1.2 Kulmia

1. a) Kulman ovat vieruskulmia, joten $\alpha = 180° - 25° = 155°$.

b) Kulmat ovat ristikulmia, joten $\alpha = 38°$.

2. Kulma α ja 47° kulma ovat samankohtaisia kulmia. Koska suorat *s* ja *t* ovat yhdensuuntaisia, $\alpha = 47°$.

Kulma β on 47° kulman vieruskulma, joten $\beta = 180° - 47° = 133°$

3. Kuvaan merkityt kulmat ovat samankohtaisia kulmia. Koska suorat *m* ja *n* ovat yhdensuuntaisia, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuria eli

$$\begin{aligned} 206° - 3x &= 2x + 15° \\ -3x - 2x &= 15° - 206° \\ -5x &= -191° \qquad |:(-5) \\ x &= 38{,}2° \end{aligned}$$

4. Merkitään $\alpha = 3x$ ja $\beta = 8x$. Tällöin kulmien suhde on 3 : 8.

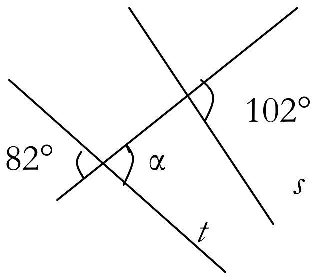
Koska kulmat ovat vieruskulmia, niin niiden summa on 180° eli

$$\alpha + \beta = 180° \text{ eli}$$
$$3x + 8x = 180°$$
$$11x = 180° \quad |:11$$
$$x = 16{,}3636...°$$

Näin ollen saadaan

$\alpha = 3x = 3 \cdot 16{,}3636\ldots° = 49{,}0909..° \approx 49°$
$\beta = 8x = 8 \cdot 16{,}3636\ldots° = 130{,}909\ldots° \approx 131°$

5. Merkitään 82° kulman vieruskulmaa kirjaimella α.

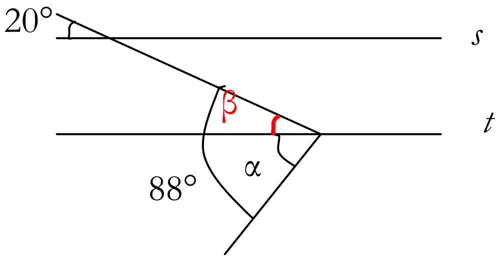


Tällöin $\alpha = 180° - 82° = 98°$

Kulmat α ja 102° ovat samankohtaisia kulmia. Jos suorat s ja t ovat yhdensuuntaisia, $\alpha = 102°$.

Koska $\alpha = 98° \neq 102°$, niin suorat s ja t eivät ole yhdensuuntaisia.

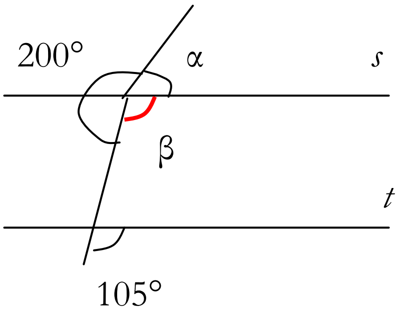
6. Merkitään 20° kulman kanssa samankohtaista kulmaa kirjaimella β.



Koska suorat *s* ja *t* ovat yhdensuuntaisia, β = 20°.

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 88^\circ \\ \alpha + 20^\circ &= 88^\circ \\ \alpha &= 88^\circ - 20^\circ \\ \alpha &= 68^\circ\end{aligned}$$

7. Merkitään 105° kulman kanssa samankohtaista kulmaa kirjaimella β.

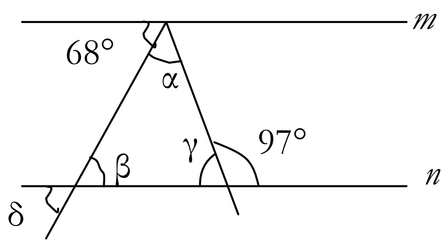


Koska suorat *s* ja *t* ovat yhdensuuntaiset, β = 105°.

Kuvasta saadaan

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + 200° &= 360° \\ \alpha + 105° + 200° &= 360° \\ \alpha &= 360° - 200° - 105° \\ \alpha &= 55°\end{aligned}$$

8. Merkitään kuvaan kulma δ.



Kulmat δ ja 68° ovat samankohtaisia kulmia. Koska suorat *m* ja *n* ovat yhdensuuntaisia, δ = 68°. Lisäksi kuvasta saadaan

β= 68° (kulman δ ristikulmana)

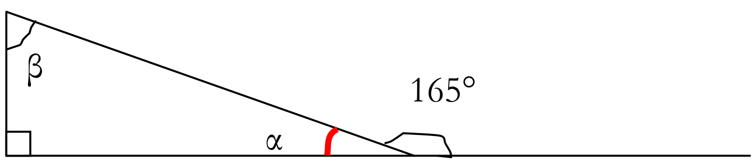
$\gamma + 97° = 180°$ (vieruskulmat)
$\gamma = 180° - 97°$
$\gamma = 83°$

Kolmion kulmien summa on 180°, joten

$$\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma&=180^\circ\\ \alpha+68^\circ+83^\circ&=180^\circ\\ \alpha+151^\circ&=180^\circ\\ \alpha&=180^\circ-151^\circ\\ \alpha&=29^\circ\end{aligned}$$

Vastaus: α = 29°, β= 68° ja $\gamma = 83^\circ$

9. Merkitään kuvioon apukulma α.



Kuviosta saadaan

$$\begin{aligned}\alpha+165^\circ&=180^\circ\\ \alpha&=180^\circ-165^\circ\\ \alpha&=15^\circ\end{aligned}$$

Koska kolmio on suorakulmainen, niin

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 90^\circ \\ 15^\circ + \beta &= 90^\circ \\ \beta &= 75^\circ \end{aligned}$$

Vastaus: $\beta = 75^\circ$

10. Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Merkitään kantakulmaa kirjaimella α.

Huippukulma on 33° pienempi eli $\alpha - 33^\circ$.

Kolmion kulmien summa on 180°, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha + (\alpha - 33^\circ) &= 180^\circ \\ 3\alpha - 33^\circ &= 180^\circ \\ 3\alpha &= 213^\circ \quad |:3 \\ \alpha &= 71^\circ \end{aligned}$$

Huippukulman suuruus on siis $71^\circ - 33^\circ = 38^\circ$.

Vastaus: Kantakulmat 71°, huippukulma 38°

11. Merkitään pienintä kulmaa kirjaimella x. Tällöin muut kulmat ovat $3x$ ja $5x$.

Kolmion kulmien summa on 180°, joten saadaan yhtälö

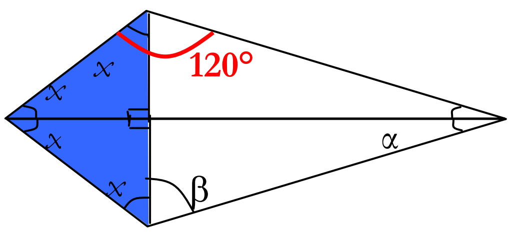
$$
\begin{aligned}
x + 3x + 5x &= 180^\circ \\
9x &= 180^\circ \quad |:9 \\
x &= 20^\circ
\end{aligned}
$$

Muut kulmat ovat

$$
\begin{aligned}
3x &= 3 \cdot 20^\circ = 60^\circ \\
5x &= 5 \cdot 20^\circ = 100^\circ
\end{aligned}
$$

Vastaus: Kulmien suuruudet ovat 20°, 60° ja 100°.

12. Värilliset (siniset) kolmiot ovat tasakylkisiä**.** Kummassakin tasakylkisessä kolmiossa huippukulma on 90°. Merkitään kantakulmia kirjaimella x.



Koska kolmion kulmien summa on 180°, niin kuviosta saadaan

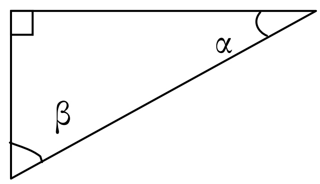
$$\begin{aligned} 2x + 90^\circ &= 180^\circ \\ 2x &= 90^\circ \quad |:2 \\ x &= 45^\circ \end{aligned}$$

Kuviossa on kaksi samanlaista kolmiota, joiden huippukulma on 120°.

$$\begin{aligned} x + \beta &= 120^\circ \\ 45^\circ + \beta &= 120^\circ \\ \beta &= 75^\circ \end{aligned}$$

Viereinen suorakulmainen kolmio on osa tehtävän kuviota.

$$\begin{aligned} 90^\circ + \alpha + \beta &= 180^\circ \\ 90^\circ + \alpha + 75^\circ &= 180^\circ \\ \alpha + 165^\circ &= 180^\circ \\ \alpha &= 15^\circ \end{aligned}$$



Vastaus: $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 75^\circ$

13. Puolisuunnikkaan kaksi kulmaa ovat 90°. Merkitään kolmatta kulmaa kirjaimella x, jolloin neljäs kulma on x + 35°.

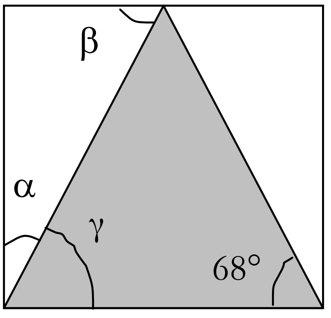
Puolisuunnikas on nelikulmio, joten sen kulmien summa on 360°.

$$\begin{aligned} 90° + 90° + x + x + 35° &= 360° \\ 2x + 215° &= 360° \\ 2x &= 145° \quad |:2 \\ x &= 72{,}5° \end{aligned}$$

Tällöin kulma $x + 35° = 72{,}5° + 35° = 107{,}5°$

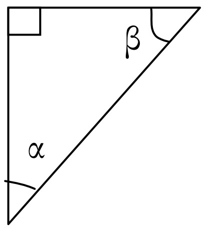
Vastaus: 72,5° ja 107,5°

14. a) Merkitään kolmion toista kantakulmaa kirjaimella γ.
Koska kolmio on tasakylkinen, kantakulmat ovat yhtä suuret eli γ = 68°.



Koska nelikulmio on neliö, sen kaikki kulmat ovat suoria kulmia. Tällöin

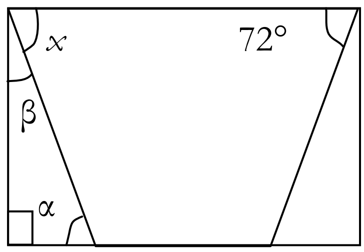
$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 90° \\ \alpha + 68° &= 90° \\ \alpha &= 22° \end{aligned}$$



Viereinen suorakulmainen kolmio on osa kuviota.
Koska kolmion kulmien summa on 180°, niin

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 90° &= 180° \\ 22° + \beta + 90° &= 180° \\ \beta + 112° &= 180° \\ \beta &= 68° \end{aligned}$$

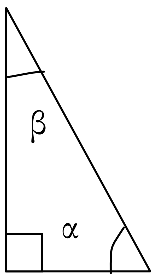
b) Merkitään puolisuunnikkaan toista huippukulmaa kirjaimella x.



Koska puolisuunnikas on tasakylkinen, huippukulmat ovat yhtä suuret eli $x = 72°$.

Suorakulmion kulmat ovat 90°, joten

$$\begin{aligned} x + \beta &= 90° \\ 72° + \beta &= 90° \\ \beta &= 18° \end{aligned}$$

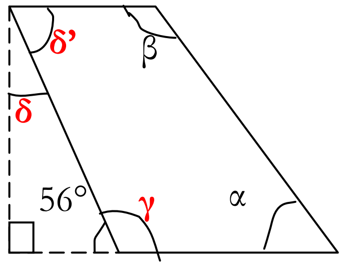


Kuvio sisältää viereisen suorakulmaisen kolmion.
Kolmion kulmien summa on 180°.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 90° &= 180° \\ \alpha + 18° + 90° &= 180° \\ \alpha &= 72° \end{aligned}$$

Vastaus: a) $\alpha = 22°$, $\beta = 68°$ b) $\alpha = 72°$, $\beta = 18°$

15. Merkitään kuvaan kulmat γ, δ ja δ'.



Vieruskulmina

$$\begin{aligned} \gamma + 56^\circ &= 180^\circ \\ \gamma &= 180^\circ - 56^\circ \\ \gamma &= 124^\circ \end{aligned}$$

Kolmion kulmien summa on 180°.

$$\begin{aligned} 90^\circ + 56^\circ + \delta &= 180^\circ \\ \delta &= 180^\circ - 146^\circ \\ \delta &= 34^\circ \end{aligned}$$

Kulmat δ ja δ' muodostavat suoran kulman.

$$\begin{aligned} \delta + \delta' &= 90^\circ \\ 34^\circ + \delta' &= 90^\circ \\ \delta' &= 56^\circ \end{aligned}$$

Nelikulmion kulmien summa on 360°.

$$\begin{aligned} \gamma + \delta' + \alpha + \beta &= 360^\circ \\ 124^\circ + 56^\circ + \alpha + 3\alpha &= 360^\circ \\ 180^\circ + 4\alpha &= 360^\circ \\ 4\alpha &= 180^\circ \quad |:4 \\ \alpha &= 45^\circ \end{aligned}$$

$$\beta = 3\alpha = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$$

Vastaus: Puolisuunnikkaan kulmat ovat 124°, 56°, 45° ja 135°.

16. Merkitään suunnikaan terävää kulmaa kirjaimella α. Tällöin suunnikaan tylppä kulma on 2α. Suunnikkaassa vastakkaiset kulmat ovat aina yhtä suuret, joten kumpiakin kulmia on kaksi kappaletta.

Nelikulmion kulmien summa on 360°, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 2\cdot\alpha + 2\cdot 2\alpha &= 360^\circ \\ 6\alpha &= 360^\circ \quad |:6 \\ \alpha &= 60^\circ \end{aligned}$$

$$2\alpha = 2\cdot 60^\circ = 120^\circ$$

Vastaus: Kulmat ovat 60°, 60°, 120° ja 120°.

17. a) Kolmion kulmien summa on 180°.

$$\begin{aligned} 90^\circ + 39^\circ + \alpha &= 180^\circ \\ \alpha &= 180^\circ - 90^\circ - 39^\circ \\ \alpha &= 51^\circ \end{aligned}$$

b) Kolmio on tasakylkinen, joten kantakulmat ovat yhtä suuret. Kolmion kulmien summa on 180°.

$$\begin{aligned} 28^\circ + \alpha + \alpha &= 180^\circ \\ 2\alpha &= 180^\circ - 28^\circ \\ 2\alpha &= 152^\circ \quad |:2 \\ \alpha &= 76^\circ \end{aligned}$$

c) Puolisuunnikas on tasakylkinen, joten molemmat kantakulmat ovat 118° ja molemmat huippukulmat ovat α.

Nelikulmion kulmien summa 360°.

$$\begin{aligned}
\alpha + \alpha + 118° + 118° &= 360° \\
2\alpha &= 360° - 2 \cdot 118° \\
2\alpha &= 124° \quad |:2 \\
\alpha &= 62°
\end{aligned}$$

18. Merkitään toista kulmaa kirjaimella x. Toinen kulma on 28° suurempi eli x + 28°. Kulmat ovat vieruskulmia, joten niiden summa on 180°.

$$\begin{aligned}
(x + 28°) + x &= 180° \\
2x + 28° &= 180° \\
2x &= 152° \quad |:2 \\
x &= 76°
\end{aligned}$$

Toinen kulma on x + 28° = 76° + 28° = 104°.

Vastaus: Kulmat ovat 76° ja 104°

19. $5\alpha + \alpha = 180°$ (vieruskulmat)

$$6\alpha = 180° \quad |:6$$

$$\alpha = 30°$$

Kulmat α ja β ovat samankohtaisia kulmia. Koska suorat *s* ja *t* ovat yhdensuuntaisia, β = α eli β = 30°

20. Merkitään kolmion kantakulmaa kirjaimella x (>0). Toinen kantakulma on 18° suurempi eli x +18°. Huippukulma on 2· (x + 18°).

Kolmion kulmien summa on 180°, joten saadaan

$$\begin{aligned} x + (x + 18°) + 2(x + 18°) &= 180° \\ 4x + 54° &= 180° \\ 4x &= 126° \quad |:4 \\ x &= 31{,}5° \end{aligned}$$

Kolmion kulmat ovat siis

$$\begin{aligned} x &= 31{,}5° \\ x + 18° &= 31{,}5° + 18° = 49{,}5° \\ 2(x + 18°) &= 2 \cdot 49{,}5° = 99° \end{aligned}$$

Vastaus: 31,5°; 49,5°; 99°

1.3 Yhdenmuotoisuus

21. a) Merkitään linnun takaraivon pituutta pienenöksessä kirjaimella x.

Koska kuviot ovat yhdenmuotoiset saadaan verranto

$$\begin{aligned}\frac{8,5}{5,5} &= \frac{10,9}{x} \\ 8,5x &= 59,95 \quad |:8,5 \\ x &= 7,0529\ldots \\ x &\approx 7,1 \qquad (\text{cm})\end{aligned}$$

b) Merkitään kaulan leveyttä suurennoksessa kirjaimella x.

Yhdenmuotoisuuden perusteella saadaan

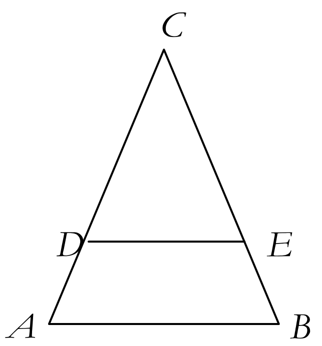
$$\begin{aligned}\frac{8,5}{5,5} &= \frac{x}{2,0} \\ 5,5x &= 17 \quad |:5,5 \\ x &= 3,090\ldots \\ x &\approx 3,1 \qquad (\text{cm})\end{aligned}$$

Merkitään linnun kaulan pituutta suurennoksessa kirjaimella y. Yhdenmuotoisuuden perusteella saadaan

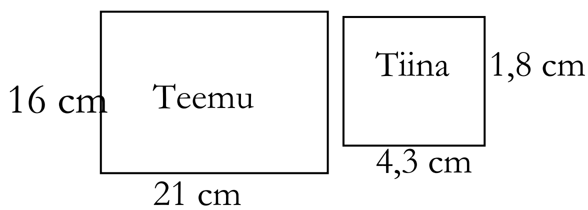
$$\begin{aligned} \frac{8{,}5}{5{,}5} &= \frac{y}{2{,}7} \\ 5{,}5y &= 22{,}95 \quad |: 5{,}5 \\ y &= 4{,}172... \\ y &\approx 4{,}2 \ (\text{cm}) \end{aligned}$$

Vastaus: a) 7,1 cm b) leveys 3,1 cm ja pituus 4,2 cm

22. Kulmat D ja A ovat samankohtaisia kulmia. Koska janat AB ja DE ovat yhdensuuntaisia, $\measuredangle D = \measuredangle A$. Lisäksi kolmioissa ABC ja DEC on molemmissa kulma C. kk-lauseen mukaan kolmiot ABC ja DEC ovat yhdenmuotoiset.



