frac{3 + 2 \cdot 44 + 1}{2} = 44 \cdot \frac{92}{2} = 2024 > 2000$$

Vastaus: vähintään 44 jäsentä

38. $a_1 = 35$, $d = 4$

$a_2 = 35 + 4$

$a_3 = 35 + 2 \cdot 4$

$\vdots$

$a_n = 35 + (n - 1) \cdot 4$ (yleinen jäsen)

Santeri lukee 15. päivänä:
$a_{15} = 35 + 14 \cdot 4 = 91$ (sivua)

$$S_{15} = 15 \cdot \frac{a_1 + a_{15}}{2} = 15 \cdot \frac{35 + 91}{2} = 945$$

Vastaus: 945 sivua

39. a) $a_1 = 2$ (m)

$a_2 = 2 + 4 = 6$ (m)

$\vdots$

$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 4 = 2 + 4n - 4 = 4n - 2$ (m)

15. sekunnin aikana kulkema matka:
$a_{15} = 4 \cdot 15 - 2 = 58$ (m)

Kokonaismatka:

$$S_{15} = 15 \cdot \frac{2 + 58}{2} = 450 \text{ (m)}$$

b) Viimeisen sekunnin aikana v_{k_1}:

$$v_{k_1} = \frac{58\,\text{m}}{1\,\text{s}} = 58 \cdot 3{,}60\ \text{km/h} = 208{,}8\ \text{km/h} \approx 209\ \text{km/h}$$

Tutkittavan 15 sekunnin aikana v_{k_2}:

$$v_{k_2} = \frac{450\,\text{m}}{15\,\text{s}} = 30 \cdot 3{,}60\ \text{km/h} = 108\ \text{km/h}$$

Vastaus:
a) 450 m
b) $v_{k_1} = 209$ km/h
c) $v_{k_2} = 108$ km/h

40. $a_1 = 5550$, $d = -450$ aritmeettinen jono

a) Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1) \cdot d \\ &= 5550 + (n - 1) \cdot (-450) \\ &= 5550 - 450n + 450 \\ &= -450n + 6000 \end{aligned}$$

b) $a_{12} = -450 \cdot 12 + 6000 = 600$

$$S_{12} = 12 \cdot \frac{5550 + 600}{2} = 36900$$

Vastaus:
a) $a_n = -450n + 6000$
b) 36900 katsojaa

41. 3, −15, 75, −375, …

Geometrinen jono

$$a_1 = 3 ,\ q = \frac{-15}{3} = \frac{75}{-15} = -5$$

a) Yleinen jäsen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot (-5)^{n-1}$

b) $a_8 = 3 \cdot (-5)^{8-1} = 3 \cdot (-5)^7 = -234375$

Vastaus:
a) $a_n = 3 \cdot (-5)^{n-1}$
b) −234375

42. Geometrinen jono 2000, 600, 180, …

$a_1 = 2000$, $q = \dfrac{600}{2000} = \dfrac{180}{600} = \dfrac{3}{10}$

Yleinen jäsen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2000 \cdot \left(\dfrac{3}{10}\right)^{n-1}$

a) Tutkitaan, onko $a_n = 1{,}458$.

$$2000 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} = 1{,}458 \quad \Big|:2000$$

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} = \frac{1{,}458}{2000}$$

$$(n-1)\lg\frac{3}{10} = \lg\left(7{,}29 \cdot 10^{-4}\right)$$

$$n-1 = \frac{\lg\left(7{,}29 \cdot 10^{-4}\right)}{\lg\frac{3}{10}}$$

$$n = 6 + 1 = 7$$

$a_7 = 1{,}458$

b) Tutkitaan, onko $a_n = 0{,}00035$.

$$2000 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} = 0{,}00035 \quad \Big|:2000$$

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} = 1{,}75 \cdot 10^{-7}$$

$$(n-1)\lg\frac{3}{10} = \lg\left(1{,}75 \cdot 10^{-7}\right) \quad \Big|:\lg\frac{3}{10}$$

$$n-1 = \frac{\lg\left(1{,}75 \cdot 10^{-7}\right)}{\lg\frac{3}{10}}$$

$$n-1 = 12{,}9226...$$

$$n = 13{,}9226...$$

Koska n ei ole positiivinen kokonaisluku, niin luku 0,0035 ei ole jonossa.

Vastaus:
a) on, 7. jäsen
b) ei ole

43. Geometrinen jono
$q = 0{,}5$, $a_7 = -6$

Yleinen jäsen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$a_7 = -6$$

$$a_1 \cdot 0{,}5^{7-1} = -6$$

$$a_1 \cdot 0{,}5^6 = -6 \quad \Big|:0{,}5^6$$

$$a_1 = \frac{-6}{0{,}5^6}$$

$$a_1 = -384$$

44. $a_1 = 6$

$a_2 = 6 \cdot 2$ 20 min kuluttua

$a_3 = 6 \cdot 2^2$ $2 \cdot 20$ min kuluttua

$a_4 = 6 \cdot 2^3$ $3 \cdot 20$ min kuluttua

⋮

$a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$ $(n-1) \cdot 20$ min kuluttua

Lasketaan, milloin $a_n = 6291456$ (bakteeria)

$$6 \cdot 2^{n-1} = 6291456 \quad \Big|:6$$

$$2^{n-1} = 1048576$$

$$(n-1)\lg 2 = \lg 1048576 \quad \Big|:\lg 2$$

$$n-1 = \frac{\lg 1048576}{\lg 2}$$

$$n-1 = 20$$

$$n = 21$$

Tällöin aikaa on kulunut
$(n-1) \cdot 20 \text{ min} = 20 \cdot 20 \text{ min} = 400 \text{ min}$ (6 h 40 min)

Vastaus: 400 min kuluttua (6 h 40 min)

45. $a_0 = 10900$

Geometrinen jono, koska vähenemistä 3,4 %. Matkustajia on siis aina jäljellä 96,6 % edellisvuodelta.

