

1.1 Lukujoukot ja laskutoimitukset

1. a) $-(-5) = 5$

b) $-(7,5) = -7,5$

c) $-(-\frac{3}{8}) = \frac{3}{8}$

d) $-(\pi) = -\pi$

2. a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{-10}{5} = -\frac{10}{5} = -2$

c) $-\frac{8}{5}$

d) $-\frac{1}{7}$

3. a) $1\frac{5}{9}$

b) 0,06

c) $\sqrt{9} = 3$

d) $-\pi$

4. a) Luvun -25 vastaluku on $-(-25)=25$.

Luvun $\frac{4}{9}$ vastaluku on $-\frac{4}{9}$.

b) Luvun $-25 = -\frac{25}{1}$ käänteisluku on $-\frac{1}{25}$.

Luvun $\frac{4}{9}$ käänteisluku on $\frac{9}{4}$.

c) $|-25| = 25$,

$$\left|\frac{4}{9}\right| = \frac{4}{9}$$

d) $\sqrt{-25}$ ei ole määritelty, koska juuretettava $-25 < 0$.

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

5. a) $2,449 \dots \approx 2,45$

b) ei määritelty, koska juuretettava $-3 < 0$

c) $\frac{3}{4} = 0,75$

6. a) 3, sillä $3^2 = 9$.

b) Ei voi laskea, sillä $-16 < 0$.

c) -5 , sillä $5^2 = 25$

7. a) $\sqrt[3]{1} = 1$, koska $1^3 = 1$

b) $\sqrt[3]{-64} = -4$, koska $(-4)^3 = -64$

c) $-\sqrt[3]{27} = -3$, koska $3^3 = 27$

d) $(\sqrt[3]{-5})^3 = -5$

8. a) $|-1,5 - 4,5| \cdot 2 - 5$

$$= |-6| \cdot 2 - 5$$

$$= 6 \cdot 2 - 5$$

$$= 12 - 5$$

$$= 7$$

b) $2 \cdot |-\pi| - (-7) = 2\pi + 7$

9. a)
$$\begin{aligned} & -(-\sqrt{25}) + 3 \cdot |-\sqrt{9}| \\ & = \sqrt{25} + 3 \cdot \sqrt{9} \\ & = 5 + 3 \cdot 3 \\ & = 5 + 9 \\ & = 14 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} & |-\sqrt{81} - \sqrt{4}| - (-5) \\ & = |-9 - 2| + 5 \\ & = |-11| + 5 \\ & = 11 + 5 \\ & = 16 \end{aligned}$$

10. a) $a + 1, a + 2, a + 3$

b) $a - 1, a - 2, a - 3$

11. $6 = 2 \cdot 3$ ei ole alkuluku
 7 on alkuluku
 $-3 < 1$ ei ole alkuluku
 11 on alkuluku
 $15 = 3 \cdot 5$ ei ole alkuluku
 $0 < 1$ ei ole alkuluku

Alkulukuja ovat 7 ja 11.

12. a) $35 = 5 \cdot 7$

b) $21 = 3 \cdot 7$

c) $50 = 5 \cdot 5 \cdot 2$

13. a) $30 = 3 \cdot 10 = 3 \cdot 2 \cdot 5$

$$42 = 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

b) Molemmat ovat jaollisia yhteisillä tulon tekijöillä.

Tulojen tekijöistä yhteisiä ovat: 2, 3 ja $2 \cdot 3 = 6$.

14. Kirjoitetaan luvut alkulukujen tuloina.

$$\left. \begin{array}{l} 24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ 36 = 6 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Tulojen tekijöistä yhteisiä ovat:} \\ 2, 3, 2 \cdot 3 = 6, 2 \cdot 2 = 4 \text{ ja } 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12. \end{array}$$

15. a) 0

b) $-3 - 5 = -8$

c) $(8 - 6) - (15 - 1) = 2 - 14 = -12$

16. a) $-4 - 5 = -9$

b) $-4 \cdot 5 = -20$

c) $2 - 6 - 3 = -7$

17. a)

$$\begin{aligned} & -32 - \{-16 - [13 - (2 - 1)]\} \\ & = -32 - [-16 - (13 - 1)] \\ & = -32 - (-28) = -4 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & -\{24 - [14 + 7 - (-5 - 3)]\} \\ & = -\{24 - [14 + 7 + 8]\} \\ & = -(24 - 29) = 5 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & \{5 - [6 - (-1000 - 200)]\} + (-1000 - 200) \\ & = \{5 - (6 + 1200)\} - 1200 \\ & = -1201 - 1200 = -2401 \end{aligned}$$

18. a) $-35 - \{35 - [20 - (5 - 20) + 5] - 5\}$
 $= -35 - \{35 - [20 - (-15) + 5] - 5\}$
 $= -35 - \{35 - [40] - 5\}$
 $= -35 - \{-10\}$
 $= -35 + 10$
 $= -25$

b) $1,2 + 0,1(0,3 - 5,3)(1,5 - 21,5)$
 $= 1,2 + 0,1(-5)(-20)$
 $= 1,2 + (-0,5)(-20)$
 $= 1,2 + 10$
 $= 11,2$

19. a) $5 \cdot 765 + 5 \cdot 235$
 $= 5(765 + 235)$
 $= 5 \cdot 1000$
 $= 5000$

b) $7 \cdot 362 - 7 \cdot 162$
 $= 7(362 - 162)$
 $= 7 \cdot 200$
 $= 1400$

20. a) $4 \cdot 2347 + 4 \cdot (-2340)$
 $= 4(2347 - 2340)$
 $= 4 \cdot 7$
 $= 28$

b) $14 \cdot 458 + 14 \cdot 142 - 14 \cdot 598$
 $= 14(458 + 142 - 598)$
 $= 14 \cdot 2$
 $= 28$

21. a) $3 \cdot 189 - 9 \cdot 61$
 $= 3(189 - 3 \cdot 61)$
 $= 3 \cdot 6$
 $= 18$

b) $24 \cdot 150 - 12 \cdot 250 + 36 \cdot (-10)$
 $= 12 \cdot 5(2 \cdot 30 - 50 - 6)$
 $= 60(60 - 50 - 6)$
 $= 60 \cdot 4$
 $= 240$

22. a) 0

b) $\frac{6}{5}$

c) $\sqrt{36} = 6$

23. a) $\frac{3}{8}$

b) $\left| -\frac{3}{8} \right| = \frac{3}{8}$

24. a) $32 = 4 \cdot 8 = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

b) $54 = 6 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

c) $120 = 12 \cdot 10 = 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$

$$\begin{aligned} 25. \quad a) & |6 + 4 : 2| + 7 - (-\sqrt{36}) \\ & = |6 + 2| + 7 - (-6) \\ & = |8| + 7 + 6 \\ & = 8 + 7 + 6 \\ & = 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) & -\{10 - [2 \cdot 6 - 4(15 - 20) - 2] + 1\} \\ & = -\{10 - [12 - 4(-5) - 2] + 1\} \\ & = -\{10 - [12 + 20 - 2] + 1\} \\ & = -\{10 - [30] + 1\} \\ & = -\{-19\} \\ & = 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26. \quad a) & 9 \cdot 1235 - 9 \cdot 1230 \\ & = 9(1235 - 1230) \\ & = 9 \cdot 5 \\ & = 45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) & 5 \cdot 123 + 5 \cdot (-23) - 5 \cdot 97 \\ & = 5(123 - 23 - 97) \\ & = 5 \cdot 3 \\ & = 15 \end{aligned}$$

1.2 Murtoluvuilla laskeminen

$$27. \quad \text{a) } \frac{15}{3} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\text{b) } \frac{-30}{4} = \frac{-15}{2} = -7\frac{1}{2}$$

$$28. \quad \text{a) } \frac{5}{6} = \frac{10}{12} \text{ ja } \frac{7}{12}$$

$$\text{b) } \frac{56}{96} \text{ ja } \frac{7}{3} = \frac{224}{96}$$

$$\text{c) } \frac{2}{3} = \frac{4}{6} \text{ ja } \frac{13}{2} = \frac{39}{6}$$

$$29. \quad a) \quad \frac{12}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 2}{5} = 2\frac{2}{5}$$

$$\frac{-16}{6} = -\frac{2 \cdot 6 + 4}{6} = -2\frac{4}{6} = -2\frac{2}{3}$$

$$\frac{-15}{-4} = \frac{15}{4} = \frac{3 \cdot 4 + 3}{4} = 3\frac{3}{4}$$

$$b) \quad 4\frac{1}{2} = \frac{4 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$-7\frac{9}{10} = -\frac{7 \cdot 10 + 9}{10} = -\frac{79}{10}$$

$$6\frac{11}{46} = \frac{6 \cdot 46 + 11}{46} = \frac{287}{46}$$

$$30. \quad a) \quad \frac{5+4}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

$$b) \quad \frac{-2-1}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$c) \quad \frac{-51}{11} - \frac{40}{11} = \frac{-51-40}{11} = \frac{-91}{11} = -8\frac{3}{11}$$

$$31. \quad a) \frac{6^{(2)}}{8} + \frac{7}{4} = \frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$$

$$b) \frac{11)16}{3} - \frac{3)7}{11} = \frac{176}{33} - \frac{21}{33} = \frac{155}{33} = 4\frac{23}{33}$$

$$c) -\frac{1}{6} - \frac{3)5}{2} = \frac{-1-15}{6} = \frac{16^{(2)}}{6} = \frac{-8}{3} = -2\frac{2}{3}$$

$$32. \quad a) \frac{5^{(5)}}{10} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$b) 5\frac{1}{6} - \frac{-1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{31 - (-1) + 1}{6} = \frac{31 + 1 + 1}{6} = \frac{33}{6} = 5\frac{1}{2}$$

$$c) \frac{2)3}{5} + \frac{10)3}{1} - \frac{5)3}{2} = \frac{6 + 30 - 15}{10} = \frac{9}{10}$$

$$33. \quad a) \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{7}{11}\right) = \frac{2 \cdot (-7)}{3 \cdot 11} = \frac{-14}{33}$$

$$b) \left(\frac{-5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{9}\right) = \frac{(-5) \cdot (-3)}{4 \cdot 9} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

tai

$$\left(\frac{-5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3^{(3)}}{9}\right) = \frac{(-5) \cdot (-1)}{4 \cdot 3} = \frac{5}{12}$$

$$c) 4 \cdot 5\frac{6}{7} = 4 \cdot \frac{41}{7} = \frac{164}{7} = 23\frac{3}{7}$$

$$34. \quad a) \frac{2}{3} : \frac{7}{11} = \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{7} = \frac{2 \cdot 11}{3 \cdot 7} = \frac{22}{21} = 1\frac{1}{21}$$

$$b) \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{-13} = \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot (-13)} = -\frac{16}{39}$$

$$c) \frac{7}{8} : \frac{4}{1} = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7 \cdot 1}{8 \cdot 4} = \frac{7}{32}$$

$$35. \quad a) \quad 4 \cdot \frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{1} \cdot \frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8 \cdot 3}{8 \cdot 5} = -\frac{3}{5}$$

$$b) \quad 5\frac{5}{9} : 3\frac{1}{3} = \frac{50}{9} : \frac{10}{3} = \frac{50}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

$$c) \quad -2\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{9}{22}\right) : 3 = \frac{-11}{4} \cdot \frac{-9}{22} \cdot \frac{1}{3} = \frac{-1 \cdot (-9) \cdot 1}{4 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3}{8}$$

$$36. \quad a) \quad \frac{4}{7} + \frac{7}{4} = \frac{16 + 49}{28} = \frac{65}{28} = 2\frac{9}{28}$$

$$b) \quad \frac{4}{7} - \frac{7}{4} = \frac{16 - 49}{28} = \frac{-33}{28} = -1\frac{5}{28}$$

$$c) \quad \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{4} = 1$$

$$d) \quad \frac{4}{7} : \frac{7}{4} = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 4}{7 \cdot 7} = \frac{16}{49}$$

$$37. \quad a) \quad \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{18} + 3 \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{6} + \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{6} + \frac{35}{12} = \frac{4+35}{12} = \frac{39}{12} = 3 \frac{1}{4}$$

$$b) \quad \left(\frac{7}{9} - 3 \frac{2}{3} \right) : (-2) = \left(\frac{7}{9} - \frac{3 \cdot 11}{3} \right) : (-2) = \left(\frac{7}{9} - \frac{33}{9} \right) : (-2)$$

$$= \frac{-26}{9} \cdot \frac{1}{-2} = \frac{13}{9} = 1 \frac{4}{9}$$

$$38. \quad a) \quad 3 + \frac{100}{5} \cdot \frac{3}{100} = 3 + \frac{3}{5} = 3 \frac{3}{5}$$

$$b) \quad 7 - 7 : \frac{1}{5} = 7 - 7 \cdot 5 = 7 - 35 = -28$$

$$c) \quad 3 \frac{4}{3} + \frac{8}{5} \cdot \left(-\frac{1}{9} \right) : \frac{2}{9} = \frac{13}{3} + \frac{-8 \cdot 1}{5 \cdot 9} \cdot \frac{9}{2}$$

$$= \frac{13}{3} + \frac{-8}{45} \cdot \frac{9}{2} = \frac{5) 13}{3} - \frac{3) 4}{5}$$

$$= \frac{65-12}{15} = \frac{53}{15} = 3 \frac{8}{15}$$

$$39. \quad \text{a) } 4 + \frac{1}{7} \cdot \frac{21}{4} - \frac{1}{4} = \overset{4)}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{16 + 3 - 1}{4} = \frac{18}{4} = 4\frac{2}{4} = 4\frac{1}{2}$$

$$\text{b) } -1 - \frac{2}{3} : (-8) = -1 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{-1}{8}\right)$$

$$= \overset{24)}{-1} + \frac{2}{24} = \frac{-24 + 2}{24} = \frac{-22}{24} \overset{(2)}{=} \frac{-11}{12}$$

$$\text{c) } 3 \cdot \frac{1}{9} - 3\frac{1}{9} + \frac{1}{6} : \frac{6}{5} = \frac{3}{9} - \frac{28}{9} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$$

$$= \frac{3 - 28}{9} + \frac{5}{36} = \overset{4)}{-25} + \frac{5}{36} = \frac{-100 + 5}{36}$$

$$= \frac{-95}{36} = -2\frac{23}{36}$$

40. Luvut ovat: $-2\frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$ ja $1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$.

$$\text{a) } -\left(-\frac{7}{3}\right) + \left(-\frac{7}{5}\right) = \overset{5)}{3} \frac{7}{3} - \overset{3)}{5} \frac{7}{5} = \frac{35-21}{15} = \frac{14}{15}$$

$$\text{b) } -\frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{-3+5}{7} = \frac{2}{7}$$

41.

$$\frac{\frac{6}{5} + \left(-\frac{2}{3}\right)}{\frac{6}{5} - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\overset{3)}{5} \frac{6}{5} - \overset{5)}{3} \frac{2}{3}}{\overset{3)}{5} \frac{6}{5} + \overset{5)}{3} \frac{2}{3}} = \frac{\frac{18}{15} - \frac{10}{15}}{\frac{18}{15} + \frac{10}{15}}$$

$$= \frac{\frac{8}{15}}{\frac{28}{15}} = \frac{8}{15} \cdot \frac{15}{28} = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

$\frac{a-b}{a+b}$ on edellisen käänteisluku eli $\frac{7}{2}$

$$42. \quad a) \quad {}^4) \frac{8}{5} = \frac{32}{20} \text{ ja } \frac{-7}{20}$$

$$b) \quad \frac{28}{39} \text{ ja } {}^{13}) \frac{7}{3} = \frac{91}{39}$$

$$c) \quad {}^2) \frac{2}{17} = \frac{4}{34} \text{ ja } {}^{17}) \frac{3}{2} = \frac{51}{34}$$

$$43. \quad a) \quad \frac{4}{5} + 1\frac{3}{4} = \frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{7}{4} = \frac{16}{20} + \frac{35}{20} = \frac{16+35}{20} = \frac{51}{20} = 2\frac{11}{20}$$

$$b) \quad 2\frac{3}{4} - 3\frac{1}{2} = \frac{11}{4} - \frac{7}{2} = \frac{11}{4} - \frac{14}{4} = \frac{11-14}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$c) \quad -1\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 1$$

$$d) \quad \frac{4}{7} : 5\frac{3}{7} = \frac{4}{7} : \frac{38}{7} = \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{38} = \frac{4}{38} \stackrel{(2)}{=} \frac{2}{19}$$

$$44. \quad \text{a)} \quad 4\frac{1}{3} - 2\frac{3}{4} = \overset{4)}{\frac{13}{3}} - \overset{3)}{\frac{6}{4}} = \frac{52-18}{12} = \frac{34}{12} = 2\frac{5}{6}$$

$$\text{b)} \quad \frac{2}{9} - 9 : \frac{3}{5} = \frac{2}{9} - 9 \cdot \frac{5}{3} = \frac{2}{9} - \overset{3)}{45}$$

$$= \frac{2-135}{9} = \frac{-133}{9} = -14\frac{7}{9}$$

$$\text{c)} \quad \frac{7}{3} + \frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) : \frac{3}{2} = \frac{7}{3} + \frac{-8}{12} : \frac{3}{2} = \frac{7}{3} + \frac{-8}{12} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \overset{12)}{\frac{7}{3}} - \frac{16}{36} = \frac{84-16}{36} = \frac{68}{36} = 1\frac{8}{9}$$

$$45. \quad \text{a)} \quad \frac{1}{\left(2\frac{2}{3} + 1\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{8}{3} + \frac{5}{4}} = \frac{1}{\frac{32}{12} + \frac{15}{12}} = \frac{12}{47}$$

$$\text{b)} \quad \frac{1}{\left(2\frac{2}{3} - 1\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{8}{3} - \frac{5}{4}} = \frac{1}{\frac{32}{12} - \frac{15}{12}} = \frac{12}{17}$$

$$\text{c)} \quad \frac{12}{47} \cdot \frac{12}{17} = \frac{144}{799}$$

1.3 Potenssien laskusäännöt

46. a) $7^3 = 343$

b) $(-5)^3 = -125$

c) $-5^3 = -125$

d) a^2

e) $(-3a)^2 = 9a^2$

f) $-a^2$

47. a) 2187

b) -2187

c) 729

d) 729

48. a) $2 - 3^2 \cdot 3 = 2 - 9 \cdot 3 = 2 - 27 = -25$

b) $-5 + 5 : 2^2 = -5 + 5 : 4 = -\frac{5}{1} + \frac{5}{4} = \frac{-20 + 5}{4} = -\frac{15}{4} = -3\frac{3}{4}$

c) $-3^2 - (-3)^2 - (-3)^3 = -9 - 9 - (-27) = -18 + 27 = 9$

d) $-[-(-2)^3 - 2] : (-2)^3 = -[-(-8) - 2] : (-8) = -[6] : (-8) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

49. a) $x^4 \cdot x \cdot x^2 = x^{4+1+2} = x^7$

b) $a^2b \cdot ab^3 = a^{2+1} \cdot b^{1+3} = a^3b^4$

c) $\frac{y^{12}}{y^7} = y^{12-7} = y^5$

d) $\frac{x^3x^{10}}{x^{11}} = \frac{x^{3+10}}{x^{11}} = \frac{x^{13}}{x^{11}} = x^{13-11} = x^2$

50. a) $(2a)^4 = 2^4a^4 = 16a^4$

b) $(-3xy)^3 = (-3)^3x^3y^3 = -27x^3y^3$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$

d) $\left(\frac{-2x}{3}\right)^4 = \frac{(-2)^4x^4}{3^4} = \frac{16x^4}{81}$

51. a) $(y^2)^5 = y^{2 \cdot 5} = y^{10}$

b) $\left((x^3)^6\right)^2 = (x^{3 \cdot 6})^2 = x^{3 \cdot 6 \cdot 2} = x^{36}$

c) $-(-s^2)^3 = -(-1)^3(s^2)^3 = -(-1)s^{2 \cdot 3} = s^6$

52. a) $2^6 = 64$

b) $2^9 = 512$

c) $(-2)^9 = -512$

d) $-2^6 = -64$

53. a) $\frac{6a^5}{2a^2} = 3a^{5-2} = 3a^3$

b) $\left(\frac{15x^3}{5x}\right)^2 = \left(\frac{3}{1}x^{3-1}\right)^2 = (3x^2)^2 = 3^2(x^2)^2 = 9x^{2 \cdot 2} = 9x^4$

c) $\left(\frac{3y2y^4}{y^2}\right)^2 = \left(\frac{3 \cdot 2 \cdot y^{1+4}}{y^2}\right)^2 = \left(\frac{6y^5}{y^2}\right)^2 = (6y^{5-2})^2 = 6^2(y^3)^2 = 36y^6$

54. a) $1,9 \cdot 10^2 \cdot 10^3 = 1,9 \cdot 10^{2+3} = 1,9 \cdot 10^5 = 190000$

b) $\frac{2,5 \cdot 10^{18}}{10^{15}} = 2,5 \cdot 10^{18-15} = 2,5 \cdot 10^3 = 2500$

c) $\left(2\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$

d) $(a^3 a^2)^5 = (a^3)^5 (a^2)^5 = a^{3 \cdot 5} a^{2 \cdot 5} = a^{15} a^{10} = a^{15+10} = a^{25}$

e) $5^{12} \cdot \left(\frac{5^3}{5^8}\right)^2 = 5^{12} \cdot (5^{3-8})^2 = 5^{12} \cdot (5^{-5})^2 = 5^{12} \cdot 5^{-10}$
 $= 5^{12-10} = 5^2 = 25$

f) $\left(\frac{x^9}{x^3}\right)^4 = (x^{9-3})^4 = (x^6)^4 = x^{6 \cdot 4} = x^{24}$

55. a) $\frac{18^{10} a^{10} \cdot 2^3 a^3}{18^9 a^{10}} = \frac{18^{10} \cdot 8 \cdot a^{13}}{18^9 a^{10}}$
 $= 18^{10-9} \cdot 8 \cdot a^{13-10}$
 $= 18 \cdot 8 \cdot a^3$
 $= 144a^3$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{(-2)^3 x^3 \cdot (-2)^2 x^2}{2^5 x^5} &= \frac{(-2)^5 x^5}{2^5 x^5} \\ &= \frac{-32}{32} x^{5-5} = -1 \end{aligned}$$

$$56. \quad \text{a) } -2a^0 = -2 \cdot 1 = -2$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{1}\right)^1 = 3^1 = 3$$

$$\text{c) } 18^{-1} = \left(\frac{1}{18}\right)^1 = \frac{1}{18}$$

$$\text{d) } \frac{3^0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{e) } \left(1\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$57. \quad \text{a) } a^{-2-2} = a^{-4} = \frac{1}{a^4}$$

$$\text{b) } a^{-4-3} = a^{-7} = \frac{1}{a^7}$$

$$\text{c) } a^{4-(-3)} = a^7$$

$$\text{d) } k^{0-(-5)} = k^5$$

$$58. \quad a) \left(-\frac{4}{a}\right)^{-3} = \left(-\frac{a}{4}\right)^3 = (-1)^3 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^3 = -\frac{a^3}{4^3} = -\frac{a^3}{64}$$

$$b) 3a^2 \cdot \frac{1}{3}a^{-2} = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a^{-2} = a^2 a^{-2} = a^{2-2} = a^0 = 1$$

$$c) \frac{2t^3}{3t^9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{t^3}{t^9} = \frac{2}{3} \cdot t^{3-9} = \frac{2}{3} \cdot t^{-6} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^6 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t^6} = \frac{2}{3t^6}$$

$$d) \frac{3t^5}{t^7} \cdot \frac{7}{5} = 3 \frac{t^5}{t^7} \cdot \frac{7}{5} = 3t^{5-7} \cdot \frac{7}{5} = \frac{21}{5}t^{-2} = \frac{21}{5} \cdot \left(\frac{1}{t}\right)^2 = \frac{21}{5t^2}$$

$$e) \left(-1\frac{1}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{6}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{5}{6}\right)^3 = (-1)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = -\frac{5^3}{6^3} = -\frac{125}{216}$$

$$f) (-2a^2)^{-4} = (-2)^{-4} \cdot (a^2)^{-4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot a^{2 \cdot (-4)} = \frac{(-1)^4}{2^4} \cdot \frac{1}{a^8} = \frac{1}{16a^8}$$

$$59. \quad a) \frac{x^5 \cdot (x^{-2})^4}{x^{-3} \cdot x^{-7}} = \frac{x^5 \cdot x^{-2 \cdot 4}}{x^{-3-7}} = \frac{x^5 x^{-8}}{x^{-10}} = \frac{x^{-3}}{x^{-10}} = x^{-3-(-10)} = x^7$$

$$b) \left(\frac{a^3 b^{-2}}{a^{-2} b^{-9}}\right)^4 = \left(a^{3-(-2)} \cdot b^{-2-(-9)}\right)^4 = \left(a^5 b^7\right)^4 = (a^5)^4 \cdot (b^7)^4 = a^{20} b^{28}$$

$$c) \frac{(2^6)^2}{(-2^4)^3} = \frac{2^{6 \cdot 2}}{(-1)^3 \cdot 2^{4 \cdot 3}} = \frac{2^{12}}{-2^{12}} = -1$$

60. a) $(0,2 \cdot 5)^{2760} = 1^{2760} = 1$

b) $4^{102} \cdot 0,25^{104} = 4^{102} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{104} = 4^{102} \cdot 4^{-104}$
 $= 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} = 0,0625$

c) $\frac{10^{800}}{2(2 \cdot 5)^{798}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10^{800}}{10^{798}} = \frac{1}{2} \cdot 10^2 = 50$

61. a) $\frac{5^{600} \cdot 4^{599}}{20^{599}} = 5^{600} \cdot \left(\frac{4}{20}\right)^{599} = 5^{600} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{599} = \frac{5^{600}}{5^{599}} = 5^{600-599} = 5$

b) $\frac{3^{1200} \cdot 4^{1202}}{2^{1201} \cdot 6^{1201}} = \frac{3^{1200} \cdot 4^{1200} \cdot 4^2}{(2 \cdot 6)^{1201}} = \frac{(3 \cdot 4)^{1200} \cdot 16}{12^{1201}} = \frac{12^{1200} \cdot 16}{12^{1201}}$
 $= 12^{-1} \cdot 16 = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

62. Sievennetään ensin lauseketta:

$$\left(\frac{a^{-3m+1+\frac{1}{2}-m}}{a^{-4m}} \right)^{-2} = \left(a^{-4m+\frac{3}{2}-(-4m)} \right)^{-2}$$

$$= a^{-2 \cdot \frac{3}{2}} = a^{-3}$$

Kun $a = 3$, niin $a^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$

63. a) $\frac{2^{60}}{2^{57}} = 2^{60-57} = 2^3 = 8$

b) $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-2} = \frac{1}{3}$

c) $\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^8}{\left(-\frac{2}{3}\right)^6} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{8-6} = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = (-1)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

d) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = (-1)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$

$$64. \quad a) \quad 3^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 3^2 : 3 = \frac{1}{3} + 3 - 9 : 3$$

$$= \frac{1}{3} + 3 - 3 = \frac{1}{3}$$

$$b) \quad (-1)^0 + (-1)^{2-2} = 1 + (-1)^0 = 1 + 1 = 2$$

$$c) \quad 81 + 3 : 1 = 81 + 3 = 84$$

$$d) \quad (2^{-1})^{-2} = 2^{-1 \cdot (-2)} = 2^2 = 4$$

$$65. \quad a) \quad c \cdot c^2 \cdot c^3 \cdot c^4 = c^{1+2+3+4} = c^{10}$$

$$b) \quad \frac{t^6 \cdot t^5}{t^8} = \frac{t^{6+5}}{t^8} = \frac{t^{11}}{t^8} = t^{11-8} = t^3$$

$$c) \quad (-4x^2y^5)^2 = (-4)^2(x^2)^2(y^5)^2 = 16x^{2 \cdot 2}y^{5 \cdot 2} = 16x^4y^{10}$$

$$d) \quad \left(1\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{5^4}{3^4} = \frac{625}{81} = 7\frac{58}{81}$$

$$66. \quad a) \frac{8 \cdot (70^2)^5}{4 \cdot 70^9} = \frac{8 \cdot 70^{2 \cdot 5}}{4 \cdot 70^9} = 2 \cdot 70^{10-9} = 2 \cdot 70 = 140$$

$$b) \frac{6t^6}{3t^4} = 2t^2$$

$$c) \frac{2^9 \cdot a^{-4}}{2^3 a^3} = 2^{9-3} a^{-4-3} = 2^6 a^{-7} = \frac{64}{a^7}$$

$$d) \frac{3k^5}{6k^8} \cdot \frac{5^2 k^2}{5k^3} = \frac{75k^7}{30k^{11}} = \frac{5}{2} k^{7-11} = \frac{5}{2k^4}$$

$$67. \quad a) \left(a^{\frac{3}{4} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{5}} \right)^{100} = a^{100 \cdot \frac{1}{20}} = a^5$$

$$b) \frac{\left(a^{8 \cdot \left(-\frac{5}{3} \right)} \cdot b^{8 \cdot \frac{11}{4}} \right)}{a^{\frac{-37}{3}} \cdot b^{20}} = a^{\frac{-40}{3} + \frac{37}{3}} b^{\frac{88}{4} - \frac{80}{4}} = \frac{b^2}{a}$$

2.1 Lauseke ja laskutoimitukset

68. a) $3 \cdot 4 - 1 = 11$ b) $4^2 + 2 \cdot 4 - 5 = 19$

69. Lausekkeen $4x - 3x^2$ arvo, kun

a) $x = 0$ on $4 \cdot 0 - 3 \cdot 0^2 = 0$

b) $x = -2$ on $4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = -8 - 12 = -20$

c) $x = -\frac{1}{2}$ on $4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -2 - 3 \cdot \frac{1}{4} = -2 - \frac{3}{4} = -2\frac{3}{4}$

70. Lausekkeen $3x^2 - 4x + 6$ arvo, kun

a) $x = 2$ on $3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 12 - 8 + 6 = 10$

b) $x = -3$ on $3 \cdot (-3)^2 - 4 \cdot (-3) + 6 = 27 + 12 + 6 = 45$

c) $x = \frac{4}{3}$ on $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{4}{3} + 6 = 3 \cdot \frac{16}{9} - \frac{16}{3} + 6 = 6$