23. Lasketaan vastinosien suhteet.

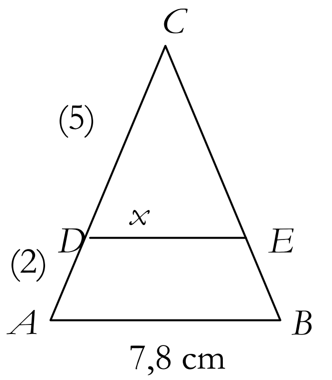


$$\frac{21}{4{,}3} = 4{,}8837...$$

$$\frac{16}{1{,}8} = 8{,}888... \neq 4{,}8837...$$

Vastaus: Suorakulmiot eivät ole yhdenmuotoisia.

24. Kolmiot *ABC* ja *DEC* ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen mukaan (perustelut tehtävän 22 ratkaisussa). Janan *DC* pituus on 5*a* ja janan *AC* pituus on 7*a*, missä *a* on kerroin (>0).

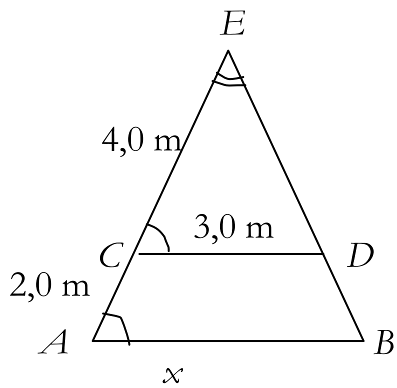


Yhdenmuotoisilla kuvioilla vastinjanojen suhde on vakio, joten saadaan

$$\frac{x}{7{,}8}=\frac{5}{7}$$
$$7x=39 \quad |:7$$
$$x=5{,}571... \approx 5{,}6\,(\text{cm})$$

Vastaus: 5,6 cm

25. a) Kolmiot *ABE* ja *CDE* ovat yhdenmuotoisia (kk-lause), koska
- molemmissa kulma *E*
- kulmat *C* ja *A* samankohtaisina kulmina yhtä suuuret

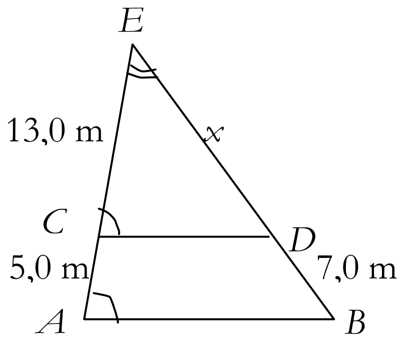


$$\frac{3{,}0}{x}=\frac{4{,}0}{2{,}0+4{,}0}$$
$$\frac{3}{x}=\frac{4}{6}$$
$$4x=18 \quad |:4$$
$$x=4{,}5 \ (\text{m})$$

b) Kolmiot *ABE* ja *CDE* ovat yhdenmuotoisia (kk-lause), koska

- molemmissa kulma *E*
- kulmat *C* ja *A* samankohtaisina kulmina yhtä suuuret

$$\frac{x}{x+7}=\frac{13}{13+5}$$
$$\frac{x}{x+7}=\frac{13}{18}$$
$$18x=13x+91$$
$$5x=91 \quad |:5$$
$$x=18{,}2$$
$$x\approx 18 \quad (\mathrm{m})$$



Vastaus: a) 4,5 m   b) 18 m

26. Kolmiot *ACD* ja *ABE* ovat kk-lauseen nojalla yhdenmuotoisia:

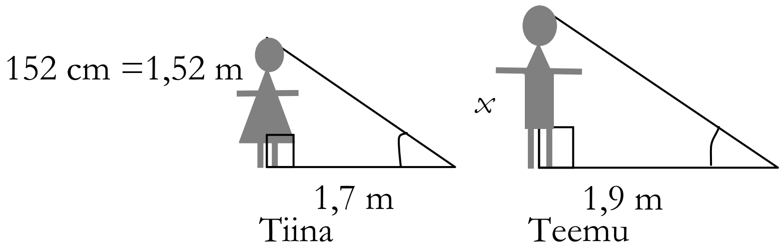
- Molemmilla kolmioilla on yhteinen kantakulma *A*
- Molemmissa kolmioissa on suora kulma vastinkulmana.

Tästä seuraa, että vastinsivujen suhteiden täytyy olla samat.

$$\frac{AE}{AD}=\frac{EB}{DC}$$
$$\frac{60}{120}=\frac{5{,}5}{x}$$
$$60x=660$$
$$x=11$$

Vastaus: Keskipilarin korkeus on 11 m.

27. Piirretään mallikuvat.



Kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk-lause), koska

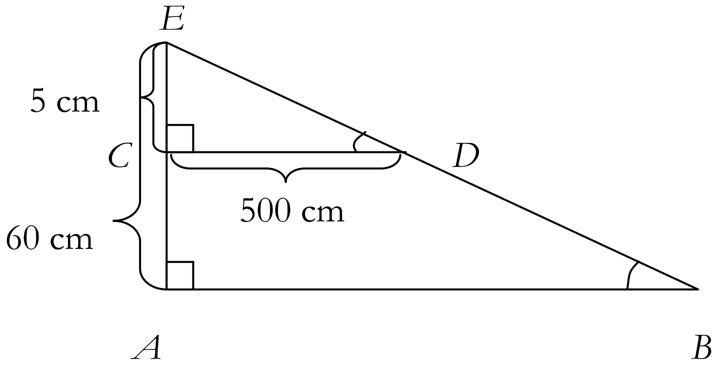
- Kummassakin kolmiossa 90°:een kulma.
- Aurinko paistaa samassa kulmassa.

Saadaan verranto

$$\frac{1,52}{x} = \frac{1,7}{1,9}$$
$$1,7x = 2,888 \quad |:1,7$$
$$x = 1,698...$$
$$x \approx 1,70 \ (\text{cm})$$

Vastaus: Teemun pituus on noin 170 cm.

28. Auton lamppu (E) on 60 cm korkeudella maan pinnasta. Lampusta lähtevä valonsäde osuu maahan pisteessä B.



Valokiila laskee 5 m = 500 cm matkalla 5 cm.

Kolmiot ABE ja CDE ovat yhdenmuotoiset (kk-lause), koska

- kummassakin kolmiossa on suorakulma,
- kummassakin kolmiossa on kulma E.

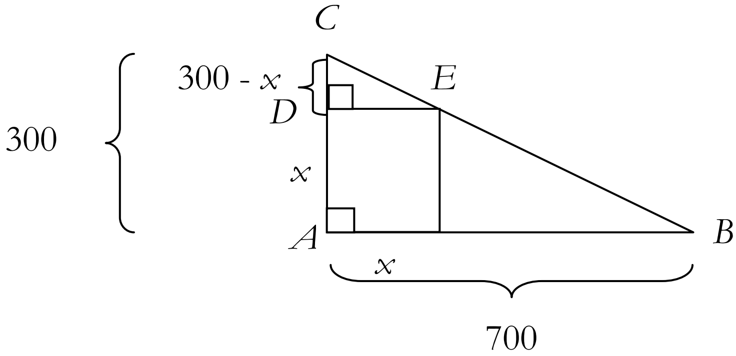
Saadaan verranto

$$\frac{60}{5} = \frac{x}{500}$$
$$5x = 30000$$
$$x = 6000 \ (\text{cm})$$

$x = 6000$ cm = 60 m

Vastaus: Valot valaisevat 60 m päähän.

29. Merkitään neliön sivua kirjaimella x.



Kolmiot ABC ja DEC ovat yhdenmuotoiset (kk-lause), koska

- molemmissa on suorakulma,
- molemmissa on kulma C.

Saadaan verranto

$$
\begin{aligned}
\frac{300}{300-x} &= \frac{700}{x} \\
300x &= 210000 - 700x \\
1000x &= 210000 \quad |:1000 \\
x &= 210 \ (\text{m})
\end{aligned}
$$

Tontin pinta-ala

$$A = x^2 = (210\,\text{m})^2 = 44100\ \text{m}^2 = 441\,\text{a}$$

Vastaus: Tontin ala on 441 a

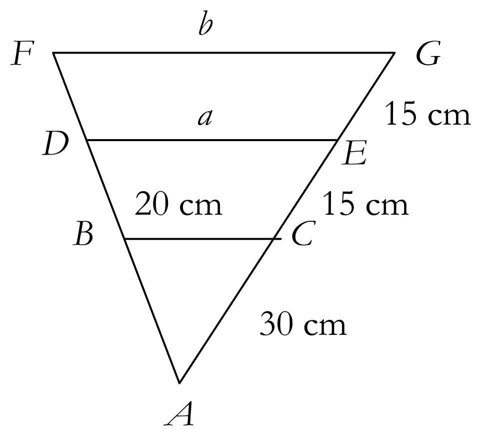
30. Yhdenmuotoisuuden perusteella saadaan verranto

$$\begin{aligned}\frac{1{,}3}{5{,}5} &= \frac{2{,}0}{2{,}0+x}\\ 1{,}3(2{,}0+x) &= 2{,}0\cdot 5{,}5\\ 2{,}6+1{,}3x &= 11\\ 1{,}3x &= 8{,}4 \quad |:1{,}3\\ x &= 6{,}461...\\ x &\approx 6{,}5 \ \ (\mathrm{dm})\end{aligned}$$

Vastaus: 6,5 dm

31. Kolmiot *DAE* ja *BAC* ovat yhdenmuotoisia (kk-lause), koska

- molemmissa kulma A,
- kulmat *C* ja *E* ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.



Saadaan verranto

$$\begin{aligned}\frac{30}{30+15} &= \frac{20}{a}\\ 30a &= 20\cdot 45 \quad |:30\\ a &= 30 \ \ (\mathrm{cm})\end{aligned}$$

Kolmiot *FAG* ja *BAC* ovat yhdenmuotoisia (kk-lause), koska

- molemmissa kulma A,
- kulmat *C* ja *G* ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

Saadaan verranto

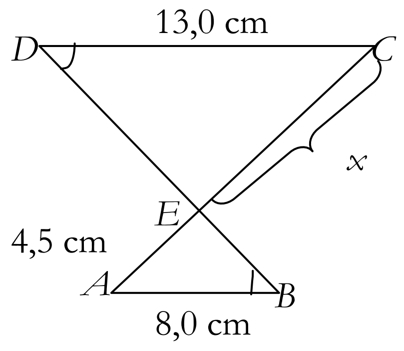
$$\frac{30}{30+15+15}=\frac{20}{b}$$
$$\frac{30}{60}=\frac{20}{b}$$
$$30b=1200 \quad |:30$$
$$b=40 \quad (\text{cm})$$

Vastaus: a = 30 cm ja b = 40 cm

32. Kolmiot *ABE* ja *CDE* ovat yhdenmuotoisia (kk-lause), koska

- kulmat A*EB* ja *CED* ovat ristikulmina yhtä suuret,
- kulmat *D* ja *B* ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret.

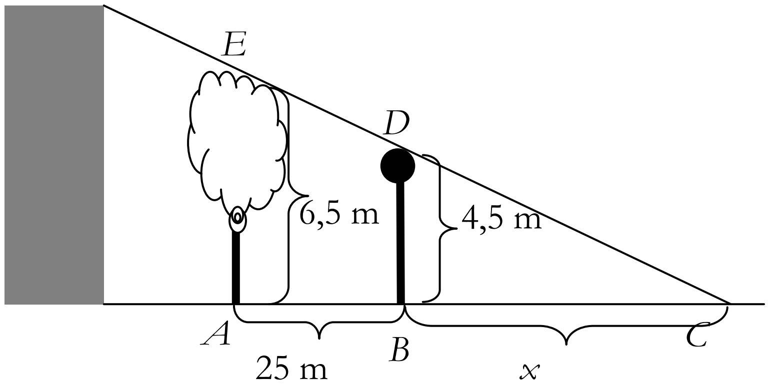
Merkitään kysytyn sivun *EC* pituutta kirjaimella x.
Saadaan verranto



$$\frac{4{,}5}{x}=\frac{8{,}0}{13{,}0}$$
$$8{,}0x=58{,}5 \quad |:8{,}0$$
$$x=7{,}31...$$
$$x\approx 7{,}3 \quad (\text{cm})$$

Vastaus: 7,3 cm

33. Lasketaan, mikä on lähin kohta lipputangon takana, johon Veera näkee. Merkitään tämän kohdan etäisyyttä lipputangosta kirjaimella x.



Kolmiot *ACE* ja *BCD* ovat yhdenmuotoisia (kk-lause), koska

- kulmat *A* ja *B* ovat suoriakulmia,
- kulma *C* on yhteinen.

Saadaan verranto

$$\frac{6{,}5}{4{,}5} = \frac{25 + x}{x}$$
$$6{,}5x = 4{,}5(25 + x)$$
$$6{,}5x = 112{,}5 + 4{,}5x$$
$$2x = 112{,}5 \quad |:2$$
$$x = 56{,}25 \ > 30$$

Vastaus: Veera ei näe lammikkoa.

1.4 Yhdenmuotoisuussuhde

34. Koska mittakaava on 1: 50, niin huoneen mitat ovat

$$7{,}6 \cdot 50\,\text{cm} = 380\,\text{cm} = 3{,}8\,\text{m}$$
$$5{,}8 \cdot 50\,\text{cm} = 290\,\text{cm} \approx 2{,}9\,\text{m}$$

Vastaus: Mitat ovat 3,8 m ja 2,9 m

35. Merkitään kysyttyä pituutta kirjaimella x.

Malli-piirustuksessa	Luonnossa (m)
4	6,0
7	x

Saadaan yhtälö

$$4x = 6 \cdot 7$$
$$4x = 42 \,|: 4$$
$$x = 10{,}5 \approx 11 \quad (\text{m})$$

Vastaus: Pituus on 11 m

36. Merkitään kysyttyä pituutta kirjaimella x.

Kartalla (m)	**Luonnossa (m)**
1	25000
x	500

$$25000x = 500 \quad |: 25000$$
$$x = \frac{500}{25000} = 0{,}02$$

Polun pituus kartalla on 0,02 m = 2 cm

Vastaus: 2 cm

37. Merkitään kysyttyä pituutta kirjaimella x.

Kartalla (cm)	**Luonnossa (cm)**
4,0	170
6,8	x

Saadaan yhtälö

$$4{,}0x = 1156 \quad |: 4{,}0$$
$$x = 289$$

Patsaan pituus on 289 cm ≈ 290 cm

Vastaus: 290 cm

38. Lasketaan ensin suurennoksen mittakaava.

5,0 km=500 000 cm (vastaa suurennoksessa 25 cm pituutta)
Mittakaavaksi saadaan

$$\frac{25\,\text{cm}}{500000\,\text{cm}}^{(25} = \frac{1}{20000}$$

Tämä oli siis suurennettu alkuperäisestä 1,6 –kertaiseksi. Merkitään alkuperäisen kartan mittakaavaa kirjaimella *k*.

$$k \cdot 1{,}6 = \frac{1}{20000} \quad \Big| :1{,}6$$

$$k = \frac{1}{20000 \cdot 1{,}6} = \frac{1}{32000}$$

Vastaus: Mittakaava on $\frac{1}{32000}$

39. Lasketaan matkan pituus luonnossa.

Pituus kartalla (cm)	**Luonnossa (cm)**
1	400000
5,0	x

Saadaan yhtälö

$$x = 5,0 \cdot 400000 \quad \big| :5,0$$
$$x = 2000000$$

Matka on siis luonnossa 2 000 000 cm (= 20 km)

a)

Pituus kartalla (cm)	**Luonnossa (cm)**
1	150000
x	2000000

Saadaan yhtälö

$$150000x = 2000000 \quad \big|: 150000$$
$$x = \frac{15\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}{200\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}} = 13,333\ldots$$

Pituus kartalla on siis 13,333… cm ≈ 13 cm

b) Matka on 20 km ja auton nopeus 100 km/h.

Merkitään kysyttyä aikaa kirjaimella *t*.

$$\begin{aligned} 100 &= \frac{20}{t} \quad \Big|\cdot t \\ 100t &= 20 \quad \Big|:100 \\ t &= \frac{20}{100}^{(20} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Aika on siis $\frac{1}{5}h = \frac{1}{5} \cdot 60\,\text{min} = 12\,\text{min}$.

Vastaus: a) 13 cm   b) 12 min

40. Merkitään suuremman kolmion alaa kirjaimella *A*.

Pintasuhteella saadaan

$$\begin{aligned} \frac{2{,}5\ \text{cm}^2}{A} &= \left(\frac{2{,}0}{10{,}0}\right)^2 \\ \frac{2{,}5\ \text{cm}^2}{A} &= \frac{4{,}0}{100{,}0} \\ 4{,}0A &= 250{,}0\ \text{cm}^2 \quad \Big|:4{,}0 \\ A &= \frac{250{,}0\ \text{cm}^2}{4{,}0} \\ &= 62{,}5\ \text{cm}^2 \approx 63\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

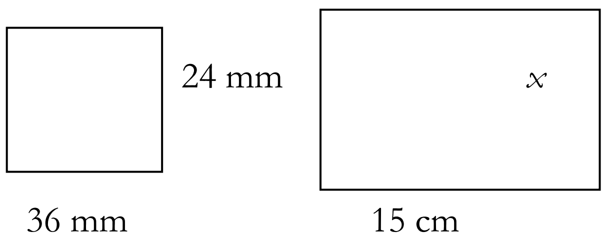
Vastaus: 63 cm^2

41. Merkitään litran mehupullon alaa kirjaimella A_1 ja kolmen litran kirjaimella A_2.

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{25}{40}\right)^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$$

Vastaus: $\frac{25}{64}$

42. Merkitään suurennoksen leveyttä kirjaimella x.



Vastinsivujen suhteella saadaan yhtälö

$$\frac{3{,}6\ \text{cm}}{15\ \text{cm}} = \frac{2{,}4\ \text{cm}}{x}$$

$$3{,}6x = 36\ \text{cm} \qquad |:3{,}6$$

$$x = 10\ \text{cm}$$

Suurennoksen ala on siis $A = 10\,\text{cm} \cdot 15\,\text{cm} = 150\,\text{cm}^2$.