1 v. kuluttua: $a_1 = 10900 \cdot 0{,}966$

2 v. kuluttua: $a_2 = 10900 \cdot 0{,}966^2$

$\vdots$

n. vuoden kuluttua $a_n = 10900 \cdot 0{,}966^n$

a) 10 vuoden kuluttua

$a_{10} = 10900 \cdot 0{,}966^{10} = 7712{,}545... \approx 7700$

b) $a_n < 6500$

Lasketaan ensin, milloin $a_n = 6500$.

$$
\begin{aligned}
10900 \cdot 0{,}966^n &= 6500 \quad \big| :10900 \\
0{,}966^n &= \frac{65}{109} \\
n \lg 0{,}966 &= \lg \frac{65}{109} \quad \big| :\lg 0{,}966 \\
n &= \frac{\lg \frac{65}{109}}{\lg 0{,}966} \\
n &= 14{,}944...
\end{aligned}
$$

Jos $n = 14$, niin

$a_{14} = 10900 \cdot 0{,}966^{14} = 6715{,}9... > 6500$

Jos $n = 15$, niin

$a_{15} = 10900 \cdot 0{,}966^{15} = 6487{,}58... < 6500$

Vastaus: a) 7700 matkustajaa
b) 15 vuoden kuluttua

46. a) $5 + 25 + 125 + ... + 9765625$

Geometrinen summa:

$a_1 = 5$, $q = \frac{25}{5} = \frac{125}{5} = 5$

Lasketaan ensin, montako lukua summassa on. Yleinen jäsen: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1}$

$$
\begin{aligned}
a_n &= 9765625 \\
5 \cdot 5^{n-1} &= 9765625 \quad \big| :5 \\
5^{n-1} &= 1953125 \\
(n-1)\lg 5 &= \lg 1953125 \quad \big| :\lg 5 \\
n - 1 &= \frac{\lg 1953125}{\lg 5} \\
n &= 9 \\
n &= 10
\end{aligned}
$$

$$S_{10} = 5 \cdot \frac{1 - 5^{10}}{1 - 5} = 12207030 \approx 12210000$$

b) $3 + 3 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}6^2 + ... + 3 \cdot 0{,}6^{10}$

Geometrinen summa: $n = 11$, $q = 0{,}6$, $a_1 = 3$

$$S_{11} = 3 \cdot \frac{1 - 0{,}6^{11}}{1 - 0{,}6} = 7{,}4727... \approx 7{,}473$$

47. $2+4+8+...+x \leq 999$

Geometrisen summan yleinen jäsen
$a_1 = 2$, $q = 2$, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1}$

Lasketaan ensin, milloin $S_n = 999$.

$$2 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 999 \quad \big| :2$$
$$\frac{1-2^n}{-1} = 499{,}5$$
$$-1+2^n = 499{,}5$$
$$2^n = 500{,}5$$
$$n \lg 2 = \lg 500{,}5 \quad \big| :\lg 2$$
$$n = \frac{\lg 500{,}5}{\lg 2}$$
$$n = 8{,}967...$$

Jos $n = 8$, niin
$$S_8 = 2 \cdot \frac{1-2^8}{1-2} = 510 < 999$$

Jos $n = 9$, niin
$$S_9 = 2 \cdot \frac{1-2^9}{1-2} = 1022 > 999$$

Jotta $S_n \leq 999$, niin summassa pitää olla 8 lukua ($n = 8$). Tällöin
$a_8 = x = 2 \cdot 2^{8-1} = 2 \cdot 2^7 = 256$.

Vastaus: $x = 256$

48. Geometrinen jono:
$$q = \frac{x}{x-1} = \frac{3x}{x} = 3$$

Määritetään ensin luku x.
$$\frac{x}{x-1} = 3$$
$$3(x-1) = x$$
$$3x - 3 = x$$
$$2x = 3 \quad \big| :2$$
$$x = \frac{3}{2}$$

$$a_1 = x - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$
$q = 3$
$n = 8$

$$S_8 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-3^8}{1-3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-6560}{-2} = 1640$$

Vastaus: $x = \frac{3}{2}$, $S_8 = 1640$

49. 2; 2,6; 3,38; 4,394; …

Geometrinen jono:
$a_1 = 2$
$$q = \frac{2{,}6}{2} = \frac{3{,}38}{2{,}6} = 1{,}3$$

$S_n > 1000$

Lasketaan ensin, milloin $S_n = 1000$.

$$2 \cdot \frac{1-1{,}3^n}{1-1{,}3} = 1000 \quad \big| :2$$
$$\frac{1-1{,}3^n}{-0{,}3} = 2000 \quad \big| \cdot(-0{,}3)$$
$$1-1{,}3^n = -150$$
$$-1{,}3^n = -151 \quad \big| \cdot(-1)$$
$$1{,}3^n = 151$$
$$n \lg 1{,}3 = \lg 151$$
$$n = \frac{\lg 151}{\lg 1{,}3}$$
$$n = 19{,}1233...$$

Jos $n = 19$, niin
$$S_{19} = 2 \cdot \frac{1-1{,}3^{19}}{1-1{,}3} = 967{,}946... < 1000$$

Jos $n = 20$, niin
$$S_{20} = 2 \cdot \frac{1-1{,}3^{20}}{1-1{,}3} = 1260{,}330... > 1000$$

Vastaus: vähintään 20 jäsentä

50. $a_1 = 25\text{ l}$

$a_2 = 0{,}95 \cdot 25\text{ l}$

$a_3 = 0{,}95^2 \cdot 25\text{ l}$

$\vdots$

$a_n = 0{,}95^{n-1} \cdot 25\text{ l}$

Geometrinen jono:
$a_1 = 25\text{ l}$
$q = 0{,}95$
$n = 14$ (päivää)