71. a) Auton jarrutusmatkaksi, kun auton

nopeus on 50 km/h, saadaan

$$0,25 \cdot 50 + 0,01 \cdot 50^2 = 37,5 \text{ (metriä).}$$

b) Jos nopeus kasvaa kaksinkertaiseksi nopeudesta 50 km/h

nopeuteen 100 km/h, niin jarrutusmatkaksi saadaan

$$0,25 \cdot 100 + 0,01 \cdot 100^2 = 125,0 \text{ (metriä).}$$

$$\text{Jarrutusmatka kasvaa } 125,0 \text{ m} - 37,5 \text{ m} = 87,5 \text{ m}$$

Vastaus: a) 37,5 m

b) 87,5 m

72. a) $3x - 3 - 6x + 7$

$$= (3 - 6)x + (-3) + 7$$

$$= -3x + 4$$

b) $2x - (x - 6) + (x - 1)$

$$= 2x - x + 6 + x - 1$$

$$= 2x + 5$$

c) $x^2 - (8x^2 - 5x) - (x - 3x^2)$

$$= x^2 - 8x^2 + 5x - x + 3x^2$$

$$= x^2 - 8x^2 + 3x^2 + 5x - x$$

$$= -4x^2 - 4x$$

73. a) $-2y^3 + 3y - 4y^3 - 4y = -2y^3 - 4y^3 + 3y - 4y = -6y^3 - y$

b) $(4y + 2) - (2y - 1)$
 $= 4y + 2 - 2y + 1 = 2y + 3$

c) $y^2 - (-y^2 + 3y) - (2y^2 - 5y)$
 $= y^2 + y^2 - 3y - 2y^2 + 5y = 2y$

74. a) $5x + (3a - 2x - a) + \left(-\frac{1}{2}a - x\right) = 5x + 3a - 2x - a - \frac{1}{2}a - x$
 $= 3a - \frac{1}{2}a - a + 5x - 2x - x$
 $= \left(\frac{6}{2} - \frac{1}{2} - \frac{2}{2}\right)a + (5 - 2 - 1)x$
 $= \frac{3}{2}a + 2x$

$$\begin{aligned}\text{b) } & \frac{1}{2}x - [-x - 2 - (-3x - 5)] \\ &= \frac{1}{2}x + x + 2 + (-3x - 5) \\ &= \frac{1}{2}x + x + 2 - 3x - 5 \\ &= -\frac{3}{2}x - 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } & 4x^3 - [x^2 - (5x^3 - 3x^2) + (x^2 - 6x^3)] \\ &= 4x^3 - x^2 + (5x^3 - 3x^2) - (x^2 - 6x^3) \\ &= 4x^3 - x^2 + 5x^3 - 3x^2 - x^2 + 6x^3 \\ &= 15x^3 - 5x^2\end{aligned}$$

75. Sievennetään lauseketta

$$\begin{aligned}& 4x^3 - (x^3 - x^2) - (2x^3 + x^2 + 2x) \\ &= 4x^3 - x^3 + x^2 - 2x^3 - x^2 - 2x \\ &= x^3 - 2x\end{aligned}$$

Lausekkeen arvo, kun $x = 999$ on

$$999^3 - 2 \cdot 999 = 997001001.$$

76. a) Lausekkeiden $x^2 - 3x - 4$ ja $-3 - 5x + x^2$ summa

$$\begin{aligned} & x^2 - 3x - 4 + (-3 - 5x + x^2) \\ &= x^2 - 3x - 4 - 3 - 5x + x^2 \\ &= 2x^2 - 8x - 7 \end{aligned}$$

b) Lausekkeiden $x^2 - 3x - 4$ ja $-3 - 5x + x^2$ erotus

$$\begin{aligned} & x^2 - 3x - 4 - (-3 - 5x + x^2) \\ &= x^2 - 3x - 4 + 3 + 5x - x^2 \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

77. Lausekkeiden $3x^2 - 5x$ ja $-x^2 - 2x$ summa on

$$\begin{aligned} (3x^2 - 5x) + (-x^2 - 2x) &= 3x^2 - 5x - x^2 - 2x \\ &= 3x^2 - x^2 - 5x - 2x \\ &= 2x^2 - 7x \end{aligned}$$

Lausekkeiden $3x^2 - 5x$ ja $-x^2 - 2x$ erotus on

$$\begin{aligned} (3x^2 - 5x) - (-x^2 - 2x) &= 3x^2 - 5x + x^2 + 2x \\ &= 3x^2 + x^2 - 5x + 2x \\ &= 4x^2 - 3x \end{aligned}$$

Summan ja erotuksen erotus on siis

$$\begin{aligned} (2x^2 - 7x) - (4x^2 - 3x) &= 2x^2 - 7x - 4x^2 + 3x \\ &= 2x^2 - 4x^2 - 7x + 3x \\ &= -2x^2 - 4x \end{aligned}$$

78. Suorakulmion kannan pituus on $5x - 4$ ja korkeus 3 yksikköä kantaan lyhyempi eli $5x - 4 - 3 = 5x - 7$.

a) Piirin lausekkeeksi saadaan

$$2 \cdot \text{kanta} + 2 \cdot \text{korkeus} = 2(5x - 4) + 2(5x - 7)$$

$$= 10x - 8 + 10x - 14$$

$$= 20x - 22$$

b) Piirin arvo, kun $x = 10$, on $20 \cdot 10 - 22 = 200 - 22 = 178$.

Vastaus: a) $5x - 7$ b) 178

79. a) $3(7x + 2) = 3 \cdot 7x + 3 \cdot 2 = 21x + 6$

b) $5(2 - 3x) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot (-3x) = 10 - 15x$

c) $-1(4x - 9) = (-1) \cdot 4x - 1 \cdot (-9) = -4x + 9$

80. a) $6(3x - 5) = 6 \cdot 3x + 6 \cdot (-5) = 18x - 30$

b) $(4p + 2) \cdot 7 = 4p \cdot 7 + 2 \cdot 7 = 4 \cdot 7p + 14 = 28p + 14$

c) $-3(8 - 2k) = -3 \cdot 8 - 3 \cdot (-2k) = -24 + 6k = 6k - 24$

81. a) $5(2x + 3) = 5 \cdot 2x + 5 \cdot 3 = 10x + 15$

b) $3a(4a - a^2) = -3a^3 + 12a^2$

c) $(3a - 4a^2) \cdot 10a^3 = -40a^5 + 30a^4$

82. Perunoiden hinta on 2 €/kg. Keskimääräinen myynti päivässä on 600 kg.

a) Keskimääräinen päivämyynti kasvaa x kg, joten myynti päivässä on siis $600 + x$ (kg).

Päivän myyntitulot ovat tällöin

$$2 \cdot (600 + x) = 2 \cdot 600 + 2 \cdot x = 1200 + 2x = 2x + 1200 \text{ (€)}.$$

$$85. \quad a) \frac{6t+3}{3} = \frac{6t}{3} + \frac{3}{3} = 2t+1$$

$$b) \frac{-8x+6}{-2} = \frac{-8x}{-2} + \frac{6}{-2} = 4x-3$$

$$c) -\frac{-9x+12}{-3} = -\left(\frac{-9x}{-3} + \frac{12}{-3}\right)$$
$$= -(3x-4)$$
$$= -3x+4$$

$$86. \quad a) \frac{21a^2-7a+28}{7} = \frac{21a^2}{7} - \frac{7a}{7} + \frac{28}{7} = 3a^2 - a + 4$$

$$b) \frac{16s-4}{-8} = \frac{16s}{-8} - \frac{4}{-8} = -2s - \left(-\frac{1}{2}\right) = -2s + \frac{1}{2}$$

$$c) \frac{8y^2+5y-1}{-2} = \frac{8y^2}{-2} + \frac{5y}{-2} - \frac{1}{-2} = -4y^2 - \frac{5}{2}y - \left(-\frac{1}{2}\right) = -4y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{1}{2}$$

$$87. \quad a) \frac{-9x^3 + 27x}{3x} = \frac{-9x^3}{3x} + \frac{27x}{3x} = -3x^{3-1} + 9 = -3x^2 + 9$$

$$b) \frac{12z^5 + 16z^3 - 36z^2}{-4z^2} = \frac{12z^5}{-4z^2} + \frac{16z^3}{-4z^2} - \frac{36z^2}{-4z^2} = -3z^{5-2} - 4z^{3-2} - (-9) \\ = -3z^3 - 4z + 9$$

$$88. \quad a) -3 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 - 6 \\ = -3 \cdot 16 + 20 - 6 \\ = -34$$

$$b) -3 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot (-3) - 6 \\ = -3 \cdot 9 - 15 - 6 \\ = -48$$

c) Lausekkeen arvo, kun $x = \frac{1}{3}$, on

$$-3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{3} - 6 = -3 \cdot \frac{1}{9} + \frac{5}{3} - 6 = -\frac{1}{3} + \frac{5}{3} - 6 \\ = -\frac{1}{3} + \frac{5}{3} - \frac{18}{3} \\ = \frac{-1 + 5 - 18}{3} = \frac{-14}{3} = -4\frac{2}{3}$$

89. a) $(x^3 - 4x^2 + 6x - 2) + (4x^2 - 3x - 9)$
 $= x^3 - 4x^2 + 6x - 2 + 4x^2 - 3x - 9$
 $= x^3 + 3x - 11$

b) $(4x^2 + 6x - 8) - [(x^2 + 3x) - (4x^2 + 5x + 6)]$
 $= 4x^2 + 6x - 8 - [x^2 + 3x - 4x^2 - 5x - 6]$
 $= 4x^2 + 6x - 8 - x^2 - 3x + 4x^2 + 5x + 6$
 $= 7x^2 + 8x - 2$

90. a) $4(9x - 3) = 4 \cdot 9x + 4 \cdot (-3) = 36x - 12$

b) $(5x - 1) \cdot (-3) = 5x \cdot (-3) - 1 \cdot (-3) = -15x + 3$

c) $2a(3a - 4) = 2a \cdot 3a + 2a \cdot (-4) = 6a^2 - 8a$

91. a) $\frac{8x+24}{4} = \frac{8x}{4} + \frac{24}{4} = 2x + 6$

b) $\frac{21-7x}{7} = \frac{21}{7} - \frac{7x}{7} = 3 - x = -x + 3$

c) $\frac{6y^3-9y}{-3} = \frac{6y^3}{-3} - \frac{9y}{-3} = -2y^3 + 3y$

92. a) Olkoon kun käyntikertojen määrä x .

Kustannuksia kuntosalilla A , kuvaa lauseke $70 + 5x$ (€).

Kustannuksia kuntosalilla B kuvaa lauseke $12x$ (€).

b) Lasketaan kustannukset, kun käyntikertoja on 15 kpl eli $x = 15$.

Kuntosali A : $70 + 5 \cdot 15 = 70 + 75 = 145$ (€)

Kuntosali B : $12 \cdot 15 = 180$ (€)

Koska $145 \text{ €} < 185\text{€}$, niin kuntosalia A on edullisempi käyttää.

Vastaus: a) kuntosalia A : $70 + 5x$, kuntosalia B : $12x$

b) Kuntosalia A on edullisempi käyttää.

2.2 Polynomi

93. Polynomeja ovat a, c, d, e, f, g, sillä näissä lausekkeissa muuttujatermien eksponentteina positiivisia kokonaislukuja.

Lausekkeessa b on muuttuja nimittäjässä ja lausekkeessa h muuttuja juurettavana. Nämä eivät ole polynomeja.

94.

Polynomi	Nimi	Termit	Termien asteluvut	Kertoimet	Muuttujaosat	Polynomin asteluku
$x + 1$	binomi	$x, 1$	1, 0	1, 1	x	1
$-2x^3 + x^2 - 3x + 6$		$-2x^3, x^2,$ $-3x, 6$	3, 2, 1, 0	-2, 1, -3, 6	x^3, x^2, x	3
$\frac{1}{2}x - x^2 + x^5$	trinomi	$\frac{1}{2}x,$ $-x^2, x^5$	1, 2, 5	$\frac{1}{2}, -1, 1$	x, x^2, x^5	5

95. $Q(3) = P(2) - 1 = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 - 1 = 8.$

96. Polynomien R lausekkeeksi saadaan:

$$R(x) = P(x^2 - 2x + 1) = -(x^2 - 2x + 1) - 3 = -x^2 + 2x - 4$$

97. a) Polynomien Q ja P summa

$$Q(x) + P(x) = x - 2 + 4x - 5 = 5x - 7$$

b) Polynomien Q ja P erotus

$$\begin{aligned} Q(x) - P(x) &= x - 2 - (4x - 5) \\ &= x - 2 - 4x + 5 \\ &= -3x + 3 \end{aligned}$$

c) $Q(2) + P(1) = (2 - 2) + (4 \cdot 1 - 5) = -1$

98. Polynomit ovat $P(x) = 5x^2 - 2x + 7$ ja $Q(x) = 2x^2 - 3x - 9$.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(x) + Q(x) &= (5x^2 - 2x + 7) + (2x^2 - 3x - 9) \\ &= 5x^2 - 2x + 7 + 2x^2 - 3x - 9 \\ &= 5x^2 + 2x^2 - 2x - 3x + 7 - 9 \\ &= 7x^2 - 5x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } P(x) - Q(x) &= (5x^2 - 2x + 7) - (2x^2 - 3x - 9) \\ &= 5x^2 - 2x + 7 - 2x^2 - (-3x) - (-9) \\ &= 5x^2 - 2x^2 - 2x + 3x + 7 + 9 \\ &= 3x^2 + x + 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{99.} \quad \text{a) } P(x) - Q(x) - R(x) \\ &= x^2 + 2 - (-x^2 + 3x) - (-2x - 1) \\ &= x^2 + 2 + x^2 - 3x + 2x + 1 \\ &= 2x^2 - x + 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } -P(x) - [1 - Q(x)] \\ &= -P(x) - 1 + Q(x) \\ &= -(x^2 + 2) - 1 + (-x^2 + 3x) \\ &= -x^2 - 2 - 1 - x^2 + 3x \\ &= -2x^2 + 3x - 3\end{aligned}$$

100. Polynomit ovat $P(a) = 3 - 4a^2$ ja $Q(a) = 4a^2 - 6a + 8$.

$$\begin{aligned} R(a) &= 5a - [Q(a) - P(a)] \\ &= 5a - [(4a^2 - 6a + 8) - (3 - 4a^2)] \\ &= 5a - [4a^2 - 6a + 8 - 3 + 4a^2] \\ &= 5a - 4a^2 + 6a - 8 + 3 - 4a^2 \\ &= -8a^2 + 11a - 5 \end{aligned}$$

$$R(-2) = -8 \cdot (-2)^2 + 11 \cdot (-2) - 5 = -8 \cdot 4 - 22 - 5 = -59$$

101. a) $3 \cdot 4a^2 = 12a^2$

b) $-2x \cdot 3x^2 \cdot (-6x^2) = (-2) \cdot 3 \cdot (-6) \cdot x \cdot x^2 \cdot x^2 = 36x^5$

c) $(4x)^2 \cdot (-x) = 16x^2 \cdot (-x) = -16x^3$

102. a) $4x^3 \cdot (-5x^4) = 4 \cdot (-5) \cdot x^3 x^4 = -20x^{3+4} = -20x^7$

b) $-2x^3(3x^2 - 6x + 5) = -2x^3 \cdot 3x^2 - 2x^3 \cdot (-6x) - 2x^3 \cdot 5$
 $= -2 \cdot 3x^{3+2} - 2 \cdot (-6) \cdot x^{3+1} - 2 \cdot 5x^3$
 $= -6x^5 + 12x^4 - 10x^3$

103. a) $5a(a^2 - 3a) = 5a \cdot a^2 + 5a \cdot (-3a) = 5a^3 + 5 \cdot (-3)aa = 5a^3 - 15a^2$

b) $(2 - 4x - x^2)(-3x) = 2 \cdot (-3x) - 4x \cdot (-3x) - x^2 \cdot (-3x)$

$$= -6x - 4 \cdot (-3)xx - 3 \cdot (-x^2)x$$

$$= -6x + 12x^2 + 3x^3$$

$$= 3x^3 + 12x^2 - 6x$$

104. a) $(x + 2)(2x + 3)$

$$= 2x^2 + 3x + 4x + 6$$

$$= 2x^2 + 7x + 6$$

b) $(5x - 1)(x^2 - 3x)$

$$= 5x^3 - 15x^2 - x^2 + 3x$$

$$= 5x^3 - 16x^2 + 3x$$

105. a) $(3x + 4)(2x + 5) = 3x \cdot 2x + 3x \cdot 5 + 4 \cdot 2x + 4 \cdot 5$

$$= 6x^2 + 15x + 8x + 20$$

$$= 6x^2 + 23x + 20$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (2x - 4)(1 - 2x) &= 2x \cdot 1 + 2x \cdot (-2x) - 4 \cdot 1 - 4 \cdot (-2x) \\ &= 2x - 4x^2 - 4 + 8x \\ &= -4x^2 + 10x - 4 \end{aligned}$$

106. a) $(2x - 1)(2x^2 - x + 3)$

$$\begin{aligned} &= 2x \cdot 2x^2 + 2x \cdot (-x) + 2x \cdot 3 - 1 \cdot 2x^2 - 1 \cdot (-x) - 1 \cdot 3 \\ &= 4x^3 - 2x^2 + 6x - 2x^2 + x - 3 \\ &= 4x^3 - 4x^2 + 7x - 3 \end{aligned}$$

b) $(x - 3)(4 - 6x - x^2)$

$$\begin{aligned} &= x \cdot 4 + x \cdot (-6x) + x \cdot (-x^2) - 3 \cdot 4 - 3 \cdot (-6x) - 3 \cdot (-x^2) \\ &= 4x - 6x^2 - x^3 - 12 + 18x + 3x^2 \\ &= -x^3 - 3x^2 + 22x - 12 \end{aligned}$$

107. a) $(3x^2 + 2)(2x^2 - 5x - 1)$

$$\begin{aligned} &= 3x^2 \cdot 2x^2 + 3x^2 \cdot (-5x) + 3x^2 \cdot (-1) + 2 \cdot 2x^2 + 2 \cdot (-5x) + 2 \cdot (-1) \\ &= 6x^4 - 15x^3 - 3x^2 + 4x^2 - 10x - 2 \\ &= 6x^4 - 15x^3 + x^2 - 10x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } (x+2)^2 &= (x+2)(x+2) = xx + x \cdot 2 + 2x + 2 \cdot 2 \\ &= x^2 + 2x + 2x + 4 \\ &= x^2 + 4x + 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{108.} \quad \text{a) } (x-4)^2 &= (x-4)(x-4) = xx + x \cdot (-4) - 4x - 4 \cdot (-4) \\ &= x^2 - 4x - 4x + 16 \\ &= x^2 - 8x + 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } (3x-5)^2 &= (3x-5)(3x-5) = 3x \cdot 3x + 3x \cdot (-5) - 5 \cdot 3x - 5 \cdot (-5) \\ &= 9x^2 - 15x - 15x + 25 \\ &= 9x^2 - 30x + 25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{109.} \quad \text{a) } 5x - (2x-3)(x-4) &= 5x - (2xx + 2x \cdot (-4) - 3x - 3 \cdot (-4)) \\ &= 5x - (2x^2 - 8x - 3x + 12) \\ &= 5x - 2x^2 + 8x + 3x - 12 \\ &= -2x^2 + 16x - 12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & -3x(x+5)(2x-1) = (-3xx - 3x \cdot 5)(2x-1) \\ & = (-3x^2 - 15x)(2x-1) \\ & = -3x^2 \cdot 2x - 3x^2 \cdot (-1) - 15x \cdot 2x - 15x \cdot (-1) \\ & = -6x^3 + 3x^2 - 30x^2 + 15x \\ & = -6x^3 - 27x^2 + 15x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{110.} \quad \text{a) } & 3x(1-x-x^2) + 3x^2(x+4) \\ & = 3x - 3x^2 - 3x^3 + 3x^3 + 12x^2 \\ & = 9x^2 + 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & 5x(2x+3) - (3x-4)(2x+1) \\ & = 10x^2 + 15x - (6x^2 + 3x - 8x - 4) \\ & = 10x^2 + 15x - 6x^2 - 3x + 8x + 4 \\ & = 4x^2 + 20x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{111.} \quad \text{a) } & (x+2y)(x-2y)(x^2+4y^2) \\ & = (x^2 - 2xy + 2xy - 4y^2)(x^2 + 4y^2) \\ & = (x^2 - 4y^2)(x^2 + 4y^2) \\ & = x^4 + 4x^2y^2 - 4y^2x^2 - 16y^4 \\ & = x^4 - 16y^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } & (x-2)^2 - (2x-1)x - 2(1-2x) \\ &= (x-2)(x-2) - (2x^2 - x) - (2 - 4x) \\ &= (x^2 - 2x - 2x + 4) - 2x^2 + x - 2 + 4x \\ &= x^2 - 4x + 4 - 2x^2 + x - 2 + 4x \\ &= -x^2 + x + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{112.} \quad \text{a) } & [(5x-2) - (2x-5)][(5x-2) + (2x-5)] \\ &= [5x-2-2x+5][5x-2+2x-5] \\ &= (3x+3)(7x-7) \\ &= 21x^2 - 21x + 21x - 21 \\ &= 21x^2 - 21\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } & 1 - [(5x-2)(2x-5)] \\ &= 1 - (10x^2 - 25x - 4x + 10) \\ &= 1 - (10x^2 - 29x + 10) \\ &= 1 - 10x^2 + 29x - 10 \\ &= -10x^2 + 29x - 9\end{aligned}$$

113. HUOM! Kirjan 1. painoksessa vastauksessa virhe.

$$\begin{aligned}
 & (x^2 - 3x + 2)(x - 4) - (x^2 - 5x + 4)(x - 2) \\
 &= (x^3 - 4x^2 - 3x^2 + 12x + 2x - 8) - (x^3 - 2x^2 - 5x^2 + 10x + 4x - 8) \\
 &= x^3 - 7x^2 + 14x - 8 - (x^3 - 7x^2 + 14x - 8) \\
 &= 0 \\
 &= P(x)
 \end{aligned}$$

Näin ollen

a) $P(0) = 0,$

b) $P(2) = 0,$

c) $P(4) = 0.$

114. a) $(x + 1)^3 = (x + 1)(x + 1)(x + 1)$

$$\begin{aligned}
 &= (x^2 + x + x + 1)(x + 1) \\
 &= (x^2 + 2x + 1)(x + 1) \\
 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1
 \end{aligned}$$

b) $x^m(x^{2m-3} + x^{3m}) - x^{m-1}(x^{-m+2})$

$$\begin{aligned}
 &= x^{m+(2m-3)} + x^{m+3m} - x^{m-1+(-m+2)} \\
 &= x^{3m-3} + x^{4m} - x
 \end{aligned}$$

115. Väite: $a^2 + b^2 = c^2$, kun $a = 2mn$,
 $b = m^2 - n^2$ ja $c = m^2 + n^2$.

Todistus: Kun $a = 2mn$ ja $b = m^2 - n^2$, niin

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 \\ &= 4m^2n^2 + (m^2 - n^2)(m^2 - n^2) \\ &= 4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \end{aligned}$$

Toisaalta, kun $c = m^2 + n^2$, niin

$$\begin{aligned} c^2 &= (m^2 + n^2)^2 \\ &= (m^2 + n^2)(m^2 + n^2) \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \end{aligned}$$

Näin ollen $a^2 + b^2 = c^2$, kun

$a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$ ja $c = m^2 + n^2$. \square

116. Suurennetun suorakulmion kanta on $x + 4$ (cm) ja korkeus $y + 3$ (cm).

a) piiri on: $2(x + 4) + 2(y + 3) = 2x + 8 + 2y + 6 = 2x + 2y + 14$ (cm)

b) Pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo:

$$(x + 4)(y + 3) = xy + 3x + 4y + 12 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus:

a) Piiri: $2x + 2y + 14$ (cm)

b) Ala: $xy + 3x + 4y + 12$ (cm²)

117. a) Merkitään lipun hinnan muutosta euroina kirjaimella x . Muodostetaan myyntitulojen lauseke taulukon avulla.

Lipun hinta (€)	Kävijöiden määrä (kpl)
8	6500
$8 + 1$	$6500 - 150$
$8 + 2$	$6500 - 150 \cdot 2$
$8 + x$	$6500 - 150x$

$$\begin{aligned}
\text{Myyntitulot} &= \text{hinta} \cdot \text{kävijämäärä} \\
&= (8 + x)(6500 - 150x) \\
&= 8 \cdot 6500 + 8 \cdot (-150x) + x \cdot 6500 + x \cdot (-150x) \\
&= 52000 - 1200x + 6500x - 150x^2 \\
&= -150x^2 + 5300x + 52000
\end{aligned}$$

b) Kun lipun hinta on 11,50 €, niin hinnankorotus on
 $11,50 \text{ €} - 8 \text{ €} = 3,50 \text{ €}$, joten $x = 3,50 \text{ €}$.

Myyntitulot ovat tällöin

$$-150 \cdot 3,5^2 + 5300 \cdot 3,5 + 52000 = 68712,5 \text{ (€)}$$

Vastaus: a) $-150x^2 + 5300x + 52000$ b) 68712,50 €

118. a) Suorakulmion muotoisen maa-alueen ympärysmitta on 500 m.

Merkitään toista sivua muuttujalla x , jolloin toinen sivu on

$$\frac{500 - 2x}{2} = 250 - x \text{ (m)}.$$

x



b) Pinta-ala $A(x)$ saadaan kannan ja korkeuden tulo

$$A(x) = x(250 - x) = -x^2 + 250x \text{ (m}^2\text{)}.$$

c) Pinta-ala $A(x)$, kun $x = 80$ m on

$$\begin{aligned} A(80) &= -80^2 + 250 \cdot 80 \\ &= 13600 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus: a) $250 - x$ (m) b) $-x^2 + 250x$ (m²) c) 13600 m^2

119. $(a + b)^2 - (a - b)^2$

$$\begin{aligned} &= (a + b)(a + b) - (a - b)(a - b) \\ &= (a^2 + ab + ba + b^2) - (a^2 - ab - ba + b^2) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 \\ &= 4ab \end{aligned}$$

Kun $a = 100^{300}$ ja $b = 100^{-300}$, niin

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab = 4 \cdot 100^{300} \cdot 100^{-300} = 4.$$

120. a) $-3xy^2 \cdot 3x^4y^5 = (-3) \cdot 3 \cdot x^{1+4} \cdot y^{2+5} = -9x^5y^7$

b) $-6xy(x^2 + xy - y^3)$
 $= -6x^{1+2}y - 6x^{1+1}y^{1+1} + 6xy^{1+3}$
 $= -6x^3y - 6x^2y^2 + 6xy^4$

121. a) $(x + 7)(3x + 1) = x \cdot 3x + x \cdot 1 + 7 \cdot 3x + 7 \cdot 1$
 $= 3x^2 + x + 21x + 7$
 $= 3x^2 + 22x + 7$

b) $(2x - 1)(2x + 1) = 2x \cdot 2x + 2x \cdot 1 - 1 \cdot 2x - 1 \cdot 1$
 $= 4x^2 + 2x - 2x - 1$
 $= 4x^2 - 1$

c) $(1 - 4x)(3 - x) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-x) - 4x \cdot 3 - 4x \cdot (-x)$
 $= 3 - x - 12x + 4x^2$
 $= 4x^2 - 13x + 3$

122. a) $(3x - 2)^2$

$$= (3x - 2)(3x - 2)$$

$$= 9x^2 - 6x - 6x + 4$$

$$= 9x^2 - 12x + 4$$

b) $2x(x + 3)(2x - 1) = (2xx + 2x \cdot 3)(2x - 1)$

$$= (2x^2 + 6x)(2x - 1)$$

$$= 2x^2 \cdot 2x + 2x^2 \cdot (-1) + 6x \cdot 2x + 6x \cdot (-1)$$

$$= 4x^3 - 2x^2 + 12x^2 - 6x$$

$$= 4x^3 + 10x^2 - 6x$$

c) $5x^2 - (x^2 - 3x)(1 - 2x)$

$$= 5x^2 - (x^2 - 2x^3 - 3x + 6x^2)$$

$$= 5x^2 - x^2 + 2x^3 + 3x - 6x^2$$

$$= 2x^3 - 2x^2 + 3x$$

- 123.** Kun tila palkkaa x ylimääräistä poimijaa, niin poimijoita on $50 + x$. Jokainen näistä poimii keskimäärin $1200 - 10x$ kg. Satokauden aikana kerätty marjamäärä

$$\begin{aligned}m(x) &= (50 + x)(1200 - 10x) \\ &= 60000 - 500x + 1200x - 10x^2 \\ &= 60000 + 700x - 10x^2 \text{ (kg)}\end{aligned}$$

60 poimijaa keräsivät marjoja

$$m(10) = 60000 + 700 \cdot 10 - 10 \cdot 10^2 = 66000 \text{ (kg)}$$

Vastaus: Kauden aikana kerätty marjamäärä

$$m(x) = 60000 + 700x - 10x^2.$$

60 poimijaa keräävät marjoja yhteensä 66000 kg.