Vastaus: 150 cm^2

43. Merkitään kysyttyä korkeutta kirjaimella x.

Pintasuhteella saadaan yhtälö

$$
\begin{aligned}
\frac{8{,}0\ \text{m}^2}{15\ \text{m}^2} &= \left(\frac{2{,}5}{x}\right)^2 \\
\frac{8{,}0\ \text{m}^2}{15\ \text{m}^2} &= \frac{6{,}25}{x^2} \\
8{,}0x^2 &= 93{,}75 \qquad |:8{,}0 \\
x^2 &= \frac{93{,}75}{8{,}0} \\
x &= \pm\sqrt{\frac{93{,}75}{8{,}0}} = \pm 3{,}423\ldots
\end{aligned}
$$

Koska $x > 0$, niin $x = 3{,}423\ldots$ m $\approx 3{,}4$ m

Vastaus 3,4 m

44. Huoneiston ala on $96\,\mathrm{m}^2 = 96 \cdot 10^4\,\mathrm{cm}^2$

Esitteessä vastaava ala oli $4\,\mathrm{cm} \cdot 6\,\mathrm{cm} = 24\,\mathrm{cm}^2$.

Mittakaava k saadaan pintasuhteella

$$k^2 = \frac{24}{96 \cdot 10^4}$$
$$k^2 = \frac{1}{4 \cdot 10^4}$$
$$k = \pm\sqrt{\frac{1}{4 \cdot 10^4}}$$
$$k = \pm\frac{1}{200}$$

Koska $k > 0$, niin $k = \frac{1}{200}$

Merkitään keittiön alaa luonnossa kirjaimella x.

Ala esitteessä (cm^2)	**Ala luonnossa (m^2)**
3,0	x
24	96

Saadaan yhtälö

$$24x = 288 \quad \Big|:24$$
$$x = \frac{288}{24} = 12$$

Vastaus: mittakaava $\frac{1}{200}$, pinta-ala 12 m^2

45. Talon alkuperäiset mitat ovat 13,5 m ja 8,5 m. Pohjapiirros on piirretty mittakaavassa 1 : 50, joten talon mitat x ja y pohjapiirroksessa ovat:

Pituus pohjapiirroksessa (m)	**Pituus luonnossa (m)**
x	13,5
1	50

Saadaan verranto

$$\frac{x}{1} = \frac{13{,}5}{50}$$
$$x = 0{,}27 \text{ (m)}$$

Pituus pohjapiirroksessa (m)	**Pituus luonnossa (m)**
y	8,5
1	50

Saadaan verranto

$$\frac{y}{1} = \frac{8{,}5}{50}$$
$$y = 0{,}17 \text{ (m)}$$

a) Pohjapiirroksen mittoja 0,27 m ja 0,17 m pienennetään vielä kopiokoneella suhteessa 2 : 5. Pidemmän sivun (0,27 m) pituus pienennetyssä kuvassa olkoon *a*. Saadaan verranto

$$\frac{a}{0{,}27} = \frac{2}{5}$$
$$5a = 0{,}54 \;\Big|: 5$$
$$a = 0{,}108 \;\; (m)$$

Pidemmän sivun pituus on siis 0,108 m = 10,8 cm

b) Pienennetyn pohjapiirroksen mittakaava on

$$k = \frac{13{,}5}{0{,}108}$$

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö eli

$$\frac{A_{alkuperäinen}}{A_{pienennös}} = \left(\frac{13{,}5}{0{,}108}\right)^2 = 15625$$

Saadaan siis $A_{alkuperäinen} = 15625 \cdot A_{pienennös}$. Kopiokoneella pienennetyn ja alkuperäisen talon pinta-alojen suhde on siis $\frac{1}{15625}$.

46. 4,0 km = 400000 cm.

Mittakaava $k = \dfrac{15\,\text{cm}}{400000\,\text{cm}} = \dfrac{3}{80000}$

47. a) Lasketaan lammen pituus x luonnossa.

Pituus kartalla (cm)	**Luonnossa (cm)**
1	10000
2,6	x

$x = 26000\,\text{cm} = 260\,\text{m}$

Lammen leveys l luonnossa:

Pituus kartalla (cm)	**Luonnossa (cm)**
1	10000
1,8	l

$l = 18000\,\text{cm} = 180\,\text{m}$

b) Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö eli

$$\frac{A_{todellinen}}{A_{kartalla}} = \left(\frac{10000}{1}\right)^2$$

$$\begin{aligned} A_{todellinen} &= 10000^2 \cdot A_{kartalla} \\ &= 10000^2 \cdot 2{,}6 \cdot 1{,}8 \ \text{ cm}^2 \\ &= 468000000 \ \text{cm}^2 \\ &= 4{,}68 \ \text{ha} \end{aligned}$$

Vastaus: a) Lammen mitat 260m ja 180 m b) 4,68 ha

48. Kolmioiden kantakulmat ovat samankohtaisina kulmina yhtä suuret, joten kolmiot ovat kk-lauseen nojalla yhdenmuotoiset. Kolmioiden vastinsivujen suhde on

$$\frac{5\,\text{cm}}{5\,\text{cm} + 4\,\text{cm}} = \frac{5}{9}$$

Tällöin alojen suhde on mittakaavan neliö eli

$$\frac{A_{pienempi}}{A_{suurempi}} = \left(\frac{5}{9}\right)^2$$

$$\frac{15{,}0 \text{ cm}^2}{A_{suurempi}} = \frac{25}{81}$$

$$25 \cdot A_{suurempi} = 1215 \text{ cm}^2 \,|\!: 25$$

$$A_{suurempi} = 48{,}6 \text{ cm}^2$$

Vastaus: 48,6 cm^2

49. Pinta-ala esitteessä on

$$A_{\text{esite}} = 40\,\text{mm} \cdot 25\,\text{mm} = 1000\,\text{mm}^2 = 10\,\text{cm}^2$$

Muutetaan luonnossa oleva pinta-ala samaan yksikköön esitteen pinta-alan kanssa. $A_{luonto} = 360\,\text{m}^2 = 3600000\,\text{cm}^2$

Pintasuhteella saadaan yhtälö mittakaavalle k.

$$k^2 = \frac{1\cancel{0}}{360000\cancel{0}}$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{1}{360000}} = \pm\frac{1}{600}$$

Koska mittakaava $k > 0$, niin $k = \dfrac{1}{600}$.

Mitat luonnossa ovat siis 600 -kertaiset.

$$40\,\text{mm} \cdot 600 = 24000\,\text{mm} = 24\,\text{m}$$

$$25\,\text{mm} \cdot 600 = 15000\,\text{mm} = 15\,\text{m}$$

Vastaus: Mittakaava on $k = \dfrac{1}{600}$ ja mitat ovat 24 m ja 15 m.

1.5 Pythagoraan lause

50. a) Kolmio on suorakulmainen, joten voidaan käyttää Pythagoraan lausetta.

$$x^2 + 6{,}2^2 = 15{,}0^2$$
$$x^2 = 225{,}0 - 38{,}44$$
$$x = \pm\sqrt{186{,}56} = \pm 13{,}658...$$

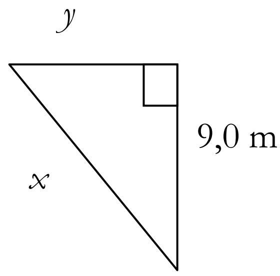
Koska x >0, niin x = 13,658…m ≈ 14 m.

b) Kolmio on tasakylkinen, joten korkeusjana puolittaa kannan. Kannan puolikkaan pituus on $\frac{1}{2}x$. Muodostuu kaksi samanlaista, suorakulmaista kolmiota, joten voidaan käyttää Pythagoraan lausetta.

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 4{,}3^2 = 5{,}7^2$$
$$\frac{1}{4}x^2 = 5{,}7^2 - 4{,}3^2 \quad |\cdot 4$$
$$x^2 = 56$$
$$x = \pm\sqrt{56} = \pm 7{,}483...$$

Koska x >0, niin $x = 7{,}483...$ cm ≈7,5 cm

51. a) Kuvio on tasakylkinen puolisuunnikas. Kylkien pituus on x. Erotetaan puolisuunnikkaasta suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusan pituus on x. Kannan pituus on yhtä suuri kuin puolisuunnikkaan korkeus eli 9,0 m. Merkitään toista kannan pituutta kirjaimella y.



Koska alkuperäinen kuvio on tasakylkine puolisuunnikas, niin

$$y = \frac{18{,}0 - 12{,}0}{2} = \frac{6{,}0}{2} = 3{,}0.$$

Pythagoraan lauseella saadaan

$$x^2 = 9{,}0^2 + 3{,}0^2$$
$$x = \pm\sqrt{90} = \pm 9{,}4868...$$

Koska $x > 0$, niin $x = 9{,}4868\ldots$ m ≈ 9,5 m.

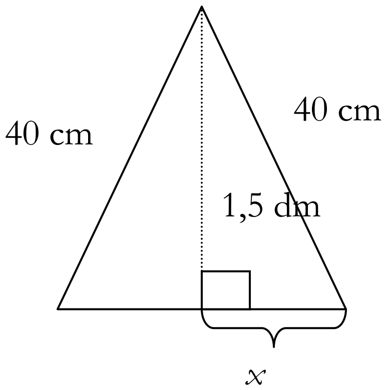
b) Kuvio on neliö. Neliön lävistäjän pituus on 8,2 cm. Kun neliö jaetaan kahteen osaan lävistäjän mukaisesti, saadaan kaksi suorakulmaista kolmiota. Voidaan käyttää Pythagoraan lausetta.

$$x^2 + x^2 = 8{,}2^2$$
$$2x^2 = 8{,}2^2$$
$$x^2 = 33{,}62$$
$$x = \pm\sqrt{33{,}62} = \pm 5{,}798...$$

Koska $x > 0$, niin $x = 5{,}798\ldots$ cm ≈ 5,8 cm.

Vastaus: a) 9,5 m b) 5,8 cm

52. Merkitään tasakylkisen kolmion kannan puolikasta kirjaimella x. Koko kannan pituus on siis $2x$. muutetaan pituudet samoiksi yksiköiksi (cm), joten 1,5 dm = 15 cm.



Muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota. Voidaan käyttää Pythagoraan lausetta.

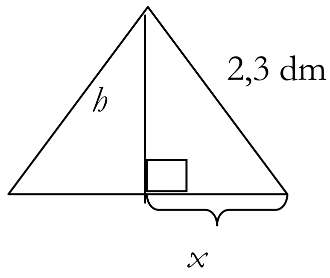
$$\begin{aligned} x^2 + 15^2 &= 40^2 \\ x^2 &= 40^2 - 15^2 \\ x &= \pm\sqrt{1375} \\ x &= \pm 37{,}0809... \end{aligned}$$

Koska $x>0$, niin $x=37{,}0809\ldots$ cm. Kannan pituus on siis

$$\begin{aligned} 2x &= 2 \cdot 37{,}0809\ldots\text{cm} \\ &= 74{,}16198\ldots\text{cm} \approx 74\ \text{cm} \end{aligned}$$

Vastaus: Kanta on 74 cm.

53. Merkitään korkeutta kirjaimella h.
Koska kolmio on tasasivuinen, niin kanta on myös 2,3 dm. Kannan puolikas x = 1,15 dm.



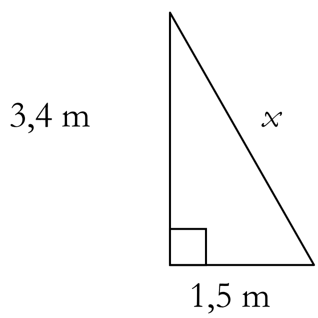
Korkeusjana jakaa tasasivuisen kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Voidaan soveltaa Pythagoraan lausetta.

$$h^2 + x^2 = 2,3^2$$
$$h^2 + 1,15^2 = 2,3^2$$
$$h^2 = 2,3^2 - 1,15^2$$
$$h = \pm\sqrt{3,9675} = \pm 1,99185\ldots$$

Koska $h > 0$, niin h = 1,99185… dm ≈ 2,0 dm

Vastaus: Korkeus on 2,0 dm.

54. Merkitään tikkaiden pituutta kirjaimella x.
Muodostuu suorakulmainen kolmio, joten voidaan käyttää Pythagoraan lausetta.

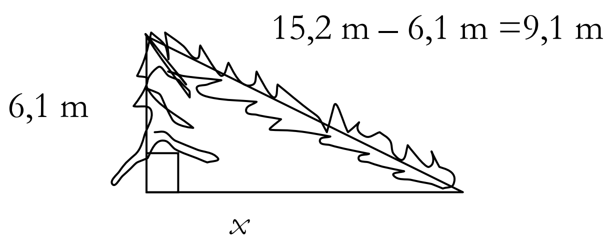


$$x^2 = 1,5^2 + 3,4^2$$
$$x^2 = 13,81$$
$$x = \pm\sqrt{13,81} = \pm 3,71618\ldots$$

Koska $x>0$, niin x = 3,71618… m ≈ 3,7 m

Vastaus: Tikkaiden pituus on 3,7 m.

55. Piirretään tilannekuva. Merkitään kysyttyä pituutta kirjaimella x. Muodostuu suorakulmainen kolmio, joten voidaan käyttää Pythagoraan lausetta.

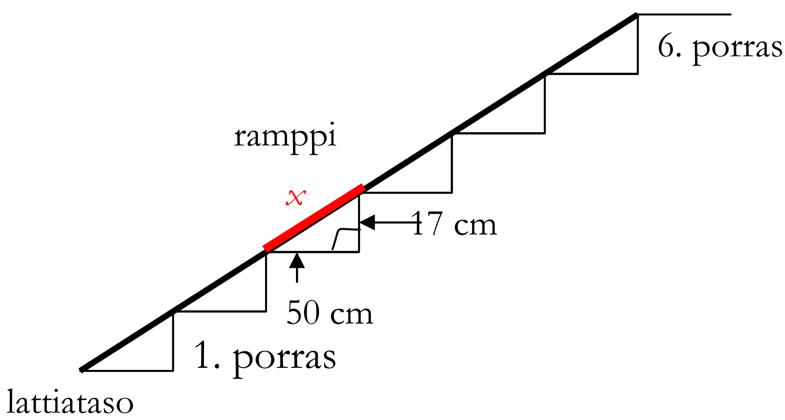


$$x^2 + 6{,}1^2 = 9{,}1^2$$
$$x^2 = 9{,}1^2 - 6{,}1^2$$
$$x^2 = 45{,}6$$
$$x = \pm\sqrt{45{,}6} = \pm 6{,}752...$$

Koska $x > 0$, niin $x = 6{,}752\ldots$ m $\approx 6{,}8$ m

Vastaus: 6,8 m

56. Piirretään tilannekuva.



Merkitään osaa rampista kirjaimella x.
Koko rampin pituus on $6x$.

Pituus x saadaan muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$x^2 = 50^2 + 17^2$$
$$x = \pm\sqrt{2789} = \pm 52,81...$$

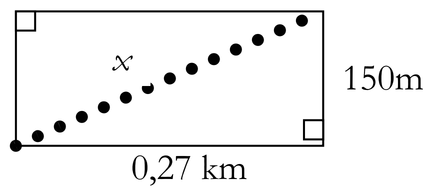
Koska $x > 0$, niin $x = 52,81\ldots$ cm.

Koko rampin pituus on siis

$$\begin{aligned} 6x &= 6 \cdot 52,81\ldots \text{cm} \\ &= 316,86\ldots \text{cm} \approx 320 \text{ cm} \end{aligned}$$

Vastaus: Rampin pituus on 320 cm.

57. Merkitään polun pituutta kirjaimella x.



Sivujen pituudet on ensin muutettava samoiksi yksiköiksi.
Kentän pituus on 0,27 km = 270 m

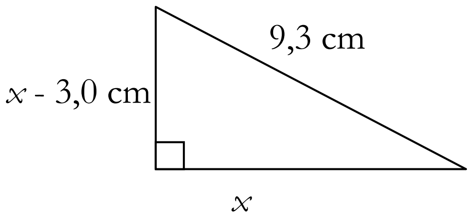
Muodostuu suorakulmainen kolmio. Pythagoraan lauseen perusteella saadaan

$$270^2 + 150^2 = x^2$$
$$x^2 = 72900 + 22500$$
$$x^2 = 95400$$
$$x = \pm\sqrt{95400} = \pm 308,86... \approx \pm 310$$

Polun pituus on aina positiivinen, joten $x = 310$ m.

Vastaus: Polun pituus on 310 m.

58. Merkitään pidempää kateettia kirjaimella x.
Piirretään tilannekuva.
Koska kolmio on suorakulmainen,
Pythagoraan lauseella saadaan



$$x^2 + (x - 3,0)^2 = 9,3^2$$
$$x^2 + (x - 3,0)(x - 3,0) = 9,3^2$$
$$x^2 + x^2 - 3,0x - 3,0x + 9,0 = 9,3^2$$
$$2x^2 - 6,0x + 9,0 - 9,3^2 = 0$$
$$2x^2 - 6,0x - 77,49 = 0$$

$$x = \frac{6,0 \pm \sqrt{(-6,0)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-77,49)}}{2 \cdot 2}$$
$$= \frac{6,0 \pm \sqrt{655,92}}{4}$$
$$x = \frac{6,0 + \sqrt{655,92}}{4} = \frac{6,0 + 25,61...}{4} = 7,9027...$$

tai

$$x = \frac{6,0 - \sqrt{655,92}}{4} = -4,9027...$$

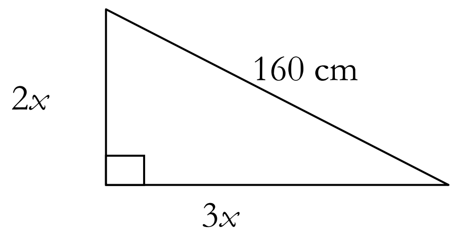
Koska $x > 0$, niin $x = 7,9027\ldots\text{cm} \approx 7,9$ cm

Lyhyempi kateetti on

$x - 3,0$ cm = (7,9027…– 3,0) cm = 4,90273… cm ≈ 4,9 cm

Vastaus: Lyhyempi kateetti 4,9 cm, pidempi kateetti 7,9 cm

59. Koska kateettien pituuksien suhde on 2 : 3, niin merkitään kateetteja $2x$ ja $3x$. Piirretään tilannekuva.



Pythagoraan lauseella saadaan

$$
\begin{aligned}
(2x)^2 + (3x)^2 &= 160^2 \\
4x^2 + 9x^2 &= 160^2 \\
13x^2 &= 25600 \\
x^2 &= \frac{25600}{13} \\
x &= \pm\sqrt{\frac{25600}{13}} = \pm 44{,}376...
\end{aligned}
$$

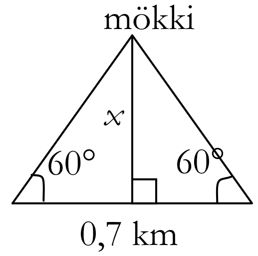
Koska $x > 0$, niin $x = 44{,}376\ldots$ cm.