Kahden viikon aikana Sanni poimi yhteensä

$$S_{14} = 25 \cdot \frac{1-0{,}95^{14}}{1-0{,}95}\text{ l} = 256{,}162...\text{ l} \approx 256\text{ l}$$

51. 1 v. 120,00 (€)
2 v. $1{,}021 \cdot 120{,}00 + 120{,}00$ (€)
3 v. $1{,}021^2 \cdot 120{,}00 + 1{,}021 \cdot 120{,}00 + 120{,}00$
$\vdots$
18 v. $1{,}021^{17} \cdot 120{,}00 + ... + 1{,}021 \cdot 120{,}00$

Rahaa on tilillä (ilman viimeistä talletusta):
$n = 18$, $a_1 = 120{,}00$, $q = 1{,}021$

$$S_{18} = 1{,}021 \cdot 120{,}00 \cdot \frac{1-1{,}021^{17}}{1-1{,}021}$$
$$= 2472{,}352...\text{ (€)}$$

Vastaus: 2472,35 €

52. Merkitään talletettavaa summaa kirjaimella *m*.

Alussa m (€)
1 v. $1{,}018m + m$
2 v. $1{,}018^2 m + 1{,}018m + m$
$\vdots$
10 v. $1{,}018^{10} m + ... + 1{,}018m$
(viimeisen koron lisäyksen jälkeen)

$a_1 = 1{,}018m$, $q = 1{,}018$, $n = 10$

$$S_{10} = 2761{,}36$$
$$1{,}018m \cdot \frac{1-1{,}018^{10}}{1-1{,}018} = 2761{,}36$$
$$1{,}018 \cdot \frac{1-1{,}018^{10}}{-0{,}018} m = 2761{,}36 \quad \Big| \cdot(-0{,}018)$$
$$1{,}018 \cdot \left(1-1{,}018^{10}\right)m = -49{,}70448$$
$$m = \frac{-49{,}70448}{1{,}018\left(1-1{,}018^{10}\right)}$$
$$m = 250{,}00013...$$
$$m \approx 250{,}00\text{ (€)}$$

Vastaus: 250,00 €

53. Alussa taimia 600
1 viikon kuluttua $0{,}80 \cdot 600 + 80$
2 viikon kuluttua $0{,}80^2 \cdot 600 + 0{,}80 \cdot 80 + 80$
$\vdots$
20 viikon kuluttua

$$0{,}80^{20} \cdot 600 + \underbrace{0{,}80^{19} \cdot 80 + ... + 80}_{20\,\text{kpl}\,(=n)}$$

$a_1 = 80$, $q = 0{,}80$

$$S = 0{,}80^{20} \cdot 600 + 80 \cdot \frac{1-0{,}80^{20}}{1-0{,}80}$$
$$= 402{,}305...$$
$$\approx 400$$

Vastaus: 400 tainta

54. a) $a_n = 7a_{n-1} - 5$, $a_1 = 2$, $n = 2, 3, ...$

$a_2 = 7a_1 - 5 = 7 \cdot 2 - 5 = 9$

$a_3 = 7a_2 - 5 = 7 \cdot 9 - 5 = 58$

$a_4 = 7a_3 - 5 = 7 \cdot 58 - 5 = 401$

$a_5 = 7a_4 - 5 = 7 \cdot 401 - 5 = 2802$

b)
$a_n = -6a_{n-1} + 8a_{n-2}$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ $n = 3, 4, ...$

$a_3 = -6a_2 + 8a_1 = -6 \cdot 2 + 8 \cdot 0 = -12$

$a_4 = -6a_3 + 8a_2 = -6 \cdot (-12) + 8 \cdot 2 = 88$

$a_5 = -6a_4 + 8a_3 = -6 \cdot 88 + 8 \cdot (-12) = -624$

55. a) $-15, -3, -\frac{3}{5}, -\frac{3}{25}$

Geometrinen jono:

$q = \frac{-3}{-15} = \frac{1}{5}$

$a_1 = -15$

Analyyttinen sääntö:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = -15 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

Rekursiivinen sääntö:
Seuraava jäsen saadaan jakamalla edellinen luvulla 5.

$a_n = \frac{a_{n-1}}{5} = \frac{1}{5} \cdot a_{n-1}$

$a_1 = -15$, $n = 2, 3, ...$

b) 30, 24, 18, 12, …

Aritmeettinen jono:

$d = -6$

$a_1 = 30$

Analyyttinen sääntö:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= 30 + (n-1) \cdot (-6) \\ &= 30 - 6n + 6 \\ &= -6n + 36 \end{aligned}$$

Rekursiivinen sääntö:
Seuraava jäsen saadaan vähentämällä edellisestä luku 6.

$a_n = a_{n-1} - 6$

$a_1 = 30$, $n = 2, 3, ...$

56. $a_1 = -2$, $a_2 = -1$

Fibonacci

$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$

$n = 3, 4, ...$

$a_3 = a_1 + a_2 = -2 - 1 = -3$

$a_4 = a_3 + a_2 = -3 - 1 = -4$

$a_5 = a_4 + a_3 = -4 - 3 = -7$

57. $a_1 = 32$

$a_n = 2{,}5(1 - 0{,}0012 a_{n-1}) \cdot a_{n-1}$

$n = 2:$

$$\begin{aligned} a_2 &= 2{,}5(1 - 0{,}0012 \cdot a_1) \cdot a_1 \\ &= 2{,}5(1 - 0{,}0012 \cdot 32) \cdot 32 \\ &= 76{,}928 \end{aligned}$$

$n = 3:$

$$\begin{aligned} a_3 &= 2{,}5(1 - 0{,}0012 \cdot a_2) \cdot a_2 \\ &= 2{,}5(1 - 0{,}0012 \cdot 76{,}928) \cdot 76{,}928 \\ &= 174{,}56624... \end{aligned}$$

$n = 4:$

$$\begin{aligned} a_4 &= 2{,}5(1 - 0{,}0012 \cdot a_3) \cdot a_3 \\ &= 344{,}995... \end{aligned}$$