2.3 Murtolausekkeita

$$124. \quad \text{a) } \frac{x^2 x^7}{x^8} = \frac{x^{2+7}}{x^8} = \frac{x^9}{x^8} = x^{9-8} = x$$

$$\text{b) } \frac{x^5 x^6 x}{x^{12}} = \frac{x^{5+6+1}}{x^{12}} = \frac{x^{12}}{x^{12}} = 1$$

$$\text{c) } \frac{x^a x^{2a}}{x^3} = \frac{x^{a+2a}}{x^3} = \frac{x^{3a}}{x^3} = x^{3a-3}$$

$$\text{d) } \frac{x^{5+n} x^{8+n}}{x^{2n}} = \frac{x^{5+n+8+n}}{x^{2n}} = \frac{x^{2n+13}}{x^{2n}} = x^{2n+13-2n} = x^{13}$$

$$125. \quad \text{a) } \frac{12x^4 + 36x}{6x} = \frac{6x(2x^3 + 6)}{6x} = 2x^3 + 6$$

$$\text{b) } \frac{15a^4 - 5a^3 + 20a^2}{-5a^2} = \frac{5a^2(3a^2 - a + 4)}{-5a^2} = -(3a^2 - a + 4) = -3a^2 + a - 4$$

$$126. \quad a) \quad \overset{3)}{a} + \overset{2)}{a} = \frac{3a + 2a}{6} = \frac{5a}{6}$$

$$b) \quad \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{3} = \frac{x-2+(x-3)}{3} = \frac{x-2+x-3}{3} = \frac{2x-5}{3}$$

$$127. \quad a) \quad \overset{2)}{2x+1} - \frac{x-5}{4} = \frac{2(2x+1)-(x-5)}{4} = \frac{4x+2-x+5}{4} = \frac{3x+7}{4}$$

$$b) \quad \overset{5)}{a+b} - \overset{4)}{2a-3b} = \frac{5(a+b)-4(2a-3b)}{20} = \frac{5a+5b-8a+12b}{20} \\ = \frac{-3a+17b}{20}$$

$$128. \quad \overset{2)}{5x+3y} + \overset{3)}{x-6y} = \frac{2(5x+3y)+3(x-6y)}{6} \\ = \frac{10x+6y+3x-18y}{6} = \frac{13x-12y}{6}$$

$$129. \quad a) \quad \frac{5}{a+1} + \frac{a-3}{a+1} = \frac{5+(a-3)}{a+1} = \frac{5+a-3}{a+1} = \frac{a+2}{a+1}$$

$$b) \quad \frac{2) 3-x}{x} - \frac{x) 1}{2} = \frac{2(3-x)-x}{2x} = \frac{6-2x-x}{2x} = \frac{6-3x}{2x}$$

$$130. \quad a) \quad \frac{3) 1}{2a} + \frac{a) 3(2-a)}{6} = \frac{3+3a(2-a)}{6a} = \frac{3+6a-3a^2}{6a} = \frac{3(1+2a-a^2)}{6a}$$

$$= \frac{-a^2+2a+1}{2a}$$

$$b) \quad \frac{x-1}{x} - \frac{x) x}{x-1} = \frac{(x-1)(x-1)-x^2}{x(x-1)} = \frac{x^2-x-x+1-x^2}{x(x-1)}$$

$$= \frac{-2x+1}{x^2-x}$$

$$131. \quad a) \quad \frac{x^2}{3x} + \frac{2(1-x)}{6} = \frac{2x^2 + 2x(1-x)}{6x} = \frac{2x^2 + 2x - 2x^2}{6x} = \frac{2x}{6x} = \frac{1}{3}$$

$$b) \quad \frac{(x+2)(x-2)}{x^2-4} = \frac{x^2-2x+2x-4}{x^2-4} = \frac{x^2-4}{x^2-4} = 1$$

$$c) \quad \frac{x^{3+n}x^{4+n}}{x^7} = \frac{x^{3+n+4+n}}{x^7} = \frac{x^{7+2n}}{x^7} = x^{7+2n-7} = x^{2n}$$

132. Sievennetään ensin lauseketta ja sijoitetaan vasta sitten.

$$\frac{a(a-1)}{x} + ax = \frac{a(a-1)}{x} + \frac{ax}{1} = \frac{a^2 - a + ax^2}{x}$$

Sijoitetaan $x = a - 1$.

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - a + a(a-1)^2}{a-1} &= \frac{a^2 - a + a(a-1)(a-1)}{a-1} = \frac{a^2 - a + (a^2 - a)(a-1)}{a-1} \\ &= \frac{a^2 - a + (a^3 - a^2 - a^2 + a)}{a-1} \\ &= \frac{a^2 - a + a^3 - 2a^2 + a}{a-1} \\ &= \frac{a^3 - a^2}{a-1} \\ &= \frac{a^2(a-1)}{a-1} = a^2 \end{aligned}$$

133. Lavennetaan samannimisiksi

$$y) \frac{1}{x} + \frac{x}{y} = \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{y+x}{xy} = \frac{x+y}{xy}$$

Sijoitetaan lausekkeeseen $x + y = 3$ ja $xy = 2$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{3}{2}$$

$$134. \quad a) \quad \frac{20x}{3} \cdot \frac{9}{5x} = \frac{20 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \cancel{x}}{\cancel{3} \cdot 5 \cdot \cancel{x}} = \frac{20 \cdot 3}{5} = 4 \cdot 3 = 12$$

$$b) \quad \frac{6x^3}{5} : \frac{3x}{20} = \frac{6x^3}{5} \cdot \frac{20}{3x} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}} x^3 \cdot 20}{5 \cdot \cancel{3} x} = \frac{2 \cdot x^3 \cdot 20}{5x} = 8x^{3-1} = 8x^2$$

$$135. \quad a) \quad \frac{x}{6} : \frac{x}{4} = \frac{\cancel{x}}{\underset{3}{\cancel{6}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{x}} = \frac{2}{3}$$

$$b) \quad \frac{a+b}{2} : \frac{a+b}{4} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{a+b} = \frac{2(a+b)}{a+b} = 2$$

$$136. \quad a) \frac{x+1}{4} : \frac{x+1}{2} = \frac{x+1}{\frac{4}{2}} \cdot \frac{2}{x+1} = \frac{x+1}{2(x+1)} = \frac{1}{2}$$

$$b) \frac{5x^2}{3} : \frac{10x}{9} = \frac{5x^2}{3} \cdot \frac{9}{10x} = \frac{5 \cdot 3 \cdot x^2}{10x} = \frac{3x^{2-1}}{2} = \frac{3x}{2}$$

$$137. \quad a) 2a + 4 = 2(a + 2)$$

$$b) 12b - 6 = 6(2b - 1)$$

$$c) 3x - 6y = 3(x - 2y)$$

$$138. \quad a) 25x + 30 = 5(5x + 6)$$

$$b) 6xy - 7x = x(6y - 7)$$

$$c) 2x^2 + 3x = x(2x + 3)$$

139. a) $20ab + 10a = 10a(2b + 1)$

b) $3xy - 15xy^2 = 3xy(1 - 5y)$

c) $2a^2b + 8ab^2 = 2ab(a + 4b)$

140. **HUOM! Kirjan 1. painoksessa a-kohdan vastauksessa virhe.**

a) $\frac{5x+10}{5x-15} = \frac{5(x+2)}{5(x-3)} = \frac{x+2}{x-3}$

b) $\frac{4x+2}{10x+5} = \frac{2(2x+1)}{5(2x+1)} = \frac{2}{5}$

141. a) $\frac{16-2x}{8-x} = \frac{2(8-x)}{8-x} = 2$

b) $\frac{6x-9}{3-2x} = \frac{3(2x-3)}{3-2x} = \frac{3 \cdot (-1)(-2x+3)}{3-2x} = \frac{-3(3-2x)}{3-2x} = -3$

$$142. \quad \frac{a+3}{a} \cdot \frac{3a+9}{2a} = \frac{a+3}{a} \cdot \frac{2a}{3a+9} = \frac{(a+3)2a}{a \cdot 3(a+3)} = \frac{2}{3}$$

$$143. \quad \text{a) } \begin{aligned} & \overset{2)}{\frac{6t+3}{3}} + \overset{3)}{\frac{2t+1}{2}} = \frac{2(6t+3)+3(2t+1)}{6} = \frac{12t+6+6t+3}{6} \\ & = \frac{18t+9}{6} = \frac{\overset{3)}{9}(2t+1)}{\underset{2}{6}} = \frac{6t+3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \overset{10)}{\frac{3s-1}{3}} - \overset{3)}{\frac{5s+1}{10}} = \frac{10(3s-1)-3(5s+1)}{30} = \frac{30s-10-(15s+3)}{30} \\ & = \frac{30s-10-15s-3}{30} \\ & = \frac{15s-13}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 144. \quad a) \quad & \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)(x-1)} \\
 & = \frac{2}{x^2-x+x-1} \\
 & = \frac{2}{x^2-1}
 \end{aligned}$$

$$b) \quad \frac{(x+3)(x-3)}{x^2-9} = \frac{x^2-3x+3x-9}{x^2-9} = \frac{x^2-9}{x^2-9} = 1$$

$$145. \quad a) \quad \frac{3x-1}{4} \cdot \frac{8}{3x-1} = \frac{(3x-1) \cdot 8}{4(3x-1)} = 2$$

$$b) \quad \frac{18x}{5} \cdot \frac{9x}{10} = \frac{18x}{5} \cdot \frac{10}{9x} = \frac{18x \cdot 10}{5 \cdot 9x} = 4$$

$$146. \quad a) \quad 36x + 27 = 9(4x + 3)$$

$$b) \quad 5xy - 8x = x(5y - 8)$$

$$c) \quad x^2 - 4x = x(x - 4)$$

$$\begin{aligned} 147. \quad & \frac{4x+4y}{5} \cdot \frac{3x+3y}{10} \\ &= \frac{4x+4y}{5} \cdot \frac{10}{3x+3y} \\ &= \frac{4(x+y)}{5} \cdot \frac{10}{3(x+y)} \\ &= \frac{4(x+y) \cdot 10}{5 \cdot 3(x+y)} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

3.1 Ensimmäisen asteen yhtälö

148. a) $5x - 3 = -2x + 11$

$$5x + 2x = 11 + 3$$

$$7x = 14 \quad |:7$$

$$x = \frac{14}{7} = 2$$

b) $x - (4 - 3x) = 6x - (x - 2)$

$$x - 4 + 3x = 6x - x + 2$$

$$x + 3x - 6x + x = 2 + 4$$

$$-x = 6 \quad |:(-1)$$

$$x = -6$$

149. a) $3(4 - 2x) = 6 - 8x$

$$12 - 6x = 6 - 8x$$

$$-6x + 8x = 6 - 12$$

$$2x = -6 \quad |:2$$

$$x = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\text{b) } 5x(x-1) = 5x^2 - (8-3x)$$

$$5x^2 - 5x = 5x^2 - 8 + 3x$$

$$5x^2 - 5x^2 - 5x - 3x = -8$$

$$-8x = -8 \quad | : (-8)$$

$$x = 1$$

$$\mathbf{150. a) } 2(a+3) - 3(-3a-4) = 4 - (7a+2)$$

$$2a + 6 + 9a + 12 = 4 - 7a - 2$$

$$2a + 9a + 7a = 4 - 2 - 6 - 12$$

$$18a = -16 \quad | : 18$$

$$a = \frac{-16}{18} = -\frac{8}{9}$$

$$\text{b) } -5c - (1-c) + 2(4c-1) = c - (5c-2)$$

$$-5c - 1 + c + 8c - 2 = c - 5c + 2$$

$$c - 5c + 8c - c + 5c = 2 + 1 + 2$$

$$8c = 5 \quad | : 8$$

$$c = \frac{5}{8}$$

151. a) $(3x-1)(2x-3) = -3x(4-2x)$

$$6x^2 - 9x - 2x + 3 = -12x + 6x^2$$

$$6x^2 - 6x^2 - 9x - 2x + 12x = -3$$

$$x = -3$$

b) $(x-2)^2 - 4x = x^2 - 4$

$$(x-2)(x-2) - 4x = x^2 - 4$$

$$x^2 - 2x - 2x + 4 - 4x = x^2 - 4$$

$$x^2 - x^2 - 2x - 2x - 4x = -4 - 4$$

$$-8x = -8 \quad | :(-8)$$

$$x = 1$$

152. a) $(3+x) - (x-3) = 0$

$$3 + x - x + 3 = 0$$

$$x - x = -3 - 3$$

$$0 = -6$$

epätosi

Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

$$\text{b) } 4(x - 1) + 1 = x - 3(1 - x)$$

$$4x - 4 + 1 = x - 3 + 3x$$

$$4x - x - 3x = -3 + 4 - 1$$

$$0x = 0$$

$$0 = 0$$

identtisesti tosi

Yhtälön ratkaisuja ovat kaikki reaaliluvut.

$$\mathbf{153.} \text{ a) } 5(x + 3) - (4 - 2x) = 4x - 3(3 - x)$$

$$5x + 15 - 4 + 2x = 4x - 9 + 3x$$

$$7x - 11 = 7x - 9$$

$$7x - 7x = -9 + 11$$

$$0x = 2$$

$$0 = 2$$

identtisesti epätosi

Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

$$\text{b) } 6x - (x + 1) = 4 - 3(x - 2)$$

$$6x - x - 1 = 4 - 3x + 6$$

$$5x - 1 = -3x + 10$$

$$5x + 3x = 10 + 1$$

$$8x = 11 \quad | : 8$$

$$x = \frac{11}{8}$$

154. Sijoitetaan $x = 3$ yhtälöön $2ax + 5a - 1 = 2$ ja ratkaistaan a .

$$2a \cdot 3 + 5a - 1 = 2$$

$$6a + 5a - 1 = 2$$

$$6a + 5a = 2 + 1$$

$$11a = 3 \quad | :11$$

$$a = \frac{3}{11}$$

155. Jos $x = -2$ on yhtälön ratkaisu, niin se toteuttaa yhtälön. Sijoitetaan siis $x = -2$ yhtälöön $5(x - k) = 2x - 3$.

$$5(-2 - k) = 2 \cdot (-2) - 3$$

$$-10 - 5k = -4 - 3$$

$$-5k = 3 \quad | :(-5)$$

$$k = -\frac{3}{5}$$

156. a) Merkitään $x =$ otetut kopiot.

Kuukauden lasku oli 560 euroa.

$$280 + 0,05x = 560$$

$$0,05x = 560 - 280 \quad | : 0,05$$

$$x = \frac{280}{0,05} = 5600$$

Kopioita otettiin 5600 kpl.

b) Merkitään $x =$ kopion hinta.

Kuukauden lasku oli 441 euroa.

$$280 + 2300x = 441$$

$$2300x = 441 - 280 \quad | : 2300$$

$$x = \frac{161}{2300} = 0,07$$

Kopion uusi hinta on 0,07 euroa.

Kopion hintaa nostettiin $0,07 \text{ €} - 0,05 \text{ €} = 0,02 \text{ €}$

Vastaus: a) 5600 kpl b) 0,02 € eli 2 snt

157. Luonnolliset luvut ovat kokonaislukuja. Esimerkiksi: n , $n + 1$ ja $n + 2$ ovat kolme peräkkäistä luonnollista lukua.

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 96$$

$$n + n + 1 + n + 2 = 96$$

$$3n = 96 - 1 - 2 \quad | : 3$$

$$n = \frac{93}{3} = 31$$

Tällöin

$$n + 1 = 31 + 1 = 32$$

$$n + 2 = 31 + 3 = 33$$

Vastaus: Luvut ovat 31, 32 ja 33.

158. Merkitään:

x = Lillin ikä tällä hetkellä

$4x$ = Petran ikä tällä hetkellä

12 vuoden kuluttua:

Lillin ikä = $x + 12$

Petran ikä = $4x + 12$

Petran ikä = 2 (Lillin ikä)

$$4x + 12 = 2(x + 12)$$

$$4x + 12 = 2x + 24$$

$$4x - 2x = 24 - 12$$

$$2x = 12 \quad |:2$$

$$x = 6$$

Lilli $x = 6$ ja Petra $4x = 24$

Vastaus: Lilli 6v ja Petra 24 v.

159. Merkitään $x =$ nopeusero

0,5 h kuluttua välimatka on 0 eli 0,7 km on kurottu kiinni.

$$0,5 \cdot x = 0,7 \quad |:0,5$$

$$x = \frac{0,7}{0,5} \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Vastaus: Nopeusero oli 1,4 km/h.

160. Merkitään $x =$ alkuperäinen kokonaisluku

Jos lukuun lisätään yhdeksän loppuun, luvun ”ykköset” ovat 9 ja luku itse on ”kymmeniä”.

$$10x + 9 = 13x$$

$$10x - 13x = -9$$

$$-3x = -9 \quad | :(-3)$$

$$x = 3$$

Vastaus: Alkuperäinen kokonaisluku on 3.

161. a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$

$${}^3)\frac{x}{2} + {}^2)\frac{x}{3} = {}^6)\frac{5}{1}$$

$$\frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} = \frac{30}{6} \quad | \cdot 6$$

$$3x + 2x = 30$$

$$5x = 30 \quad | :5$$

$$x = \frac{30}{5} = 6$$

$$\text{b) } 2x - \frac{x}{4} = \frac{1}{3}$$

$$^{12)} \frac{2x}{1} - ^{3)} \frac{x}{4} = ^{4)} \frac{1}{3}$$

$$\frac{24x}{12} - \frac{3x}{12} = \frac{4}{12} \quad | \cdot 12$$

$$24x - 3x = 4$$

$$21x = 4 \quad | : 21$$

$$x = \frac{4}{21}$$

162. HUOM! Kirjan 1. painoksessa on a-kohdassa virhe.

$$\text{a) } -3x - 1 = \frac{2x}{3}$$

$$^3) \frac{-3x}{1} - ^3) \frac{1}{1} = \frac{2x}{3}$$

$$\frac{-9x}{3} - \frac{3}{3} = \frac{2x}{3} \quad | \cdot 3$$

$$-9x - 3 = 2x$$

$$-9x - 2x = 3$$

$$-11x = 3 \quad | : (-11)$$

$$x = -\frac{3}{11}$$

$$\text{b) } \frac{x-1}{2} + 2x = \frac{1}{3}$$

$$^3) \frac{x-1}{2} + ^6) \frac{2x}{1} = ^2) \frac{1}{3}$$

$$\frac{3(x-1)}{6} + \frac{12x}{6} = \frac{2}{6} \quad | \cdot 6$$

$$3x - 3 + 12x = 2$$

$$3x + 12x = 2 + 3$$

$$15x = 5 \quad | :15$$

$$x = \frac{5}{15} \stackrel{(5)}{=} \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{163.} \text{ a) } \frac{3x+5}{2} - \frac{2x+7}{3} = \frac{5x+1}{6}$$

$$^3) \frac{3x+5}{2} - ^2) \frac{2x+7}{3} = \frac{5x+1}{6}$$

$$\frac{3(3x+5)}{6} - \frac{2(2x+7)}{6} = \frac{5x+1}{6} \quad | \cdot 6$$

$$9x + 15 - (4x + 14) = 5x + 1$$

$$9x + 15 - 4x - 14 = 5x + 1$$

$$9x - 4x - 5x = 1 - 15 + 14$$

$$0x = 0$$

$$0 = 0$$

tosii

Yhtälön ratkaisuja ovat kaikki reaalityöt.

$$\text{b) } \frac{2x-5}{4} - \frac{3x-8}{6} = \frac{x}{12}$$

$$^3) \frac{2x-5}{4} - ^2) \frac{3x-8}{6} = \frac{x}{12}$$

$$\frac{3(2x-5)}{12} - \frac{2(3x-8)}{12} = \frac{x}{12} \quad | \cdot 12$$

$$6x-15 - (6x-16) = x$$

$$6x-15-6x+16 = x$$

$$6x-6x-x = 15-16$$

$$-x = -1 \quad | :(-1)$$

$$x = 1$$

$$\mathbf{164.} \quad \text{a) } \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x = 1\frac{5}{6}$$

$$^3) \frac{3}{4}x - ^6) \frac{1}{2}x + ^4) \frac{2}{3}x = ^2) \frac{11}{6}$$

$$\left(\frac{9}{12} - \frac{6}{12} + \frac{8}{12} \right) x = \frac{22}{12}$$

$$\frac{11}{12}x = \frac{22}{12} \quad | \cdot \frac{12}{11}$$

$$x = \frac{22}{12} \cdot \frac{12}{11}$$

$$= \frac{22}{11} = 2$$

$$\text{b) } -x - \frac{2x-1}{6} = -3(x+1) \quad | \cdot 6$$

$$-6x - (2x-1) = -18(x+1)$$

$$-6x - 2x + 1 = -18x - 18$$

$$-6x - 2x + 18x = -18 - 1$$

$$10x = -19 \quad | :10$$

$$x = -\frac{19}{10} = -1\frac{9}{10}$$

165. Merkitään x = käteen saatu kuukausipalkka

$$\frac{x}{3} + \frac{2}{5}x + \frac{x}{8} + 150 = x$$

$$^{40)} \frac{x}{3} + ^{24)} \frac{2}{5}x + ^{15)} \frac{x}{8} + ^{120)} \frac{150}{1} = ^{120)} \frac{x}{1}$$

$$\frac{40}{120}x + \frac{48}{120}x + \frac{15}{120}x + \frac{18000}{120} = \frac{120}{120}x \quad | \cdot 120$$

$$40x + 48x + 15x + 18000 = 120x$$

$$40x + 48x + 15x - 120x = -18000$$

$$-17x = -18000 \quad | :(-17)$$

$$x = \frac{-18000}{-17}$$

$$x = 1058,823... \approx 1059$$

Vastaus: Kuukausipalkka oli n. 1059 euroa.

166. Merkitään $x =$ tilausmatkan hinta

$$\begin{aligned}\frac{x}{22} - 10 &= \frac{x}{24} \\^{12)} \frac{x}{22} - \overset{264)}{10} &= \overset{11)}{\frac{x}{24}} \\ \frac{12x}{264} - \frac{2640}{264} &= \frac{11x}{264} \cdot 264 \\ 12x - 2640 &= 11x \\ 12x - 11x &= 2640 \\ x &= 2640\end{aligned}$$

Kustannukset: $\frac{2640}{24}$ euroa = 110 euroa

Vastaus: 110 €

167. Jos $x = 3$ on ratkaisu, niin se toteuttaa yhtälön. Sijoitetaan $x = 3$.

$$\frac{2 \cdot 3^2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 3 + 4a = 0$$

$$\frac{18}{3} - \frac{3}{2} + 4a = 0$$

$$6 - \frac{3}{2} + 4a = 0$$

$$4a = -6 + \frac{3}{2}$$

$$4a = \overset{2)}{-6} + \frac{3}{2}$$

$$4a = \frac{-12}{2} + \frac{3}{2}$$

$$4a = \frac{-9}{2} \quad |:4$$

$$a = \frac{-9}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{-9}{8}$$

$$= -1\frac{1}{8}$$

Vastaus: $a = -1\frac{1}{8}$

$$168. \quad p + \frac{p}{2} + \frac{p}{4} = 2$$

$${}^4) \frac{p}{1} + {}^2) \frac{p}{2} + \frac{p}{4} = {}^4) \frac{2}{1}$$

$$\frac{4p}{4} + \frac{2p}{4} + \frac{p}{4} = \frac{8}{4} \quad | \cdot 4$$

$$4p + 2p + p = 8$$

$$7p = 8 \quad | : 7$$

$$p = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$$

$$\text{Vastaus: } p = 1\frac{1}{7}$$

$$169. \text{ a) } 3(2x - 1) - (-2x + 7) = 5x - 4$$

$$6x - 3 + 2x - 7 = 5x - 4$$

$$8x - 5x = 3 + 7 - 4$$

$$3x = 6 \quad | : 3$$

$$x = 2$$

$$\text{b) } 3x(x+3) = x^2 - (6 - 2x^2)$$

$$3x^2 + 9x = x^2 - 6 + 2x^2$$

$$3x^2 - 3x^2 + 9x = -6$$

$$9x = -6 \quad | :9$$

$$x = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$$

$$\text{170. a) } \frac{2x-3}{3} + 4 = \frac{-x+2}{5}$$

$${}^5) \frac{2x-3}{3} + {}^{15)} \frac{4}{1} = {}^3) \frac{-x+2}{5}$$

$$\frac{5(2x-3)}{15} + \frac{60}{15} = \frac{3(-x+2)}{15} \quad | \cdot 15$$

$$5(2x-3) + 60 = 3(-x+2)$$

$$10x - 15 + 60 = -3x + 6$$

$$10x + 3x = 6 + 15 - 60$$

$$13x = -39 \quad | :13$$

$$x = -3$$

$$\text{b) } \frac{8-3x}{6} = \frac{1}{3} - \frac{x}{2}$$

$$\frac{8-3x}{6} = \overset{2)}{\frac{1}{3}} - \overset{3)}{\frac{x}{2}}$$

$$\frac{8-3x}{6} = \frac{2}{6} - \frac{3x}{6} \quad | \cdot 6$$

$$8-3x = 2-3x$$

$$-3x+3x = 2-8$$

$$0x = -6$$

$$0 = -6$$

epätosi

Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

171. Merkitään x = korkeus (cm), jolloin kanta = $x + 3$ (cm)

$$\text{Piiri} = 30 \text{ cm}$$

$$2x + 2(x + 3) = 30$$

$$2x + 2x + 6 = 30$$

$$4x = 30 - 6 \quad | :4$$

$$x = \frac{24}{4} = 6$$

$$\text{Kanta on } x + 3 = 6 + 3 = 9.$$



Vastaus: Korkeus on 6 cm ja kanta on 9 cm.

172. Merkitään x = luokan oppilaat (kpl)

Tansseihin osallistui $\frac{3}{4}x$

Kolme tanssijoista oli sairaana $\frac{3}{4}x - 3$, jolloin tanssijoita oli $x - 10$.

$$\frac{3}{4}x - 3 = x - 10 \quad | \cdot 4$$

$$3x - 12 = 4x - 40$$

$$-x = -28 \quad | :(-1)$$

$$x = 28$$

Vastaus: Oppilaita luokalla oli 28.

$$173. \quad \frac{3}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3+a}{2+4}$$

$${}^6) \frac{3}{2} + {}^3) \frac{a}{4} = {}^2) \frac{3+a}{6}$$

$$\frac{18}{12} + \frac{3a}{12} = \frac{2(3+a)}{12} \quad | \cdot 12$$

$$18 + 3a = 6 + 2a$$

$$3a - 2a = 6 - 18$$

$$a = -12$$

Vastaus: $a = -12$

3.2 Vaillinainen toisen asteen yhtälö

174. a) $(x+1)(2x-1)=0$

$$\begin{array}{l} x+1=0 \\ x=-1 \\ x=-1 \end{array} \quad \text{tai} \quad \begin{array}{l} 2x-1=0 \\ 2x=1 \quad |:2 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}$$

b) $x(x-4)(3x+6)=0$

$$\begin{array}{l} x=0 \quad \text{tai} \quad x-4=0 \\ x=4 \end{array} \quad \text{tai} \quad \begin{array}{l} 3x+6=0 \\ 3x=-6 \quad |:3 \\ x=-2 \end{array}$$

175. a) $(3x-1)(4-x)=0$

$$\begin{array}{l} 3x-1=0 \\ 3x=1 \quad |:3 \\ x=\frac{1}{3} \end{array} \quad \text{tai} \quad \begin{array}{l} 4-x=0 \\ -x=-4 \quad |:(-1) \\ x=4 \end{array}$$

$$\text{b) } 4x^2 + 2x = 0$$

$$2x(2x+1) = 0$$

$$2x = 0 \quad | :2 \quad \text{tai} \quad 2x+1 = 0$$

$$x = 0$$

$$2x = -1 \quad | :2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{176.} \quad \text{a) } 3x^2 - x = 0$$

$$x(3x-1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 3x-1 = 0$$

$$3x = 1 \quad | :3$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } 4x^2 - 12x = 0$$

$$4x(x-3) = 0$$

$$4x = 0 \quad \text{tai} \quad x-3 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = 3$$

$$\text{c) } x - 2x^2 = 0$$

$$x(1 - 2x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 1 - 2x = 0$$

$$-2x = -1 \quad |:(-2)$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$177. \text{ a) } 2x^2 = x$$

$$2x^2 - x = 0$$

$$x(2x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x - 1 = 0$$

$$2x = 1 \quad |:2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } 6x = 36x^2$$

$$6x - 36x^2 = 0$$

$$6x(1 - 6x) = 0$$

$$6x = 0 \quad \text{tai} \quad 1 - 6x = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad -6x = -1 \quad |:(-6)$$

$$x = \frac{1}{6}$$

$$c) -2x = 4x^2$$

$$-2x - 4x^2 = 0$$

$$-2x(1 + 2x) = 0$$

$$-2x = 0 \quad | :(-2) \quad \text{tai} \quad 1 + 2x = 0$$

$$x = 0$$

$$2x = -1 \quad | :2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$178. \quad a) \quad x^2 + 2x = 3x^2 - x$$

$$x^2 + 2x - 3x^2 + x = 0$$

$$x^2 - 3x^2 + 2x + x = 0$$

$$-2x^2 + 3x = 0$$

$$x(-2x + 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad -2x + 3 = 0$$

$$-2x = -3 \quad | :(-2)$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$b) \quad 2x = x^2 - x$$

$$2x + x - x^2 = 0$$

$$3x - x^2 = 0$$

$$x(3 - x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 3 - x = 0$$

$$-x = -3 \quad | :(-1)$$

$$x = 3$$

179. a) $(x+1)^2 = 0$

$$(x+1)(x+1) = 0$$

$$x+1 = 0 \quad \text{tai} \quad x+1 = 0$$

$$x = -1 \qquad \qquad x = -1$$

b) $x(2x-1)^2 = 0$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad (2x-1)^2 = 0$$

$$(2x-1)(2x-1) = 0$$

$$2x-1 = 0 \quad \text{tai} \quad 2x-1 = 0$$

$$2x = 1 \quad | :2 \qquad \qquad 2x = 1 \quad | :2$$

$$x = \frac{1}{2} \qquad \qquad x = \frac{1}{2}$$

180. a) $3x^2 - x = x^2 + x$

$$3x^2 - x^2 - x - x = 0$$

$$2x^2 - 2x = 0$$

$$2x(x-1) = 0$$

$$2x = 0 \quad \text{tai} \quad x-1 = 0$$

$$x = 0 \qquad \qquad x = 1$$

$$\text{b) } (x-1)^2(3x-1)^2 = 0$$

$$x-1=0 \quad \text{tai} \quad 3x-1=0$$

$$x=1 \qquad 3x=1 \quad | :3$$

$$x = \frac{1}{3}$$

181. Esimerkiksi yhtälöt

$$\text{a) } (x-2)(x-6) = 0$$

$$\text{b) } (2x+6)(3x+3) = 0$$

$$\text{c) } (x-a)(x-b) = 0$$

182. Polynomeilla on sama arvo, kun ne ovat yhtäsuuret.

$$\text{a) } x^2 + 2x = x^2$$

$$x^2 - x^2 + 2x = 0$$

$$2x = 0 \quad | :2$$

$$x = 0$$

$$\text{b)} \quad 3x^2 - 2x = x^2 - x$$

$$3x^2 - x^2 - 2x + x = 0$$

$$2x^2 - x = 0$$

$$x(2x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x - 1 = 0$$

$$2x = 1 \quad |:2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{183.} \quad (x + 7 - \sqrt{3})(x + 7 + \sqrt{3}) = 0$$

$$x + 7 - \sqrt{3} = 0 \quad \text{tai} \quad x + 7 + \sqrt{3} = 0$$

$$x = -7 + \sqrt{3}$$

$$x = -7 - \sqrt{3}$$

184. $h(t) = 4t - t^2$

a) $h(2) = 4 \cdot 2 - 2^2 = 8 - 4 = 4$

b) Kun pallo osuu maahan, on korkeus 0 m.

$$4t - t^2 = 0$$

$$t(4 - t) = 0$$

$$t = 0 \quad \text{tai} \quad 4 - t = 0$$

$$-t = -4 \quad | :(-1)$$

$$t = 4$$

Vastaus:

a) Pallo on 4 m korkeudella.

b) Pallo osuu maahan 4 s kuluttua.