Tällöin kolmion kateettien pituudet ovat:

$$
\begin{aligned}
2x &= 2 \cdot 44{,}376...\,\text{cm} = 88{,}752...\,\text{cm} \\
3x &= 3 \cdot 44{,}376...\,\text{cm} = 133{,}128...\,\text{cm}
\end{aligned}
$$

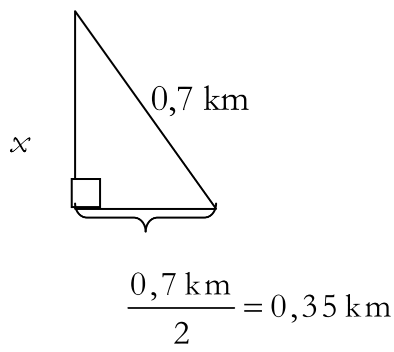
Vastaus: Kateetit ovat 89 cm ja 133 cm.

60. Hahmotellaan tilannekuva. Merkitään mökin kohtisuoraa etäisyyttä rannasta kirjaimella x.



Tilanteesta muodostuu tasasivuinen kolmio, koska kaikki kulmat ovat 60º.(Kolmion kulmien summa 180º.)

Ratkaistaan x muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.

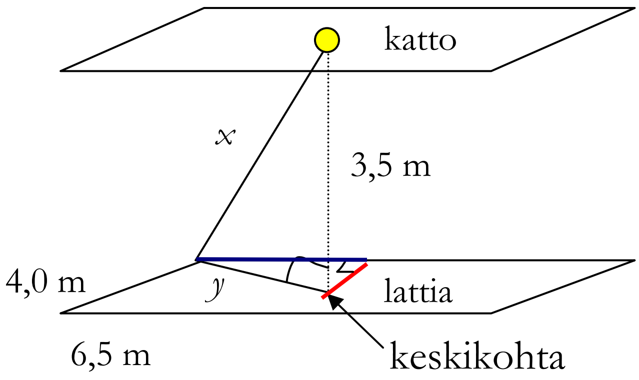


$$x^2 + 0,35^2 = 0,7^2$$
$$x^2 = 0,7^2 - 0,35^2$$
$$x^2 = 0,3675$$
$$x = \pm\sqrt{0,3675} = \pm 0,6062...$$

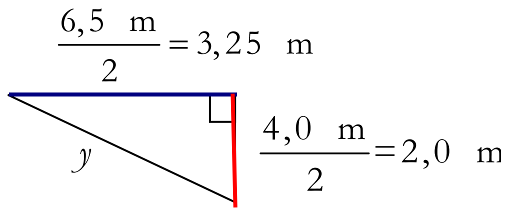
Koska $x>0$, niin $x = 0,6062\ldots$ km $\approx$ 0,6 km.

Vastaus: Mökin etäisyys rannasta on 0,6 km.

61. Piirretään tilannekuva. Merkitään kysyttyä etäisyyttä kirjaimella x.



Lasketaan ensin pituus y lattiatasoon muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.



$$y^2 = 3{,}25^2 + 2{,}0^2$$
$$y = \pm\sqrt{14{,}5625} = \pm 3{,}816...$$

Koska $y > 0$, niin $y = 3{,}816\ldots$ m.

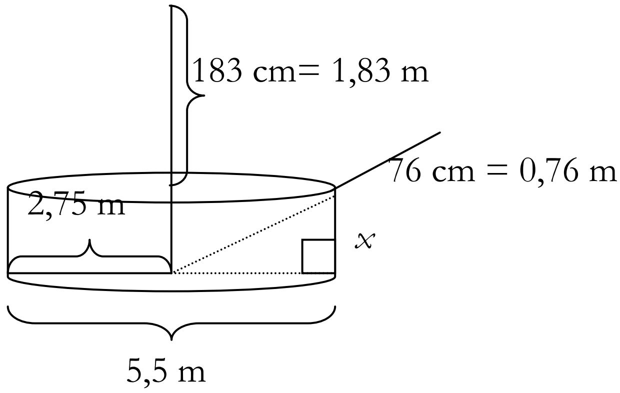
Kysytty etäisyys x saadaan toisesta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$x^2 = y^2 + 3{,}5^2$$
$$x^2 = 3{,}816...^2 + 3{,}5^2$$
$$x = \pm\sqrt{26{,}8125} = \pm 5{,}178...$$

Koska $x > 0$, niin $x = 5{,}178\ldots$ m $\approx 5{,}2$ m

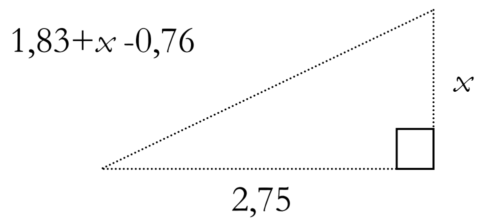
Vastaus: Matka on 5,2 m.

62. Piirretään tilannekuva.



Merkitään lammikon syvyyttä kirjaimella x.

Tangon koko pituus on siis 1,83 m + x. Tangon taittuessa pohjasta siten, että se ylettyy lammikon reunalle, muodostuu suorakulmainen kolmio.

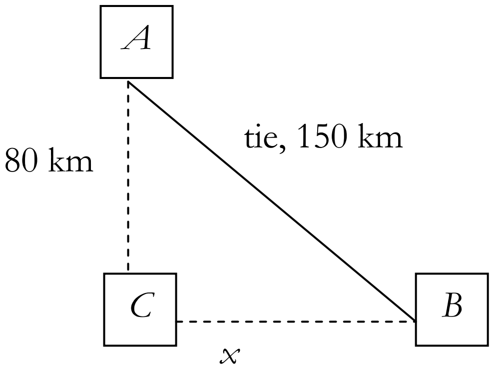


Pythagoraan lauseella saadaan

$$
\begin{aligned}
2{,}75^2 + x^2 &= (1{,}83 + x - 0{,}76)^2 \\
7{,}5625 + x^2 &= (1{,}07 + x)^2 \\
7{,}5625 + x^2 &= (1{,}07 + x)(1{,}07 + x) \\
7{,}50625 + x^2 &= 1{,}1449 + 1{,}07x + 1{,}07x + x^2 \\
7{,}50625 - 1{,}1449 &= 2{,}14x \\
2{,}14x &= 6{,}4176 \\
x &= \frac{6{,}4176}{2{,}14} = 2{,}998... \approx 3{,}0
\end{aligned}
$$

Vastaus: Lammikon syvyys on 3,0 m

63. Piirretään tilannekuva.



$$v_{juna} = 130\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Lasketaan ensin puuttuva etäisyys eli etäisyys kaupungista *C* kaupunkiin *B*. Merkitään tätä kirjaimella *x*. Tilanteesta muodostuu suorakulmainen kolmio, koska pääilmansuunnat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Pythagoraan lauseella saadaan

$$\begin{aligned} 80^2 + x^2 &= 150^2 \\ x^2 &= 150^2 - 80^2 \\ x^2 &= 16100 \\ x &= \pm\sqrt{16100} = \pm 126{,}885... \end{aligned}$$

Koska $x > 0$, niin $x = 126{,}885\ldots$ km.

Aika, joka junalta kuluu kaupungista *A* kaupunkiin *B* on

$$\frac{80\,\text{km}}{130\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} + \frac{126{,}885...\text{km}}{130\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 1{,}59142...\ \text{h}$$

$$\text{aika} = \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}}$$

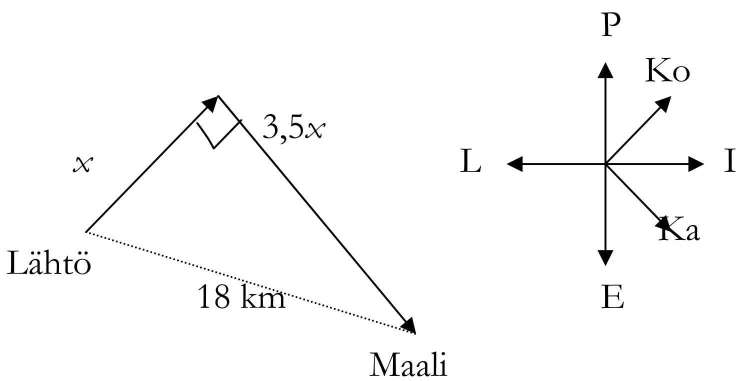
Aika, joka autolta kuluu kaupungista *A* kaupunkiin *B* on

$$\frac{150\,\text{km}}{100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 1{,}5\,\text{h}$$

Koska 1,5 h < 1,59142… h, niin auto on ensin perillä.

Vastaus: Auto on ensin perillä.

64. Merkitään koilliseen purjehdittua matkaa kirjaimella x.
Tilanteesta saadaan kuvio:



Muodostuu suorakulmainen kolmio. Pythagoraan lauseella saadaan

$$\begin{aligned}
x^2 + (3{,}5x)^2 &= 18^2 \\
x^2 + 12{,}25x^2 &= 324 \\
13{,}25x^2 &= 324 \\
x^2 &= \frac{324}{13{,}25} \\
x &= \pm\sqrt{\frac{324}{13{,}25}} = \pm 4{,}94498...
\end{aligned}$$

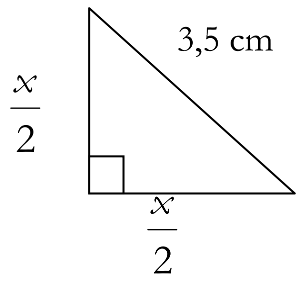
Koska $x > 0$, niin $x = 4{,}94498\ldots$ km.

Etappi kokonaisuudessaan on

$$x + 3{,}5x = 4{,}94498...\,\text{km} + 3{,}5 \cdot 4{,}94498...\,\text{km} = 22{,}2524...\,\text{km} \approx 22\,\text{km}$$

Vastaus: Etappi oli 22 km.

65. a) Sisällä olevan neliön kärki puolittaa ulomman neliön sivun. Muodostuu suorakulmaisia kolmioita.



$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 3{,}5^2$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 12{,}25$$

$$\frac{2x^2}{4} = 12{,}25$$

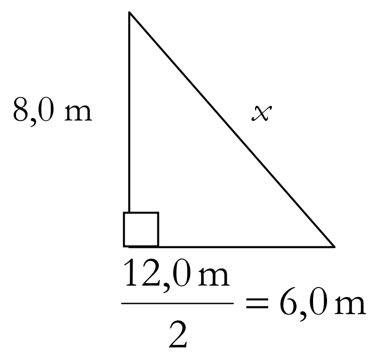
$$\frac{x^2}{2} = 12{,}25$$

$$x^2 = 24{,}5$$

$$x = \pm\sqrt{24{,}5} = \pm 4{,}9497...$$

Koska $x > 0$, niin $x = 4{,}9497\ldots$ cm $\approx 4{,}9$ cm

b)Tasakylkisen kolmion korkeusjana (8 m) puolittaa kannan, jolloin saadaan suorakulmainen kolmio:



$$x^2 = 8{,}0^2 + 6{,}0^2$$

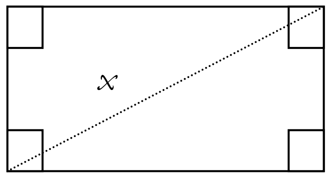
$$x^2 = 100$$

$$x = \pm\sqrt{100} = \pm 10$$

Koska $x > 0$, niin $x = 10$ m.

Vastaus: a) 4,9 cm b) 10 m

66. Piirretään tilannekuva.
Merkitään lävistäjää kirjaimella x.



Suorakulmion sisälle muodostuu suorakulmainen kolmio.

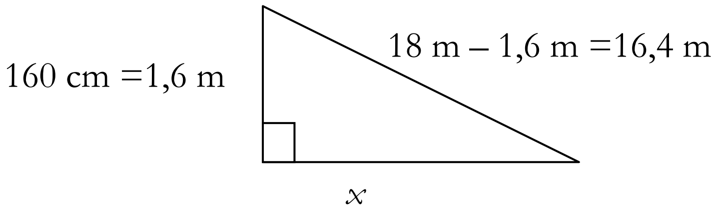
Pythagoraan lauseella saadaan

$$x^2 = 57^2 + 27^2$$
$$x^2 = 3978$$
$$x = \pm\sqrt{3978} = \pm 63{,}071...$$

Koska $x > 0$, niin $x = 63{,}071\ldots$ cm$\approx$ 63 cm

Vastaus: 63 cm

67. Piirretään tilannekuva.
Merkitään kysyttyä pituutta kirjaimella x.



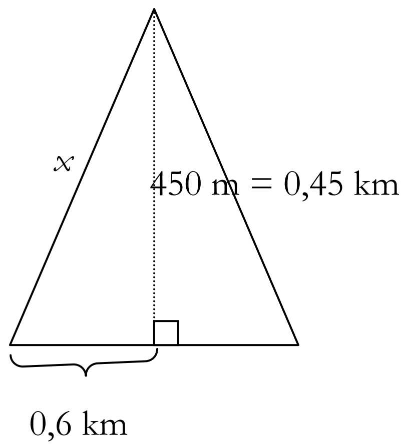
Muodostuu suorakulmainen kolmio, joten voidaan käyttää Pythagoraan lausetta.

$$\begin{aligned} x^2 + 1{,}6^2 &= 16{,}4^2 \\ x^2 &= 16{,}4^2 - 1{,}6^2 \\ x^2 &= 266{,}4 \\ x &= \pm\sqrt{266{,}4} = \pm 16{,}3217... \end{aligned}$$

Koska $x > 0$, niin $x = 16{,}3217\ldots$ m $\approx 16{,}3$ m

Vastaus: 16,3 m

68. Piirretään tilannekuva.
Merkitään lyhintä matkaa rannalta huipulle kirjaimella x.



Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan.

Kannan puolikas on siis

$$\frac{1{,}2\,\text{km}}{2} = 0{,}6\,\text{km}$$

Muodostuu suorakulmainen kolmio. Pythagoraan lauseella saadaan

$$x^2 = 0{,}6^2 + 0{,}45^2$$
$$x^2 = 0{,}5625$$
$$x = \pm\sqrt{0{,}5625} = \pm 0{,}75$$

Koska $x > 0$, niin $x = 0{,}75$ km.

Tutkijan (kiipeilijän) keskinopeus on $0{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, joten matka huipulle kestää

$$\frac{0{,}75\,\text{km}}{0{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}9375\,\text{h}$$

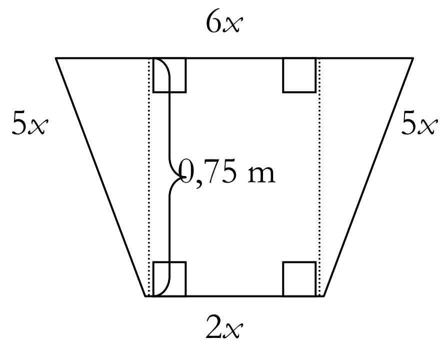
$$\text{aika} = \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}}$$

$0{,}9375 \cdot 60$ min $= 56{,}25$ min ≈ 56 min

Vastaus: 56 min

69. Piirretään tilannekuva rakennuslevyn palasta. Pala on tasakylkinen puolisuunnikas.

Puolisuunnikkaan korkeus on 0,75 m, kyljet ovat $5x$ ja muut sivut $6x$ ja $2x$.

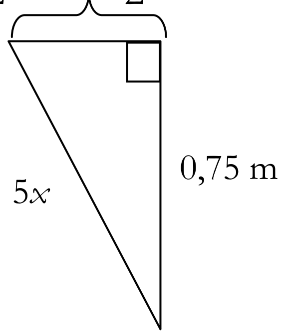


Suorakulmio muodostuu levyn keskelle Suorakulmion kaksi yhdensuuntaista sivua ovat yhtä suuret kuin puolisuunnikkaan sivu $2x$.

Toiset keskenään yhtä suuret sivut ovat yhtä suuret kuin puolisuunnikkaan korkeus 0,75 m.

Lävistäjä jakaa suorakulmion kahteen suorakulmaiseen kolmioon. Pythagoraan lauseella saadaan

$$\frac{6x-2x}{2}=\frac{4x}{2}=2x$$



$$\begin{aligned}
0{,}75^2+(2x)^2 &= (5x)^2\\
0{,}75^2+4x^2 &= 25x^2\\
0{,}75^2 &= 25x^2-4x^2\\
21x^2 &= 0{,}75^2\\
x^2 &= \frac{0{,}75^2}{21}=\frac{0{,}5625}{21}\\
x &= \pm\sqrt{\frac{0{,}5625}{21}}=\pm 0{,}16366...
\end{aligned}$$

Koska $x > 0$, niin $x = 0{,}16366\ldots$ m.

Tällöin suorakulmion kahden sivun pituudet ovat
$2x = 2\cdot 0{,}16366...\,\text{m} = 0{,}3273...\,\text{m} \approx 0{,}33\,\text{m}$

Vastaus: Sivut ovat 0,33 m ja 0,75 m.

1.6 Suorakulmaisen kolmion trigonometriaa

70. a) $\tan\alpha = \dfrac{7{,}2}{3{,}05} = 2{,}360...$

$\alpha = 67{,}04...° \approx 67°$

b) $\sin\alpha = \dfrac{34}{53} = 0{,}641...$

$\alpha = 39{,}904...° \approx 40°$

Vastaus: a) 67° b) 40°

71. a) $\tan 39° = \dfrac{x}{12{,}3} \quad |\cdot 12{,}3$

$12{,}3 \cdot \tan 39° = x$

$x = 9{,}960...$

$x \approx 10 \ (\text{cm})$

b) $\cos 75° = \dfrac{8{,}5}{x} \quad |\cdot x$

$$x \cdot \cos 75° = 8{,}5 \;\; |: \cos 75°$$

$$x = \frac{8{,}5}{\cos 75°}$$

$$x = 32{,}841$$

$$x \approx 33 \; (\text{mm})$$

Vastaus: a) 10 cm b) 33 mm

72. a)

$$\cos x = \frac{2{,}1}{2{,}8} = 0{,}75$$

$$x = 41{,}40...° \approx 41°$$

b)

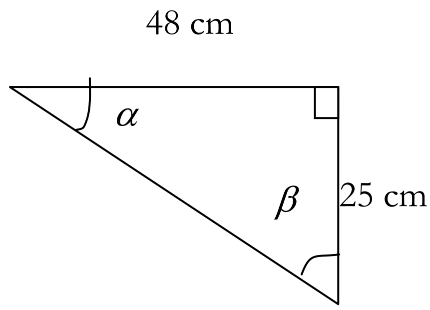
$$\tan 46° = \frac{2{,}5}{x} \; |\cdot x$$

$$x \cdot \tan 46° = 2{,}5 \; |: \tan 46°$$

$$x = \frac{2{,}5}{\tan 46°} = 2{,}414... \approx 2{,}4$$

Vastaus: a) 41° b) 2,4 cm

73. Merkitään kolmion kulmia α ja β.
Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan



$$\tan\alpha = \frac{25}{48} = 0{,}5208...$$
$$\alpha = 27{,}51...° \approx 27{,}5°$$

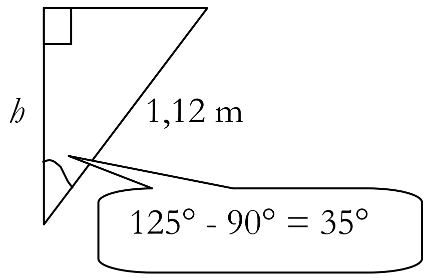
$$\tan\beta = \frac{48}{25} = 1{,}92$$
$$\beta = 62{,}48...° \approx 62{,}5°$$

Vastaus: Kulmat ovat 27,5°; 62,5° ja 90°.