$n = 5:$

$$\begin{aligned} a_5 &= 2{,}5(1 - 0{,}0012 \cdot a_4) \cdot a_4 \\ &= 505{,}423... \end{aligned}$$

$n = 6:$

$$\begin{aligned} a_6 &= 2{,}5(1 - 0{,}0012 \cdot a_5) \cdot a_5 \\ &= 497{,}200... \end{aligned}$$

$n = 7:$

$$\begin{aligned} a_7 &= 2{,}5(1 - 0{,}0012 \cdot a_6) \cdot a_6 \\ &= 501{,}376... \end{aligned}$$

$n = 8:$

$$\begin{aligned} a_8 &= 2{,}5(1 - 0{,}0012 \cdot a_7) \cdot a_7 \\ &= 499{,}306... \end{aligned}$$

$n = 9:$
$$a_9 = 2{,}5(1 - 0{,}0012 \cdot a_8) \cdot a_8$$
$$= 500{,}345...$$

$n = 10:$
$$a_{10} = 2{,}5(1 - 0{,}0012 \cdot a_9) \cdot a_9$$
$$= 499{,}826...$$

Peurakanta vakiintuu n. 500 yksilöön.

1. Harjoituskoe

1. a)

$$8y = 4x + 12 \quad |:8$$
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$-5x + 6y = -5$$
$$6y = 5x - 5 \quad |:6$$
$$y = \frac{5}{6}x - \frac{5}{6}$$

Muodostetaan yhtälöpari:
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6}$$
$$-\frac{1}{3}x = -2\frac{1}{3} \quad \left|:\left(-\frac{1}{3}\right)\right.$$
$$x = 7$$

Kun $x = 7$, niin
$$y = \frac{1}{2} \cdot 7 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Siis leikkauspiste (7, 5)

b) Muodostetaan yhtälöpari:
$$\begin{cases} -4x + 20y = -5 & |\cdot 5 \\ -5x + 15y = -10 & |\cdot(-4) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} -20x + 100y = -25 \\ 20x - 60y = 40 \end{cases} \\ + & \\ \hline & 40y = 15 \\ & y = \frac{3}{8} \end{array}$$

Kun $y = \frac{3}{8}$, niin
$$-4x + 20 \cdot \frac{3}{8} = -5$$
$$-4x + \frac{60}{8} = -5$$
$$-4x = -12\frac{1}{2} \quad |:(-4)$$
$$x = 3\frac{1}{8}$$

Vastaus:
a) (7, 5)
b) $x = 3\frac{1}{8}$, $y = \frac{3}{8}$

2. Jono 20, 17, 14, 11, 8

Aritmeettinen jono
$a_1 = 20$, $d = -3$

Analyyttinen sääntö:
$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$
$$= 20 + (n-1) \cdot (-3)$$
$$= 20 - 3n + 3$$
$$= -3n + 23$$

Rekursiivinen sääntö:
Seuraava jäsen saadaan vähentämällä edellisestä luku 3.
$$a_n = a_{n-1} - 3$$
$$a_1 = 20,\ n = 2, 3, ...$$

3. Paraabelin yhtälö $y = ax^2 + bx + c$

Sijoitetaan annetut pisteet yhtälöön:

$$(-1,-2):\quad -2 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c$$
$$(2,1):\quad 1 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c$$
$$(3,-10):\quad -10 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c$$

Saadaan yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} a - b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a + 3b + c = -10 \end{cases}$$

Muodostetaan kaksi yhtälöparia ja eliminoidaan niistä sama tuntematon c.

(1)

$$\begin{cases} a - b + c = -2 \quad |\cdot(-1) \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -a + b - c = 2 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases}$$
$$3a + 3b = 3$$

(2)

$$\begin{cases} a - b + c = -2 \quad |\cdot(-1) \\ 9a + 3b + c = -10 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -a + b - c = 2 \\ 9a + 3b + c = -10 \end{cases}$$
$$8a + 4b = -8$$

Saadaan yhtälöpari:

$$\begin{cases} 3a + 3b = 3 \quad |\cdot 4 \\ 8a + 4b = -8 \quad |\cdot(-3) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 12a + 12b = 12 \\ -24a - 12b = 24 \end{cases}$$
$$-12a = 36$$
$$a = -3$$

Kun $a = -3$, niin

$$3\cdot(-3) + 3b = 3$$
$$-9 + 3b = 3$$
$$3b = 12 \quad |:3$$
$$b = 4$$

$$-3 - 4 + c = -2$$
$$-7 + c = -2$$
$$c = 5$$

Paraabeli on $y = -3x^2 + 4x + 5$

Vastaus: $y = -3x^2 + 4x + 5$

4. a) 1, 4, 7, …

Aritmeettinen jono

$a_1 = 1$

$d = 4 - 1 = 7 - 4 = 3$

Yleinen jäsen

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$
$$= 1 + (n-1)\cdot 3$$
$$= 1 + 3n - 3$$
$$= 3n - 2$$

Lasketaan, milloin $a_n = 250$.

$$3n - 2 = 250$$
$$3n = 252 \quad |:3$$
$$n = 84$$

Siis $a_{84} = 250$

b) $3,\ 4\frac{1}{2},\ 6\frac{3}{4},\ ...$

Geometrinen jono

$a_1 = 3$

$$q = \frac{4\frac{1}{2}}{3} = \frac{6\frac{3}{4}}{4\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Yleinen jäsen

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$= 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

6. termi:

$$a_6 = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{6-1} = 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{5} = 22{,}78125 \approx 22{,}8$$

15. ensimmäisen termin summa:

$$S_{15} = 3 \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{15}}{1-\frac{3}{2}} = 2621{,}363 \approx 2621{,}4$$