185. a) $(x - 2)^2 = 0$

b) $x^2 + 1 = 0$

186. Jos $x = -3$ on juuri, se toteuttaa yhtälön.

$$x(x + p) = 3x$$

$$-3(-3 + p) = 3 \cdot (-3)$$

$$9 - 3p = -9$$

$$-3p = -18 \quad | :(-3)$$

$$p = 6$$

Jos $p = 6$, niin yhtälö on muotoa:

$$x(x + 6) = 3x$$

$$x^2 + 6x - 3x = 0$$

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x + 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x + 3 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -3$$

Vastaus:

Kun $p = 6$, niin yhtälön toinen juuri ($x = -3$ lisäksi) on $x = 0$.

187. a) $x^2 = 81$

$$x = \pm 9$$

b) $x^2 = 3$

$$x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1,7$$

c) $x^2 = -4$

Ei ratkaisua, koska yhtälön oikealta puolelta ei voi ottaa neliöjuurta.

188. a) $x^2 - 1 = 0$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

b) $2x^2 - 32 = 0$

$$2x^2 = 32$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

c) $3x^2 + 9 = 0$

$$3x^2 = -9$$

$$x^2 = -3$$

ei ratkaisuja

$$189. \text{ a) } \frac{1}{2}x^2 - 2 = 0 \mid \cdot 2$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$\text{b) } 3(x^2 - 1) = 0 \mid : 3$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$\text{c) } 3(x^2 - 1) = 3 \mid : 3$$

$$x^2 - 1 = 1$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,4$$

190. a) $x^2 = 7$

$$x = \sqrt{7} \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{7}$$

b) $6x^2 - 20 = 3x^2 + 7$

$$6x^2 - 3x^2 - 20 - 7 = 0$$

$$3x^2 - 27 = 0$$

$$3x^2 = 27 \quad | :3$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3 \quad \text{tai} \quad x = -3$$

c) $4 - 2x^2 = 12$

$$-2x^2 = 12 - 4$$

$$-2x^2 = 8 \quad | :(-2)$$

$$x^2 = -4$$

Minkään reaalityön neliö ei voi olla negatiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

191. a) $0,01s^2 = 1 \quad | \cdot 100$

$$s^2 = 100$$

$$s = \pm\sqrt{100}$$

$$s = \pm 10$$

$$\text{b) } 0,03k^2 - 0,6 = 0$$

$$0,03k^2 = 0,6 \quad | : 0,03$$

$$k^2 = \frac{0,6}{0,03} = 20$$

$$k = \pm\sqrt{20}$$

$$\mathbf{192.} \text{ a) } 2(t^2 + 1) = 3t^2 + 4$$

$$2t^2 + 2 = 3t^2 + 4$$

$$-t^2 = 2 \quad | : (-1)$$

$$t^2 = -2$$

ei ratkaisuja

$$\text{b) } x^2 + 5 = 4x^2 + 32$$

$$-3x^2 = 27 \quad | : (-3)$$

$$x^2 = -9$$

ei ratkaisuja

193. a) $t^2 + 3 = 3$

$$t^2 = 0$$

$$t = 0$$

b) $t^2 + 3 = 12$

$$t^2 = 9$$

$$t = \pm 3$$

c) $t^2 + 3 = 1$

$$t^2 = -2$$

Yhtälöllä ei ole ratkaisuja, eli ei millään

t : n arvoilla

194. Merkitään neliön sivua kirjaimella x , $x > 0$.

Neliön pinta-ala on tällöin x^2 .

Saadaan yhtälö

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{3}, \text{ koska } x > 0.$$

Neliön piiri on silloin $4x = 4\sqrt{3}\text{m} = 6,928\dots\text{m} \approx 6,9\text{m}$.

Vastaus: 6,9 m

195. Turon laiturin ala on

$$5\text{m} \cdot 1,5\text{m} = 7,5\text{m}^2 .$$

Merkitään Petterin laiturin sivua kirjaimella x , $x > 0$.

Saadaan yhtälö

$$x^2 = 7,5$$

$$x = \pm\sqrt{7,5}$$

$$x = \sqrt{7,5} \approx 2,7 ; x > 0$$

Vastaus: Petterin laiturin sivu on 2,7 m.

196. Kaikkiaan lauttaa rakentamiseen kului

$$200\text{m} \cdot 15\text{cm} = 200\text{m} \cdot 0,15\text{m} = 30\text{m}^2 .$$

Jos neliönmuotoisen lattian sivun pituus on x m ($x > 0$),

saadaan yhtälö

$$x^2 = 30$$

$$x = \pm\sqrt{30}$$

$$x = \sqrt{30} \approx 5,5 ; x > 0$$

Vastaus: Neliön muotoisen kuistin mitat ovat 5,5 m ja 5,5 m.

197. Sijoitetaan lausekkeeseen $v^2 + 2x$ x :n arvot ja ratkaistaan yhtälöistä kirjain v .

a) kun $x = -1$,

$$v^2 + 2 \cdot (-1) = 0$$

$$v^2 - 2 = 0$$

$$v^2 = 2$$

$$v = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,41$$

b) kun $x = 1$,

$$v^2 + 2 \cdot 1 = 0$$

$$v^2 + 2 = 0$$

$$v^2 = -2$$

Tällä yhtälöllä ei ole ratkaisuja eli ei millään v :n arvolla.

c) kun $x = 0$,

$$v^2 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$v^2 = 0$$

$$v = 0$$

198. Kun halkaisija d on 1,5 m, säde r on 0,75 m

Ympyrän ala on

$$\pi \cdot r^2 = \pi(0,75 \text{ m})^2 = 0,5625\pi \text{ m}^2.$$

Jos neliön sivu on x , $x > 0$, saadaan yhtälö

$$x^2 = 0,5625\pi \text{ (m}^2\text{)}$$

$$x = \pm\sqrt{0,5625\pi}$$

$$x = \sqrt{0,5625\pi} \approx 1,33 \text{ (m)}; x > 0$$

Vastaus: Neliön muotoisen pöydän mitat ovat 1,3 m x 1,3 m.

199. Neliön ala on $(2,0\text{m})^2 = 4,0\text{m}^2$.

Olkoon ympyrän säde r , $r > 0$.

Kahden ympyrän ala on silloin $2\pi r^2$, jolloin saadaan yhtälö

$$2\pi r^2 = 4,0 \quad | : 2\pi$$

$$r^2 = \frac{4,0}{2\pi}$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{4,0}{2\pi}}$$

$$r = \sqrt{\frac{4,0}{2\pi}} = 0,797884\dots ; r > 0$$

Vastaus: Ympyrän säde on 0,80 m.

200. a) $x^2 = 49$

$$x = \pm 7$$

b) $5x^2 - 125 = 0$

$$5x^2 = 125 \quad | :5$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

c) $4x^2 - 20 = 0$

$$4x^2 = 20 \quad | :4$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \pm\sqrt{5}$$

201. a) $(x - 1)(3x + 2) = 0$

$$x - 1 = 0 \quad \text{tai} \quad 3x + 2 = 0$$

$$x = 1$$

$$3x = -2 \quad | :3$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$\text{b)} \quad 8x^2 - 3x = 2x^2 + x$$

$$8x^2 - 2x^2 - 3x - x = 0$$

$$6x^2 - 4x = 0$$

$$2x(3x - 2) = 0$$

$$2x = 0 \quad | :2 \quad \text{tai} \quad 3x - 2 = 0$$

$$x = 0 \qquad 3x = 2 \quad | :3$$

$$x = \frac{2}{3}$$

$$\mathbf{202. a)} \quad 2x(x+1) = 3x$$

$$2x^2 + 2x - 3x = 0$$

$$2x^2 - x = 0$$

$$x(2x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x - 1 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x = 1 \quad | :2$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \quad x = \frac{1}{2}x(x+1)$$

$$x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}x(1-x) = 0$$

$$\frac{1}{2}x = 0 \quad \left| \cdot \frac{1}{2} \right.$$

$$x = 0$$

$$x = 0$$

$$\text{tai} \quad 1 - x = 0$$

$$\text{tai} \quad -x = -1 \quad |:(-1)$$

$$\text{tai} \quad x = 1$$

$$\text{c) } 2(x^2 - 2x) = 4x(x - 1)$$

$$2x^2 - 4x = 4x^2 - 4x$$

$$2x^2 - 4x^2 - 4x + 4x = 0$$

$$-2x^2 = 0 \quad |:(-2)$$

$$x = 0$$

203. Esimerkiksi seuraavat yhtälöt:

a) $(x + 3)(x - 2) = 0$

b) $(x - 5)(x - 5) = 0$

c) $2x^2 + 1 = 0$

204. Pöytäliinan ala $A = 75 \cdot 150 = 11250 \text{ (cm}^2\text{)}$

Tästä muodostuu neliön muotoinen pöytäliina, jonka sivun pituutta merkitään kirjaimella x , $x > 0$.

$$x^2 = 11250 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$x = \pm\sqrt{11250}$$

$$x = \sqrt{11250} = 106,066\dots(\text{cm}), x > 0$$

Vastaus: Pöytäliinan sivun pituus on noin 110 cm.

3.3 Täydellinen toisen asteen yhtälö

205. a) $x^2 + 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$x = -2 \text{ tai } x = -1$$

b) $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x = 2 \text{ tai } x = 1$$

206. a) $x^2 + x - 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x = -2 \text{ tai } x = 1$$

$$\text{b) } 2x^2 + 4x - 30 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-30)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 16}{4}$$

$$x = -5 \text{ tai } x = 3$$

$$\text{207. a) } -3x^2 + 15x + 18 = 0$$

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 18}}{2 \cdot (-3)}$$

$$= \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 216}}{-6}$$

$$= \frac{-15 \pm \sqrt{441}}{-6}$$

$$= \frac{-15 \pm 21}{-6}$$

$$x = \frac{-15 + 21}{-6} = \frac{6}{-6} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-15 - 21}{-6} = \frac{-36}{-6} = 6$$

$$\text{b) } 4x^2 - 12x - 40 = 0$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-40)}}{2 \cdot 4}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 + 640}}{8}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{784}}{8}$$

$$= \frac{12 \pm 28}{8}$$

$$x = \frac{12 + 28}{8} = \frac{40}{8} = 5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{12 - 28}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

$$\text{208. a) } -2x^2 + 24 = 2x$$

$$-2x^2 - 2x + 24 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 24}}{2 \cdot (-2)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 192}}{-4}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{196}}{-4}$$

$$= \frac{2 \pm 14}{-4}$$

$$x = \frac{2 + 14}{-4} = \frac{16}{-4} = -4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2 - 14}{-4} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$\text{b) } 3x^2 + 18x = -15$$

$$3x^2 + 18x + 15 = 0$$

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 3 \cdot 15}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{-18 \pm \sqrt{324 - 180}}{6}$$

$$= \frac{-18 \pm \sqrt{144}}{6}$$

$$= \frac{-18 \pm 12}{6}$$

$$x = \frac{-18 + 12}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-18 - 12}{6} = \frac{-30}{6} = -5$$

$$\mathbf{209.} \quad \text{a) } 7x^2 - x = 0$$

$$x(7x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 7x - 1 = 0$$

$$7x = 1 \quad | :7$$

$$x = \frac{1}{7}$$

$$\text{b) } 3x^2 = 6x$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$3x = 0 \quad | :3 \quad \text{tai} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 2$$

210. a) $-x^2 + 6x - 9 = 0$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-1)} \\&= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{-2} \\&= \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{-2} \\&= \frac{-6 \pm 0}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3\end{aligned}$$

b) $2y + y^2 + 1 = 0$

$$y^2 + 2y + 1 = 0$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$y = \frac{-2 \pm 0}{2}$$

$$y = -1$$

211. a) $x^2 + 5x + 1 = 0$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\&= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4}}{2} \\&= \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}\end{aligned}$$

$$x = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} = -0,2087\dots \approx -0,21$$

tai

$$x = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} = -4,791\dots \approx -4,79$$

b) $-2x + x^2 - 2 = 0$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$x = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} \approx 2,73 \text{ tai } x = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} \approx -0,73$$

212. a) $2x^2 + 7x = -4$

$$2x^2 + 7x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 32}}{4}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$x = \frac{-7 + \sqrt{17}}{4} = -0,719... \approx -0,72$$

tai

$$x = \frac{-7 - \sqrt{17}}{4} = -2,780... \approx -2,78$$

b) $x(5 + 3x) = -1$

$$3x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{6} \approx -0,23 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{6} \approx -1,43$$

$$213. \text{ a) } -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0 \cdot 6$$

$$-2x^2 + 3x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{-39}}{-4}$$

Negatiivisesta luvusta ei saa neliöjuurta, joten yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

$$\text{b) } -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 = 0 \cdot 2$$

$$-x^2 - x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{-2}$$

$$x = -3 \text{ tai } x = 2$$

214. a) $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0 \mid \cdot 4$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{12 \pm 0}{8}$$

$$x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

b) $-\frac{5}{6}t + t^2 + \frac{1}{6} = 0 \mid \cdot 6$

$$6t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6}$$

$$t = \frac{5 \pm 1}{12}$$

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad t = \frac{1}{3}$$

$$215. \text{ a) } k^2 - k + \frac{1}{4} = 0 \quad | \cdot 4$$

$$4k^2 - 4k + 1 = 0$$

$$k = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$$

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } (x+1)^2 = 9$$

$$x^2 + 2x + 1 = 9$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$x = 2 \text{ tai } x = -4$$

216. Polynomien arvot ovat yhtäsuuret, kun

$$P(x) = Q(x)$$

$$7x^2 - 3x - 12 = 5x^2 - 5x + 28$$

$$7x^2 - 5x^2 - 3x + 5x - 12 - 28 = 0$$

$$2x^2 + 2x - 40 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-40)}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 320}}{4}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{324}}{4}$$

$$= \frac{-2 \pm 18}{4}$$

$$x = \frac{-2 + 18}{4} = \frac{16}{4} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2 - 18}{4} = \frac{-20}{4} = -5$$

Vastaus: $x = 4$ tai $x = -5$

217. Sijoitetaan $x = -4$ yhtälöön, jolloin

$$4p(-4)^2 - 2(-4) - 40 = 0$$

$$64p - 32 = 0$$

$$64p = 32 \quad | :64$$

$$p = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$

Sijoitetaan $p = \frac{1}{2}$ yhtälöön ja ratkaistaan x .

$$4 \cdot \frac{1}{2} x^2 - 2x - 40 = 0$$

$$2x^2 - 2x - 40 = 0$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-40)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{324}}{4}$$

$$x = \frac{2+18}{4} = \frac{20}{4} = 5 \quad \text{tai}$$

$$x = \frac{2-18}{4} = \frac{-16}{4} = -4$$

Vastaus: Kun $p = \frac{1}{2}$, niin toinen juuri ($x = -4$ lisäksi) on $x = 5$.

218. a) $1000x^2 + 2000x + 1000 = 0 \quad | :1000$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm 0}{2}$$

$$x = -1$$

b) $0,0001x^2 + 0,0001x - 0,0002 = 0 \quad | \cdot 10000$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x = 1 \text{ tai } x = -2$$

219. $4\sqrt{3}x = 1 - 4x^2$

$$4x^2 + 4\sqrt{3}x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-4\sqrt{3} \pm \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{-4\sqrt{3} \pm \sqrt{48 + 16}}{8}$$

$$x = \frac{-4\sqrt{3} \pm 8}{8}$$

$$x = \frac{-4\sqrt{3} + 8}{8} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1 \approx 0,13$$

tai

$$x = \frac{-4\sqrt{3} - 8}{8} = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 \approx -1,87$$

220. Sijoitetaan $t = \frac{1}{2}$ yhtälöön.

$$6r\left(\frac{1}{2}\right)^2 - r^2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\frac{6r}{4} - \frac{r^2}{2} - 1 = 0 \quad | \cdot 4$$

$$6r - 2r^2 - 4 = 0$$

$$-2r^2 + 6r - 4 = 0$$

$$r = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$r = \frac{-6 \pm 2}{-4}$$

$$r = 1 \text{ tai } r = 2$$

Kun $r = 1$, saadaan alkuperäinen yhtälö muotoon

$$6 \cdot 1 \cdot t^2 - 1^2 \cdot t - 1 = 0$$

$$6t^2 - t - 1 = 0$$

$$t = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{2 \cdot 6}$$

$$t = \frac{1 \pm 5}{12}$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ tai } t = -\frac{1}{3}$$

Kun $r = 2$, yhtälö saadaan alkuperäiseen muotoon

$$6 \cdot 2 \cdot t^2 - 2^2 \cdot t - 1 = 0$$

$$12t^2 - 4t - 1 = 0$$

$$t = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-1)}}{2 \cdot 12}$$

$$t = \frac{4 \pm 8}{24}$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ tai } t = -\frac{1}{6}$$

Vastaus:

Kun $r = 1$, toinen juuri ($t = \frac{1}{2}$ lisäksi) on $t = -\frac{1}{3}$.

Kun $r = 2$, toinen juuri ($t = \frac{1}{2}$ lisäksi) on $t = -\frac{1}{6}$.

221. $x^2 - x - 1 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,62 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,62$$

Juurista ainoastaan jälkimmäinen on vaaditulla välillä.

Vastaus: $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,62$

222. a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{4-2}{2} = 1$$

b) $2x^2 - 9x - 5 = 0$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{121}}{4}$$

$$x = \frac{9+11}{4} = \frac{20}{4} = 5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{9-11}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

223. **HUOM!** Kirjan 1. painoksessa a-kohdan vastauksessa virhe.

a) $s^2 + 8s + 16 = 0$

$$s = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$s = \frac{-8}{2} = -4$$

$$\text{b) } -2x^2 + 8x - 40 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-40)}}{2 \cdot (-2)} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{-256}}{-4} \end{aligned}$$

Ei ratkaisua, koska neliöjuurta ei voi ottaa negatiivisesta luvusta ($-256 < 0$).

$$\mathbf{224.} \text{ a) } x^2 + x = 56$$

$$x^2 + x - 56 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-56)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2} \end{aligned}$$

$$x = \frac{-1+15}{2} = \frac{14}{2} = 7 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1-15}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$

$$\text{b) } \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0 \quad | \cdot 4$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2 - 4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\mathbf{225.} \text{ a) } 5x^2 - 9x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3}}{2 \cdot 5}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{81 - 60}}{10}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{21}}{10}$$

$$x = \frac{9 + \sqrt{21}}{10} = 1,358... \approx 1,36$$

tai

$$x = \frac{9 - \sqrt{21}}{10} = 0,441... \approx 0,44$$

$$\text{b) } x^2 + 3x = 1$$

$$x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} = 0,302\dots \approx 0,30$$

tai

$$x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} = -3,302\dots \approx -3,30$$

226. Jos $x = 3$ on ratkaisu, niin se toteuttaa yhtälön. Voidaan siis sijoittaa $x = 3$ yhtälöön.

$$4tx^2 - 10t^2x - 24 = 0$$

$$4t \cdot 3^2 - 10t^2 \cdot 3 - 24 = 0$$

$$36t - 30t^2 - 24 = 0$$

$$-30t^2 + 36t - 24 = 0$$

Ratkaistaan yhtälöstä t .

$$-30t^2 + 36t - 24 = 0$$

$$t = \frac{-36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \cdot (-30) \cdot (-24)}}{2 \cdot (-30)}$$

$$t = \frac{-36 \pm \sqrt{-1584}}{-60}$$

Ei ratkaisua, sillä neliöjuurta ei voi ottaa negatiivisesta luvusta ($-1584 < 0$).

3.4 Toisen asteen yhtälön sovelluksia

227. Olkoot kaksi peräkkäistä kokonaislukua x ja $x + 1$.

$$x + (x + 1) = 251$$

$$2x + 1 = 251$$

$$2x = 250$$

$$x = 125$$

Tällöin $x + 1 = 125 + 1 = 126$

Vastaus: Luvut ovat 125 ja 126.

228. Olkoot luvut x ja y , jolloin

$$x + y = 21$$

$$y = 21 - x$$

Neliöiden summasta saadaan yhtälö

$$x^2 + (21 - x)^2 = 333$$

$$x^2 + 441 - 42x + x^2 - 333 = 0$$

$$2x^2 - 42x + 108 = 0$$

$$x = \frac{-(-42) \pm \sqrt{(-42)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 108}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{42 \pm 30}{4}$$

$$x = 18, \text{ jolloin } y = 3 \quad \text{tai}$$

$$x = 3, \text{ jolloin } y = 18.$$

Vastaus: Luvut ovat 3 ja 18.

229. Olkoot kyseiset luvut $2x, 2x + 1, 2x + 2$ ja $2x + 3, x > 0$.

Tällöin $2x$ on pienin luvuista ja se on parillinen.

Parillisten tulo: $2x(2x + 2)$

Parittomien summa: $(2x + 1) + (2x + 3)$

Saadaan yhtälö

$$2x(2x + 2) = 2(2x + 1 + 2x + 3)$$

$$4x^2 + 4x = 8x + 8$$

$$4x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-8)}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{4 \pm 12}{8}$$

$$x = 2 \text{ tai } x = -1 \text{ (ei kelpaa, koska } x > 0)$$

Luvut ovat

$$2x = 2 \cdot 2 = 4$$

$$2x + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$2x + 2 = 6$$

$$2x + 3 = 7$$

Vastaus: Luvut ovat 4, 5, 6 ja 7.

230. HUOM! Kirjan 1. painoksessa vastauksessa virhe.

Olkoon sivujen pituudet x ja y .

$$\text{Tällöin } 2x + 2y = 96 \text{ (m)}$$

$$y = 48 - x \quad (\text{m})$$

Koska sivujen pituudet eivät voi olla negatiivisia lukuja, on muuttujan x on oltava välillä $[0,48]$.

Suorakulmion pinta-alan lauseke on

$$xy = x(48 - x).$$

Saadaan yhtälö

$$xy = 540$$

$$x(48 - x) = 540$$

$$-x^2 + 48x - 540 = 0$$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-540)}}{2 \cdot (-1)}$$

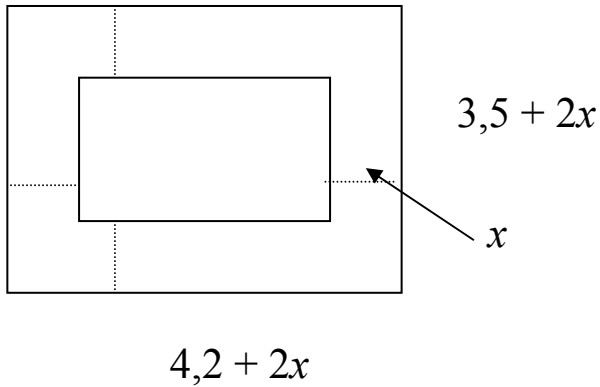
$$x = \frac{-48 \pm 12}{-2}$$

$$x = 30, \text{ jolloin } y = 18 \quad \text{tai}$$

$$x = 18, \text{ jolloin } y = 30$$

Vastaus: Sivujen pituudet ovat siis 18 m ja 30 m.

- 231.** Jos polun leveys on x (m), ovat polun ja kasvimaan yhteismitat $3,5 + 2x$ ja $4,2 + 2x$.



Näin ollen saadaan yhtälö

$$(3,5 + 2x)(4,2 + 2x) = 18,8 \quad (\text{m}^2)$$

$$4x^2 + 15,4x - 4,1 = 0$$

$$x = \frac{-15,4 \pm \sqrt{15,4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-4,1)}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{-15,4 \pm 17,4}{8}$$

$$x = 0,25 \text{ tai } x = -4,1$$

Negatiivinen ratkaisu ei käy, koska polun leveys $x > 0$.

Vastaus: Polun leveys on 0,25 m.

232. Merkitään alkuperäisen neliön sivua kirjaimella x (cm), jolloin ala on x^2 (cm²).

Uudet mitat ovat $x + 2,0$ ja $x + 3,0$.

Muodostuneen suorakulmion pinta-ala on $3x^2$, jolloin saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}(x + 2)(x + 3) &= 3x^2 \\ -2x^2 + 5x + 6 &= 0 \\ x &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 6}}{2 \cdot (-2)} \\ x &= \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{-4} \\ x &= -0,886... \quad \text{tai} \quad x = 3,386...\end{aligned}$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, koska neliön sivu $x > 0$.

Neliön alaksi saadaan $x^2 = (3,386... \text{cm})^2 = 11,465... \text{cm}^2$

Vastaus: Neliön ala on 11 cm^2 .

233. Levyn piiri on 20 m. Merkitään sivuja kirjaimilla x (m) ja y (m).

$$2x + 2y = 20 \text{ (m)}$$

$$y = 10 - x \text{ (m)}$$

Koska sivujen pituudet eivät voi olla negatiivisia lukuja, x voi saada arvoja välillä $[0,10]$.

Saadaan yhtälö

$$xy = 18 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$x(10 - x) = 18$$

$$-x^2 + 10x - 18 = 0$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-18)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{28}}{-2}$$

$$x = 2,354\dots\text{tai } x = 7,64575\dots$$

Jos $x = 2,354\dots$, niin $y = 10 - 2,354\dots = 7,64575\dots$

Jos $x = 7,64575\dots$, niin $y = 2,354\dots$

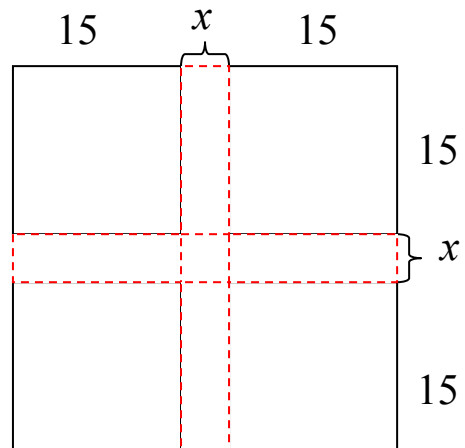
Vastaus: Korkeus on 2,4 m tai 7,6 m.

234. Olkoon ristin leveys x , $x > 0$.

Risti muodostuu neljästä suorakulmiosta ja yhdestä neliöstä.

Alan lauseke on tällöin

$$15x \cdot 4 + x^2$$



Yhden laatan ala on $(15 \text{ cm})^2 = 225 \text{ cm}^2$.

Näin ollen saadaan yhtälö

$$15x \cdot 4 + x^2 = 4 \cdot 225 \text{ (cm)}$$

$$x^2 + 60x - 900 = 0$$

$$x = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-900)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-60 \pm \sqrt{7200}}{2}$$

$$x = 12,426... \text{ tai } x = -72,426...$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, koska ristin leveys $x > 0$.

Vastaus: Raidan leveys on 12,4 cm.

235. Jos mittojen lisäys on x (cm), uudet mitat ovat $x + 5$ ja $x + 3$.

Vanhan ilmoituksen ala on $3\text{cm} \cdot 5\text{cm} = 15\text{cm}^2$.

Uuden ilmoituksen ala on

$$(x + 5)(x + 3) = 3 \cdot 15 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$x^2 + 8x - 30 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{184}}{2}$$

$$x = 2,7823\dots\text{tai } x = -10,78\dots$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, koska mittojen lisäys $x > 0$.

Uuden ilmoituksen mitat ovat

$$x + 5 = (2,7823\dots + 5)\text{cm} = 7,7823\dots\text{cm}$$

ja

$$x + 3 = (2,7823\dots + 3)\text{cm} = 5,7823\dots\text{cm}.$$

Vastaus: Mitat ovat 5,8 cm ja 7,8 cm.

236. Koska kysyntä on 200 kappaletta, niin

$$300 - 7p + 0,01p^2 = 200$$

$$0,01p^2 - 7p + 100 = 0$$

$$p = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 0,01 \cdot 100}}{2 \cdot 0,01}$$

$$p = \frac{7 \pm \sqrt{45}}{0,02}$$

$$p = 685,41 \dots \text{tai } p = 14,5898 \dots$$

Riippuvuus oli voimassa silloin, kun hinta oli alle 30 euroa.

Ratkaisuksi kelpaa vain $p = 14,5898 \dots$ (euroa.).

Vastaus: 15 €

- 237.** Jos korotus on x (euroa), hinta on $3 + x$ (euroa).
Luutia myydään tällöin $100 - 10x$ kappaletta.

Myyntitulot ovat $(3 + x)(100 - 10x)$.

Saadaan siis yhtälö

$$(3 + x)(100 - 10x) = 400 \quad (\text{euroa})$$

$$300 - 30x + 100x - 10x^2 = 400$$

$$-10x^2 + 70x - 100 = 0$$

$$x = \frac{-70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot (-10) \cdot (-100)}}{2 \cdot (-10)}$$

$$x = \frac{-70 \pm 30}{-20}$$

$$x = 2 \text{ tai } x = 5$$

$x = 5$ (€) ei kelpaa, koska $x \leq 3$.

Hintaa on siis korotettava $x = 2$ (€).

Uusi hinta on siis $3 + x = 3 + 2 = 5$ (€)

Vastaus: Luutia voi myydä 5 € hintaan eli korotus on 2 €.

238. Jos hintaa korotetaan x (euroa), $x > 0$, myyntihinta on $10 + x$ (euroa).

Levyjä myydään $60 - 5x$ (kpl)

Kustannukset ovat $2,4(60 - 5x)$

Voitto:

$$(60 - 5x)(10 + x) - 2,4(60 - 5x)$$

$$= 600 + 10x - 5x^2 - 144 + 12x$$

$$= -5x^2 + 22x + 456$$

Jos voitto on 400 (euroa), niin saadaan yhtälö

$$-5x^2 + 22x + 456 = 400$$

$$-5x^2 + 22x + 56 = 0$$

$$x = \frac{-22 \pm \sqrt{22^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (56)}}{2 \cdot (-5)}$$

$$x = \frac{-22 \pm \sqrt{1604}}{-10}$$

$$x = -1,80\dots \text{tai } x = 6,20\dots$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, koska hinnan korotus $x > 0$.

Kun $x = 6,20\dots$, niin levyn uusi hinta on

$$10 + x = 10 + 6,20\dots = 16,20\dots \text{ (€)}$$

Vastaus: Levyn hinnan oltava 16,20 €.