74. a) Suunnikkaan sisään muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\sin 62° = \frac{h}{11} \quad |\cdot 11$$
$$11 \cdot \sin 62° = h$$
$$h = 9{,}712...$$
$$h \approx 9{,}7 \ \ (\text{cm})$$

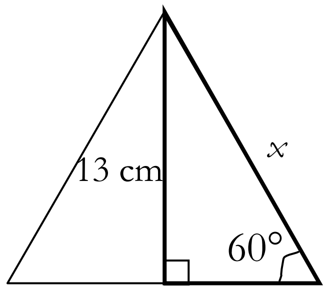
b) Koska puolisuunnikas on tasakylkinen, san erisuuntaiset sivut ovat yhtä pitkät. Puolisuunnikkaan sisään muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan



$$\begin{aligned} \cos 35° &= \frac{h}{1{,}12} \quad |\cdot 1{,}12 \\ 1{,}12\cdot\cos 35° &= h \\ h &= 0{,}9174... \\ h &\approx 0{,}92 \ (\text{m}) \end{aligned}$$

Vastaus: a) 9,7 cm b) 0,92 m

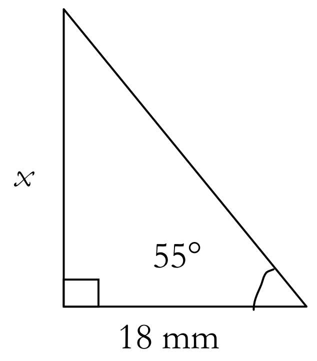
75. Kolmio on tasasivuinen, joten kaikki kulmat ovat 60°. Merkitään kolmion sivua kirjaimella x. Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan



$$\begin{aligned} \sin 60° &= \frac{13}{x} \quad |\cdot x \\ x\cdot\sin 60° &= 13 \quad |:\sin 60° \\ x &= \frac{13}{\sin 60°} \\ x &= 15{,}011... \approx 15 \ (\text{cm}) \end{aligned}$$

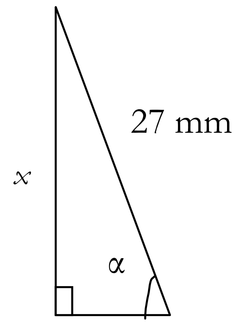
Vastaus: 15 cm

76. Tarkastellaan ensin suurempaa suorakulmaista kolmiota.



$$\tan 55^\circ = \frac{x}{18} \quad |\cdot 18$$
$$x = 18 \cdot \tan 55^\circ$$

Ratkaistaan kulma α pienemmästä suorakulmaisesta kolmiosta.

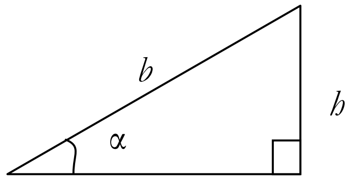


$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{x}{27} \\ &= \frac{18 \cdot \tan 55^\circ}{27} \\ &= 0{,}952... \\ \alpha &= 72{,}19...^\circ \approx 72^\circ \end{aligned}$$

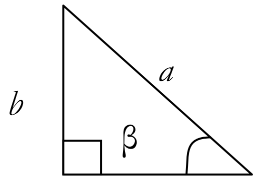
Vastaus: 72°

77. Tarkastellaan kolmion sisälle muodostuvia suorakulmaisia kolmioita erikseen. Ratkaistaan molemmista kolmioista korkeus h.

$$\sin\alpha = \frac{h}{b} \quad | \cdot b$$
$$h = b \cdot \sin\alpha$$



$$\sin\beta = \frac{h}{a} \quad | \cdot a$$
$$h = a \cdot \sin\beta$$



Korkeus h on sama molemmissa kolmioissa, joten saadaan yhtälö

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha \quad |: b$$
$$\frac{a \cdot \sin\beta}{b} = \frac{\cancel{b} \cdot \sin\alpha}{\cancel{b}}$$
$$\frac{a \cdot \sin\beta}{b} = \sin\alpha \quad |: \sin\beta$$
$$\frac{a \cdot \cancel{\sin\beta}}{b \cdot \cancel{\sin\beta}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

78.

$$a \cdot \sin \alpha = b \cdot \sin \beta$$
$$14 \cdot \sin \alpha = 8{,}4 \cdot \sin 66° \quad |:14$$
$$\sin \alpha = \frac{8{,}4 \cdot \sin 66°}{14}$$
$$\sin \alpha = 0{,}548...$$
$$\alpha = 33{,}23...°$$
$$\alpha \approx 33°$$

Vastaus: 33°

79.

$$a \cdot \sin \alpha = b \cdot \sin \beta$$
$$x \cdot \sin 54° = 2{,}35 \cdot \sin 48° \quad |:\sin 54°$$
$$x = \frac{2{,}35 \cdot \sin 48°}{\sin 54°}$$
$$x = 2{,}1586...$$
$$x \approx 2{,}16 \ (\mathrm{m})$$

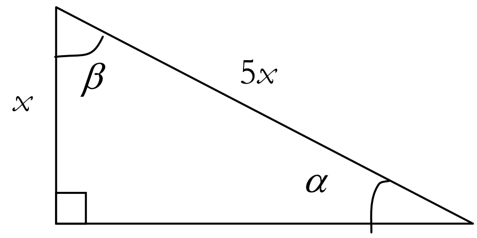
Vastaus: 2,16 m

80. a) Merkitään lyhyemmän kateetin pituutta x ja hypotenuusan pituutta $5x$.

$$\sin\alpha = \frac{x}{5x}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{5}$$

$$\alpha = 11{,}536...^\circ \approx 11{,}5^\circ$$



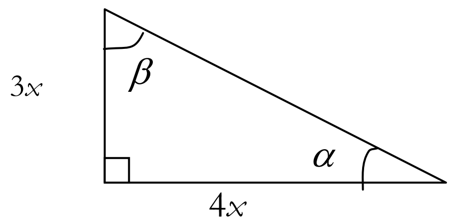
Tällöin $\beta = (90 - 11{,}536...)^\circ \approx 78{,}5^\circ$

b) Merkitään lyhyemmän kateetin pituutta $3x$ ja pidemmän kateetin pituutta $4x$.

$$\tan\alpha = \frac{3x}{4x}$$

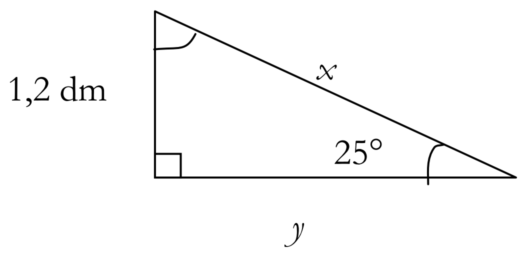
$$\tan\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\alpha = 36{,}869...^\circ \approx 36{,}9^\circ$$



Tällöin $\beta = (90 - 36{,}869...)^\circ \approx 53{,}1^\circ$

81. Piirretään tilannekuva. Merkitään toisen kateetin pituutta kirjaimella y ja hypotenuusan pituutta kirjaimella x.



$$\sin 25^\circ = \frac{1{,}2}{x}$$

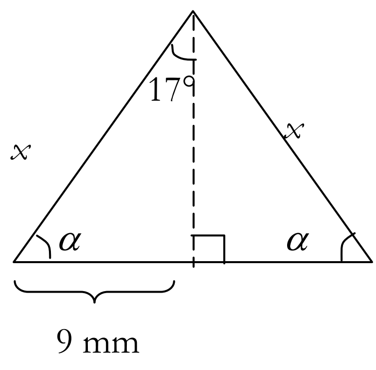
$$x = \frac{1{,}2}{\sin 25^\circ} = 2{,}839... \approx 2{,}8$$

$$\tan 25^\circ = \frac{1{,}2}{y}$$

$$y = \frac{1{,}2}{\tan 25^\circ} = 2{,}573... \approx 2{,}6$$

Vastaus: Kateetin pituus on 2,6 dm, hypotenuusan pituus 2,8 dm.

82. Merkitään tasakylkisen kolmion kyljen pituutta x ja kantakulmaa α. Korkeusjana puolittaa huippukulman, joten huippukulman puolikas on $\frac{34^\circ}{2} = 17^\circ$.



Kantakulma on $\alpha = (90 - 17)^\circ = 73^\circ$.

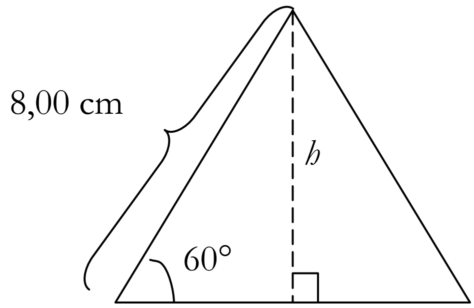
Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\cos 73^\circ = \frac{9}{x}, \text{ josta}$$

$$x = \frac{9}{\cos 73^\circ} = 30{,}78... \approx 31\,(\text{mm})$$

Vastaus: kantakulmat 73°, kylkien pituudet 31 mm

83. Koska tasasivuisen kolmion piiri on 24,0 cm, sivun pituus on 8,00 cm ja kaikki kulmat ovat 60°.



Korkeusjana jakaa tasasivuisen kolmion kahteen suorakulmaiseen kolmioon.

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{8{,}00} \quad |\cdot 8{,}00$$

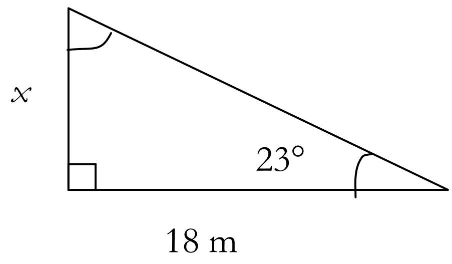
$$h = 8{,}00 \cdot \sin 60^\circ$$

$$h = 6{,}928...$$

$$h \approx 6{,}93$$

Vastaus: 6,93 cm

84. Piirretään tilannekuva.
Merkitään puun korkeutta kirjaimella x.

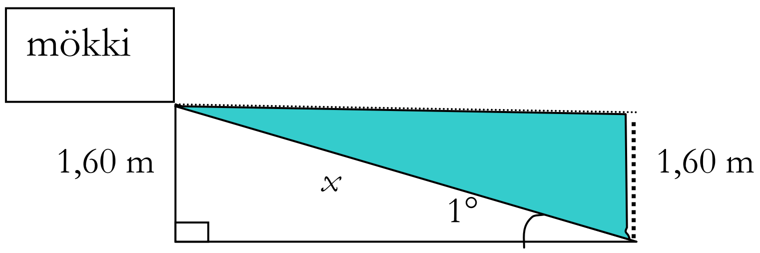


$$\tan 23^\circ = \frac{x}{18\,\text{m}}$$

$$x = 18\,\text{m} \cdot \tan 23^\circ = 7{,}640...\text{m} \approx 7{,}6\,\text{m}$$

Vastaus: 7,6 m

85. Piirretään tilannekuva. Merkitään, että vesi nousee x metrin päähän rantaviivasta tulvan vaikutuksesta.



Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\sin 1^\circ = \frac{1{,}60}{x}$$

$$x = \frac{1{,}60}{\sin 1^\circ}$$

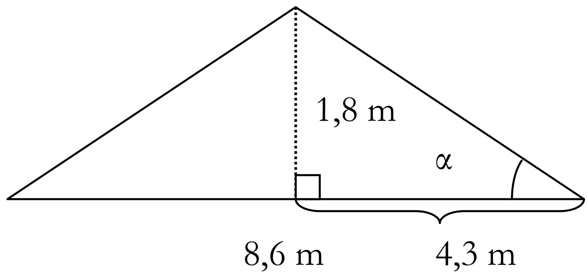
$$x = 91{,}677...$$

$$x \approx 92\,(\text{m})$$

Koska mökki on vain 50 m päässä rannasta ja 92 m >50 m, tulva nousee mökille asti.

Vastaus: Vesi nousee mökille asti.

86. Piirretään tilannekuva.
Merkitään katon kaltevuuskulmaa α.
Korkeusjana puolittaa kannan, jolloin kannan puolikas on siis
$$\frac{8{,}6\,\mathrm{m}}{2} = 4{,}3\mathrm{m}$$



Muodostuu suorakulmainen kolmio, josta saadaan

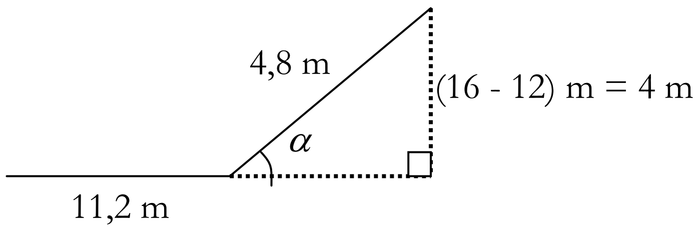
$$\tan\alpha = \frac{1{,}8}{4{,}3}$$
$$\alpha = 22{,}71...° \approx 23°$$

Vastaus: 23°

87. Piirretään tilannekuva sillan puolikkaasta. Merkitään kallistuskulmaa α.

Sillan puolikkaan pituus on $\dfrac{32\text{m}}{2} = 16$ m.

Nostettavan osan pituus on
0,3 ·16 m = 4,8 m.



Vaakatasoon jää sillan puolikkaasta
siis 16 m – 4,8 m= 11,2 m.

Sillan korkeus on 12 m ja avattuna sillan korkein kohta on 16 m korkeudessa.

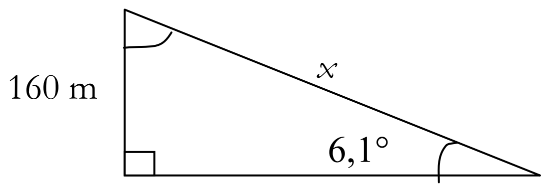
Muodostuu suorakulmainen kolmio, josta saadaan laskettua kallistuskulma α

$$\sin\alpha = \frac{4}{4{,}8}$$

$$\alpha = 56{,}44...^\circ \approx 56^\circ$$

Vastaus: 56°

88. Piirretään tilannekuva. Merkitään huipulle kuljettavan matkan pituutta x. Muodostuu suorakulmainen kolmio, josta saadaan



$$\sin 6{,}1^\circ = \frac{160\,\text{m}}{x}$$

$$x = \frac{160\,\text{m}}{\sin 6{,}1^\circ} = 1505{,}68...\text{m}$$

$$\text{aika} = \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}}$$

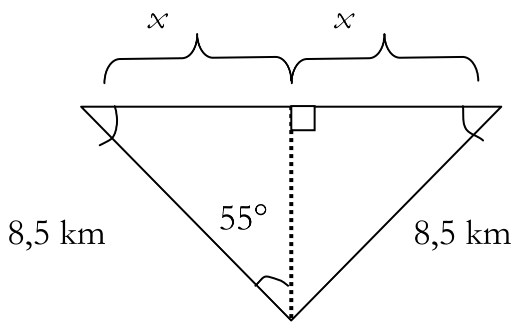
$$= \frac{1{,}50568...\text{km}}{22\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 0{,}0684...\text{h} \approx 4\,\text{min}$$

Vastaus: 4 min

89. a) Piirretään tilannekuva.
Muodostuu tasakylkinen kolmio, jonka huippukulma on 110°.

Korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman, joten huippukulman puolikas on $\frac{110°}{2} = 55°$.

Selkeyden kannalta merkitään laivojen välistä etäisyyttä $2x$, jolloin kolmion kannan puolikas on siis x.



Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\sin 55^\circ = \frac{x}{8{,}5}$$

$$x = 8{,}5 \cdot \sin 55^\circ = 6{,}9627...$$

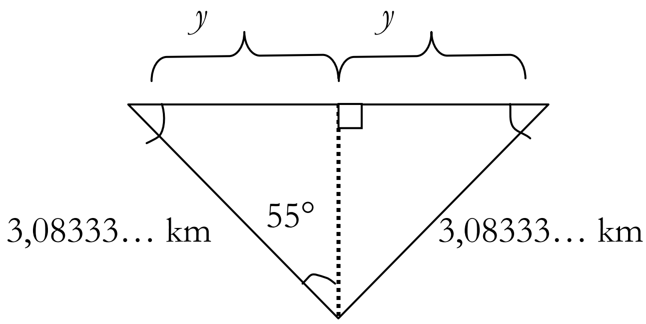
eli etäisyys on $2x = 2 \cdot 6{,}9627\ldots \text{km} \approx 14$ km

b) 5 minuutin aikana laiva kulkee

$$5\,\text{min} \cdot 65\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{5}{60}\text{h} \cdot 65\frac{\text{km}}{\text{h}} = 5{,}4166...\,\text{km}$$

Uusi etäisyys majakkaan on $(8{,}5 - 5{,}4166\ldots)\text{km} = 3{,}08333\ldots\text{km}$.

Merkitään laivojen välistä etäisyyttä nyt $2y$.



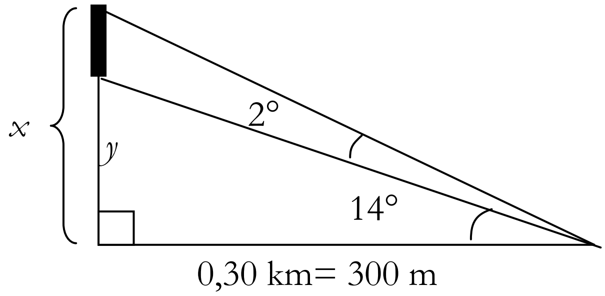
Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan nyt

$$\begin{aligned}\sin 55^\circ &= \frac{y}{3{,}08333...}\\ x &= 3{,}08333 \cdot \sin 55^\circ\\ &= 2{,}5257...\end{aligned}$$

Etäisyys siis on $2x = 2 \cdot 2{,}5257\ldots\text{km} \approx 5{,}1$ km

Vastaus: a) 14 km b) 5,1 km

90. Piirretään tilannekuva. Merkitään kallion ja tornin yhteen laskettua korkeutta x ja kallion korkeutta y.



Muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota.

Suuremmasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\begin{aligned} \tan 16^\circ &= \frac{x}{300} \\ x &= 300 \cdot \tan 16^\circ \\ &= 86{,}023... \end{aligned}$$

Pienemmästä suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\begin{aligned} \tan 14^\circ &= \frac{y}{300} \\ x &= 300 \cdot \tan 14^\circ \\ &= 74{,}798... \end{aligned}$$

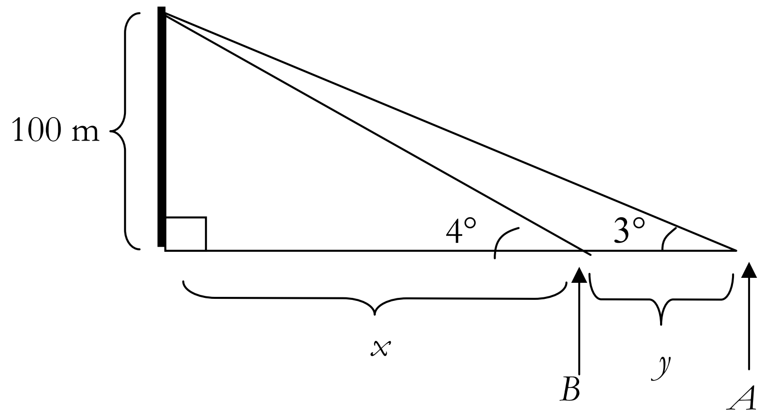
Tornin korkeus on tällöin

$$x - y = (86{,}023\ldots - 74{,}798\ldots)\text{m} \approx 11 \text{ m}.$$

Vastaus: 11m

91. Pisteet A ja B voivat sijaita joko samalla puolella tornia tai tornin eri puolilla.

Tapaus 1 (samalla puolella): Menkitään pisteiden välimatkaa y ja pisteen B etäisyyttä tornista kirjaimella x.



Pienemmästä suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$
\begin{aligned}
\tan 4^\circ &= \frac{100}{x} \quad \Big| \cdot x \\
\tan 4^\circ \cdot x &= 100 \quad \Big| : \tan 4^\circ \\
x &= \frac{100}{\tan 4^\circ} \\
x &= 1430{,}066\ldots (\mathrm{m})
\end{aligned}
$$

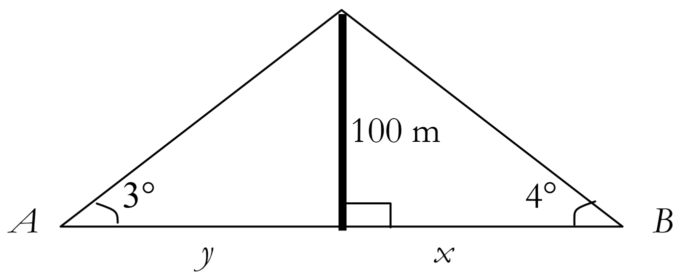
Suuremmasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$
\begin{aligned}
\tan 3^\circ &= \frac{100}{x+y} \quad \Big| \cdot (x+y) \\
\tan 3^\circ (x+y) &= 100 \quad \Big| : \tan 3^\circ \\
x+y &= \frac{100}{\tan 3^\circ} \\
x+y &= 1908{,}11\ldots\ (\mathrm{m})
\end{aligned}
$$

Siis pisteiden A ja B välimatka eli y on

$$y = 1908{,}11\ldots\,\mathrm{m} - x = 1908{,}11\ldots\,\mathrm{m} - 1430{,}066\ldots\,\mathrm{m} = 478{,}04\ldots\mathrm{m} \approx 478\,\mathrm{m}$$

Tapaus 2 (eri puolilla):
Merkitään pisteen A etäisyyttä tornista y ja pisteen B etäisyyttä tornista x.



Muodostuvista suorakulmaisista kolmioista saadaan etäisyyksille x ja y

$$\begin{aligned}
\tan 3^\circ &= \frac{100}{y} \quad \Big| \cdot y \\
\tan 3^\circ \cdot y &= 100 \quad \Big| : \tan 3^\circ \\
y &= \frac{100}{\tan 3^\circ} \\
y &= 1908{,}11\ldots\ (\mathrm{m})
\end{aligned}$$

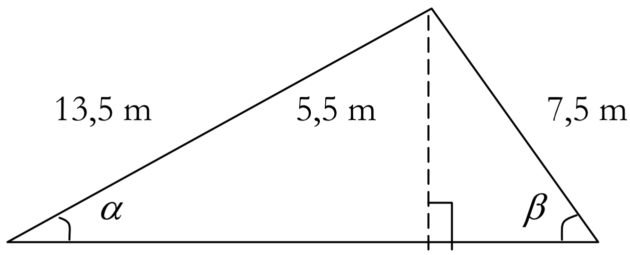
$$\begin{aligned}
\tan 4^\circ &= \frac{100}{x} \quad \Big| \cdot x \\
\tan 4^\circ \cdot x &= 100 \quad \Big| : \tan 4^\circ \\
x &= \frac{100}{\tan 4^\circ} \\
x &= 1430{,}066\ldots (\mathrm{m})
\end{aligned}$$

Pisteiden välinen etäisyys on

$$x+y=1908{,}11...\,\text{m}+1430{,}066...\,\text{m}=3338{,}18...\,\text{m}\approx 3340\,\text{m}$$

Vastaus: 478 m tai 3340 m

92. Kolmion sisään muodostuvista suorakulmaisista kolmioista saadaan

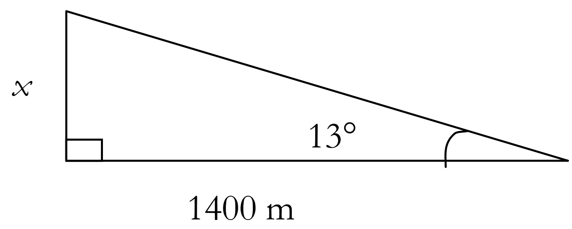


$$\sin\alpha=\frac{5{,}5}{13{,}5}$$
$$\alpha=24{,}042...^\circ\approx 24^\circ$$

$$\sin\beta=\frac{5{,}5}{7{,}5}$$
$$\beta=47{,}166...^\circ\approx 47^\circ$$

Vastaus: α = 24°, β = 47°

93. Piirretään tilannekuva.
Merkitään maston korkeutta x.

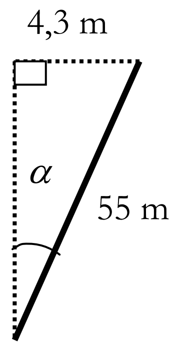


Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\tan 13^\circ = \frac{x}{1400}$$
$$x = 1400 \cdot \tan 13^\circ = 323{,}215... \approx 320\,(\mathrm{m})$$

Vastaus: 320 m

94. Piirretään tilannekuva. Tornin korkeus on 55 m.
Olkoon torni kallistunut α astetta.
Kallistuma on 4,3 m.

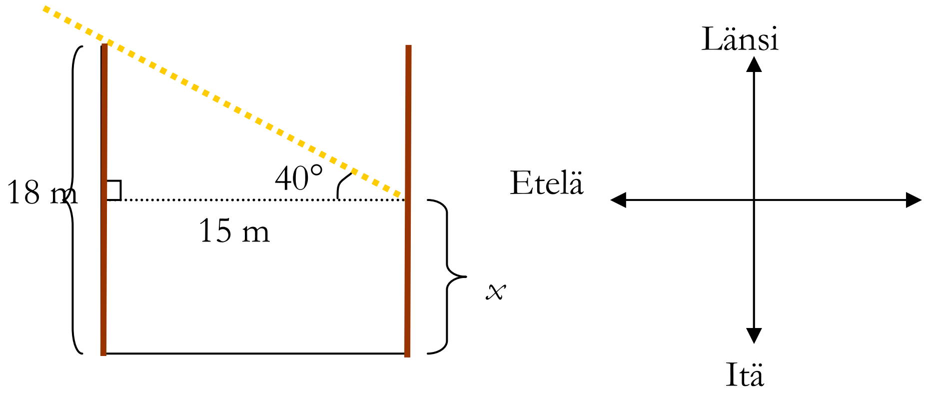


Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\sin\alpha = \frac{4{,}3}{55}$$
$$\alpha = 4{,}484...^\circ \approx 4{,}5^\circ$$

Vastaus: 4,5°

95. Piirretään tilannekuva. Kadun leveys on 15 m. Katu kulkee itä-länsisuunnassa. Olkoon x korkeus, johon auringonsäteet osuvat. Aurinko paistaa etelästä 40° kulmassa.



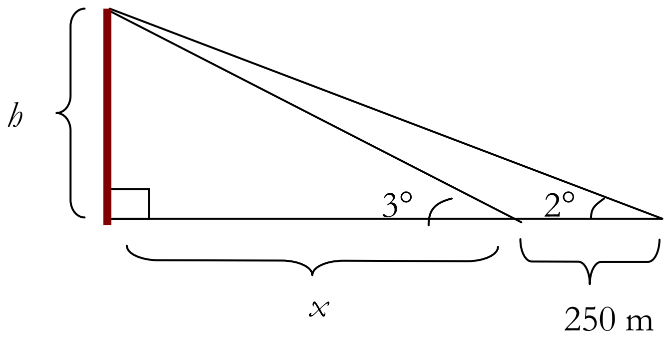
Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$
\begin{aligned}
\tan 40^\circ &= \frac{18-x}{15} \\
18-x &= 15\cdot\tan 40^\circ \\
-x &= -18+15\cdot\tan 40^\circ \\
x &= 18-15\cdot\tan 40^\circ \\
x &= 5{,}413\ldots \\
x &\approx 5{,}4\ (\mathrm{m})
\end{aligned}
$$

Koska ikkuna on vain 4,0 m korkeudella, eivät auringonsäteet osu siihen. (4,0 m < 5,4 m)

Vastaus: Eivät osu.

96. Piirretään tilannekuva.



Merkitään majakan korkeutta kirjaimella h.

Olkoon veneen etäisyys majakasta lopussa x ja alussa $x + 250$.

Muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota, joista voidaan ratkaista korkeus h.

Suuremmasta kolmiosta saadaan

$$\tan 2^\circ = \frac{h}{x+250} \quad |\cdot (x+250)$$
$$h = (x+250)\cdot \tan 2^\circ$$

Pienemmästä kolmiosta saadaan

$$\tan 3^\circ = \frac{h}{x} \quad |\cdot x$$
$$h = x \cdot \tan 3^\circ$$

Majakan korkeus on yhtä suuri molemmissa tapauksissa, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
(x+250)\cdot \tan 2^\circ &= x\cdot \tan 3^\circ \\
x\tan 2^\circ + 250\tan 2^\circ &= x\tan 3^\circ \\
x\tan 2^\circ - x\tan 3^\circ &= -250\tan 2^\circ \\
x\left(\tan 2^\circ - \tan 3^\circ\right) &= -250\tan 2^\circ \\
x &= \frac{-250\tan 2^\circ}{\tan 2^\circ - \tan 3^\circ} \\
x &= 499{,}238\ldots \approx 500\ (\mathrm{m})
\end{aligned}$$

Majakan korkeus on siis

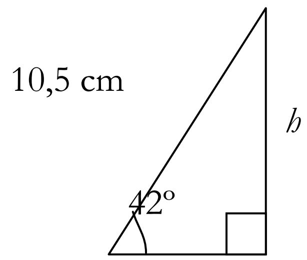
$$h = x\cdot \tan 3^\circ = 499{,}238\ldots \cdot \tan 3^\circ = 26{,}163\ldots \approx 26\ (\mathrm{m})$$

Vastaus: etäisyys 500m, majakan korkeus 26 m

1.7 Pinta-aloja

97. a) Lasketaan ensi suunnikkaan korkeus *h*.

$$\sin 42° = \frac{h}{10{,}5} \quad \Big| \cdot 10{,}5$$
$$h = 10{,}5 \cdot \sin 42°$$
$$h = 7{,}025... \text{ (cm)}$$

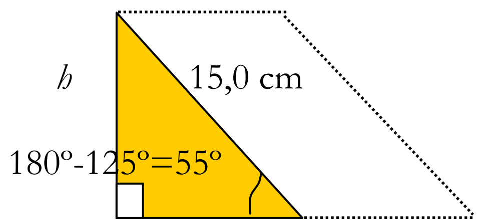


Ala on

$$A = 28{,}0\,\text{cm} \cdot 7{,}025...\,\text{cm} = 196{,}724...\,\text{cm}^2 \approx 197\,\text{cm}^2$$

b) Lasketaan ensi suunnikkaan korkeus *h*.

$$\sin 55° = \frac{h}{15{,}0} \quad \Big| \cdot 15{,}0$$
$$h = 15{,}0 \cdot \sin 55°$$
$$h = 12{,}287... \text{ (cm)}$$



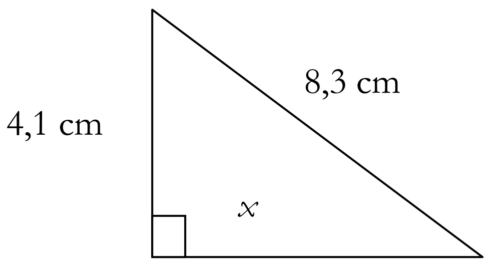
Ala on

$$A = 8{,}0\ \text{cm} \cdot 12{,}287...\,\text{cm} = 98{,}2982...\,\text{cm}^2 \approx 98\,\text{cm}^2$$

Vastaus: a) 197 cm^2 b) 98 cm^2

98. a) Selvitetään ensi suorakulmaisen kolmion kanta. Merkitään kantaa kirjaimella x.

$$x^2+4{,}1^2=8{,}3^2$$
$$x^2=8{,}3^2-4{,}1^2$$
$$x^2=52{,}08$$
$$x=\pm\sqrt{52{,}08}=\pm 7{,}2166...$$

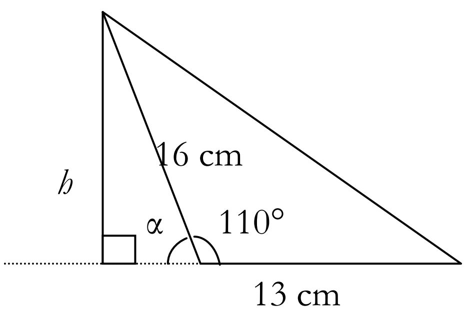


Koska $x>0$, niin $x=7{,}2166\ldots$ cm

Pinta-alaksi siis saadaan

$$A=\frac{7{,}2166...\text{cm}\cdot 4{,}1\,\text{cm}}{2}=14{,}7941...\,\text{cm}^2\approx 15\,\text{cm}^2$$

b) Lasketaan ensin kolmion korkeus h.



Kulma $\alpha=180°-110°=70°$

Korkeus saadaan muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta.

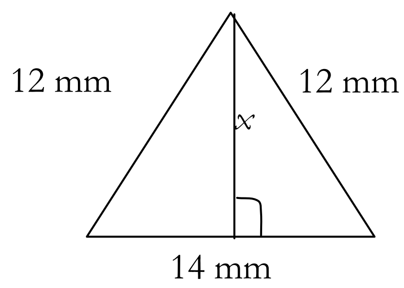
$$\sin\alpha=\frac{h}{16}$$
$$\sin 70°=\frac{h}{16}$$
$$h=16\cdot\sin 70°$$
$$h=15{,}035...\ (\text{cm})$$

Kolmion ala on

$$A = \frac{13\,\text{cm} \cdot 15{,}035...\,\text{cm}}{2} = 97{,}7280...\,\text{cm}^2 \approx 98\,\text{cm}^2$$

Vastaus: a) 15 cm^2 b) 98 cm^2

99. a) Lasketaan ensin kolmion korkeus. Merkitään korkeutta kirjaimella x.



Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan. Kannan puolikas on $\frac{14\,\text{mm}}{2} = 7\,\text{mm}$.

Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan Pythagoraan lauseella

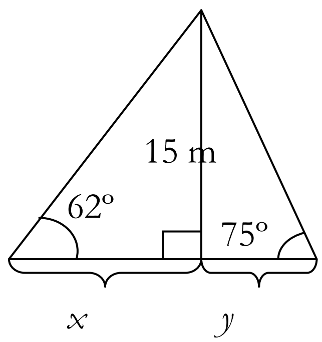
$$\begin{aligned} 7^2 + x^2 &= 12^2 \\ x^2 &= 12^2 - 7^2 \\ x^2 &= 95 \\ x &= \pm\sqrt{95} \end{aligned}$$

Koska $x > 0$, niin $x = \sqrt{95} \approx 9{,}74679...$

Pinta-alaksi saadaan

$$A=\frac{14\,\text{mm}\cdot 9{,}74679...\,\text{mm}}{2}=68{,}22756...\,\text{mm}^2\approx 68\,\text{mm}^2$$

b) Lasketaan ensin kolmion kannan pituus $x+y$.