Vastaus:
a) 84. jäsen
b) $a_6 \approx 22{,}8$ ja $S_{15} \approx 2621{,}4$

5. 1. päivä $a_1 = 45$ (min)
2. päivä $a_2 = 1{,}08 \cdot 45$ (min)
3. päivä $a_3 = 1{,}08^2 \cdot 45$ (min)
$\vdots$
n. päivä $a_n = 1{,}08^{n-1} \cdot 45$ (min)

a) Jonon 15. jäsen:

$$a_{15} = 1{,}08^{15-1} \cdot 45\,\text{min}$$
$$= 1{,}08^{14} \cdot 45\,\text{min}$$
$$= 132{,}173...\,\text{min}$$
$$\approx 132\,\text{min}$$

b) Kuntoiluun käytetään aikaa 30 päivän aikana:

$$S_{30} = 45 \cdot \frac{1-1{,}08^{30}}{1-1{,}08}$$
$$= 5097{,}74...$$
$$\approx 5100\,\text{min (85h)}$$

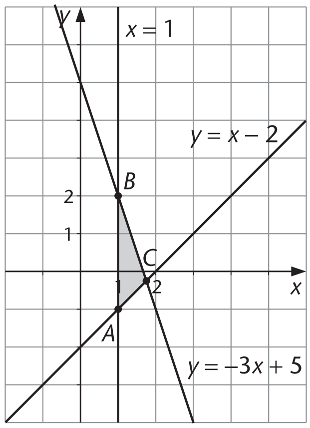
Vastaus:
a) 132 min
b) 85 h

6.

$3x + y \le 5$ $\qquad -x + y + 2 \ge 0$

$y \le -3x + 5$ $\qquad y \ge x - 2$

$x \ge 1$



Lasketaan muodostuneen monikulmion kärkipisteet, sillä optimiarvot löytyvät kärkipisteistä.

A: Suorien $x = 1$ ja $y = x - 2$ leikkauspiste.
$y = 1 - 2 = -1$
Siis A = (1, −1)

B: Suorien $x = 1$ ja $y = -3x + 5$ leikkauspiste. $y = -3 \cdot 1 + 5 = 2$
Siis B = (1, 2)

C: Suorien $y = -3x + 5$ ja $y = x - 2$ leikkauspiste.

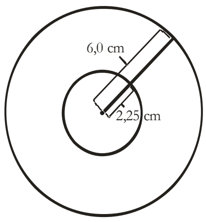
$$-3x + 5 = x - 2$$
$$-4x = -7 \quad \big| :(-4)$$
$$x = \frac{7}{4} = 1{,}75$$
$$y = \frac{7}{4} - 2 = -\frac{1}{4} = -0{,}25$$

Siis C = (1,75; −0,25)

Kärkipiste	Lausekkeen $11x-5y$ arvo
$(1, -1)$	$11\cdot 1-5\cdot(-1)=16$
$(1, 2)$	$11\cdot 1-5\cdot 2=1$ pienin
$(1{,}75; -0{,}25)$	$11\cdot\frac{7}{4}-5\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=20{,}5$ suurin

Vastaus:
Suurin arvo 20,5 pisteessä (1,75; −0,25),
pienin arvo 1 pisteessä (1, 2)

7. Rullan ulkosäde 6,0 cm
sisäsäde 2,25 cm



Rullassa olevan paperin yhteispaksuus
$6{,}0\,\text{cm}-2{,}25\,\text{cm}=3{,}75\,\text{cm}=37{,}5\,\text{mm}$

Rullassa on $\frac{37{,}5}{0{,}1}=375$ kerrosta.

Sisimmän paperikerroksen pituus:
$2\pi\cdot 2{,}25\,\text{cm}=14{,}137...\text{ cm}$

Uloimman kerroksen pituus:
$2\pi\cdot 6{,}0\,\text{cm}=37{,}699...\text{ cm}$

Paperikerroksen säde on aina saman verran (0,1 mm) suurempi kuin edellisen säde, joten kerroksen pituus on aina saman verran ($0{,}2\pi$ mm) suurempi kuin edellisen kerroksen pituus. Pituudet muodostavat siis aritmeettisen jonon.

Paperin kokonaispituus:

$$S=375\cdot\frac{14{,}137...+37{,}699...}{2}\text{ cm}$$
$$=9719{,}25...\text{ cm}$$
$$\approx 9700\text{ cm}\ \ (97\,\text{m})$$

Vastaus: 97 m

2. Harjoituskoe

1. a) $4n^2-1,\ n=1,2,...$

$a_1=4\cdot 1^2-1=3$

$a_2=4\cdot 2^2-1=4\cdot 4-1=15$

$a_3=4\cdot 3^2-1=4\cdot 9-1=35$

$a_4=4\cdot 4^2-1=4\cdot 16-1=63$

$a_5=4\cdot 5^2-1=4\cdot 25-1=99$

b) Aritmeettinen jono, $d=1$

$a_1=-7$

$a_2=-7-1=-8$

$a_3=-7-2\cdot 1=-9$

$a_4=-7-3\cdot 1=-10$

$a_5=-7-4\cdot 1=-11$

c) Geometrinen jono, $q=-\frac{1}{3}$

$a_1=\frac{1}{2}$

$a_2=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{6}$

$a_3=-\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{18}$

$a_4=\frac{1}{18}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{54}$

$a_5=-\frac{1}{54}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{162}$

2. 1. viikko $a_1=100$
2. viikko $a_2=1{,}25\cdot 100-20=105$
3. viikko $a_3=1{,}25\cdot 105-20=111{,}25$
4. viikko $a_4=1{,}25\cdot 111{,}25-20=119{,}0625$
5. viikko $a_5=1{,}25\cdot 119{,}0625-20=128{,}828125$
6. viikko $a_6=1{,}25\cdot 128{,}828125-20$
$=141{,}0351563\approx 141$ (henkilöä)

Taulukon perusteella saadaan jono rekursiivisessa muodossa

$a_n = 1{,}25 \cdot a_{n-1} - 20$

$a_1 = 100$, $n = 2, 3, \ldots$

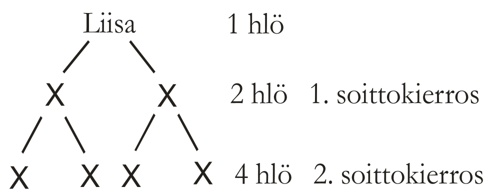
Vastaus:

$a_n = 1{,}25 \cdot a_{n-1}$

$a_1 = 100$, $n = 2, 3, \ldots$

6 viikon kuluttua 141 henkilöä sairaana.