- 239.** Alkuperäisen mainoksen ala on $3\text{cm} \cdot 5\text{cm} = 15\text{ cm}^2$,
jolloin uuden mainoksen ala on $15\text{ cm}^2 + 18\text{ cm}^2 = 33\text{ cm}^2$.

Jos lisättyä korkeutta/leveyttä merkitään kirjaimella x (cm),
uuden mainoksen mitat ovat
 $5 + x$ (cm) ja $3 + x$ (cm).

Uuden mainoksen ala on

$$(5 + x)(3 + x) = 33 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$x^2 + 8x - 18 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{136}}{2}$$

$$x = 1,83095\dots \text{ tai } x = -9,83095\dots$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, koska $x > 0$.

Uuden mainoksen mitat ovat :

$$5 + x = 5 + 1,83095\dots = 6,83095\dots \text{ ja}$$

$$3 + x = 3 + 1,83095\dots = 4,83095\dots$$

Vastaus: Uuden mainoksen mitat ovat 6,8 cm x 4,8 cm.

240. Merkitään $x =$ korkeus (m), $x > 0$, jolloin kanta on $x - 3,0$ (m).

Suorakulmion ala on

$$x(x - 3,0) = 28$$

$$x^2 - 3x - 28 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{121}}{2}$$

$$x = \frac{3+11}{2} = \frac{14}{2} = 7 \quad \text{tai}$$

$$x = \frac{3-11}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, koska korkeus $x > 0$.

Kun $x = 7,0$, niin kanta on $x - 3,0 = 7,0 - 3,0 = 4,0$.

Vastaus: Sivut ovat 7,0 m ja 4,0 m.

241. Merkitään hintaa kirjaimella x ($x \leq 7$).

Kävijämäärä on tällöin $330 - 20x$.

Päivätuottoa kuvaa lauseke $x(330 - 20x)$.

Saadaan siis yhtälö

$$x(330 - 20x) = 1000 \quad (\text{euroa})$$

$$-20x^2 + 330x - 1000 = 0$$

$$x = \frac{-330 \pm \sqrt{330^2 - 4 \cdot (-20) \cdot (-1000)}}{2 \cdot (-20)}$$

$$x = \frac{-330 \pm 170}{-40}$$

$$x = 4 \text{ tai } x = 12,5$$

Koska $x \leq 7$, niin vain $x = 4$ kelpaa ratkaisuksi.

Vastaus: Lipun hinta oli 4 €.

242. Valitaan pariton luku x .

Seuraava pariton luku on $x + 2$.

Näiden tulo on 195, joten saadaan yhtälö

$$x(x + 2) = 195$$

$$x^2 + 2x - 195 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-195)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{784}}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 28}{2} = \frac{26}{2} = 13 \quad \text{tai}$$

$$x = \frac{-2 - 28}{2} = \frac{-30}{2} = -15$$

Kun $x = -15$, niin $x + 2 = -15 + 2 = -13$.

Kun $x = 13$, niin $x + 2 = 13 + 2 = 15$.

Vastaus: Luvut ovat -15 ja -13 tai 13 ja 15 .

243. Luku on x . Sen käänteisluku on $\frac{1}{x}$.

Näille on voimassa yhtälö

$$x) \quad x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$$

$$\frac{x^2 + 1}{x} = \frac{13}{6}$$

$$13x = 6(x^2 + 1)$$

$$13x = 6x^2 + 6$$

$$-6x^2 + 13x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot (-6) \cdot (-6)}}{2 \cdot (-6)}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{25}}{-12}$$

$$x = \frac{-13 + 5}{-12} = \frac{-8}{-12} \stackrel{(4)}{=} \frac{2}{3} \quad \text{tai}$$

$$x = \frac{-13 - 5}{-12} = \frac{-18}{-12} \stackrel{(6)}{=} \frac{3}{2}$$

Kun $x = \frac{2}{3}$, niin käänteisluku $\frac{1}{x} = \frac{3}{2}$.

Kun $x = \frac{3}{2}$, niin käänteisluku $\frac{1}{x} = \frac{2}{3}$.

Vastaus: Luvut ovat $\frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{2}$.

4.1 Suhde ja verranto

$$244. \quad \text{a) } \frac{5\text{m}}{10\text{cm}} = \frac{500\text{cm}}{10\text{cm}} = 50:1$$

$$\text{b) } \frac{200\text{g}}{40\text{kg}} = \frac{200\text{g}}{40000\text{g}} = \frac{1}{200} = 1:200$$

$$\text{c) } \frac{3\text{mm}}{3\text{dm}} = \frac{3\text{mm}}{300\text{mm}} = \frac{1}{100} = 1:100$$

$$\text{d) } \frac{20x}{36x} = \frac{5}{9} = 5:9$$

245. Jäseniä on 200. Ruotsinkielisiä näistä on $\frac{1}{5} \cdot 200 = 40$ ja

suomenkielisiä loput eli $200 - 40 = 160$.

$$\text{a) } \frac{160}{40} = \frac{4}{1} = 4:1$$

$$\text{b) } \frac{160}{200} = \frac{4}{5} = 4:5$$

246. Noora 60 €, Iiro 90 €, Aapo 30 €

$$\text{a) } \frac{60\text{€}}{90\text{€}} = \frac{6^{(3)}}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\text{b) } \frac{30\text{€}}{180\text{€}} = \frac{3^{(3)}}{18} = \frac{1}{6}$$

247. Lukujen suhde on 2:5, joten luvut ovat $2x$ ja $5x$.

Tällöin lukujen summa on

$$2x + 5x = 35$$

$$7x = 35 \quad | :7$$

$$x = 5$$

Luvut ovat

$$2x = 2 \cdot 5 = 10$$

$$5x = 5 \cdot 5 = 25.$$

Vastaus: Luvut ovat 10 ja 25.

248. Lukujen suhde on 3:4. Merkitään lukuja $3x$ ja $4x$.

Lukujen tulo on 192 eli

$$3x \cdot 4x = 192$$

$$12x^2 = 192 \quad | :12$$

$$x^2 = \frac{192}{12}$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

Kun $x = 4$, niin luvut ovat

$$3x = 3 \cdot 4 = 12$$

$$4x = 4 \cdot 4 = 16.$$

Kun $x = -4$, niin luvut ovat

$$3x = 3 \cdot (-4) = -12$$

$$4x = 4 \cdot (-4) = -16.$$

Vastaus: Luvut ovat 12 ja 16 tai -12 ja -16 .

249. Kannan ja korkeuden suhde on 3:5.

Olkoot kanta $3x$ (cm) ja korkeus $5x$. (cm) ($x > 0$).

Alan lauseke on $\frac{3x \cdot 5x}{2}$, jolloin

$$\frac{3x \cdot 5x}{2} = 58 \cdot 2$$

$$15x^2 = 116$$

$$x^2 = \frac{116}{15}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{116}{15}} = \pm 2,780887\dots$$

Negatiivinen ratkaisu ei kelpaa, sillä $x > 0$.

Kanta $3x = 3 \cdot 2,780887\dots = 8,34266\dots$ ja

korkeus $5x = 5 \cdot 2,780887\dots = 13,9044\dots$

Vastaus: Kanta 8,3 cm, korkeus 14 cm

250. a) $\frac{x}{3} = \frac{1}{6}$

$$6x = 3 \quad | :6$$

$$x = \frac{1}{2}$$

b) $\frac{2}{3x} = \frac{4}{12}$

$$12x = 24 \quad | :12$$

$$x = 2$$

c) $\frac{x}{2} = \frac{x-1}{3}$

$$3x = 2(x-1)$$

$$3x = 2x - 2$$

$$x = -2$$

$$251. \text{ a) } \frac{2x+1}{6} = \frac{4-3x}{2}$$

$$2(2x+1) = 6(4-3x)$$

$$4x+2 = 24-18x$$

$$4x+18x = 24-2$$

$$22x = 22 \quad | : 22$$

$$x = \frac{22}{22} = 1$$

$$\text{b) } \frac{x^2-1}{x-2} = \frac{3x-2}{3}$$

$$3(x^2-1) = (x-2)(3x-2)$$

$$3x^2-3 = 3x^2-2x-6x+4$$

$$3x^2-3x^2+2x+6x = 3+4$$

$$8x = 7 \quad | : 8$$

$$x = \frac{7}{8}$$

$$252. \text{ a) } \frac{3x-4}{5} = \frac{2x}{3}$$

$$5 \cdot 2x = 3(3x-4)$$

$$10x = 9x - 12$$

$$10x - 9x = -12$$

$$x = -12$$

$$\text{b) } \frac{x-9}{5} = \frac{1-x}{x}$$

$$x(x-9) = 5(1-x)$$

$$x^2 - 9x = 5 - 5x$$

$$x^2 - 9x + 5x - 5 = 0$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{4+6}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ tai } x = \frac{4-6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$253. \quad \text{a) } \frac{x}{5} = \frac{20}{x}$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \pm 10$$

$$\text{b) } \frac{2x}{10} = \frac{25}{5x}$$

$$10x^2 = 250 \quad | :10$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

$$254. \quad \text{a) } \frac{2}{3x-2} = \frac{3}{4x-2}$$

$$2(4x-2) = 3(3x-2)$$

$$8x-4 = 9x-6$$

$$-x = -2 \quad | :(-1)$$

$$x = 2$$

$$\text{b) } \frac{x-2}{-3x+1} = \frac{x}{x-2}$$

$$(x-2)(x-2) = x(-3x+1)$$

$$x^2 - 4x + 4 = -3x^2 + x$$

$$4x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{-39}}{-4}$$

Ei ratkaisua, koska negatiivisesta luvusta ei voi ottaa neliöjuurta ($-39 < 0$).

255. Merkitään $a =$ alkuperäinen luku ($a > 0$).

Muodostetaan verrantoyhtälö

$$\frac{a}{ka} = \frac{3}{5}$$

$$3ka = 5a \quad | :3a$$

$$k = \frac{5a}{3a} = \frac{5}{3}$$

$$\text{Vastaus: } k = \frac{5}{3}$$

256. Olkoon asiakkaan pituus x (cm).

Pienoismallin korkeuksien suhteesta saadaan verranto

$$\begin{aligned}\frac{2}{25} &= \frac{15}{x} \\ 2x &= 375 \quad | : 2 \\ x &= 187,5\end{aligned}$$

Vastaus: Asiakkaan pituus on 188 cm.

257. Talon korkeus mallissa olkoon x (cm).

Muutetaan pituudet samoiksi yksiköiksi.

$$22 \text{ m} = 2200 \text{ cm}$$

Talon ja kirkon korkeuksien suhteista saadaan verranto

$$\begin{aligned}\frac{32}{x} &= \frac{2200}{670} \\ 2200x &= 21440 \quad | : 2200 \\ x &= 9,74545\dots\end{aligned}$$

Vastaus: Talon korkeus on 9,7 cm.

258. HUOM! Kirjan 1. painoksessa vastauksessa virhe.

Merkitään alkuperäisen tornin korkeutta kirjaimella a , $a > 0$.

Jos ensimmäisen kopion korkeus on x , niin tornin pituuksien suhteesta saadaan

$$\begin{aligned}\frac{4}{3} &= \frac{a}{x} \\ 4x &= 3a \\ x &= \frac{3a}{4}\end{aligned}$$

Jos toisen kopion korkeus on y , niin tornin pituuksien suhteista saadaan

$$\begin{aligned}\frac{4}{3} &= \frac{\frac{3a}{4}}{y} \\ 4y &= 3 \cdot \frac{3a}{4} \\ 4y &= \frac{9a}{4} \quad | :4 \\ y &= \frac{9a}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9a}{16}\end{aligned}$$

Viimeisen kopion ja alkuperäisen suhde on

$$\frac{9a}{16} : a = \frac{9a}{16} \cdot \frac{1}{a} = 9 : 16.$$

Vastaus: 9:16

$$259. \text{ a) } \frac{3x}{4} = \frac{1}{6}$$

$$18x = 4 \quad | :18$$

$$x = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

$$\text{b) } \frac{1-2x}{3} = \frac{4x+2}{-5}$$

$$-5(1-2x) = 3(4x+2)$$

$$-5+10x = 12x+6$$

$$-2x = 11 \quad | : (-2)$$

$$x = -\frac{11}{2} = -5\frac{1}{2}$$

$$260. \text{ a) } \frac{x-4}{3} = \frac{-1}{x}$$

$$x(x-4) = 3 \cdot (-1)$$

$$x^2 - 4x = -3$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x = 3 \quad \text{tai} \quad x = 1$$

$$\text{b) } \frac{x-10}{x^2-20} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 20 = 2(x - 10)$$

$$x^2 - 20 = 2x - 20$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = 2$$

$$261. \text{ a) } \frac{x}{5} = \frac{3}{4x+4}$$

$$x(4x+4) = 3 \cdot 5$$

$$4x^2 + 4x = 15$$

$$4x^2 + 4x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-15)}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{-4 \pm 16}{8}$$

$$x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x = -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \frac{h-3}{3h+2} = \frac{2h-1}{h-2}$$

$$(h-3)(h-2) = (3h+2)(2h-1)$$

$$h^2 - 2h - 3h + 6 = 6h^2 - 3h + 4h - 2$$

$$-5h^2 - 6h + 8 = 0$$

$$h = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 8}}{2 \cdot (-5)}$$

$$h = \frac{6 \pm \sqrt{196}}{-10}$$

$$h = \frac{6+14}{-10} = \frac{20}{-10} = -2 \quad \text{tai}$$

$$h = \frac{6-14}{-10} = \frac{-8}{-10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

262. Lukujen suhde on 1:4. Olkoot luvut x ja $4x$. ($x > 0$)

Tällöin lukujen tulo on

$$x \cdot 4x = 100$$

$$4x^2 = 100$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

Koska $x > 0$, vain toinen ratkaisusta kelpaa eli

$$x = 5 \text{ ja } 4x = 4 \cdot 5 = 20.$$

Vastaus: Luvut ovat 5 ja 20.

263. Olkoon Kyöstin pituus x (cm), jolloin Maikin pituus on $x + 25$ (cm).

Saadaan yhtälö

$$\frac{6}{5} = \frac{x + 25}{x}$$

$$6x = 5(x + 25)$$

$$6x = 5x + 125$$

$$x = 125$$

Vastaus: Kyöstin pituus 125 cm ja Maikin 150 cm.

4.2 Suoraan ja kääntäen verrannolliset suureet

264. a) Matka s on vakio.

Taulukosta nähdään, että nopeuden v kasvaessa aika t pienenee samassa suhteessa. Kyseessä on kääntäen verrannollinen tapaus.

$$\text{nopeus } v = \frac{\text{matka } s}{\text{aika } t}$$

$$\text{matka } s = v \cdot t = 10 \text{ m/s} \cdot 300\text{s} = 3000\text{m} = 3 \text{ km}$$

Vastaus: kääntäen verrannollisuus, matka 3 km

b) Nopeus v on vakio.

Taulukosta nähdään, että matkan s kasvaessa aika t kasvaa samassa suhteessa. Kyseessä on suoraan verrannollinen tapaus.

$$v = \frac{s}{t} = \frac{160 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 80 \text{ km/h}$$

Vastaus: suoraan verrannollisuus, nopeus 80 km/h

265. Muodostetaan verranto, jossa x on oliivien määrä.

Jauheliha (g)	Oliivit (g)
300	150
500	x

$$\frac{300}{150} = \frac{500}{x}$$

$$300x = 75000$$

$$x = 250$$

Vastaus: Tarvitaan 250 g oliiveja.

266. Merkitään kysyttyä makkaramäärää (kg) kirjaimella x .

henkilöiden lkm	makkaran määrä (kg)
14	4,8
17	x

Makkaran määrä ja vieraiden lukumäärä ovat suoraan verrannollisia, joten saadaan verranto

$$\frac{14}{17} = \frac{4,8}{x}$$

$$14x = 17 \cdot 4,8 \quad | :14$$

$$x = \frac{17 \cdot 4,8}{14} = 5,828... \approx 5,8 \text{ (kg)}$$

Vastaus: Makkaraa tarvitaan 5,8 kg.

267. Olkoon x kilpikonnaan ikä. Tällöin

$$\frac{3,5}{2,5} = \frac{70}{x}$$

$$3,5x = 175 \quad | : 3,5$$

$$x = 50$$

Vastaus: Kilpikonna on 50-vuotias.

268. 4 h 45 min = 4 · 60 + 45 min = 285 min.

Muodostetaan verranto, jossa x on aika minuutteina.

Matka (km)	Aika (s)
450	285
200	x

$$\frac{450}{200} = \frac{285}{x}$$

$$450x = 57000$$

$$x = 126,666\dots$$

Muutetaan aika tunneiksi ja minuuteiksi

$$126,666\dots \text{ min} = 2 \text{ h } 6,666\dots \text{ min}$$

Vastaus: 2 h 7 min

269. Merkitään aikaa, joka skootterilla ajettaessa kuluu kirjastoon, kirjaimella x .

Koska keskinopeus pysyy muuttumattomana, ovat aika ja matka suoraan verrannollisia.

aika (min)	matka (km)
10	5,8
x	9,2

$$\frac{10}{x} = \frac{5,8}{9,2}$$

$$5,8x = 10 \cdot 9,2 \quad | : 5,8$$

$$x = \frac{92}{5,8} = 15,862\dots \approx 16 \text{ (min)}$$

Vastaus: Matkaan kuluu aikaa 16 min.

270. Olkoon x Vernerin loppuaika.

Merkitään annetut tiedot taulukkoon.

a)

Matka (km)	Aika (s)
100	18,3
1000	x

$$\frac{100}{10000} = \frac{18,3}{x}$$

$$100x = 183000$$

$$x = 1830 \text{ (s)}$$

$$1830 \text{ s} = 30 \text{ min } 30 \text{ s}$$

b)

Matka (m)	Aika (min)
3600	12
1000	x

$$\frac{3600}{10000} = \frac{12}{x}$$

$$3600x = 120000$$

$$x = 33,333... \text{ (min) eli } 33 \text{ min } 20 \text{ s.}$$

Vastaus: a) 30 min 30 s b) 33 min 20 s

271. a) x on minuuttiviisarin kiertymä

Merkitään annetut tiedot taulukkoon ja muodostetaan verranto.

Aika (min)	Kiertymä (°)
15	90
24	x

$$\frac{15}{24} = \frac{90}{x}$$

$$15x = 2160$$

$$x = 144$$

b) Olkoon x tuntiviisarin kiertymä.

60 minuutissa tuntiviisari kiertyy 30 astetta.

Merkitään annetut tiedot taulukkoon ja muodostetaan verranto.

Aika (min)	Kiertymä (°)
60	30
24	x

$$\frac{60}{24} = \frac{30}{x}$$

$$60x = 720$$

$$x = 12$$

Vastaus: a) 144°

b) 12°

272. Merkitään kysyttyä nopeutta kirjaimella x .

nopeuden neliö (km/h) ²	jarrutusmatka (m)
80 ²	45
x^2	30

Jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön.

$$\frac{80^2}{x^2} = \frac{45}{30}$$

$$45x^2 = 80^2 \cdot 30 \quad | : 45$$

$$x^2 = \frac{192000}{45}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{192000}{45}} = \pm 65,319\dots$$

Koska nopeus ei voi olla negatiivinen, vastaukseksi kelpaa
65,319... km/h \approx 65 km/h.

Vastaus: Nopeus on 65 km/h.

273. Pumppujen määrä on suoraan verrannollinen reiän halkaisijan d neljänteen potenssiin. Jos halkaisija on 1,9 cm, pumppuja tarvitaan x kappaletta.

Pumput (kpl)	d^4 (cm ⁴)
1	1,2 ⁴
x	1,9 ⁴

Saadaan verranto

$$\frac{1}{x} = \frac{1,2^4}{1,9^4}$$

$$2,0736x = 13,0321$$

$$x = 6,28\dots$$

Vastaus: Jotta vene pysyy tyhjänä, tarvitaan 7 pumppua.

274. Taulukoidaan ensin tiedot:

Kalle		Ville	
Aika (h)	Määrä	Aika (h)	Määrä
2	k	4	k
4	$2k$		

4 tunnissa Kalle ja Ville kantavat tiiliä määrän $2k + k = 3k$.

Määrään k heiltä menee x tuntia (suoraan verrannollisuus), jolloin saadaan yhtälö:

$$\frac{4}{x} = \frac{3k}{k}$$

$$\frac{4}{x} = \frac{3}{1}$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{4}{3} \text{ h} = \frac{4}{3} \cdot 60 \text{ min} = 80 \text{ min} = 1 \text{ h } 20 \text{ min}$$

Vastaus: 1 h 20 min

275. Kun etäisyys torista kasvaa, sitä lyhyemmiksi jutut muodostuvat. Palstatila ja etäisyys torista ovat kääntäen verrannollisia.

Ala (palstamm)	Etäisyys (m)
2500	270
x	2000

Saadaan verranto

$$\frac{2500}{x} = \frac{2000}{270}$$

$$2000x = 675000 \quad |: 2000$$

$$x = 337,5$$

Vastaus: noin 340 palstamillimetriä

276. Apulaisten lisääntyessä tarvittava aika pienenee. Kyseessä on kääntäen verrannollisuus.

Henkilöt (kpl)	Aika (h)
2	7
x	4

Saadaan verranto

$$\frac{2}{x} = \frac{4}{7}$$

$$4x = 14 \quad | :4$$

$$x = 3,5$$

Neljä henkilöä tekee urakan alle neljässä tunnissa. Pariskunta tarvitsee siis kaksi apulaista lisää.

Vastaus: Tarvitaan kaksi henkilöä lisää.

277. Kun laatan pinta-ala pienenee, niin tarvittavien laattojen kappalemäärä kasvaa. Kyseessä on kääntäen verrannollisuus.

Ala (cm ²)	Laatat (kpl)
100	350
60	x

Saadaan verranto

$$\frac{100}{60} = \frac{x}{350}$$

$$60x = 35000 \quad | :60$$

$$x = 583,33\dots$$

Jotta lattia saadaan kaakeloitua, laattoja tarvitaan 584 kpl.

Vastaus: noin 584 kpl laattoja

278. a) Olkoon x nopeus (km/h).

Aika (min)	Nopeus (km/h)
45	12
38	x

Aika ja nopeus ovat kääntäen verrannolliset.

$$\frac{45}{38} = \frac{x}{12}$$
$$38x = 540$$
$$x = 14,210\dots$$

Nopeus noin 14 km/h.

b) Työmatkaan kuluu aikaa 45 min = 0,75 h.

Matka = aika · nopeus = 0,75 h · 12 km/h = 9 km.

Puolet matkasta on siis 4,5 km.

Olkoon x loppumatkan nopeus.

Koko matkaan saa kulua aikaa 38 min = $\frac{38}{60}$ h.

Koska aika = matka/nopeus, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{4,5}{12} + \frac{4,5}{x} &= \frac{38}{60} \\ \frac{4,5}{x} &= \frac{38}{60} - \frac{22,5}{60} \\ \frac{4,5}{x} &= \frac{15,5}{60} \\ 15,5x &= 270 \\ x &= 17,4\dots \end{aligned}$$

Loppumatkan nopeus on 17 km/h.

279. Merkitään kysyttyä aikaa kirjaimella x .

nopeus (km/h)	aika (min)
85	45
93	x

Koska ajettu matka pysyy vakiona, niin nopeus ja aika ovat kääntäen verrannollisia. Saadaan siis verranto

$$\begin{aligned} \frac{85}{93} &= \frac{x}{45} \\ 93x &= 85 \cdot 45 \quad | : 93 \\ x &= \frac{3825}{93} = 41,129\dots \approx 41 \text{ (min)} \end{aligned}$$

Vastaus: Aikaa kuluu 41 min.

280. a) Merkitään kysyttyä tiheyttä kirjaimella x .

tilavuus (dm^3)	tiheys (kg/dm^3)
0,35	4,3
0,18	x

Tiheys ja tilavuus ovat kääntäen verrannollisia, joten saadaan verranto

$$\frac{0,35}{0,18} = \frac{x}{4,3}$$

$$0,18x = 0,35 \cdot 4,3 \quad | : 0,18$$

$$x = \frac{1,505}{0,18} = 8,361\dots \approx 8,4 \text{ (kg / dm}^3\text{)}$$

b) Koska $\text{tiheys} = \frac{\text{massa}}{\text{tilavuus}}$, niin massa = tiheys \cdot tilavuus.

Kappaleiden massat ovat siis

$$0,35 \text{ dm}^3 \cdot 4,3 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 1,505 \text{ kg} \approx 1,5 \text{ kg}$$

$$0,18 \text{ dm}^3 \cdot 8,361\dots \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 1,505 \text{ kg} \approx 1,5 \text{ kg}$$

Vastaus: a) $8,4 \text{ kg}/\text{dm}^3$ b) $1,5 \text{ kg}$ molemmat

281. Paine ja tilavuus ovat kääntäen verrannollisia.

Paine (kPa)	Tilavuus (l)
4,6	10
9,5	x

Saadaan verranto

$$\frac{4,6}{9,5} = \frac{x}{10}$$

$$9,5x = 46 \quad | :9,5$$

$$x = 4,842\dots$$

Vastaus: 4,8 l

282. Olkoon intensiteetti etäisyydellä 120 m k , jolloin se on etäisyydellä d metriä $100k$.

Intensiteetti	Etäisyys ² (m ²)
k	120^2
$100k$	d^2

Saadaan verranto

$$\frac{k}{100k} = \frac{d^2}{120^2}$$
$$d^2 \cdot 100 = 120^2$$
$$d^2 = 144$$
$$d = \pm 12$$

Etäisyys d ei voi olla negatiivinen, joten $d = 12$.

Vastaus: Milla siirtyi 12 metrin päähän.

283. Asunnon koko ja hinta ovat suoraan verrannollisia. Merkitään asunnon kokoa kirjaimella x (m²). Taulukoidaan annetut tiedot.

Ala (m²)	Hinta (euro)
63	310 000
x	120 000

Saadaan verranto

$$\frac{63}{x} = \frac{310000}{120000}$$

$$310000x = 7560000$$

$$x = 24,387\dots$$

Vastaus: 24 m²

284. a) Mainonta ja myynti ovat suoraan verrannollisia.
Merkitään mainontaan käytetty rahaa kirjaimella x .
Taulukoidaan annetut tiedot.

Mainonta (euro)	Myynti (euro)
500	1700
x	1300

Saadaan verranto

$$\frac{500}{x} = \frac{1700}{1300}$$

$$1700x = 650000$$

$$x = 382,3529\dots$$

- b) Merkitään myynnin kasvua kirjaimella x .

Mainonta (euro)	Myynti (euro)
500	1700
1200	x

Saadaan verranto

$$\frac{500}{1200} = \frac{1700}{x}$$

$$500x = 2040000$$

$$x = 4080$$

Vastaus: a) 380 € b) 4100 €

285. Valaistus on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön.
Taulukoidaan annetut tiedot.

Valaistus (lx)	Etäisyys ² (m ²)
56	1,5 ²
x	2,3 ²

Saadaan verranto

$$\frac{56}{x} = \frac{2,3^2}{1,5^2}$$

$$5,29x = 126 \quad | : 5,29$$

$$x = 23,8185\dots$$

Vastaus: 24 lx

286. Merkitään kysyttyä nopeutta kirjaimella x .

nopeuden neliö (km/h) ²	normaalikihtiyyys (m/s ²)
60 ²	2,76
x^2	4,91

Normaalikihtiyyys on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön, joten saadaan verranto

$$\frac{60^2}{x^2} = \frac{2,76}{4,91}$$

$$2,76x^2 = 60^2 \cdot 4,91 \quad | : 2,76$$

$$x^2 = \frac{17676}{2,76}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{17676}{2,76}} = \pm 80,027\dots$$

Koska nopeus ei voi olla negatiivinen, vastaukseksi kelpaa

$$80,027\dots \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Vastaus: $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

5.1 Prosenttilaskennan perustilanteita

287. a) $\frac{18}{55} = 0,32727... \approx 33\%$

b) $\frac{2}{55} = 0,03636... \approx 4\%$

288. tytöt 163 216, pojat 169 961, yhteensä $163\ 216 + 169\ 961 = 333\ 177$

a) $\frac{163216}{333177} = 0,489... \approx 49\%$

b) $\frac{169961}{333177} = 0,510... \approx 51\%$

289. On selvittävä, montako prosenttia 30 euroa on alkuperäisestä vuokrasta (580 euroa).

$$\frac{30}{580} = 0,0517 \approx 5\%$$

290. a) Poissa oli 4 oppilasta 28:sta.

$$\frac{4}{28} = 0,1428... \approx 14\%$$

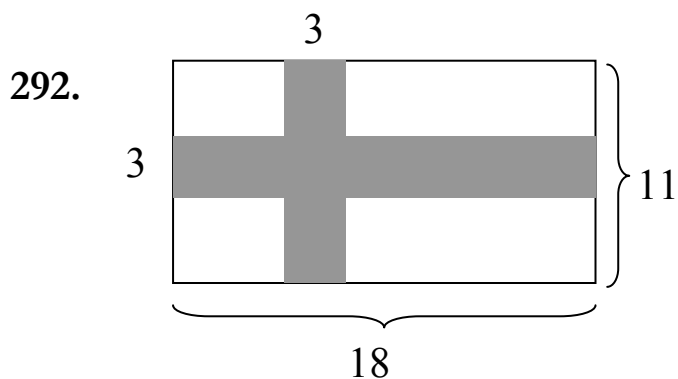
b) Poissa olevista 4 oppilaasta sairaana oli 3.

$$\frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$$

291. Liuoksen massa on 133 g, jossa on 12,4 g kuparisulfaattia.

Pitoisuus eli kuparisulfaatin osuus massaprosentteina koko liuoksesta

$$\frac{12,4 \text{ g}}{133 \text{ g}} = 0,0932... \approx 9,3\%.$$



Vaakasuoran palkin pinta-ala

$$A_1 = 3 \cdot 18 = 54 \text{ (pinta-alayksikköä, pay)}$$

Pystysuoran palkin pinta-ala

$$A_2 = 3 \cdot (11 - 3) = 3 \cdot 8 = 24 \text{ (pay)}$$

Koko ristin pinta-ala

$$A_1 + A_2 = 54 + 24 = 78 \text{ (pay)}$$

Koko lipun pinta-ala $18 \cdot 11 = 198$

$$\text{Sinisen osuus } \frac{78}{198} = 0,3939\dots \approx 39\%$$

Vastaus: 39 %

293. Prosentti on sadasosa.

a) $0,15 \cdot 150 = 22,5$

b) $0,265 \cdot 120 = 31,8$

294. $0,35 \cdot 2 \text{ l} = 0,7 \text{ l}$

295. Liike A:n alennus prosentteina

$$\frac{25}{160} = 0,15625 = 15,625\%$$

Liike B:n alennus oli 15 %.

$$15,625 \% > 15 \%$$

Vastaus: Liike A:n alennus oli suurempi, joten sieltä sai puhelimen halvemmalla.