Pituus x saadaan suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\begin{aligned}\tan 62^\circ &= \frac{15}{x} && \Big|\cdot x\\ x\cdot\tan 62^\circ &= 15 && \Big|:\tan 62^\circ\\ x &= \frac{15}{\tan 62^\circ}=7{,}9756...\end{aligned}$$

Pituus y saadaan toisesta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\begin{aligned}\tan 75^\circ &= \frac{15}{y} && \Big|\cdot y\\ y\cdot\tan 75^\circ &= 15 && \Big|:\tan 75^\circ\\ y &= \frac{15}{\tan 75^\circ}=4{,}0192...\end{aligned}$$

Koko kanta siis on

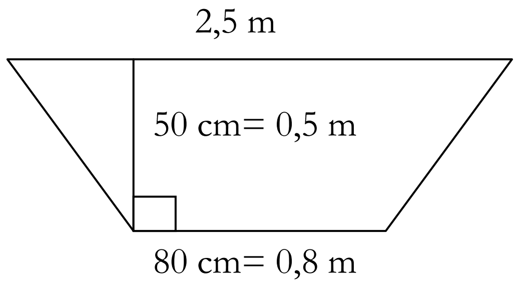
$$x+y=7{,}9756...\,\text{m}+4{,}0192...\text{m}=11{,}97565...\text{m}$$

Pinta-alaksi saadaan

$$A = \frac{11{,}97565...\,\mathrm{m} \cdot 15\,\mathrm{m}}{2} = 89{,}817...\,\mathrm{m}^2 \approx 90\,\mathrm{m}^2$$

Vastaus: a) 68 mm^2 b) 90 m^2

100. Piirretään tilannekuva ojan poikkileikkauksesta.



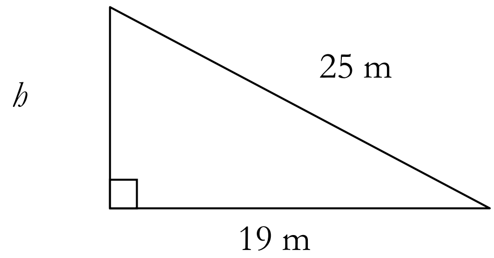
Puolisuunnikkaan ala on

$$A = \frac{0{,}5\,\mathrm{m} \cdot (2{,}5\,\mathrm{m} + 0{,}8\,\mathrm{m})}{2}$$
$$= \frac{0{,}5\,\mathrm{m} \cdot 3{,}3\,\mathrm{m}}{2} = 0{,}825\,\mathrm{m}^2 \approx 0{,}83\,\mathrm{m}^2$$

Vastaus: 0,83 m^2

101. Lasketaan kolmion korkeus h.

Pythagoraan lauseella saadaan



$$\begin{aligned} h^2 + 19^2 &= 25^2 \\ h^2 &= 25^2 - 19^2 \\ h^2 &= 264 \\ h &= \pm\sqrt{264} \end{aligned}$$

Koska $h > 0$, niin $h = \sqrt{264}$ m=16,248… m

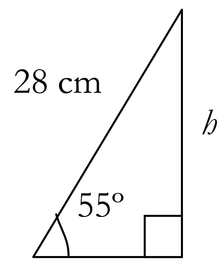
Kolmion ala on

$$A = \frac{16{,}248...\,\mathrm{m} \cdot 19\,\mathrm{m}}{2} = 154{,}3567...\,\mathrm{m}^2 \approx 150\,\mathrm{m}^2$$

Vastaus: 150 m^2

102. a) Lasketaan ensin puolisuunnikkaan korkeus *h*.

$$\sin 55° = \frac{h}{28} \quad |\cdot 28$$
$$h = 28 \cdot \sin 55°$$
$$h = 22{,}936...(\text{cm})$$

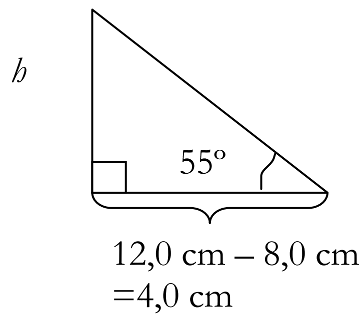


Ala on

$$A = \frac{22{,}936...\,\text{cm} \cdot (42\,\text{cm} + 17\text{cm})}{2} = 676{,}619...\,\text{cm}^2 \approx 680\,\text{cm}^2$$

b) Lasketaan ensin puolisuunnikkaan korkeus *h*.

$$\tan 55° = \frac{h}{4{,}0} \quad |\cdot 4{,}0$$
$$h = 4{,}0 \cdot \tan 55°$$
$$h = 5{,}7125...\ \ (\text{cm})$$

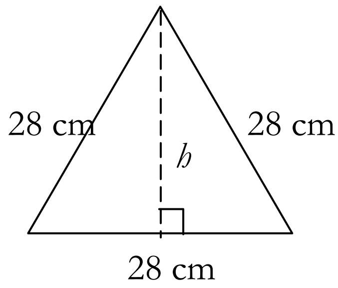


Ala on

$$A = \frac{5{,}7125...\,\text{cm} \cdot (8{,}0\,\text{cm} + 12{,}0\,\text{cm})}{2}$$
$$= 57{,}1259...\,\text{cm}^2$$
$$\approx 57\,\text{cm}^2$$

Vastaus: a) 680 cm^2 b) 57 cm^2

103. Tasasivuisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan.



Kanna puolikas on $\dfrac{28\,\text{cm}}{2} = 14\,\text{cm}$.

Lasketaan kolmion korkeus muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella

$$\begin{aligned} h^2 + 14^2 &= 28^2 \\ h^2 &= 28^2 - 14^2 \\ h^2 &= 588 \\ h &= \pm\sqrt{588} = 24{,}2487... \end{aligned}$$

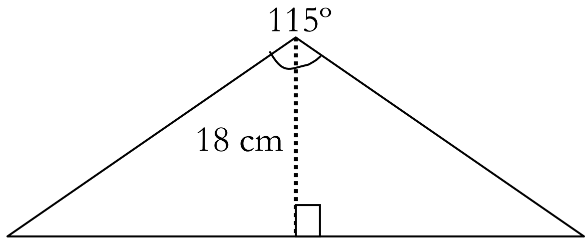
Koska $h > 0$, niin $h = 24{,}2487...\,\text{cm}$.

Pinta-ala on

$$A = \frac{28\,\text{cm} \cdot 24{,}2487...\,\text{cm}}{2} = 339{,}481958...\,\text{cm}^2 \approx 340\,\text{cm}^2$$

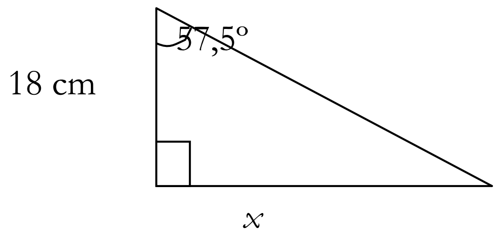
Vastaus: 340 cm^2

104. Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman.



Merkitään kannan puolikkaan pituutta kirjaimella x. Huippukulman puolikas on $\frac{115°}{2} = 57{,}5°$.

Lasketaan aluksi kannan puolikas x muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta.



$$\tan 57{,}5° = \frac{x}{18}$$
$$x = 18 \cdot \tan 57{,}5°$$
$$x = 28{,}254...(\text{cm})$$

Koko kannan pituus on siis $2x = 2 \cdot 28{,}254...\,\text{cm} = 56{,}508...\,\text{cm}$.

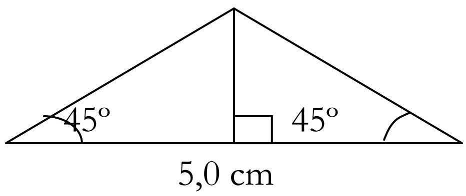
Kolmion ala on

$$A = \frac{56{,}508...\,\text{cm} \cdot 18\,\text{cm}}{2} = 508{,}578...\,\text{cm}^2 \approx 510\,\text{cm}^2$$

Vastaus: $510\ \text{cm}^2$

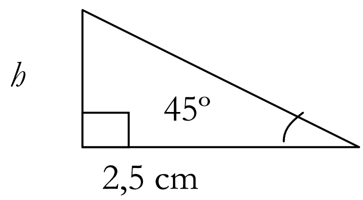
105. Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan.

Kannan puolikas on $\dfrac{5{,}0\,\text{cm}}{2} = 2{,}5\,\text{cm}\,.$



Merkitään korkeusjanan pituutta *h*.
Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\tan 45° = \frac{h}{2{,}5}$$
$$h = 2{,}5 \cdot \tan 45°$$
$$h = 2{,}5$$

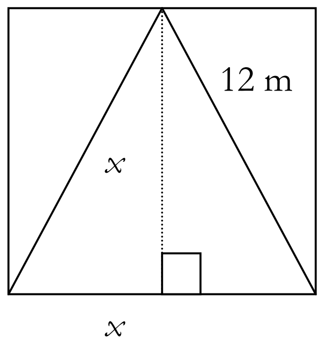


Ala on siis

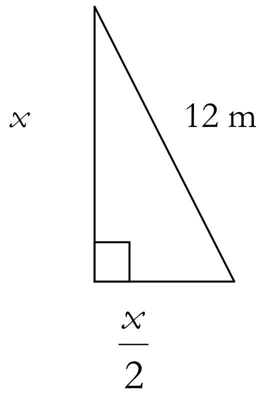
$$A = \frac{5{,}0\,\text{cm} \cdot 2{,}5\text{cm}}{2} = 6{,}25\,\text{cm}^2 \approx 6{,}3\,\text{cm}^2$$

Vastaus: 6,3 cm^2

106. Merkitään tasakylkisen kolmion kantaa kirjaimella x. Kannan pituus on yhtä suuri kuin neliön sivun pituus. Tasakylkisen kolmion korkeusjanan pituus on yhtä suuri kuin neliön sivun pituus.



Korkeusjana puolittaa kannan. Kannan puolikkaan pituus on $\frac{x}{2}$.



Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan Pythagoraan lauseella

$$
\begin{aligned}
x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 &= 12^2 \\
x^2 + \frac{x^2}{4} &= 144 \quad |\cdot 4 \\
4x^2 + x^2 &= 576 \\
5x^2 &= 576 \quad |:5 \\
x^2 &= 115{,}2 \\
x &= \pm\sqrt{115{,}2} = \pm 10{,}7331\ldots
\end{aligned}
$$

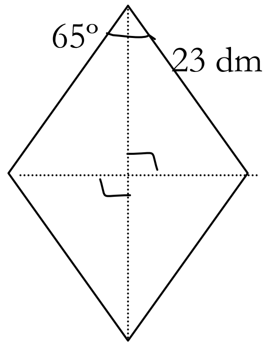
Koska $x > 0$, niin $x = 10{,}733\ldots$ m

Neliön ala on

$$A = 10{,}733...\,\text{m} \cdot 10{,}733...\ \text{m} = 115{,}2\,\text{m}^2 \approx 120\,\text{m}^2$$

Vastaus: 120 m^2

107. Neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa ja ne puolittavat kulmat.

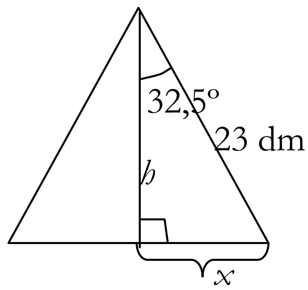


Muodostuu suorakulmainen kolmio, joka tunnettu kulma on $\frac{65°}{2} = 32{,}5°$.

Merkitään neljäkkään toisen lävistäjän puolikasta kirjaimella *x* ja toisen puolikasta kirjaimella *h*.

Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan pituus *x*.

$$\begin{aligned} \sin 32{,}5° &= \frac{x}{23} \quad \Big|\cdot 23 \\ x &= 23 \cdot \sin 32{,}5° \\ x &= 12{,}357...(\text{dm}) \end{aligned}$$



Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan pituus h.

$$\cos 32{,}5° = \frac{h}{23} \,|\cdot 23$$
$$h = 23 \cdot \cos 32{,}5°$$
$$h = 19{,}298...(\mathrm{dm})$$

Lävistäjä jakaa neljäkkään (leijan) kahteen tasakylkiseen kolmioon.

Tasakylkisen kolmion korkeus $h = 19{,}398\ldots$ dm ja
kannan pituus on $2x = 2 \cdot 12{,}357...\,\mathrm{dm} = 24{,}715...$ dm.

Kolmion ala on

$$A = \frac{24{,}715...\,\mathrm{dm} \cdot 19{,}398...\mathrm{dm}}{2} = 239{,}7184...\,\mathrm{dm}^2$$

Koska neljäkäs (leija) sisältää kaksi samanlaista kolmiota, on neljäkkään ala

$$A = 2 \cdot 239{,}7184...\,\mathrm{dm}^2 = 479{,}4368...\,\mathrm{dm}^2 \approx 480\,\mathrm{dm}^2$$

Vastaus: Leijan ala on 480 dm^2.

108. Kolmion ala $A = \dfrac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2}$

Merkitään kysyttyä kannan pituutta kirjaimella x.

$$\begin{aligned} A &= 57 \ (\text{m}^2) \\ \frac{x \cdot 18}{2} &= 57 \quad \Big| \cdot 2 \\ 18x &= 114 \quad \Big| : 18 \\ x &= \frac{114}{18} = 6{,}333... \approx 6{,}3 \end{aligned}$$

Vastaus: Kanta on 6,3 m.

109. Kolmion ala $A = \dfrac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2}$

Merkitään kolmion korkeutta kirjaimella x. Tällöin kannan pituus on $5x$.

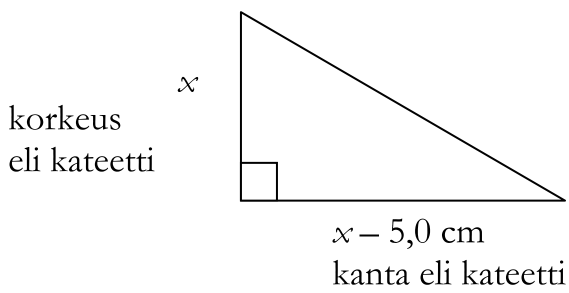
$$\begin{aligned} A &= 65 \ (\text{dm}^2) \\ \frac{x \cdot 5x}{2} &= 65 \\ \frac{5x^2}{2} &= 65 \quad \Big| \cdot 2 \\ 5x^2 &= 130 \quad \Big| : 5 \\ x^2 &= 26 \\ x &= \pm\sqrt{26} = \pm 5{,}099... \end{aligned}$$

Koska $x > 0$, niin $x = \sqrt{26}\,\text{dm} = 5{,}099...\,\text{dm} \approx 5{,}1\,\text{dm}$.

Tällöin $5x = 5 \cdot \sqrt{26}\,\text{dm} = 25{,}495...\,\text{dm} \approx 25\,\text{dm}$

Vastaus: Kanta on 25 dm ja korkeus 5,1 dm.

110. Merkitään korkeutta kirjaimella x. Kannan pituus on tällöin x – 5,0 cm.



Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat samat kuin kolmion kanta ja korkeus.

$$A = 33\ (\text{cm}^2)$$

$$\frac{(x - 5{,}0)x}{2} = 33 \quad |\cdot 2$$

$$x^2 - 5{,}0x = 66$$

$$x^2 - 5{,}0x - 66 = 0$$

$$x = \frac{5{,}0 \pm \sqrt{(-5{,}0)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-66)}}{2}$$

$$= \frac{5{,}0 \pm \sqrt{289}}{2}$$

$$= \frac{5{,}0 \pm 17}{2}$$

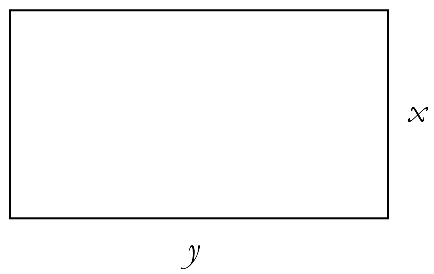
$$x = \frac{5{,}0 + 17}{2} = 11 \text{ tai } \quad x = \frac{5{,}0 - 17}{2} = -6$$

Koska $x > 0$, niin $x = 11$ (cm).
Tällöin lyhyempi kateetti on $x - 5{,}0 = 11 - 5{,}0 = 6{,}0$ (cm).

Vastaus: Kateetit ovat 6,0 cm ja 11 cm.

111. Olkoot sivujen pituudet x ja y.
Piirin pituus on

$$2x + 2y = 26 \text{ (cm)}.$$



Ala on

$$xy = 40 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä toinen kirjan ja sijoitetaan se jälkimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{aligned} 2x &= 26 - 2y \quad \Big|:2 \\ x &= 13 - y \end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä jälkimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
(13-y)y &= 40 \\
13y - y^2 &= 40 \\
-y^2 + 13y - 40 &= 0 \\
y &= \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-40)}}{-2} \\
&= \frac{-13 \pm \sqrt{9}}{-2}
\end{aligned}$$

$$y = \frac{-13+3}{-2} = 5 \quad \text{tai} \quad y = \frac{-13-3}{-2} = 8$$

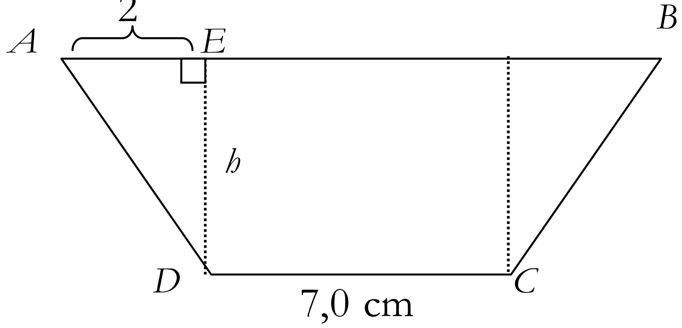
Jos $y = 5$ (cm), niin $x = 13 - y = 13 - 5 = 8$ (cm)
Jos $y = 8$ (cm), niin $x = 13 - 8 = 5$ (cm).

Vastaus: Sivut ovat 5,0 cm ja 8,0 cm.

112. $AB = 10{,}0$ cm
$DC = 7{,}0$ cm
$AD = BC = 4{,}1$ cm

Merkitään puolisuunnikkaan korkeutta kirjaimella h.

$$\frac{10{,}0\,\text{cm} - 7{,}0\,\text{cm}}{2} = 1{,}5\,\text{cm}$$



Tasakylkisen puolisuunnikkaan korkeusjana rajaa puolisuunnikkaan sisään suorakulmaisen kolmion, jonka kateettien pituudet ovat h ja 1,5 cm. Hypotenuusan pituus on puolisuunnikkaan kyljen pituus eli 4,1 cm.

Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan ratkaistua h Pythagoraan lauseella

$$\begin{aligned} h^2 + 1{,}5^2 &= 4{,}1^2 \\ h^2 &= 4{,}1^2 - 1{,}5^2 \\ h^2 &= 14{,}56 \\ h &= \pm\sqrt{14{,}56} = \pm 3{,}8157... \end{aligned}$$

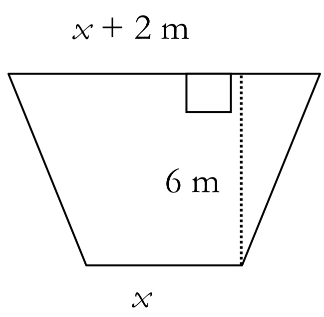
Koska $h > 0$, niin $h = 3{,}8157\ldots$ (cm).

Puolisuunnikkaan ala on

$$\begin{aligned} A &= \frac{3{,}8157...\,\text{cm} \cdot (10{,}0\,\text{cm} + 7{,}0\,\text{cm})}{2} \\ &= 32{,}43393...\,\text{cm}^2 \\ &\approx 32{,}4\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: $32{,}4\ \text{cm}^2$

113. Merkitään puolisuunnikkaan toisen yhdensuuntaisen sivun pituutta kirjaimella x.



Toisen sivun pituus on tällöin x + 2 m
Puolisuunnikkaan korkeus on 6m.