3.



Huomataan, että kuulijoiden määrä kaksinkertaistuu aina seuraavalla soittokerralla. Muodostetaan geometrinen jono.

$a_1 = 2$, $q = 2$

Yleinen jäsen $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

a) 10. kierroksella $n = 10$

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2046$$

b) $S_n > 5020$

Lasketaan ensin, milloin $S_n = 5020$

$$2 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 5020$$

$$2 \cdot \frac{1-2^n}{-1} = 5020 \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$2(1-2^n) = -5020 \quad \Big| :2$$

$$1 - 2^n = -2510$$

$$-2^n = -2511 \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$2^n = 2511$$

$$n \lg 2 = \lg 2511 \quad \Big| : \lg 2$$

$$n = \frac{\lg 2511}{\lg 2}$$

$$n = 11{,}294\ldots$$

Jos $n = 11$, niin

$$S_{11} = 2 \cdot \frac{1-2^{11}}{-1} = 4095 < 5020$$

Jos $n = 12$, niin

$$S_{12} = 2 \cdot \frac{1-2^{12}}{-1} = 8190 > 5020$$

Tarvitaan siis 12 soittokierrosta.

Vastaus:

a) 2046 henkilöä

b) vähintään 12 soittokierrosta

4. Laina 72000 (€) Korko 3,3 %

$\frac{1}{2}$ vuoden korko: $\frac{3{,}3}{2}\% = 1{,}65\%$

$\frac{1}{2}$ vuoden kuluttua:

Lainaa: $72000 - 4500$ (€) $= 67500$ (€)

Korkoa: $0{,}0165 \cdot 72000 = 1188$ (€)

1 vuoden kuluttua:

Lainaa: $72000 - 2 \cdot 4500$ (€) $= 63000$ (€)

Korkoa: $0{,}0165 \cdot 67500$ (€) $= 1113{,}75$ (€)

1 vuodessa lainaa lyhennetään

$2 \cdot 4500$ € $= 9000$ €

Lainan takaisinmaksu siis kestää

$\frac{72000}{9000} = 8$ (vuotta)

Korot muodostavat jonon:

1. $0{,}0165 \cdot 72000$
2. $0{,}0165 \cdot (72000 - 4500)$
   $= 0{,}0165 \cdot 72000 - 0{,}0165 \cdot 4500$
3. $0{,}0165 \cdot (72000 - 2 \cdot 4500)$
   $= 0{,}0165 \cdot 72000 - 0{,}0165 \cdot 2 \cdot 4500$

Korot muodostavat aritmeettisen, jossa

$a_1 = 0{,}0165 \cdot 72000 = 1188$ ja

$d = -0{,}0165 \cdot 4500 = -74{,}25$.

Korkojen maksua on $2 \cdot 8 = 16$ kertaa.
Viimeinen koron osuus on
$0{,}0165 \cdot 4500 = 74{,}25 = a_{16}$

Korko maksetaan yhteensä:
$$S_{16} = 16 \cdot \frac{1188 + 74{,}25}{2} \text{ €} = 10098 \text{ €}$$

Vastaus: 10098 €, takaisinmaksu kestää 8 v.

5. Merkitään x = munkit (kpl)
y = jaffa (kpl)
z = kivennäisvesi (kpl)

	Hinta	Pullot	Hinta
Munkki x	1,50		1,60
Jaffa y	2,20	y	2,70
Vesi z	2,00	z	2,50
Tulot	122,00	37	143,50

Saadaan yhtälöt:
$$\begin{cases} 1{,}50x + 2{,}20y + 2{,}00z = 122{,}00 \\ y + z = 37 \\ 1{,}60x + 2{,}70y + 2{,}50z = 143{,}50 \end{cases}$$

$$y + z = 37$$
$$z = 37 - y$$

Sijoitetaan $z = 37 - y$ muihin yhtälöihin:
$$\begin{cases} 1{,}50x + 2{,}20y + 2{,}00(37 - y) = 122{,}00 \\ 1{,}60x + 2{,}70y + 2{,}50(37 - y) = 143{,}50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}50x + 2{,}20y + 74 - 2{,}00y = 122{,}00 \\ 1{,}60x + 2{,}70y + 92{,}5 - 2{,}50y = 143{,}50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}50x + 0{,}20y = 48 \quad | \cdot (-1) \\ 1{,}60x + 0{,}20y = 51 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -1{,}50x - 0{,}20y = -48 \\ 1{,}60x + 0{,}20y = 51 \end{cases}$$
$$0{,}10x = 3$$
$$x = 30$$

Kun $x = 30$, niin
$1{,}60 \cdot 30 + 0{,}20y = 51$
$$0{,}20y = 3 \quad |:0{,}20$$
$$y = 15$$

Kun $y = 15$, niin
$z = 37 - 15 = 22$

Vastaus: 30 munkkia

6. Merkitään x = lanka A (m)
y = lanka B (m)

	Lanka A x (m)	Lanka B x (m)	yht. min (g)
Villa	20	10	14
Keinokuitu	20	60	30
Hinta (€)	30	20	

Optimoitava lauseke: kulut = $30x + 20y$

Rajoittavat ehdot:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 20x + 10y \geq 14 \\ 20x + 60y \geq 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq -2x + 1{,}4 \\ y \geq -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