296. Tiina maksaa veroa

$$0,26 \cdot 1700 = 442$$

Omaan käyttöön jää $100 \% - 26 \% = 74 \%$

$$0,74 \cdot 1700 \text{ €} = 1258 \text{ €}$$

TAI:

$$1700 \text{ €} - 442 \text{ €} = 1258 \text{ €}$$

Vastaus: Veroa maksetaan 442 €. Omaan käyttöön jää 1258 €.

297. Uusi hinta: $100 \% - 20 \% = 80 \%$.

$$0,80 \cdot 62,00 = 49,60 \text{ (euroa)}$$

TAI:

$$\text{Alennus: } 0,2 \cdot 62,00 = 12,40,$$

$$\text{Uusi hinta: } 62,00 - 12,40 = 49,60 \text{ (€)}$$

Vastaus: 49,60 €

298. Koko liuoksen massa on 12 kg

Liuoksen suolapitoisuus on 0,18 %, joten suolan määrä liuoksessa on $0,0018 \cdot 12 \text{ kg} = 0,0216 \text{ kg}$.

Liuoksesta haihtuu nestettä 2 kg, jolloin liuosta on jäljellä 10 kg.

Suolan määrä ei tällöin muutu, joten suolapitoisuus haihtumisen

jälkeen on $\frac{0,0216 \text{ kg}}{10 \text{ kg}} = 0,00216 \approx 0,22\%$

299. Yhtiövastike ennen korotusta: $64,5 \cdot 2 = 129$ (euroa)

Yhtiövastike 85 % korotuksen jälkeen:

$$1,085 \cdot 129 = 139,965$$

Vastaus: 139,97 euroa

300. Matka on 230 km. Nopeudella 90 km/h Vilmalla kuluu aikaa

$$\text{aika } t = \frac{\text{matka } s}{\text{nopeus } v} = \frac{230 \text{ km}}{90 \text{ km/h}} = 2,55\dots \text{h}$$

Nopeus kasvaa 15 % eli

$$0,15 \cdot 90 \text{ km/h} = 13,5 \text{ km/h}$$

Uusi nopeus $90 \text{ km/h} + 13,5 \text{ km/h} = 103,5 \text{ km/h}$

TAI:

Uusi nopeus saadaan myös suoraan: $1,15 \cdot 90 \text{ km/h} = 103,5 \text{ km/h}$

$$\text{Aikaa kuluu tällöin } \frac{230 \text{ km}}{103,5 \text{ km/h}} = 2,222\dots \text{h}$$

Vilma voittaa ajassa $2,55\dots \text{ h} - 2,22\dots \text{ h} = 0,33\dots \text{ h}$

$$0,33\dots \text{ h} = 0,33\dots \cdot 60 \text{ min} = 20 \text{ min}$$

Vastaus: Vilma voittaa 20 min.

301. 1300 kpl levyä, joista jazz-levyjä on 35 % eli
 $0,35 \cdot 1300 = 455$ kpl.

Jazz-levyistä suomalaisia on 20 % eli
 $0,20 \cdot 455 = 91$ kpl.

302. Omenoita: $1,25 \cdot 4500 \text{ kg} = 5625 \text{ kg}$
Banaaneja: $1,35 \cdot 5625 \text{ kg} = 7593,75 \text{ kg}$.

Vastaus: Omenoita 5600 kg ja banaaneja 7600 kg.

303. a = kotitalouksien lukumäärä

$$m = \text{Matkapuhelin} \quad 0,785a \text{ (78,5 \%)}$$

$$l = \text{Lankapuhelin} \quad 0,758a \text{ (75,8 \%)}$$

$$v = \text{Vain matkapuhelin} \quad 0,229a \text{ (22,9 \%)}$$

Niiden kotitalouksien määrä, joilla on käytössä puhelin.

$$l + v = 0,758a + 0,229a = 0,987a$$

Vain lankapuhelin on niillä, joilla ei ole matkapuhelinta.

$$0,987a - 0,785a = 0,202a$$

Vain lankapuhelin 20,2 %:lla kaikista kotitalouksista.

Molemmat puhelimet ovat niillä, joilla ei ole vain toista.

$$0,987a - 0,229a - 0,202a = 0,556a$$

Tätä verrataan lankapuhelimien käyttäjiin eli määrään $0,758a$.

$$\frac{0,556a}{0,758a} = 0,7335\dots \approx 73,4\%$$

Vastaus: Vain lankapuhelin oli 20,2 %:lla.

Lankapuhelimen käyttäjistä 73,4 %:lla oli myös matkapuhelin.

304. a) $1,2 = 120\%$ eli kasvanut 20%
b) $0,35 = 35\%$ eli alentunut 65%
c) $0,003 = 0,3\%$ eli alentunut $99,7\%$
d) $2,5 = 250\%$ eli kasvanut 150%

305. a) $\frac{15}{10} = 1,5$ 50% suurempi
b) $\frac{15}{20} = 0,75$ 25% pienempi

306. a) Verrataan diplodocusen painoon

$$\frac{70000}{40000} = 1,75 = 175\%$$

$$175\% - 100\% = 75\% \quad \text{eli} \quad 75\% \text{ painavampi}$$

- b) Verrataan afrikannorsun painoon

$$\frac{70000}{4000} = 17,5 = 1750\%$$

$$1750\% - 100\% = 1650\% \quad \text{eli} \quad 1650\% \text{ painavampi}$$

Vastaus: a) 75% b) 1650%

307. a) $32,2 - 30 = 2,5$ prosenttiyksikköä

$$\text{b) } \frac{2,5}{30} = 0,0833\dots \approx 8\%$$

308. suolapitoisuus ennen 1,6 %, suolapitoisuus jälkeen 1,1 %

a) alennus prosenttiyksiköinä $1,6 - 1,1 = 0,5$

$$\text{b) } \frac{\text{alennus}}{\text{pitoisuus alussa}} = \frac{0,5}{1,6} = 0,3125 \approx 31\%$$

309. Lasketaan aluksi montako prosenttia 199,50 euroa on 232,50 eurosta.

$$\frac{199,50}{232,50} = 0,85806\dots \approx 86\%$$

Alennusprosentti oli $100\% - 86\% = 14\%$.

310. Täysinäisestä astiasta puuttuu $45 \text{ l} - 34 \text{ l} = 11 \text{ l}$.

Tyhjänä on siis 11 l.

$$\text{Prosentteina } \frac{11}{45} = 0,244\dots \approx 24\%$$

Vastaus: 24 %

311. Tilavuus kasvaa 8 % eli $0,08 \cdot 0,86 \text{ l} = 0,0688 \text{ l}$

$$\text{Kasvanut tilavuus } 0,86 \text{ l} + 0,0688 \text{ l} = 0,9288 \text{ l} < 1 \text{ l}$$

TAI:

$$\text{Kasvanut tilavuus saadaan suoraan: } 1,08 \cdot 0,86 \text{ l} = 0,9288 \text{ l} < 1 \text{ l}$$

Vastaus: Pullo ei halkea.

312. Toimistotyössä oleva kulutti 22 % vähemmän kuin raskaan työn raataja.

Toimistotyössä olevan osuus energiasta on siis:

$$100 \% - 22 \% = 78 \%$$

$$0,78 \cdot 14000 \text{ kJ} = 10920 \text{ kJ}$$

Vastaus: noin 11000 kJ

313. **HUOM! Kirjan 1. painoksen vastauksessa virhe.**

Lääkkeessä on vaikuttavaa ainetta jäljellä: $100 \% - 35 \% = 65 \%$

$$0,65 \cdot 420 \text{ mg} = 273 \text{ mg}$$

Vastaus: 270 mg

314. Tuotteen hinta alussa a (euroa).

Joulun myynti $100\% + 15\% = 115\%$

Hinta on nyt $1,15a$

Alennusmyynti (20 %) $100\% - 20\% = 80\%$

Hinta on tämän jälkeen $0,8 \cdot 1,15a = 0,92a$

Alussa hinta oli a (100 %).

Hinta oli muuttunut: $100\% - 92\% = 8\%$

Vastaus: Hinta laski 8 %.

315. Alussa kalat painoivat a .

1. kasvu 12 % paino: $1,12a$

2. kasvu 15 % paino: $1,15 \cdot 1,12a$

3. kasvu 8 % paino: $1,08 \cdot 1,15 \cdot 1,12a = 1,39104a$ (139,104 %)

Lisäystä on siis tullut $139,104\% - 100\% = 39,104\%$

Vastaus: Kalat olivat kasvaneet 39 %.

316. Vaateliike:

1. alennus 40 %, joten uusi hinta on $0,6 \cdot 46,50 = 27,90$ (euroa)

2. alennus 40 %, jolloin uusi hinta on $0,6 \cdot 27,90 = 16,74$ (euroa)

Tavaratalo:

Alennus on 70 %, jolloin uusi hinta on

$0,3 \cdot 46,50 = 13,95$ (euroa)

$13,93 \text{ €} < 16,74 \text{ €}$, joten paita kannattaa ostaa tavaratalosta.

Vastaus: Kannattaa ostaa tavaratalosta.

317. Hinta alussa a (euroa)

Vuoden alussa $1,11a$

Vuoden lopussa $1,11 \cdot 1,11 a = 1,2321 a$

Muutos alkuperäiseen verrattuna: $123,21 \% - 100 \% = 23,21 \%$

Vastaus: Hinta nousi 23 %.

318. Merkitään tuotteen hintaa alussa kirjaimella x ja kysyntää kirjaimella y .

Kootaan tehtävän tiedot taulukkoon.

	Tilanne alussa	Tilanne lopussa
Hinta (€)	x	$1,18 x$
Kysyntä (kpl)	y	$0,77 y$
Myyntitulot (€)	xy	$1,18 x \cdot 0,77 y$

Myyntitulot muutoksen jälkeen ovat siis $1,18x \cdot 0,77y = 0,9086xy$.

Verrattuna alussa oleviin myyntituloihin xy se on 0,9086-kertaistunut eli laskenut $(100 - 90,86) \% = 9,14 \% \approx 9,1 \%$.

Vastaus: Myyntitulot laskivat 9,1 %.

319. a) Veroja maksetaan 653 euroa 2010 eurosta.

$$\frac{653}{2010} = 0,3248... \approx 32,5 \%$$

- b) Käteen jää loput eli $100 \% - 32,5 \% = 67,5 \%$.

Vastaus a) 32 % b) 67,5 %

320. Korotus 26 %. Uusi hinta on

$$1,26 \cdot 1,9 = 2,394 \quad (\text{euroa})$$

TAI:

$$\text{Korotus } 0,26 \cdot 1,9 = 0,494 \quad (\text{euroa})$$

$$\text{Uusi hinta } 1,9 + 0,494 = 2,394 \approx 2,4 \quad (\text{euroa})$$

Vastaus: 2,40 € (tai 2,39 €)

321. Vero on 28,5 %, jolloin rahaa jää $100 \% - 28,5 \% = 71,5 \%$.

$$\text{Rahaa jää verojen jälkeen: } 0,715 \cdot 2300 = 1644,5 \quad (\text{euroa}).$$

$$\text{Lainojen maksuun: } 0,1 \cdot 1644,5 = 164,45 \quad (\text{euroa})$$

$$\text{Rahaa jää tämän jälkeen: } 1644,5 - 164,45 = 1480,05 \quad (\text{euroa})$$

Vuokran (600 euroa) jälkeen käyttörahaa jää:

$$1480,05 - 600 = 880,05 \quad (\text{euroa}).$$

Vastaus: 880 €

322. Hameen pituus alussa a .

Lyhennys 15 %, jolloin hameen pituus oli

$100 \% - 15 \% = 85 \%$ alkuperäisestä eli $0,85a$.

Uusi lyhennys 20 %, jolloin hameen pituus oli $100 \% - 20 \% = 80 \%$

edellisestä pituudesta eli $0,80 \cdot 0,85a$.

$$0,80 \cdot 0,85a = 0,68a.$$

Hameen pituus alussa oli a (100%)

Hameen pituus muuttui $100 \% - 68 \% = 32 \%$.

Vastaus: Pituus lyheni 32 %.

323. Merkitään vadelmamehun määrää kirjaimella a
Vadelmamehussa sokeria $0,084a$.

Sekoitusuhde on 1:2, jolloin 1 osa on vadelmamehua ja 2 osaa puolukkamehua.

Puolukkamehun määrä $2a$

Puolukkamehussa sokeria $0,031 \cdot 2a$

Sokeria yhteensä $0,084a + 0,062a = 0,146a$

Mehua yhteensä $2a + a = 3a$

Sokeripitoisuus

$$\frac{0,146a}{3a} = 0,04866\dots \approx 4,9\%$$

Vastaus: 4,9 %

5.2 Prosenttiyhtälöitä

324. Merkitään kysyttyä lukua kirjaimella x .

$$1,15x = 276 \quad | :1,15$$

$$x = \frac{276}{1,15} = 240$$

Vastaus: Luku on 240.

325. Merkitään x = paino kesän lopussa

$$0,55x = 32 \quad | :0,55$$

$$x = 58,1818\dots$$

Vastaus: Hylkeen paino oli 58 kg.

326. Merkitään kysyttyä nopeutta kirjaimella x .

$$1,18x = 95 \quad | :1,18$$

$$x = \frac{95}{1,18} = 80,508 \approx 81 \text{ (km/h)}$$

Vastaus. 81 km/h

327. Sokeriliuoksessa on sokeria $0,1 \cdot 10\,000 \text{ kg} = 1000 \text{ kg}$

Merkitään $x =$ sokerijuurikkaiden määrä

$$0,18x = 1000 \quad | :0,18$$

$$x = 5555,55\dots$$

Vastaus: Sokerijuurikkaita tarvitaan n. 5,6 tonnia.

328. Merkitään $x =$ sokerin määrä

$$\frac{x}{500+x} = 0,06 \quad | \cdot (500+x)$$

$$x = 0,06(500+x)$$

$$x = 30 + 0,06x$$

$$0,94x = 30 \quad | :0,94$$

$$x = 31,91\dots$$

Vastaus: 32 grammaa

329. Merkitään $x =$ bensiinin hinta ennen korotusta

$$1,054 \cdot 1,062x = 1,22$$

$$1,119348x = 1,22 \quad | :1,119348$$

$$x = 1,0899\dots \approx 1,09 \text{ (euroa)}$$

Vastaus: 1,09 €

330. Merkitään $x =$ käyttöraja

$$0,025x = 150 \quad |:0,025$$

$$x = 6000$$

Merkitään $y =$ bruttotulot

$$0,12y = 6000 \quad |:0,12$$

$$y = 50000$$

Vastaus: Vuotuiset bruttotulot ovat 50 000 €

331. Merkitään kirjan tukkuhintaa kirjaimella x .

Myyntihinta on tällöin $1,22x$.

Jos kirjan myyntihinta on 18,00 €, niin sen tukkuhinta x saadaan yhtälöstä

$$1,22x = 18,00 \quad |:1,22$$

$$x = \frac{18,00}{1,22} = 14,754\dots(\text{€})$$

Tukkuhintaa alennettiin 3,5 € eli uusi tukkuhinta on

$$14,754\dots - 3,5 = 11,254\dots (\text{€}).$$

Uusi myyntihinta on tällöin $1,22 \cdot 11,254\dots \text{€} = 13,73 \text{€}$.

332. Bruttopalkka 2500 euroa.

$$\text{Nettopalkka } 0,68 \cdot 2500 = 1700 \text{ (euroa)}$$

$$\text{Käteen jää } 0,55 \cdot 1700 = 935 \text{ (euroa)}$$

Olkoon $x =$ vuokra.

Nettopalkasta otetaan pois vuokra ja 100 euroa, jolloin saadaan käteen jäävä osuus 935 euroa.

$$1700 - x - 100 = 935$$

$$-x = -665 \quad | :(-1)$$

$$x = 665$$

Vastaus: Vuokra oli 665 €.

333. Merkitään $a =$ alkuperäinen perushinta

$$1,08a = 22,30 \quad | :1,08$$

$$a = \frac{22,30}{1,08} = 20,648\dots$$

Uusi perushinta: $20,648\dots - 4,20 = 16,448$ (€)

Uusi myyntihinta saadaan lisäämällä 8 % uuteen perushintaan.

$$1,08 \cdot 16,448\dots = 17,764 \approx 17,76 \text{ (€)}$$

Vastaus: 17,76 €

334. Merkitään $x =$ myyntihinta

$$0,88x = 1,2 \cdot 125$$

$$0,88x = 150 \quad | :0,88$$

$$x = 170,45... \approx 170$$

Vastaus: Myyntihinnan on oltava 170 €.

335. Suolaa $0,15 \cdot 2,5 \text{ l} = 0,375 \text{ l}$

Merkitään $x =$ laimennetun liuoksen tilavuus

Suolan määrä säilyy laimennettaessa.

$$0,05x = 0,375 \quad | :0,05$$

$$x = 7,5$$

Vastaus: Liuoksen tilavuus laimennettuna 7,5 litraa.

336. Merkitään prosenttikerrointa kirjaimella x .

$$140x = 189 \quad | :140$$

$$x = 1,35$$

Tästä voidaan päätellä kysytty prosenttiluku

$$135 \% - 100 \% = 35 \%$$

Vastaus: suurennettava 35 %

337. Merkitään $x =$ prosenttikerroin

$$x \cdot 1,2 = 0,85 \quad | :1,25$$

$$x = \frac{0,85}{1,2} = 0,708... \approx 71\%$$

Hintaa on laskettava $100 \% - 71 \% = 29 \%$

Vastaus: 29 %

338. 2 kk sähkölasku alussa 3970 € 2kk sähkölasku nyt 3150 €

a) Sähkölasku pienenee siten, että se x -kertaistuu alussa olevaan laskuun nähden, jolloin saadaan yhtälö

$$x \cdot 3970 = 3150 \quad | : 3970$$

$$x = \frac{3150}{3970} = 0,7934\dots$$

Sähkönkulutus siis laski $(100 - 79,34) \% = 20,66 \% \approx 21 \%$.

b) Merkitään kuukausikohtaista tavoitetta siten, että sähkölasku ja kulutus a -kertaistuu kuukausittain.

sähkölasku alussa 3970 (€)

1kk jälkeen $a \cdot 3970$

2 kk jälkeen $a \cdot a \cdot 3970 = a^2 \cdot 3970$

Saadaan siis yhtälö

$$3970 a^2 = 3150 \quad | : 3970$$

$$a^2 = \frac{3150}{3970}$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{3150}{3970}} = \pm 0,8907\dots$$

Kuukausittainen säästö on $(100 - 89,07) \% = 10,924\dots \% \approx 11 \%$.

Vastaus: a) 21 % b) 11 %

339. Merkitään myyntiä alussa kirjaimella a .

Myynti 2 vuoden jälkeen on $2a$.

Merkitään vuosittaista kasvua siten, että myynti x -kertaistuu vuodessa. Tutkitaan myynnin muuttumista taulukon avulla.

Aika (vuosina)	Myynti (€)
0	a
1	$x \cdot a$
2	$x \cdot x \cdot a = x^2 a$

Koska toisaalta 2 vuoden kuluttua myynti on $2a$, niin saadaan yhtälö

$$x^2 a = 2a \mid : a \quad (a \neq 0)$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2} = \pm 1,414\dots$$

Kasvua on siis $(141,4\dots - 100) \% = 41,4\dots \% \approx 41 \%$

Vastaus: 41 %

340. Merkitään a = matkustajamäärä alussa

$$0,77ax = a \quad |: a$$

$$0,77x = 1 \quad |: 0,77$$

$$x = 1,2987... \approx 130\%$$

Matkustaja määrän on lisääntynyt

$$130\% - 100\% = 30\%.$$

Vastaus: 30 %

341. Lassi painaa $80 \text{ kg} + 8 \text{ kg} = 88 \text{ kg}$.

Merkitään x = prosenttikerroin.

$$x \cdot 88 = 80$$

$$x = \frac{80}{88} = 0,909... \approx 91\%$$

On siis laihduttava $100\% - 91\% = 9\%$

Vastaus: 9 %

342. Turpeen massa	a
Vettä	$0,6a$
Muuta	$0,4a$

Haihduttamisen jälkeen:

Turpeen massa	xa
Vettä	$0,2xa$
Muuta	$0,8xa$

Muun aineen määrä pysyy samana:

$$0,8xa = 0,4a \mid : 0,8a$$
$$x = 0,5$$

$$\text{Vettä haihdutuksen jälkeen:} \quad 0,2 \cdot 0,5a = 0,1a$$

$$\text{Vettä on haihdutettu:} \quad 0,6a - 0,1a = 0,5a.$$

$$\text{Tämä on prosentteina:} \quad \frac{0,5a}{0,6a} = 0,8333\dots = 83\%$$

Vastaus: Vettä on haihdutettava 83 %.

343.	Alussa	Lopussa
Määrä	a	$0,84a$
Hinta	b	xb
Tulot	ab	ab

$$0,84a \cdot xb = ab \quad |: ab$$

$$0,84x = 1 \quad |: 0,84$$

$$x = 1,1904\dots = 119,04\dots\%$$

$$\text{Nousua } 119,04\dots\% - 100\% = 19,04\dots\%$$

Vastaus: Hinnan on noustava 19 %.

344. Merkitään $x =$ palkka.

Pidätys 37 %, jolloin jäljelle jää (käteen) $100\% - 37\% = 63\%$

$$0,63x = 1622 \quad |: 0,63$$

$$x = 2574,603\dots$$

Verojen osuus oli siis: $25774,603\dots - 1622 = 952,603\dots$ (euroa)

Vastaus: 953 €

345. Merkitään

 $H =$ Heikin pisteet $L =$ Liisan pisteet $M =$ Maijan pisteet

$$H = 1,14L \quad \text{ja} \quad L = 1,20M$$

$$1,14L = 54 \quad | :1,14$$

$$L = 47,368\dots \approx 47$$

$$1,20M = L \quad | :1,20$$

$$M = \frac{L}{1,20}$$

$$M = \frac{47,368\dots}{1,20} = 39,47\dots \approx 39$$

Vastaus: Liisa sai 47 pistettä. ja Maija sai 39 pistettä.

346. Merkitään x = lainan määrä (euroa)

1. lyhennys: jäljellä $0,95x$

2. lyhennys: $0,95 \cdot 0,95x$

3. lyhennys $0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95x = 0,95^3 x$

Lainaa on nyt jäljellä 8574 (euroa).

Saadaan yhtälö

$$0,95^3 x = 8574$$

$$0,857375x = 8574 \quad | :0,857375$$

$$x = 10000,29\dots$$

Vastaus: 10 000 euroa

347. asukasluku alussa 21 500

asukasluku 2 vuoden kuluttua 25 300

Merkitään vuosittaista kasvua siten, että asukasluku x -kertaistuu.

Tutkitaan asukasluvun muutosta taulukon avulla.

Aika (vuosina)	Myynti (€)
0	21 500
1	$x \cdot 21\,500$
2	$x \cdot x \cdot 21\,500 = x^2 \cdot 21\,500$

Koska toisaalta asukasluku 2 vuoden kuluttua on 25 300, saadaan yhtälö

$$x^2 \cdot 21500 = 25300 \quad | :21500$$

$$x^2 = \frac{25300}{21500}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{25300}{21500}} = \pm 1,0847\dots$$

Vuosittaista kasvua on siis $(108,47\dots - 100) \% = 8,47\dots \% \approx 8,5 \%$.

Vastaus: 8,5 %

348. Merkitään a = hinta aluksi.

Uusi hinta $1,07a$

Merkitään x = prosenttikerroin

Uusi hinta alennuksen jälkeen on $x \cdot 1,07a$

Tämän hinnan tulee olla 93 % alkuperäisestä hinnasta a .

Saadaan siis yhtälö

$$x \cdot 1,07a = 0,93a \quad | :1,07a$$

$$x = \frac{0,93a}{1,07a} = 0,8691\dots = 86,91\dots\%$$

Hintaa on siis laskettava

$$100\% - 86,91\dots\% = 13,08\dots\%$$

Vastaus: 13 %

6 Kertausosa

$$1. \quad a) \left| \frac{1}{\left(-\frac{1}{4}\right)} \right| = |-4| = 4$$

$$b) -\left(\frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)} \right) = -\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{5}{4} = -1\frac{1}{4}$$

$$2. \quad a) |-\sqrt{121}| - |2 - |-3|| = |-11| - |2 - 3| = 11 - |-1| = 11 - 1 = 10$$

$$b) 2 \cdot \sqrt{100 - 36} = 2 \cdot \sqrt{64} = 2 \cdot 8 = 16$$

$$3. \quad a) -2 - (-3 \cdot (-4) : 6) = -2 - (12 : 6) - 2 - 2 = -4$$

$$b) 2 - \{3 - 4 : [6 - (-4 + 8)]\} = 2 - \{3 - 4 : [6 - 4]\} \\ = 2 - \{3 - 4 : 2\} = 2 - \{3 - 2\} = 2 - \{1\} = 1$$

$$c) -5 - (-10) : 2 - (+3) \cdot (-3) = -5 - (-5) - (-9) = -5 + 5 + 9 = 9$$

4. a) $8 \cdot 655 + 8 \cdot 345 = 8(655 + 345) = 8 \cdot 1000 = 8000$

b) $3 \cdot 2345 - 3 \cdot 1245 = 3(2345 - 1245) = 3 \cdot 1100 = 3300$

5. a) ${}^4)\frac{1}{5} - {}^5)\frac{3}{4} = \frac{4}{20} - \frac{15}{20} = -\frac{11}{20}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{4}{2}} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$

c) $\frac{2}{7} : \frac{3}{14} = \frac{2}{7} \cdot \frac{14}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

6. a) $-{}^4)\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2} + \frac{5}{12} = -\frac{8}{12} - \frac{5}{2} + \frac{5}{12} = -\frac{8}{12} - \frac{30}{12} + \frac{5}{12} = -\frac{33}{12} = -2\frac{3}{4}$

b) $1 + \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1 + 3 = 4$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } -\frac{3}{4} - \frac{5}{6} : \left(-\frac{6}{15}\right) &= -\frac{3}{4} - \frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{15}{6}\right) \\
 &= -\frac{3}{4} + \frac{75}{36} \stackrel{9)}{=} -\frac{3}{4} + \frac{75}{36} = -\frac{27}{36} + \frac{75}{36} \\
 &= \frac{48}{36} \stackrel{12)}{=} \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

$$7. \quad \text{a) } 1\frac{7}{8} - 2 \cdot 1\frac{3}{4} = \frac{15}{8} - \frac{2 \cdot 7}{1 \cdot 4} = \frac{15}{8} - \frac{14}{4} \stackrel{2)}{=} \frac{15}{8} - \frac{28}{8} = -\frac{13}{8} = -1\frac{5}{8}$$

$$\text{b) } 3\frac{3}{5} : \frac{9}{25} = \frac{18}{5} \cdot \frac{25}{9} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{1} = 10$$

$$8. \quad \text{a) } x^4 \cdot x^8 \cdot x^5 = x^{4+8+5} = x^{17}$$

$$\text{b) } (t^4)^5 = t^{4 \cdot 5} = t^{20}$$

$$\text{c) } \frac{x^{24}}{x^{19}} = x^{24-19} = x^5$$

$$\text{d) } (2x^3y^2)^4 = 2^4(x^3)^4(y^2)^4 = 16x^{12}y^8$$

$$9. \quad a) \frac{a^3 \cdot a^{-7}}{a^{-6}} = \frac{a^{3-7}}{a^{-6}} = a^{3-7-(-6)} = a^2$$

$$\text{Kun } a = 4, \quad a^2 = 4^2 = 16.$$

$$b) 2a^{-3} = \frac{2}{a^3}$$

$$\text{Kun } a = 4, \quad \frac{2}{a^3} = \frac{2}{4^3} = \frac{2}{64} = \frac{1}{32}.$$

$$10. \quad a) -3 \cdot 2^0 + 3^{-1} = -3 \cdot 1 + \frac{1}{3} = -3 + \frac{1}{3} = -2\frac{2}{3}$$

$$b) -1^{200} - (-1)^{400} - (-1)^{601} = -1 - 1 + 1 = -1$$

$$c) \left(2\frac{2}{7}\right)^2 = \left(\frac{16}{7}\right)^2 = \frac{16^2}{7^2} = \frac{256}{49} = 5\frac{11}{49}$$

11. a) $10^{9500} \cdot 0,1^{9498} = 10^2 \cdot 10^{9498} \cdot 0,1^{9498}$
 $= 10^2 \cdot (10 \cdot 0,1)^{9498} = 100 \cdot 1^{9498} = 100 \cdot 1 = 100$

b) $\left(\frac{a^m \cdot a^{2m-1}}{a^{-3m-2}} \right) \cdot a^{1-5m} = a^{m+2m-1-(-3m-2)} \cdot a^{1-5m}$
 $= a^{6m+1} \cdot a^{1-5m} = a^{6m+1+1-5m} = a^{m+2}$

12. $-(-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 10 = -4 + 6 + 10 = 12$

13. a)
 $-4x^2 + 3x - (-9x + x^2)$
 $= -4x^2 + 3x + 9x - x^2$
 $= -5x^2 + 12x$

b)
 $5a - [-(2a - 4b) - (2 - 2b)]$
 $= 5a - [-2a + 4b - 2 + 2b]$
 $= 5a + 2a - 4b + 2 - 2b$
 $= 7a - 6b + 2$

14.

$$\begin{aligned} & [(y^2 - 4y) + (3y - 2y^2)] - [(y^2 - 4y) - (3y - 2y^2)] \\ &= [y^2 - 4y + 3y - 2y^2] - [y^2 - 4y - 3y + 2y^2] \\ &= y^2 - 4y + 3y - 2y^2 - y^2 + 4y + 3y - 2y^2 \\ &= -4y^2 + 6y \end{aligned}$$