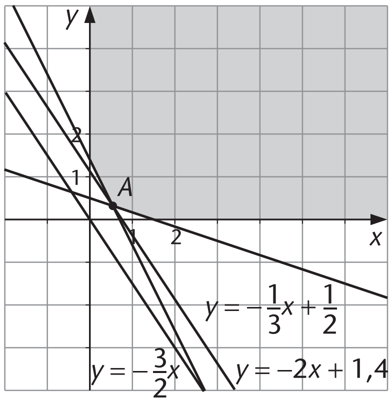
Piirretään suotuisa alue. Lasketaan suorien nollakohdat:

$$-2x + 1{,}4 = 0$$
$$-2x = 1{,}4 \quad |:(-2)$$
$$x = 0{,}7$$

$$-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}=0$$

$$-\frac{1}{3}x=-\frac{1}{2}\quad \Big| :\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$x=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$$



Optimoitavan lausekkeen pienin arvo etsitään tutkimalla suorien $3x+2y=c$ joukkoa. Kaikki tällaiset suorat ovat yhdensuuntaisia suoran $30x+20y=0$ kanssa eli $y=-\frac{3}{2}x$.
Pienin arvo saadaan kuvan mukaan pisteessä A: Suorien $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$ ja $y=-2x+1,4$ leikkauspiste.

$$-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}=-2x+1,4$$

$$1\frac{2}{3}x=0,9\quad \Big| :1\frac{2}{3}$$

$$x=0,54$$

Kun $x=0,54$, niin
$y=-2\cdot 0,54+1,4=0,32$.

Siis A = (0,54; 0,32)

Kulut ovat tällöin
$30\cdot 0,54+20\cdot 0,32=22,6$ (€)

Vastaus: Lanka A 0,54 m ja lanka B 0,32 m

3. Harjoituskoe

1. a) $a_n=6n-1$, $n=1,2,\ldots$

$$6n-1=276$$

$$6n=277\quad |:6$$

$$n=46,166\ldots$$

Koska n ei ole positiivinen kokonaisluku, niin 276 ei kuulu jonoon.

b) $a_n=-6+6(n-1)$, $n=1,2,\ldots$

$$-6+6(n-1)=276$$

$$-6+6n-6=276$$

$$6n=288\quad |:6$$

$$n=48$$

Koska n on positiivinen kokonaisluku, niin 276 kuuluu jonoon.

c) $a_n=-2\cdot 3^n$, $n=1,2,\ldots$

$$-2\cdot 3^n=276\quad |:(-2)$$

$$3^n=-138$$

Ei ratkaisua, sillä 3^n on aina positiivinen.
Luku 276 ei siis kuulu jonoon.

Vastaus:
a) ei kuulu
b) kuuluu
c) ei kuulu

2.

Kaupunki A	Kaupunki B
$a_1 = 47000$	$a_1 = 47000$
$d = -107$	$q = 1{,}015$
Aritmeettinen jono	Geometrinen jono
Yleinen termi	Yleinen termi
$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$= 47000 + (n-1)\cdot(-107)$	$= 47000 \cdot 1{,}015^{n-1}$
$= 47000 - 107n + 107$	
$= -107n + 47107$	

a) 15 vuoden kuluttua $n = 16$.

Kaupunki A	Kaupunki B
$a_{16} = -107\cdot 16 + 47107$	$a_{16} = 47000 \cdot 1{,}015^{16-1}$
$= 45395$	$= 47000 \cdot 1{,}015^{15}$
≈ 45400	$= 58760{,}907...$
	≈ 58800

b)

$$\frac{58760{,}907... - 47000}{47000}\cdot 100\,\% = 25{,}02...\% \approx 25\,\%$$

Vastaus:
a) A: 45400 B: 58800
b) 25 %

3. Merkitään x = Ahdin osuus (€)
y = Riston osuus (€)
z = Veijon osuus (€)

$$\begin{cases} x + y + z = 840 \\ y = 1{,}20x \\ y = 0{,}60z \end{cases}$$

Sijoitetaan $y = 1{,}20x$ kahteen muuhun yhtälöön.

$$\begin{cases} x + 1{,}20x + z = 840 \\ 1{,}20x = 0{,}60z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2{,}20x + z = 840 & |\cdot 0{,}60 \\ 1{,}20x - 0{,}60z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 1{,}32x + 0{,}60z = 504 \\ 1{,}20x - 0{,}60z = 0 \end{cases} \\ \hline 2{,}52x = 504 \\ x = 200 \end{array}$$

Veijon osuus

$$z = \frac{y}{0{,}60} = \frac{1{,}20x}{0{,}60} = \frac{1{,}20\cdot 200}{0{,}60} = 400$$

Vastaus: 400 €

4. 50 penkkiriviä
$a_1 = 19$
$d = 2$
Aritmeettinen jono (penkit)

a) $a_{50} = a_1 + (50-1)\cdot d = 19 + 49\cdot 2 = 117$

$$S_{50} = 50\cdot\frac{19+117}{2} = 3400 \text{ (penkkiä)}$$

b) Lasketaan, milloin $S_n = 1056$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ &= 19 + (n-1)\cdot 2 \\ &= 19 + 2n - 2 \\ &= 2n + 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= 1056 \\ n\cdot\frac{19 + 2n + 17}{2} &= 1056 \quad |\cdot 2 \\ n(2n+36) &= 2112 \\ 2n^2 + 36n - 2112 &= 0 \quad |:2 \\ n^2 + 18n - 1056 &= 0 \end{aligned}$$

$$n=\frac{-18\pm\sqrt{18^2-4\cdot 1\cdot(-1056)}}{2\cdot 1}$$

$$n=\frac{-18\pm\sqrt{4548}}{2}$$

$n=24{,}719...$ tai $n=-42{,}719...$

joista $n=-42{,}719...$ ei käy, koska $n>0$.

Paikkanumero 1056 sijaitsee siis 25. rivillä. Lasketaan ensin, montako paikkaa on 24 ensimmäisellä rivillä.

$$S_{24}=24\cdot\frac{19+a_{24}}{2}=24\cdot\frac{19+2\cdot 24+17}{2}=1008$$

Yli jää siis $1056-1008=48$ (paikkaa)

Siis paikkanumero 1056 on 25. rivillä 48. paikka vasemmalta lukien.

Vastaus: a) 3400 penkkiä
b) 25. rivillä, 48. paikka vasemmalta

5. **Huom! Kirjan 1. painoksessa on virhe tehtävänannossa. Valmistukseen käytettävä kokonaisaika on 176 h (ei 160 h).**

Merkitään x = tuolit (kpl)
y = pöydät (kpl)

	Valmistus (h)	Maalaus (h)	Hinta (€)
Pöytä y	9,6	6	150
Tuoli x	8	3	100
Yhteensä max	176	90	

Optimoitava lauseke
tulot $=100x+150y$

Rajoittavat ehdot:

$$\begin{cases} x\ge 0\\ y\ge 0\\ 8x+9{,}6y\le 176\\ 3x+6y\le 90\end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge 0\\ y\ge 0\\ y\le -\frac{5}{6}x+18\frac{1}{3}\\ y\le -\frac{1}{2}x+15\end{cases}$$

Piirretään suorat ja etsitään suotuisa alue. Suorien nollakohdat (piirtämistä varten):

$$-\frac{5}{6}x+18\frac{1}{3}=0$$

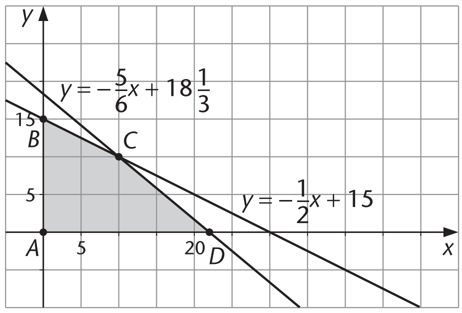
$$-\frac{5}{6}x=-18\frac{1}{3}\quad \Big| :\left(-\frac{5}{6}\right)$$

$$x=22$$

$$-\frac{1}{2}x+15=0$$

$$-\frac{1}{2}x=-15\quad \Big| :\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x=30$$



Lasketaan muodostuneen monikulmion kärkipisteet, sillä optimiarvo löytyy kärkipisteistä.

A = (0, 0)

B: Suoran $y=-\frac{1}{2}x+15$ y-akselin leikkauskohta.

B = (0, 15)

C: Suorien $y=-\frac{5}{6}x+18\frac{1}{3}$ ja $y=-\frac{1}{2}x+15$ leikkauspiste.

$$-\frac{5}{6}x+18\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}x+15$$
$$-\frac{1}{3}x=-3\frac{1}{3} \quad \Big|:\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$x=10$$

Kun $x=10$, niin
$$y=-\frac{1}{2}\cdot 10+15=10$$
Siis C = (10, 10)

D: Suoran $y=-\frac{5}{6}x+18\frac{1}{3}$ nollakohta.
D = (22, 0)

Lasketaan tulojen $100x+150y$ arvot kärkipisteissä.

Kärkipisteet	$150x+150y$
(0, 0)	$100\cdot 0+150\cdot 0=0$
(0, 15)	$100\cdot 0+150\cdot 15=2250$
(10, 10)	$100\cdot 10+150\cdot 10=2500$ suurin
(22, 0)	$100\cdot 22+150\cdot 0=2200$

Suurimmat tulot saadaan pisteessä (10, 10) eli pöytiä valmistetaan 10 kpl ja tuoleja 10 kpl.

Vastaus: 10 kpl pöytiä, 10 kpl tuoleja

6. 1. vuotispäivä 100 (€)
2. vuotispäivä $1{,}025\cdot 100+100$ (€)
3. vuotispäivä $1{,}025^2\cdot 100+1{,}025\cdot 100+100$
⋮
18. vuotispäivä $1{,}025^{17}\cdot 100+...+1{,}025\cdot 100$
(viimeistä talletusta ei tehdä)

Geometrinen summa
$n=17$, $a_1=1{,}025\cdot 100$, $q=1{,}025$

$$S_{17}=1{,}025\cdot 100\cdot\frac{1-1{,}025^{17}}{1-1{,}025}$$
$$=2138{,}634...$$
$$\approx 2138{,}63\ (€)$$

Vastaus: 2138, 63 €

7. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+1\frac{1}{3}+2\frac{2}{3}+...$ $\qquad q=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}=2$

Geometrinen summa
$q=2$, $a_1=\frac{1}{3}$

$S_n>3{,}7\cdot 10^{14}$

Lasketaan ensin, milloin $S_n=3{,}7\cdot 10^{14}$.

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1-2^n}{1-2}=3{,}7\cdot 10^{14}$$
$$\frac{1-2^n}{-3}=3{,}7\cdot 10^{14} \quad |\cdot(-3)$$
$$1-2^n=-10{,}2\cdot 10^{14}$$
$$-2^n=-1{,}02\cdot 10^{15} \quad |\cdot(-1)$$
$$2^n=1{,}02\cdot 10^{15} \quad |\lg$$
$$n\lg 2=\lg\left(1{,}02\cdot 10^{15}\right)$$
$$n=\frac{\lg\left(1{,}02\cdot 10^{15}\right)}{\lg 2}$$
$$n=49{,}857...$$

Jos $n = 49$, niin

$$S_{49} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - 2^{49}}{-1} = 1{,}87... \cdot 10^{14} < 3{,}7 \cdot 10^{14}$$

Jos $n = 50$, niin

$$S_{50} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - 2^{50}}{-1} = 3{,}75... \cdot 10^{14} > 3{,}7 \cdot 10^{14}$$

On siis laskettava vähintään 50 termiä, jotta summa ylittää $3{,}7 \cdot 10^{14}$.

Vastaus: vähintään 50 termiä