15. a) $6(2x - 3) = 12x - 18$

b) $-3(4 - 5x) = -12 + 15x$

c) $(4y - 7)(-2y) = -8y^2 + 14y$

16. a) $\frac{15x + 30}{5} = \frac{15x}{5} + \frac{30}{5} = 3x + 6$

b) $\frac{6x^2 - 12x - 18}{-6} = \frac{-6(x^2 + 2x + 3)}{-6} = x^2 + 2x + 3$

17. a)

$$\begin{aligned}P(x) - Q(x) &= 4x - 7 - (2 - 5x) \\ &= 4x - 7 - 2 + 5x \\ &= 9x - 9\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}P(x) - P(x)Q(x) &= 4x - 7 - (4x - 7)(2 - 5x) \\ &= 4x - 7 - (8x - 20x^2 - 14 + 35x) \\ &= 4x - 7 - 8x + 20x^2 + 14 - 35x \\ &= 20x^2 - 39x + 7\end{aligned}$$

18. a) $5x(-3x^2 + 4x - 2)$

$$= -15x^3 + 20x^2 - 10x$$

b) $(5x - 2)(-2x + 4)$

$$= -10x^2 + 20x + 4x - 8$$

$$= -10x^2 + 24x - 8$$

c) $(x^2 - 3x + 1)(6x + 2)$

$$= 6x^3 + 2x^2 - 18x^2 - 6x + 6x + 2$$

$$= 6x^3 - 16x^2 + 2$$

19. a) $(x - 3)(1 - 5x)$
 $= x - 5x^2 - 3 + 15x$
 $= -5x^2 + 16x - 3$

b) $[(x - 3) + (1 - 5x)][(x - 3) - (1 - 5x)]$
 $= (x - 3 + 1 - 5x)(x - 3 - 1 + 5x)$
 $= (-4x - 2)(6x - 4)$
 $= -24x^2 + 16x - 12x + 8$
 $= -24x^2 + 4x + 8$

20. a) $-2x(x - 2) + (3 - x)(x - 1)$
 $= -2x^2 + 4x + (3x - 3 - x^2 + x)$
 $= -2x^2 + 4x + 3x - 3 - x^2 + x$
 $= -3x^2 + 8x - 3$

b) $(x - 2)^2 = (x - 2)(x - 2) = x^2 - 2x - 2x + 4 = x^2 - 4x + 4$

21. hinta (€)	määrä (kpl)
9,00	23
$9,00 + 0,50$	$23 - 4 \cdot 0,5 = 23 - 2$
$9,00 + 1$	$23 - 4 \cdot 1 = 23 - 4$
$9,00 + 1,5$	$23 - 4 \cdot 1,5 = 23 - 6$
$9,00 + x$	$23 - 4x$

Myyntiä kuvaa polynomi

$$m(x) = (9,00 + x)(23 - 4x)$$

a) $m(4,00) = (9,00 + 4,00)(23 - 4 \cdot 4,00) = 91,00$ (€)

b) $m(-2,50) = (9,00 - 2,50)(23 - 4 \cdot (-2,50)) = 214,50$ (€)

22. a) $\frac{3x+6}{2x-1} - \frac{7-x}{2x-1} = \frac{3x+6-(7-x)}{2x-1} = \frac{3x+6-7+x}{2x-1} = \frac{4x-1}{2x-1}$

b) $\frac{2}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{4+3}{2x} = \frac{7}{2x}$

$$23. \quad a) \frac{5x}{x+1} \cdot \frac{3}{10x} = \frac{5 \cdot 3}{(x+1) \cdot 10} = \frac{3}{2(x+1)} = \frac{3}{2x+2}$$

$$b) \frac{2x+5}{3x} : \frac{2x-3}{6x} = \frac{2x+5}{3x} \cdot \frac{6x}{2x-3} = \frac{2(2x+5)}{2x-3} = \frac{4x+10}{2x-3}$$

$$24. \quad a) 24x^2 - 8x = 8x(3x-1)$$

$$b) -3ab^2 + 6a^2b = 3ab(-b+2a)$$

$$25. \quad a) \frac{-4x^3 + 10x^2 + 8x}{-2x} = \frac{-2x(2x^2 - 5x - 4)}{-2x} = 2x^2 - 5x - 4$$

$$b) \frac{6x^2 - 3x}{4x - 2} = \frac{3x(2x-1)}{2(2x-1)} = \frac{3x}{2}$$

26. a) $4x - 9 = 15 - 2x$

$$4x + 2x = 15 + 9$$

$$6x = 24 \quad |:6$$

$$x = 4$$

b) $2 - (3x - 1) = -2(8x - 2)$

$$2 - 3x + 1 = -16x + 4$$

$$-3x + 16x = 4 - 3$$

$$13x = 1 \quad |:13$$

$$x = \frac{1}{13}$$

27. a) $\frac{x+1}{2} - \frac{4-2x}{4} = 5x$

$$\frac{2(x+1)}{4} - \frac{4-2x}{4} = \frac{20x}{4} \quad | \cdot 4$$

$$2(x+1) - (4-2x) = 20x$$

$$2x + 2 - 4 + 2x = 20x$$

$$4x - 20x = -2 + 4$$

$$-16x = 2 \quad | :(-16)$$

$$x = \frac{2}{-16} = -\frac{1}{8}$$

$$\text{b) } {}^{15)} 2 - \frac{{}^5) 2x}{{}^3) 3} = \frac{{}^3) 1}{5}$$

$$\frac{30}{15} - \frac{10x}{15} = \frac{3}{15} \quad | \cdot 15$$

$$30 - 10x = 3$$

$$-10x = 3 - 30$$

$$-10x = -27 \quad | : (-10)$$

$$x = \frac{-27}{-10} = \frac{27}{10}$$

28. a) Kulutus $6,2 \text{ l}/100 \text{ km} = 0,062 \text{ l}/\text{km}$

Merkitään ajettujen kilometrien määrää kirjaimella x .

Ajaminen dieselillä maksaa $420 + 0,062 \cdot 0,95x$

Ajaminen bensalla maksaa $0,062 \cdot 1,25x$

Lasketaan kilometrimäärä, jolla diesel ja bensa ovat yhtä edulliset.

$$420 + 0,062 \cdot 0,95x = 0,062 \cdot 1,25x$$

$$420 + 0,0589x = 0,0775x$$

$$420 = 0,0775x - 0,0589x$$

$$420 = 0,0186x$$

$$0,0186x = 420 \quad | : 0,0186$$

$$x = 22\,580,6\dots$$

$$x \approx 22\,600 \text{ (km)}$$

b) Dieselin kulutus : $5,0 \text{ l}/100 \text{ km} = 0,05 \text{ l /km}$

Bensan kulutus: $6,0 \text{ l/km} = 0,06 \text{ l /km}$

Lasketaan kilometrimäärä, jolla diesel ja bensa ovat yhtä edulliset, kun ajetaan x km.

$$420 + 0,95 \cdot 0,05x = 0,06 \cdot 1,25x$$

$$420 + 0,0475x = 0,075x$$

$$420 = 0,075x - 0,0475x$$

$$420 = 0,0275x$$

$$0,0275x = 420 \quad |:0,0275$$

$$x = 15\,272,7\dots$$

$$x \approx 15\,300 \text{ (km)}$$

Vastaus:

a) Dieselautilla ajettava vähintään 22 600 km.

b) Dieselautilla on ajettava vähintään 15 300 km.

29. Perusosa 1200 €

Provisio $0,2 \cdot 140 \text{ € /puhelin} = 28 \text{ € /puhelin}$

Merkitään myytyjen puhelimien määrää kirjaimella x .

a) Kuukausipalkkaa kuvaa lauseke $1200 + 28x$

b) Kuukausipalkka, kun myydään 120 puhelinta, on

$$1200 + 28 \cdot 120 = 4560 \text{ (€)}.$$

c) $1200 + 28x = 4000$

$$28x = 4000 - 1200$$

$$28x = 2800 \quad |:28$$

$$x = 100$$

4000 € kuukausipalkkaan on myytävä 100 kpl puhelimia.

30. Merkitään kanojen määrää kirjaimella x .
Sikojen määrää kuvaa lauseke $26 - x$.

Koska eläimillä on jalkoja yhteensä 82 kappaletta saadaan yhtälö:

$$2x + 4 \cdot (26 - x) = 82$$

$$2x + 104 - 4x = 82$$

$$-2x = 82 - 104$$

$$-2x = -22 \quad |:(-2)$$

$$x = 11$$

Kanoja on 11 kpl, joten sikoja on $26 - 11 = 15$ kpl.

31. a) $x^2 + 8x = 0$

$$x(x + 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x + 8 = 0$$

$$x = -8$$

Vastaus: $x = 0$ tai $x = -8$

b) $3x^2 = 4x$

$$3x^2 - 4x = 0$$

$$x(3x - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } 3x - 4 = 0$$

$$3x = 4 \quad |:3$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$\text{Vastaus: } x = 0 \text{ tai } x = \frac{4}{3}$$

32. a) $2x^2 = 50 \quad |:2$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

b) $3x^2 - 12 = 0$

$$3x^2 = 12 \quad |:3$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

c) $x^2 + 3 = 0$

$$x^2 = -3$$

Ei ratkaisua.

$$33. \quad 2x - x^2 = 5x^2 + x$$

$$-x^2 - 5x^2 + 2x - x = 0$$

$$-6x^2 + x = 0$$

$$x(-6x + 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad -6x + 1 = 0$$

$$-6x = -1 \quad | :(-6)$$

$$x = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Vastaus: } x = 0 \text{ tai } x = \frac{1}{6}$$

$$34. \quad \text{a) } x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$x = \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2-8}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$\text{b) } x^2 - 14x + 49 = 0$$

$$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{14}{2} = 7$$

Vastaus: a) $x = 3$ tai $x = -5$ b) $x = 7$

$$35. \quad \text{a) } ^2) 3x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{6x^2}{2} - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \quad | \cdot 2$$

$$6x^2 - 3x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3)}}{2 \cdot 6}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{12}$$

$$x = \frac{3 \pm 9}{12}$$

$$x = \frac{3+9}{12} = \frac{12}{12} = 1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3-9}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{b) } -2x^2 + x - 16 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-16)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-127}}{-4}$$

Juurrettava -127 negatiivinen, joten ei ratkaisua.

$$36. \quad \text{a) } x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Vastaus: $x = 1$ tai $x = 2$

$$\text{b) } 4a^2 = 11a - 6$$

$$4a^2 - 11a + 6 = 0$$

$$a = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 6}}{2 \cdot 4}$$

$$a = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{8}$$

$$a = \frac{11 \pm 5}{8}$$

$$a = \frac{11+5}{8} = \frac{16}{8} = 2 \quad \text{tai} \quad a = \frac{11-5}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Vastaus: } a = 2 \text{ tai } a = \frac{3}{4}$$

$$37. \quad x^2 + ax - 6a = 0$$

Koska $x = -6$ on yhtälön ratkaisu, niin

$$(-6)^2 + a(-6) - 6a = 0$$

$$36 - 6a - 6a = 0$$

$$-12a = -36 \quad | :(-12)$$

$$a = 3$$

Yhtälö on siis muotoa:

$$x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm 9}{2}$$

$$x = \frac{-3 + 9}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-3 - 9}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

Vastaus: $a = 3$, toinen ratkaisu $x = 3$

38. $x^2 - 2x - 20 = 36 - x$

$$x^2 - 2x + x - 20 - 36 = 0$$

$$x^2 - x - 56 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-56)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{225}}{2}$$

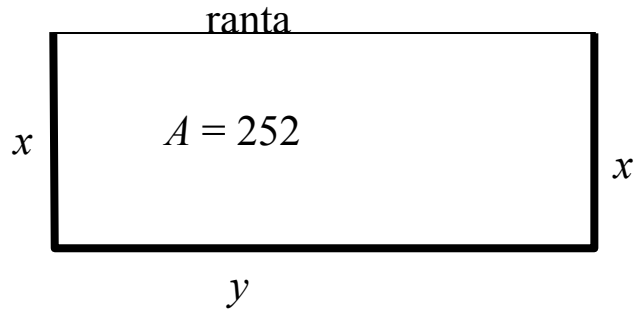
$$x = \frac{1 \pm 15}{2}$$

$$x = \frac{1 + 15}{2} = \frac{16}{2} = 8 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1 - 15}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

39.

$$2x + y = 46$$

$$y = 46 - 2x$$



Pinta-alasta saadaan:

$$A = 252$$

$$xy = 252$$

$$x(46 - 2x) = 252$$

$$-x^2 + 23x - 126 = 0$$

$$x = \frac{-23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-126)}}{-2}$$

$$= \frac{-23 \pm \sqrt{25}}{-2}$$

$$x = \frac{-23 + 5}{-2} = 9 \text{ tai } x = \frac{-23 - 5}{-2} = 14$$

Jos $x = 9$, niin $y = 46 - 18 = 28$.Jos $x = 14$, niin $y = 46 - 28 = 18$.

Vastaus:

Jos rannansuuntainen mitta on 28 m, niin muut sivut ovat 9 m.

Jos taas rannansuuntainen mitta on 18 m, niin muut sivut ovat 14 m.

40. Olkoot luvut x ja $x + 2$.

$$x^2 + (x + 2)^2 = 164$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 164$$

$$2x^2 + 4x - 160 = 0 \quad | : 2$$

$$x^2 + 2x - 80 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-80)}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{324}}{2}$$

$$x = \frac{-2 - 18}{2} = -10 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2 + 18}{2} = 8$$

Jos $x = -10$, niin $x + 2 = -8$.

Jos $x = 8$, niin $x + 2 = 10$.

Vastaus: Luvut ovat -10 ja -8 tai 8 ja 10 .

41.

$$-\frac{5}{64}x^2 + \frac{5}{4}x + 1 = 6 \quad | \cdot 64$$

$$-5x^2 + 80x + 64 = 384$$

$$-5x^2 + 80x - 320 = 0 \quad | : (-5)$$

$$x^2 - 16x + 64 = 0$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Vastaus 8 h

42.	SIVU	ALA
Alkuperäinen	x	x^2
Suurennos	$(x + 3)$	$(x + 3)^2$

$$4x^2 = (x + 3)^2$$

$$4x^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$-3x^2 + 6x + 9 = 0 \quad | :(-3)$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{2+4}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2-4}{2} = -1 < 0, \text{ ei käy}$$

Vain $x = 3$ kelpaa, jolloin alkuperäinen ala $x^2 = 3^2 = 9$ ja suurennos on $(x + 3)^2 = 6^2 = 36$.

43. a)

$$\frac{x}{2} = \frac{5}{6}$$

$$6x = 10$$

$$x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

b)

$$\frac{3+2x}{3} = \frac{5-4x}{2}$$

$$6+4x = 15-12x$$

$$16x = 9 \quad |:16$$

$$x = \frac{9}{16}$$

44. a)

$$\frac{3x}{5} = \frac{6}{5x}$$

$$15x^2 = 30$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

b)

$$\frac{x+1}{2} = \frac{x+1}{x-3}$$

$$2x+2 = x^2 - 3x + x - 3$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x = \frac{4+6}{2} = 5 \quad \text{tai} \quad x = \frac{4-6}{2} = -1$$

45. Olkoot suorakulmion sivut $3x$ ja $4x$.

$$A = 120\,000 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$3x \cdot 4x = 120\,000$$

$$12x^2 = 120\,000 \quad | :12$$

$$x^2 = 10\,000$$

$$x = \pm\sqrt{10\,000}$$

$$x = 100 \quad \text{tai} \quad x = -100 < 0, \text{ ei käy}$$

Sivut ovat $3x = 300$ m ja $4x = 400$ m.

Vastaus: 300 m ja 400 m

46.

$$\frac{4}{5} = \frac{124}{x}$$

$$4x = 620 \quad | :4$$

$$x = 155$$

Vastaus: 155 oppilasta

47.

Pituus (cm)	Paino (kg)
185	84
175	x

Suoraan verrannollisuus, joten saadaan yhtälö:

$$185x = 14\,700 \quad | :185$$

$$x = \frac{14\,700}{185} = 79,459\dots \approx 79$$

Vastaus: 79 kg

48. a)

Vajaus (h)	Työteho (%)
0,5	0,15
x	0,25

Suoraan verrannollisuus, joten saadaan yhtälö:

$$0,15x = 0,125 \quad | : 0,15$$

$$x = \frac{0,125}{0,15} = 0,8333\dots \quad (\text{h})$$

$$0,8333\dots \cdot 60 \text{ min} = 50 \text{ min}$$

b)

Vajaus (h)	Työteho (%)
0,5	0,15
2	x

Suoraan verrannollisuus, joten saadaan yhtälö:

$$0,5x = 0,3 \quad | : 0,5$$

$$x = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$$

Prosentteina: $0,6 \cdot 100 = 60\%$

49.

Suure b	Suureen a kuutio (a^3)
100	a^3
150	x^3

Suoraan verrannollisuus, joten saadaan yhtälö:

$$100x^3 = 150a^3 \quad | : 100$$

$$x^3 = \frac{150}{100}a^3 \quad | \sqrt[3]{\quad}$$

$$x = 1,1447\dots a$$

Vastaus: Kasvaa 14 %

50. a) $0,45 \cdot 780 = 351$

b) $\frac{24}{68} = 0,3529\dots$

Prosentteina: $0,3529\dots \cdot 100 \approx 35\%$

c) $\frac{78 - 55}{55} = \frac{23}{55} = 0,418\dots \approx 42\%$

51. a) $3,4 - 2,8 = 0,6$

b) $\frac{0,6}{3,4} = 0,176\dots$

Prosentteina: $0,176\dots \cdot 100\% \approx 18\%$

Vastaus: a) 0,6 prosenttiyksikköä b) 18 %

52. $0,22 \cdot 500 \text{ ml} = 110 \text{ ml}$

53. $\frac{9,4}{11} = 0,8545\dots \approx 85\%$

$100\% - 85\% = 15\%$

Vastaus: 15 %

54. Pili sijoitti 1500 euroa.

Pulla 15 % enemmän, joten Pulla sijoitti $1,15 \cdot 1500 = 1725$ (euroa)

Yhteensä he sijoittivat: $1500 + 1725 = 3225$ (euroa)

Vastaus: 3225 €

55.

	Ennen muutosta	Muutoksen jälkeen
Hinta	a	$1,085a$
Levikki	b	$0,88b$
Tulot	ab	$1,085 \cdot 0,88ab$

$$1,085 \cdot 0,88ab = 0,9548...ab$$

Tulot laskevat $(100 - 95,48...) \% = 4,52... \%$

Vastaus: Tulot laskevat 4,5 %

56. Työntekijöitä oli alussa x .

$$0,85x = 120 \quad | : 0,85$$

$$x = \frac{120}{0,85} = 141,176\dots \approx 141$$

Irtisanottuja työntekijöitä on siis: $141 - 120 = 21$

Vastaus: 21 henkilöä

57. Luku a

Suurennetaan 14 % $1,14a$

Pienennetään 14 % $0,86 \cdot 1,14a$

$$0,86 \cdot 1,14a = 200$$

$$0,9804a = 200 \quad | : 0,9804$$

$$a = \frac{200}{0,9804} = 203,9\dots \approx 204$$

Vastaus: Luku a oli 204.

58. Kohonnut hemoglobiini oli $1,055 \cdot 158 = 166,69$.

Merkitään x laskua kuvaava prosenttikerroin

$$x \cdot 166,69 = 160 \quad | :166,69$$

$$x = \frac{160}{166,69} = 0,959865\dots$$

Hemoglobiini siis laskee $(100 - 95,9865\dots) \% = 4,01\dots \%$

Vastaus: 4,0 %

59. Merkitään sijoitusta kirjaimella x .

Nousun jälkeen: $1,098x$

Laskun jälkeen: $0,82 \cdot 1,098x = 0,90036x$

Tappiota on siis tullut $(100 - 90,036) \% = 9,964 \%$

$$0,09964x = 370 \quad | :0,09964$$

$$x = \frac{370}{0,09964} = 3713,368\dots \approx 3700 \quad (\text{€})$$

Vastaus: Sijoitus oli 3700 €.

1. Harjoituskoe

$$1. \quad a) \quad 5\frac{1}{6} - \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{31}{6} - \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{31-2+3}{6} = \frac{32}{6} = 5\frac{2}{6} = 5\frac{1}{3}$$

$$b) \quad 3 - \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} = 3 - \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{4} = 3 - \frac{4 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 1 \cdot 4} = 3 - 2 = 1$$

$$c) \quad 3 + \frac{4}{3} : \frac{1}{5} = 3 + \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{1} = 3 + \frac{20}{3} = 3 + 6\frac{2}{3} = 9\frac{2}{3}$$

$$2. \quad a) \quad \frac{a^5 10^{28}}{a^4 10^{29}} = \frac{a^5}{a^4} \cdot \frac{10^{28}}{10^{29}} = a \cdot 10^{-1} = \frac{a}{10}$$

$$b) \quad (2k^4)^3 \cdot k^6 = 2^3 (k^4)^3 k^6 = 8k^{12} k^6 = 8k^{18}$$

$$c) \quad \left(\frac{x^2 x^3}{x^7}\right)^{-2} = \left(\frac{x^{2+3}}{x^7}\right)^{-2} = \left(\frac{x^5}{x^7}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{x^2}\right)^{-2} = (x^2)^2 = x^4$$

3. a)

$$\begin{aligned}P(x) + Q(x) &= x^2 - 6x + 7 - 2x^2 + 11x + 4 \\ &= -x^2 + 5x + 11\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}P(x) - Q(x) &= x^2 - 6x + 7 - (-2x^2 + 11x + 4) \\ &= x^2 - 6x + 7 + 2x^2 - 11x - 4 = 3x^2 - 17x + 3\end{aligned}$$

4. a)

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$2x^2 = 8 \quad |:2$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

b)

$$2x^2 - 8x = 0$$

$$2x(x - 4) = 0$$

$$2x = 0 \quad \text{tai} \quad x - 4 = 0$$

$$x = 0 \qquad \qquad x = 4$$

$$\text{c) } \frac{x-1}{2} = \frac{4}{x+1}$$

$$(x-1)(x+1) = 2 \cdot 4$$

$$x^2 + x - x - 1 = 8$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

5. a) Verrataan Kallion asuntoon.

$$\frac{3400}{2300} = 1,478... \approx 148\%$$

$$148\% - 100\% = 48\% \qquad 48\% \text{ kalliimpia}$$

- b) Verrataan Kaivopuiston asuntoon.

$$\frac{2300}{3400} = 0,676... \approx 68\%$$

$$100\% - 68\% = 32\% \qquad 32\% \text{ halvempia}$$

6. vedonlyöntisuhde 1:30

- a) Merkitään saatua voittoa kirjaimella x .

Sijoitettu summa on 85 €, joten saadaan yhtälö

$$\frac{1}{30} = \frac{85}{x}$$

$$x = 30 \cdot 85$$

$$x = 2550 \text{ (€)}$$

- b) Merkitään sijoitettua summaa kirjaimella x .

Saatu voitto on 336 €, joten saadaan yhtälö

$$\frac{1}{30} = \frac{x}{336}$$

$$30x = 336 \quad | : 30$$

$$x = 11,20 \text{ (€)}$$

Vastaus: a) 2550 € b) 11,20 €

7.	Hinta (€)	Myyntimäärä
	302	450 kpl

Merkitään $x =$ korotus euroina

Uusi hinta: $302 + x \cdot 1$

Uusi määrä: $450 - 4x$

Myyntitulo: $(302 + x)(450 - 4x)$

Jos hinta olisi 522 €, alkuperäistä hintaa olisi korotettu

$$522 \text{ €} - 302 \text{ €} = 220 \text{ €}$$

Tällä korotuksella viikkomyynti olisi: $450 - 4 \cdot 220 = -430$ kpl.

Siis ei ole mahdollista myydä hinnalla 522 €, koska viikkomyyntiä ei olisi ollenkaan.

Vastaus: Myyntitulo on $(302 + x)(450 - 4x)$. Ei ole mahdollista myydä hinnalla 522 €, koska viikkomyynti olisi negatiivinen.

8. Merkitään: polkupyöriä x , autoja $2x$ (kpl)

Polkupyörässä on kaksi rengasta ja autossa neljä rengasta.

Saadaan siis yhtälö:

$$2x + 4 \cdot 2x = 120$$

$$10x = 120 \quad |:10$$

$$x = 12$$

Vastaus: Polkupyöriä on 12 kpl.

2. Harjoituskoe

1. a) $a^4 \cdot a^3 \cdot a = a^{4+3+1} = a^8$

b) $\frac{b^8}{b^5} = b^{8-5} = b^3$

c) $\left(\frac{1}{c}\right)^{-3} = c^3$

d) $d^0 = 1$

e) $(-5e)^3 = (-5)^3 \cdot e^3 = -125e^3$

f) $\left(-\frac{3f^3}{2}\right)^4 = \frac{(-3)^4 f^{3 \cdot 4}}{2^4} = \frac{81f^{12}}{16}$

$$2. \quad a) \quad 5\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3} = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$b) \quad {}^{20)} \frac{100}{5} + \frac{3}{100} = \frac{2000+3}{100} = \frac{2003}{100} = 20\frac{3}{100}$$

$$c) \quad 2 - 2\frac{4}{8} + \frac{5}{4} \stackrel{8)}{=} \frac{2}{1} - \frac{20}{8} + \frac{10}{4} \stackrel{2)}{=} \frac{16-20+10}{8} = \frac{6}{8} \stackrel{(2)}{=} \frac{3}{4}$$

$$d) \quad 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2 : \frac{3}{4} = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 4}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$$

$$3. \quad a) \quad \frac{2}{x-3} + \frac{x-4}{x-3} = \frac{2+(x-4)}{x-3} = \frac{2+x-4}{x-3} = \frac{x-2}{x-3}$$

$$b) \quad \frac{(x-5)(x+5)}{x^2-25} = \frac{x^2+5x-5x-25}{x^2-25} = \frac{x^2-25}{x^2-25} = 1$$

$$c) \quad \frac{2x-4}{x} : \frac{3x-6}{2x} = \frac{2(x-2)}{x} \cdot \frac{2x}{3(x-2)} = \frac{4}{3}$$

4. a)

$$P(x) + R(x) = 0$$

$$2x^2 + 1 + x - 1 = 0$$

$$2x^2 + x = 0$$

$$x(2x + 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x + 1 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = -\frac{1}{2}$$

b)

$$P(x) - Q(x) = 0$$

$$2x^2 + 1 - (x + 1) = 0$$

$$2x^2 + 1 - x - 1 = 0$$

$$2x^2 - x = 0$$

$$x(2x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

c)

$$R(x) \cdot Q(x) = 0$$

$$(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{tai} \quad x + 1 = 0$$

$$x = 1 \quad \quad \quad x = -1$$

5. a) $(5x - 2) - (7x - 5) = -4(2x - 1)$

$$5x - 2 - 7x + 5 = -8x + 4$$

$$-2x + 3 = -8x + 4$$

$$-2x + 8x = 4 - 3$$

$$6x = 1 \quad | :6$$

$$x = \frac{1}{6}$$

b) $2(x - 4) + x = 3(x + 5)$

$$2x - 8 + x = 3x + 15$$

$$2x + x - 3x = 15 + 8$$

$$0x = 23$$

$$0 = 23$$

epätosi

Yhtälöllä ei ole ratkaisuja.

c) $\frac{1}{2}x - 1 = \frac{3x - 6}{6}$

$$\frac{1}{2}x - 1 = \frac{3x}{6} - \frac{6}{6}$$

$$\frac{1}{2}x - 1 = \frac{1}{2}x - 1$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = -1 + 1$$

$$0x = 0$$

$$0 = 0$$

tosi

Yhtälön ratkaisuja ovat kaikki luvut.

6. a) $-3x^2 + 12 = 0$

$$-3x^2 = -12 \quad | : (-3)$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

b) $2(x^2 + 2x) = x$

$$2x^2 + 4x = x$$

$$2x^2 + 4x - x = 0$$

$$2x^2 + 3x = 0$$

$$x(2x + 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 2x + 3 = 0$$

$$2x = -3 \quad | : 2$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

c) $3x^2 - 3x - 36 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-36)}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{441}}{6}$$

$$x = \frac{3 \pm 21}{6}$$

$$x = \frac{3+21}{6} = \frac{24}{6} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3-21}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$

7. a) Mitä enemmän oliiveja ostetaan, sen enemmän maksetaan. Kyse on suoraan verrannollisuudesta.

Massa (g)	Hinta (€)
800	2,90
150	x

$$\frac{800}{150} = \frac{2,90}{x}$$

$$800x = 435 \quad | :800$$

$$x = 0,54375$$

Vastaus: Oliivit maksavat 0,54 €

- b) Mitä enemmän henkilöitä on töissä, sen vähemmän kuluu aikaa. Kyse on kääntäen verrannollisuudesta.

Henkilöt (lkm)	Aika (h)
3	8
3+2	x

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{8}$$

$$5x = 24 \quad | :5$$

$$x = 4,8$$

$$0,8 \text{ h} = 0,8 \cdot 60 \text{ min} = 48 \text{ min}$$

$$4,8 \text{ h} = 4 \text{ h } 48 \text{ min}$$

Vastaus: 4 h 48 min

8. Merkitään tuotteen myyntihintaa kirjaimella x .

Tuotteen hinta laskun jälkeen on $0,92x$.

Tuotteen hinta nousun jälkeen on $1,15 \cdot 0,92x$

a) $1,15 \cdot 0,92x = 1,058x$

Hinta on siis 1,058-kertainen alkuperäiseen hintaan verrattuna.

Hinta on siis noussut $(105,8 - 100) \% = 5,8 \%$.

b) Lopullinen hinta on 25,50 €, joten saadaan yhtälö

$$1,058x = 25,50 \quad | : 1,058$$

$$x = \frac{25,50}{1,058} = 24,102\dots \approx 24,10 \text{ (€)}$$

Vastaus: a) 5,8 % b) 24,10 €

3. Harjoituskoe

1. a) $(3k)(3k)(3k) = (3k)^3 = 3^3 k^3 = 27k^3$

b) $(-2a)^3 = (-2)^3 a^3 = -8a^3$

c) $(5x^6)^3 = 5^3 (x^6)^3 = 125x^{18}$

d) $\frac{a^3 a^5}{a^0} = \frac{a^8}{1} = a^8$

e) $\left(\frac{x^{-3}}{x^{-4}}\right)^5 = (x^{-3-(-4)})^5 = (x^1)^5 = x^5$

f) $\left(\frac{2^3 x^{-1}}{2^2}\right)^{-2} = (2^{3-2} x^{-1})^{-2} = 2^{-2} x^{-1 \cdot (-2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 = \frac{1}{4} x^2$

2. a) Merkitään ajettuja kilometrejä kirjaimella x .

Tällöin yhden päivän kokonaisvuokra on $H(x) = 52 + 0,2x$.

b) $H(350) = 52 + 0,2 \cdot 350 = 122$ (€)

3. a) $5x^2 - x = 0$

$$x(5x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 5x - 1 = 0$$

$$5x = 1 \quad | :5$$

$$x = \frac{1}{5}$$

b) $0,5y - 0,2y^2 = 0,2$

$$-0,2y^2 + 0,5y - 0,2 = 0 \quad | \cdot 10$$

$$-2y^2 + 5y - 2 = 0$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-4} = \frac{-5 \pm 3}{-4}$$

$$y = \frac{-5+3}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad y = \frac{-5-3}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$\text{c) } \overset{4)}{\frac{1}{3}}x + \overset{12)}{\frac{4}{1}} = \overset{6)}{\frac{1}{2}} - \overset{3)}{\frac{1}{4}}x$$

$$\frac{4}{12}x + \frac{48}{12} = \frac{6}{12} - \frac{3}{12}x \quad | \cdot 12$$

$$4x + 48 = 6 - 3x$$

$$4x + 3x = 6 - 48$$

$$7x = -42 \quad | : 7$$

$$x = -6$$

$$4. \quad \text{a) } \frac{450}{420} = 1,0714... \approx 107,1 \%$$

$$107,1 \% - 100 \% = 7,1 \%$$

b) Merkitään Mintun pituutta kirjaimella x .

$$0,95x = 166 \quad | : 0,95$$

$$x = 174,73... \text{ (cm)}$$

$$x \approx 175 \text{ (cm)}$$

Vastaus: a) Korotus oli 7 %.

b) Mintun pituus on 175 cm.

5. Kootaan annetut tiedot taulukkoon.

Paine(kPa)	Tilavuus (dm ³)
302	3,6
p	5,6

Koska paine on kääntäen verrannollinen tilavuuteen, saadaan verranto

$$\frac{302}{p} = \frac{5,6}{3,6}$$

$$5,6p = 3,6 \cdot 302 \quad |:5,6$$

$$p = 194,14\dots \approx 194 \text{ (kPa)}$$

6. Merkitään tuotteen alkuperäistä hintaa kirjaimella a .

Tällöin korotettu hinta on $1,18a$.

Merkitään hinnan laskua kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella x .

$$x \cdot 1,18a = a \quad |:a$$

$$1,18x = 1 \quad |:1,18$$

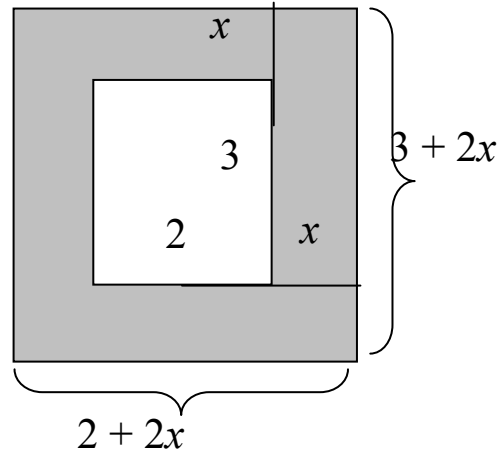
$$x = 0,8474\dots \approx 85 \%$$

$$100 \% - 85 \% = 15 \%$$

Vastaus: Hintaa on laskettava 15 %.

7. Merkitään hiekkakäytävän leveyttä kirjaimella x .

Muodostetaan lauseke hiekkakäytävän pinta-alalle.



$$\begin{aligned} & (2 + 2x)(3 + 2x) - 2 \cdot 6 \\ &= 6 + 4x + 6x + 4x^2 - 6 \\ &= 10x + 4x^2 \end{aligned}$$

Koska hiekkaa oli käytettävissä 18 m^2 alueelle, saadaan yhtälö

$$4x^2 + 10x = 18$$

$$4x^2 + 10x - 18 = 0$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-18)}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{388}}{8}$$

$$x = 1,212\dots \text{ (m)} \quad \text{tai} \quad x = -1,40\dots \text{ (m)}$$

Koska käytävän leveyden tulee olla positiivinen luku, negatiivinen vastaus ei käy.

Vastaus: Käytävän leveys on 1,2 m.

8. Myyntitulot saadaan hinnan ja kysynnän tulona.

$$x \cdot (4x - 5) = 148,50$$

$$4x^2 - 5x - 148,50 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-148,50)}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{2401}}{8}$$

$$x = \frac{5 \pm 49}{8}$$

$$x = 6,75 \text{ (€)} \text{ tai } x = -5,5 \text{ (€)}$$

Myyntihinta ei voi olla negatiivinen, joten vastaukseksi kelpaa vain positiivinen luku.

Vastaus: 6,75 €

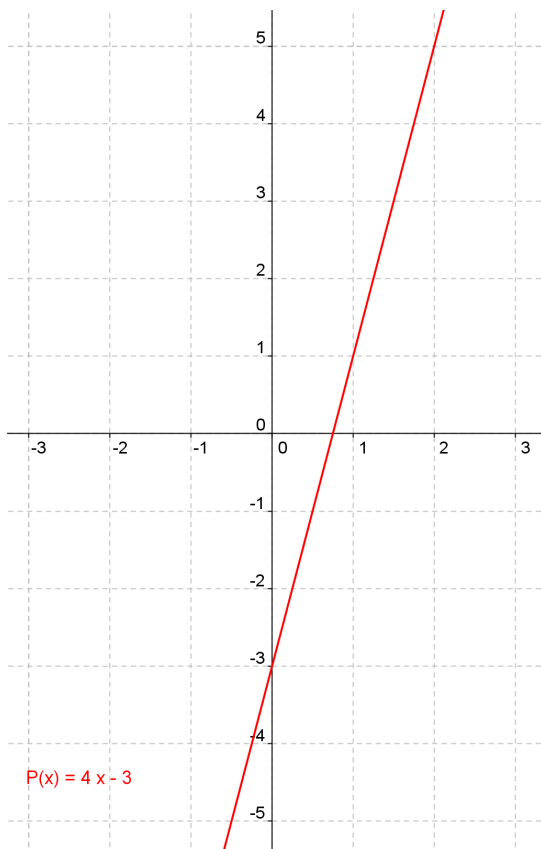
7 Ekstrat

Kymmenen potenssit

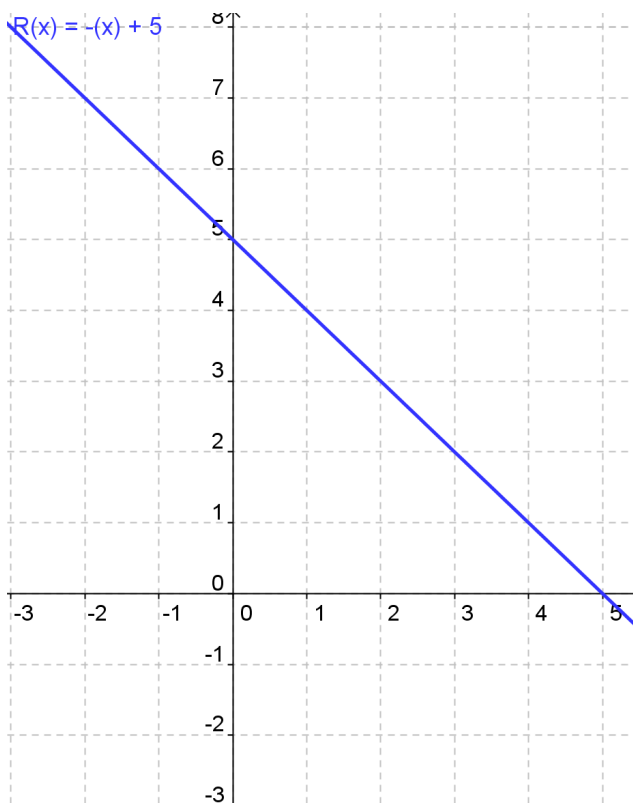
1. a) $5,4 \cdot 10^{-4} = 0,00054$ b) $5,1 \cdot 10^{-4} = 0,00051$
c) 0,0006 d) 0,00515
2. a) 120 b) -120 000
c) 0,12 d) 0,000 012
3. a) $7,065 \cdot 10^9$ b) $1,2 \cdot 10^{-5}$ c) $-7,065 \cdot 10^{-4}$
4. a) 10^{30} b) 10^{-93}
c) 10^{46} d) $3 \cdot \frac{10^{70}}{10^{10}} = 3 \cdot 10^{60}$
5. $\frac{180 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{3,0 \cdot 10^{-8} \text{ m}} = 60 \cdot 10^{-2+8} = 60 \cdot 10^6$
60 000 000-kertainen

Polynomifunktio

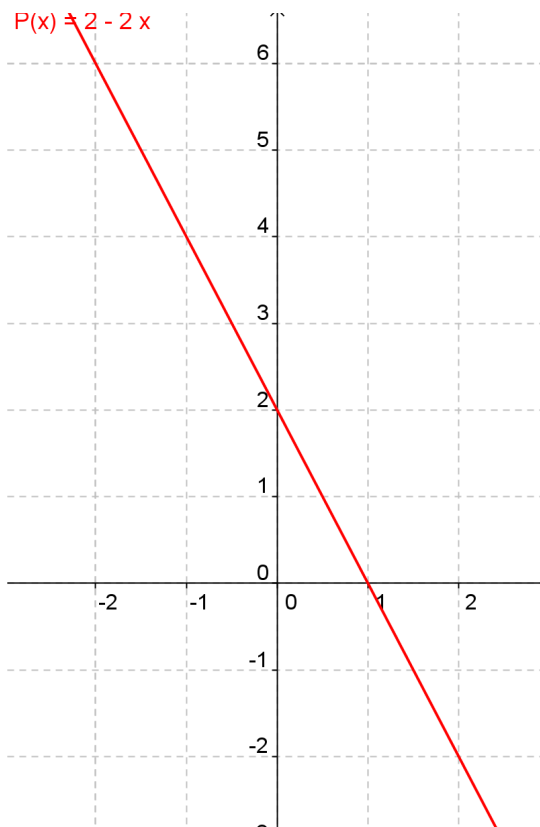
9. a)



b)



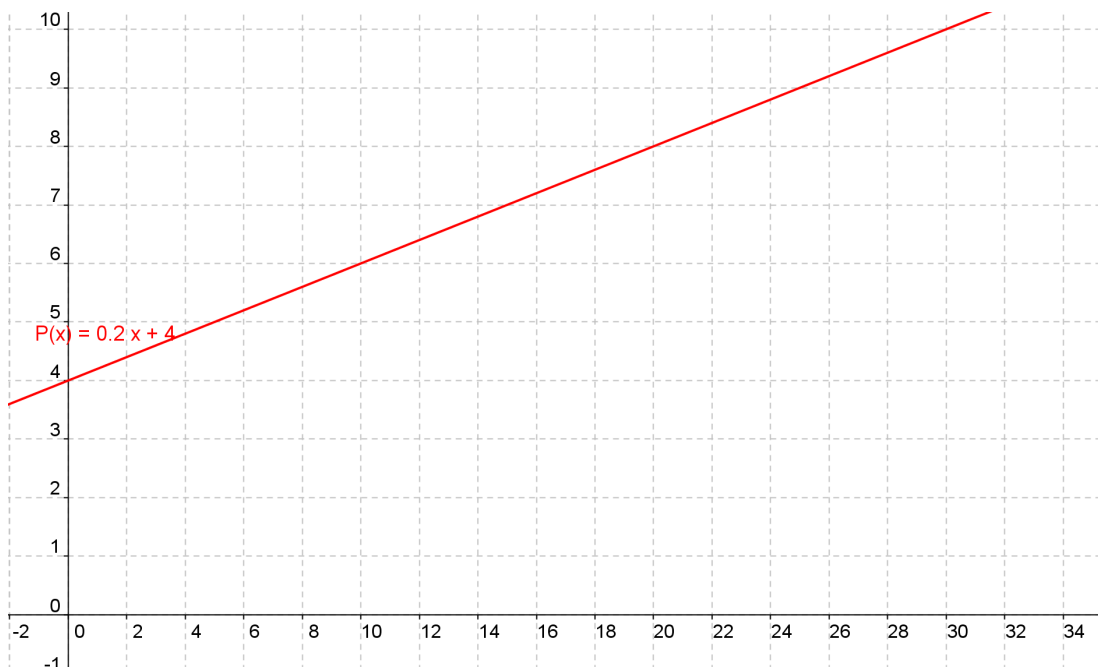
c)



10. a) $F(2) \approx -1$ b) $F(3) \approx -4$ c) $F(0) \approx 5$

11. a) $x \approx 1,5$ b) $x \approx 1$ c) $x \approx 2,5$

12.

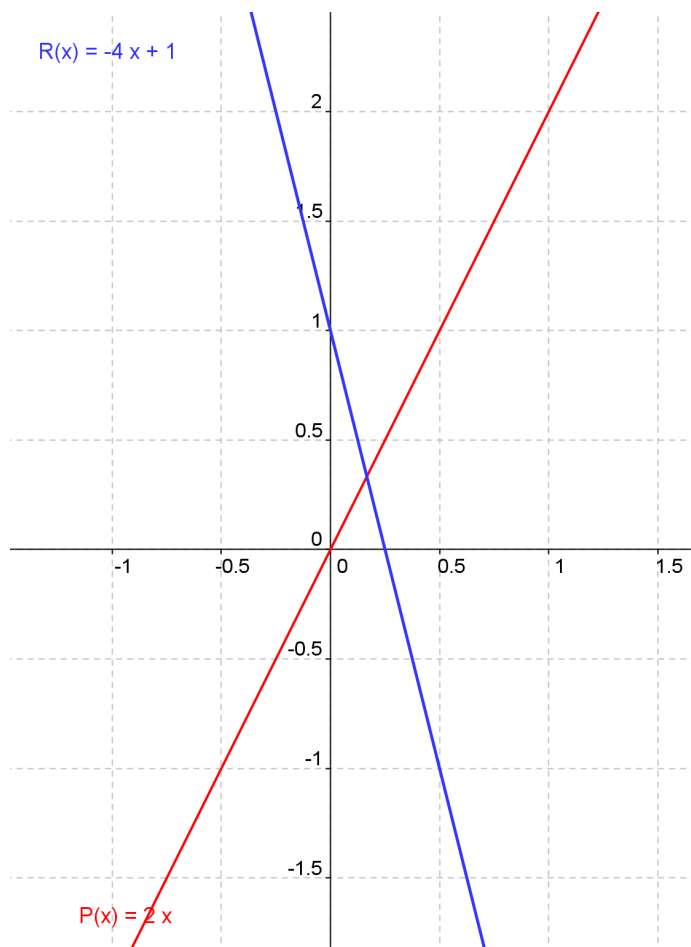


a) 9

b) 30 pistettä

c) 15 pistettä

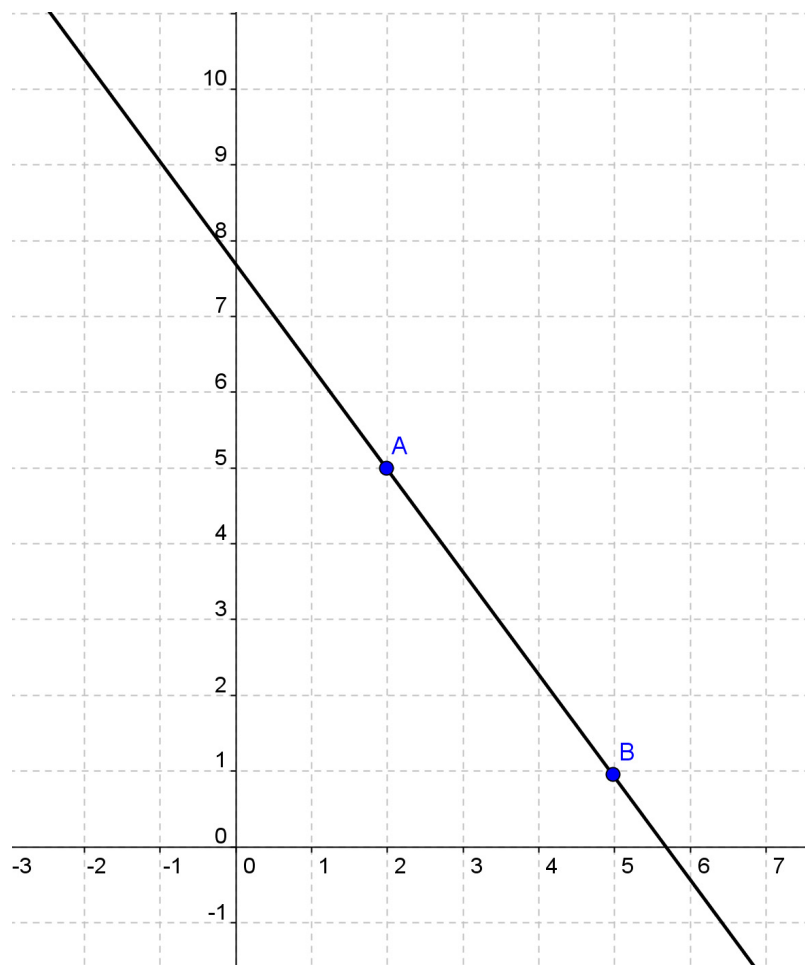
13.



Leikkauspisteen x -koordinaatti on 0,2 ja y -koordinaatti 0,3.

Piste on siis (0,2; 0,3)

14.

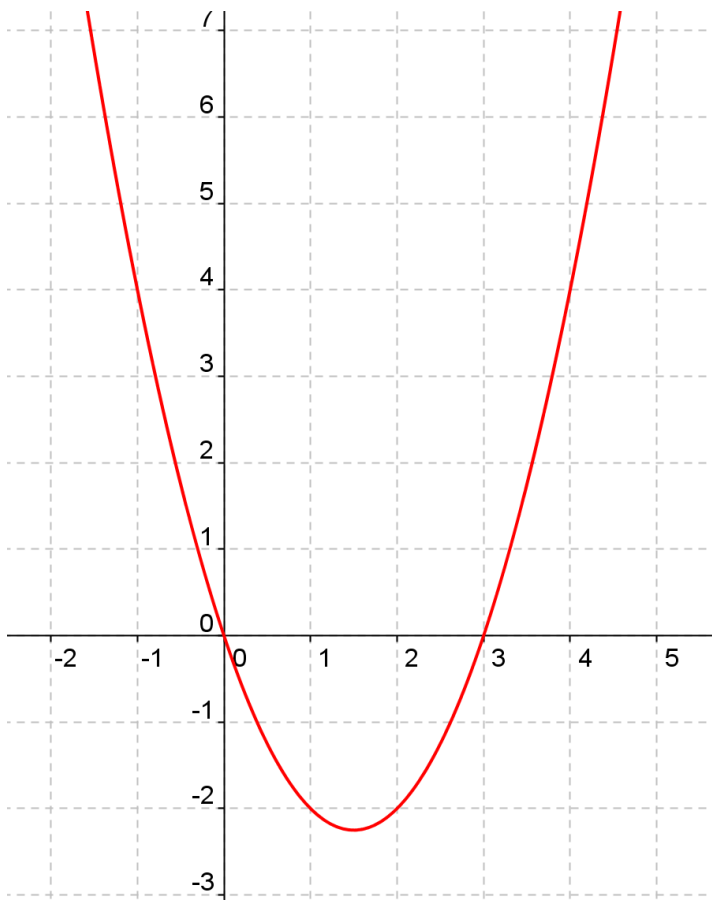


a) $F(0) \approx 7,7$

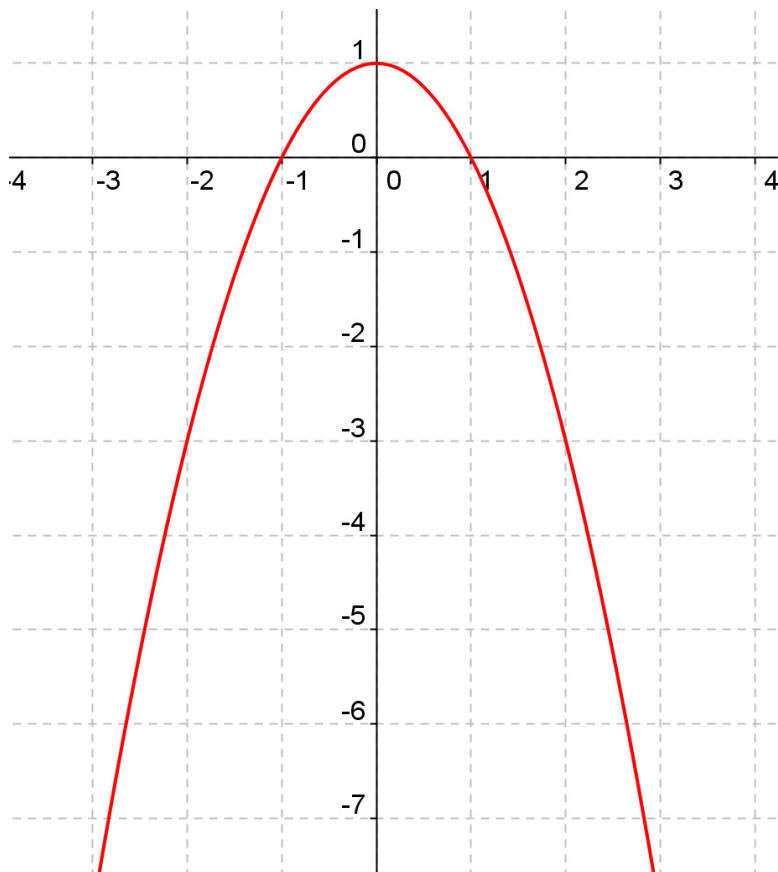
b) $F(-2) \approx 10,3$

c) $x \approx -0,3$

15. a)

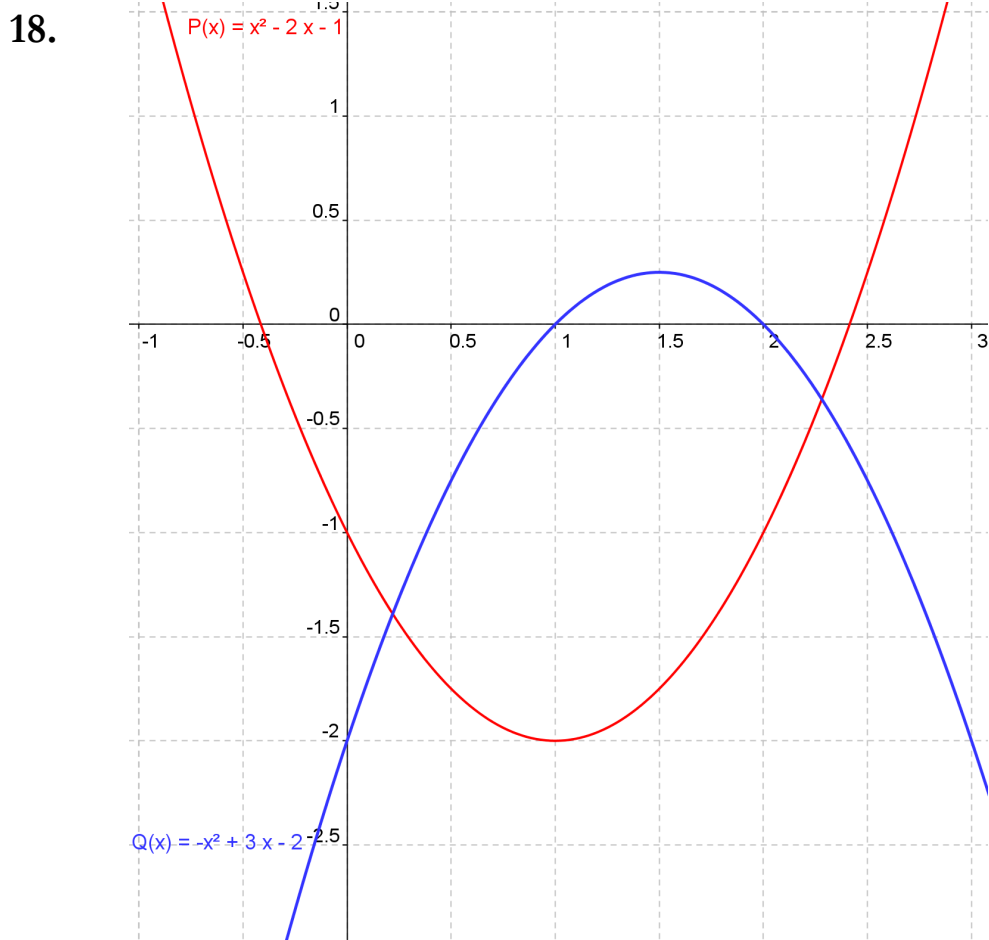


b)



16. a) $P(0) \approx -8$ b) $P(2) \approx -4$ c) $P(-2) \approx 3$

17. a) $x \approx -1,5$ tai $x \approx 2,5$ b) $x \approx 2,8$ tai $x \approx -1,9$
 c) $x \approx 1,5$ tai $x \approx -0,5$



Leikkauspisteet ovat: $(0,2; -1,4)$ ja $(2,3; -0,4)$

19. a) 10000 € b) 3000 €

Korkeamman asteen yhtälö

20. a) $x^3 - 4x = 0$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

b) $4x^3 + 6x^2 = 0$

$$x^2(4x + 6) = 0$$

$$x^2 = 0 \quad \text{tai} \quad 4x + 6 = 0$$

$$x = 0 \quad \quad \quad 4x = -6$$

$$x = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

21. a) $2x^3 + 4x^2 + 2x = 0$

$$2x(x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$2x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = 0 \quad \quad \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm 0}{2} = -1$$

$$\text{b) } 2x^3 + 2x^2 = 264x$$

$$2x^3 + 2x^2 - 264x = 0$$

$$2x(x^2 + x - 132) = 0$$

$$2x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + x - 132 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-132)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{529}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm 23}{2}$$

$$x = \frac{-24}{2} = -12 \quad \text{tai} \quad x = \frac{22}{2} = 11$$

$$22. \quad \text{a) } x^3 + x^2 - 30x = 0$$

$$x(x^2 + x - 30) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + x - 30 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{2}$$

$$x = \frac{-1 + 11}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{tai}$$

$$x = \frac{-1 - 11}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$\text{b)} \quad 2x^3 + 36x^2 = -162x$$

$$2x^3 + 36x^2 + 162x = 0$$

$$2x(x^2 + 18x + 81) = 0$$

$$2x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 + 18x + 81 = 0$$

$$x = 0 \quad x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-18}{2} = -9$$

23. Jos $x = -2$ on juuri, se toteuttaa yhtälön, jolloin se voidaan sijoittaa yhtälöön.

$$k^2(-2)^3 - 2k^3(-2)^2 - 8k \cdot (-2) = 0$$

$$-8k^2 - 8k^3 + 16k = 0$$

$$8k(-k - k^2 + 2) = 0$$

$$8k = 0 \quad \text{tai} \quad -k^2 - k + 2 = 0$$

$$k = 0 \quad k = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$$

$$k = \frac{1 \pm 3}{-2}$$

$$k = \frac{1+3}{-2} = \frac{4}{-2} = -2 \quad \text{tai}$$

$$k = \frac{1-3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Vastaus: $k = 0$ tai $k = -2$ tai $k = 1$

Vastauksen tarkkuus

24. a) 1 numeron tarkkuudella
b) 4 numeron tarkkuudella
c) 5 numeron tarkkuudella
d) 3 numeron tarkkuudella
e) 7 numeron tarkkuudella
f) 5 numeron tarkkuudella
25. a) $0,05 \text{ g} + 8,9 \text{ g} - 1,0 \text{ g} = 7,95 \text{ g} \approx 8,0 \text{ g}$
b) $2,5 \text{ dm} \cdot 1,62 \text{ dm} = 4,05 \text{ dm}^2 \approx 4,1 \text{ dm}^2$
c) $2,3 \text{ m} : 1,04 \text{ m} + 2,56 \text{ m} = 5,661\dots \text{m}^2 \approx 5,7 \text{ m}^2$
26. $\frac{825000 \text{ kg}}{1300 \text{ kg}} = 634,615\dots$

Vastaus: n. 630 henkilöautoa

$$27. \quad 5\,100\,000 \cdot 0,12 \text{ €} = 612\,000 \text{ €} \approx 610\,000 \text{ €}$$

$$28. \quad \text{a) } |\sqrt{7,02} - \sqrt{10}| - (-\sqrt{5,7}) = |-0,5127\dots| + \sqrt{5,7} = 2,9002\dots \approx 2,90$$

$$\text{b) } 4,3 \cdot \sqrt{5,6} + \sqrt{4} : 7 = 10,461\dots \approx 10,5$$

Promille

29. a) $\frac{7}{1000} = 7\text{‰}$

b) $\overset{10)}{\frac{6}{100}} = \frac{60}{1000} = 60\text{‰}$

c) $30\% = \overset{10)}{\frac{30}{100}} = \frac{300}{1000} = 300\text{‰}$

d) $0,2\% = \overset{10)}{\frac{0,2}{100}} = \frac{2}{1000} = 2\text{‰}$

30. Henkilön massa 85 kg. 70 % ihmisen painosta on nesteitä. 85 kg painavan henkilön nesteiden määrä on
 $0,70 \cdot 85 \text{ kg} = 59,5 \text{ kg}$.

a) Henkilö nauttii viiniä 5 dl = 0,5 l \approx 0,5 kg.

Alkoholipitoisuus oli $15\% = \frac{15}{100} = \frac{150}{1000} = 150\text{‰}$.

b) Viinissä on alkoholia $0,15 \cdot 0,5 \text{ kg} = 0,075 \text{ kg}$.

Nesteiden määrä elimistössä tämän jälkeen on

$$59,5 \text{ kg} + 0,5 \text{ kg} = 60 \text{ kg}.$$

Alkoholin määrä elimistössä on siis

$$\frac{0,075 \text{ kg}}{60 \text{ kg}} = 0,00125 \approx 1,3\text{‰}$$

Vastaus: a) 150‰ b) $1,3\text{‰}$

31. Seerumia on $4,8\%$ henkilön painosta eli $0,048 \cdot 75 \text{ kg} = 3,6 \text{ kg}$.

Kaliumin osuus seerumista

$$\frac{0,59 \text{ g}}{3600 \text{ g}} = 0,00016388\dots \approx \frac{0,16}{1000} = 0,16\text{‰}$$