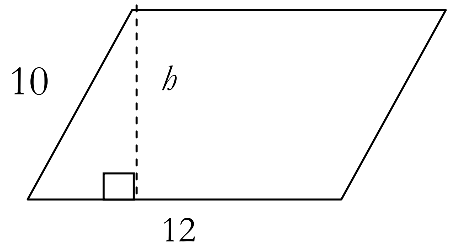
Ala on 24 m^2, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{6(x+2+x)}{2} &= 24 \quad |\cdot 2 \\ 6(2x+2) &= 48 \\ 12x+12 &= 48 \\ 12x &= 36 \quad |:12 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Sivujen pituudet ovat siis x = 3 m ja x + 2 m=3 m + 2 m=5 m

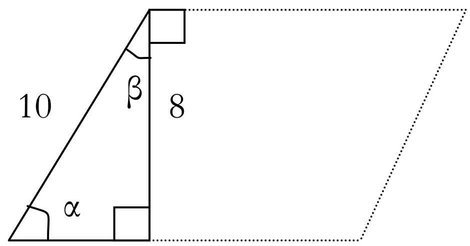
Vastaus: Sivut ovat 3 m ja 5 m.

114. Lasketaan suunnikkaan korkeus *h*, kun tiedetään, että ala on 96.



$$12h = 96 \quad \Big|: 12$$
$$h = \frac{96}{12}$$
$$h = 8$$

Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan



$$\cos\beta = \frac{8}{10}$$
$$\beta = 36{,}869...°$$

$$\sin\alpha = \frac{8}{10}$$
$$\alpha = 53{,}130...°$$

Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat aina yhtä suuret.

Kaksi suunnikkaan vastakkaista kulmaa ovat suuruudeltaan

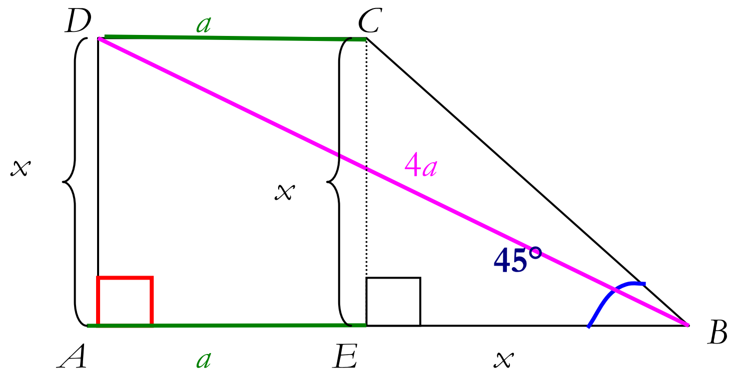
$$\alpha = 53{,}130\ldots° \approx 53°$$

Toiset kaksi vastakkaista kulmaa ovat

$$90° + \beta = 90° + 36{,}869...° = 126{,}869...° \approx 127°$$

Vastaus: Kaksi vastakkaista kulmaa 53° ja toiset kaksi vastakkaista kulmaa
127°.

115. Piirretään tilannekuva.



Merkitään puolisuunnikkaan korkeutta kirjaimella x.

Koska kulma A on 90°, niin kulma D on 90°. Koska kulma B on 45°, suorakulmainen kolmio EBC on tasakylkinen, joten jana $EB = x$.

Pythagoraan lauseella saadaan

$$
\begin{aligned}
x^2 + (a+x)^2 &= (4a)^2 \\
x^2 + a^2 + 2ax + x^2 &= 16a^2 \\
2x^2 + 2ax - 15a^2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-2a \pm \sqrt{(2a)^2 - 4\cdot 2\cdot(-15a^2)}}{2\cdot 2} \\
&= \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 + 120a^2}}{4} \\
&= \frac{-2a \pm \sqrt{124a^2}}{4}
\end{aligned}
$$

$$x=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2\cdot 31}}{4}$$
$$=\frac{-2a\pm 2a\sqrt{31}}{4}$$
$$=\frac{2a\left(-1\pm\sqrt{31}\right)}{4}=\frac{a\left(-1\pm\sqrt{31}\right)}{2}$$

Koska $x>0$, niin $x=\dfrac{a\left(-1\pm\sqrt{31}\right)}{2}=\dfrac{\sqrt{31}-1}{2}a$

Puolisuunnikkaan ala on nelikulmion *AECD* ala + kolmion *EBC* ala.

$$A=ax+\frac{1}{2}x^2$$
$$=a\left(\frac{\sqrt{31}-1}{2}\right)a+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{31}-1}{2}a\right)^2$$
$$=\left(\frac{\sqrt{31}-1}{2}\right)a^2+\frac{1}{2}\left(\frac{31-2\sqrt{31}+1}{4}\right)a^2$$
$$=\left(^{2)}\frac{\sqrt{31}-1}{2}\right)a^2+\left(\frac{32-2\sqrt{31}}{8}{}^{(2}\right)a^2$$
$$=\left(\frac{2\sqrt{31}-2}{4}\right)a^2+\left(\frac{16-\sqrt{31}}{4}\right)a^2$$
$$=\frac{2\sqrt{31}-2+16-\sqrt{31}}{4}a^2$$
$$=\frac{14+\sqrt{31}}{4}a^2$$

Vastaus: Ala on $\dfrac{14+\sqrt{31}}{4}a^2\approx 4{,}9a^2$.

116. Suuremman kolmion kateettien pituudet ovat 1,9 km ja 900 m = 0,9 km. Koko maapalan (suuremman kolmion) ala on

$$A_{\text{koko}} = \frac{1{,}9\,\text{km} \cdot 0{,}9\,\text{km}}{2} = 0{,}855\,\text{km}^2.$$

Väinön saama osuus on pienempi kolmio, jonka kateettien pituudet ovat 300 m = 0,3 km ja 500 m = 0,5 km.

Väinön saaman alueen ala on

$$A_{\text{Väinö}} = \frac{0{,}5\,\text{km} \cdot 0{,}3\,\text{km}}{2} = 0{,}075\,\text{km}^2.$$

Pekan ala on siis

$$\begin{aligned} A_{\text{koko}} - A_{\text{Väinö}} &= 0{,}855\,\text{km}^2 - 0{,}075\text{km}^2 \\ &= 0{,}78\,\text{km}^2 \end{aligned}$$

Väinön alan suhde Pekan alaan on

$$\frac{A_{\text{Väinö}}}{A_{\text{Pekka}}} = \frac{0{,}075\,\text{km}^2}{0{,}78\,\text{km}^2} = 0{,}09615...$$

Väinön osuus on siis pienempi

(100 – 9,615…) % = 90,3846…% ≈ 90 %.

Vastaus: 90 %

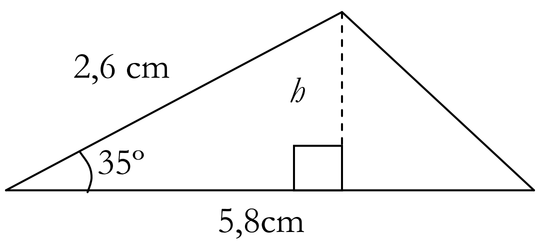
117. a) Suunnikkaan pinta-ala on $A = 7{,}0\,\text{cm} \cdot 6{,}0\,\text{cm} = 42\,\text{cm}^2$

b) Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= \frac{4{,}0\,\text{cm}(8{,}0\,\text{cm} + 10{,}0\,\text{cm})}{2} \\ &= \frac{4{,}0\,\text{cm} \cdot 18{,}0\,\text{cm}}{2} \\ &= 36\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: a) 42 cm^2 b) 36 cm^2

118. Merkitään kolmion korkeutta kirjaimella h.



Lasketaan korkeus muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\begin{aligned} \sin 35° &= \frac{h}{2{,}6} \quad |\cdot 2{,}6 \\ h &= 2{,}6 \cdot \sin 35° \\ h &= 1{,}491\ldots(\text{cm}) \end{aligned}$$

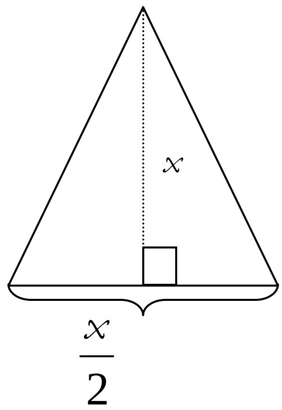
Pinta-ala on siis

$$A = \frac{5{,}8\,\text{cm} \cdot 1{,}419\ldots\text{cm}}{2} = 4{,}3247\ldots\text{cm}^2 \approx 4{,}3\,\text{cm}^2$$

Vastaus: 4,3 cm^2

119. Merkitään kolmion korkeutta kirjaimella x.

Tällöin kannan pituus on $\frac{x}{2}$.



Kolmion ala on 27,0 cm^2, joten saadaan

$$\frac{x \cdot \frac{x}{2}}{2} = 27{,}0 \quad |\cdot 2$$

$$x \cdot \frac{x}{2} = 54{,}0 \quad |\cdot 2$$

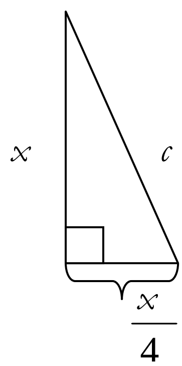
$$x^2 = 108{,}0$$

$$x = \pm\sqrt{108{,}0} = \pm 10{,}3923...$$

Koska $x > 0$, niin $x = 10{,}3923\ldots$ (cm)

Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan.

Kannan puolikas on $\frac{\frac{x}{2}}{2} = \frac{x}{4}$.



Korkeusjanan jakaa tasakylkisen kolmion kahteen suorakulmaiseen kolmioon.

Jos $x = \sqrt{108{,}0} = 10{,}3923...$ (cm), niin $\frac{x}{4} = \frac{\sqrt{108{,}0}}{4} = 2{,}598076...$ (cm)

Lasketaan kolmion hypotenuusa c, joka on sama kuin alkuperäisen kolmion kyljen pituus.

Pythagoraan lauseella saadaan suorakulmaisesta kolmiosta

$$
\begin{aligned}
c^2 &= x^2 + \left(\frac{x}{4}\right)^2 \\
c^2 &= (10{,}3923...)^2 + (2{,}598076...)^2 \\
c^2 &= 108 + 6{,}75 \\
c &= \pm\sqrt{114{,}75} = \pm 10{,}7121...
\end{aligned}
$$

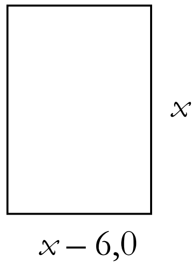
Koska $c > 0$, niin $c = 10{,}7121\ldots$ (cm)

Kylkien pituudet siis ovat $c = 10{,}7121\ldots$ cm ≈ 10,7 cm.

Kannan pituus on $\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{108{,}0}\ \text{cm}}{2} = 5{,}19615...\text{cm} \approx 5{,}20\,\text{cm}$.

Vastaus: Kanta on 5,20 cm ja kyljet 10,7 cm.

120. Merkitään korkeutta kirjaimella x (m).
Tällöin kantaa kuvaa lauseke $x - 6{,}0$ (m).



Suorakulmion pinta-ala on 216 m^2, joten saadaan yhtälö

$$
\begin{aligned}
(x-6{,}0)x &= 216 \\
x^2 - 6{,}0x - 216 &= 0 \\
x &= \frac{6{,}0 \pm \sqrt{(-6{,}0)^2 - 4\cdot 1\cdot(-216)}}{2} \\
x &= \frac{6{,}0 \pm \sqrt{900}}{2} \\
x &= \frac{6{,}0 \pm 30}{2} \\
x &= 18{,}0 \quad \text{tai} \quad x = -12{,}0
\end{aligned}
$$

Koska $x > 0$, niin $x = 18$ m

Jos $x = 18{,}0$ m, niin $x - 6{,}0$ m $= 18{,}0$ m $- 6{,}0$ m $=12$ m.

Vastaus: Sivut ovat 18 m ja 12 m.

121. Olkoon neliön muotoisen tontin sivun pituus *a*.

Talon pidempi sivu on tällöin $\frac{a}{2}$ ja lyhyempi $\frac{a}{3}$

Talon pohja pinta-ala (suorakulmion ala) on

$$A = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{a^2}{6}.$$

Pihan ala on tällöin

$$\begin{aligned} A_{piha} &= A_{koko\ tontti} - A_{talo} \\ &= a^2 - \frac{a^2}{6} = \frac{5}{6}a^2 \end{aligned}$$

Pihan ala on 400 m^2, joten

$$\begin{aligned} \frac{5}{6}a^2 &= 400 \quad |\cdot 6 \\ 5a^2 &= 2400 \quad |: 5 \\ a^2 &= 480 \end{aligned}$$

Koska neliön muotoisen tontin sivun pituus oli *a*, niin tontin ala on siis a^2=480 (m^2)

Vastaus: Tontin ala on 480 m^2.

2.1 Kehän pituus ja ala

122. a) $p = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 2{,}4\,\text{mm} = 15{,}0796...\text{mm} \approx 15\,\text{mm}$

b) $p = \pi \cdot d = \pi \cdot 15\,\text{cm} = 47{,}12...\text{cm} \approx 47\,\text{cm}$

c) $p = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 4x = 8\pi x$

123. a) $2\pi r = p \quad |:2\pi$

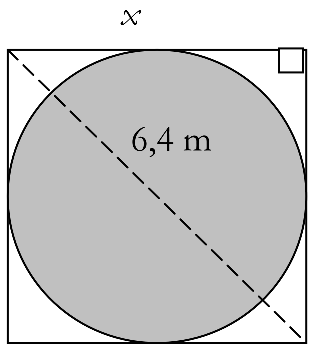
$$r = \frac{p}{2\pi}$$

Kun p= 86 m, niin $r = \dfrac{86\,\text{m}}{2\pi} = 13{,}687...\text{m} \approx 14\,\text{m}$

b) $r = \dfrac{p}{2\pi}$

Kun p = 1,5 cm, niin $r = \dfrac{1{,}5\,\text{cm}}{2\pi} = 0{,}2387...\text{cm} \approx 0{,}24\,\text{cm}$

124. a) Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella x. Tämä on sama kuin ympyrän halkaisija.
Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan Pythagoraan lauseella



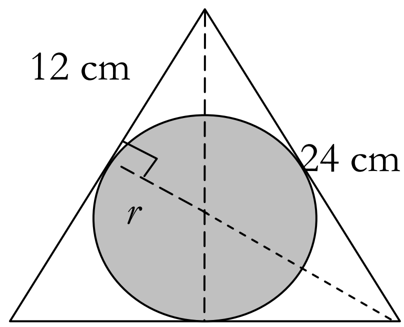
$$
\begin{aligned}
x^2 + x^2 &= 6{,}4^2 \\
2x^2 &= 40{,}96 \quad |:2 \\
x^2 &= 20{,}48 \\
x &= \pm\sqrt{20{,}48} = \pm 4{,}52548...
\end{aligned}
$$

Koska $x > 0$, niin x=4,52548… (m)

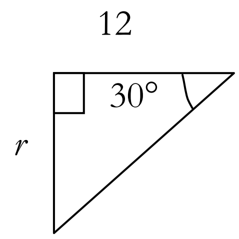
Ympyrän kehän pituus on siis

$$p = \pi \cdot 4{,}52548...\,\text{m} = 14{,}2...\,\text{m} \approx 14\,\text{m}$$

b) Koska kolmio on tasasivuinen, on sen kulmat 60°. Korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman.



Merkitään ympyrän säteen pituutta kirjaimella *r*. Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan



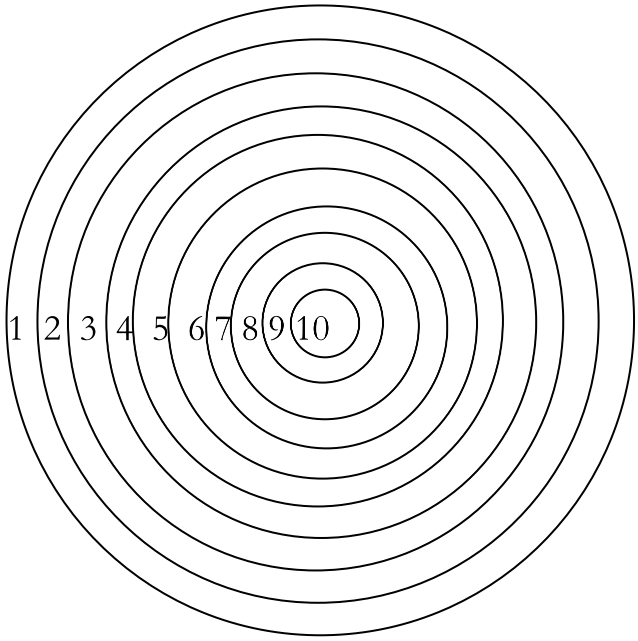
$$\tan 30° = \frac{r}{12} \quad \Big| \cdot 12$$
$$r = 12 \cdot \tan 30°$$
$$r = 6{,}928... \ \text{(cm)}$$

Ympyrän kehän pituus on siis

$$p = 2\pi \cdot 6{,}928...\,\text{cm} = 43{,}531...\,\text{cm} \approx 44\,\text{cm}$$

Vastaus: a) 14 m b) 44 cm

125. Merkitään napakympin sädettä kirjaimella x.
Napakympin halkaisija on siis $2x$.



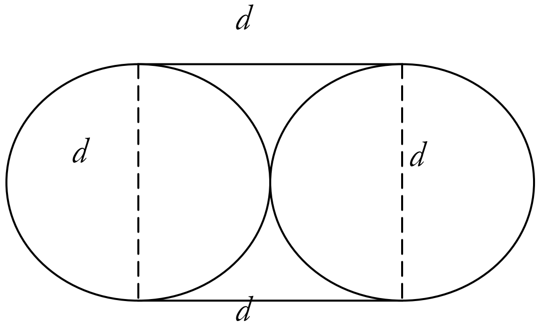
Tikkataulun säde on $r = 9 \cdot 1{,}2 + x$.

Ulkoreunan pituus on 74,1 cm, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
2\pi r &= 74{,}1 \\
2\pi(9 \cdot 1{,}2 + x) &= 74{,}1 \\
2\pi(10{,}8 + x) &= 74{,}1 \\
21{,}6\pi + 2\pi x &= 74{,}1 \\
2\pi x &= 74{,}1 - 21{,}6\pi \qquad |: \pi \\
2x &= \frac{74{,}1 - 21{,}6\pi}{\pi} = 1{,}986... \approx 2{,}0
\end{aligned}$$

Vastaus: Napakympin halkaisija on 2,0 cm.

126. Päädyissä olevat puoliympyrät muodostava yhdessä kokonaisen ympyrän, jonka piirin pituus on $p = \pi \cdot d$.



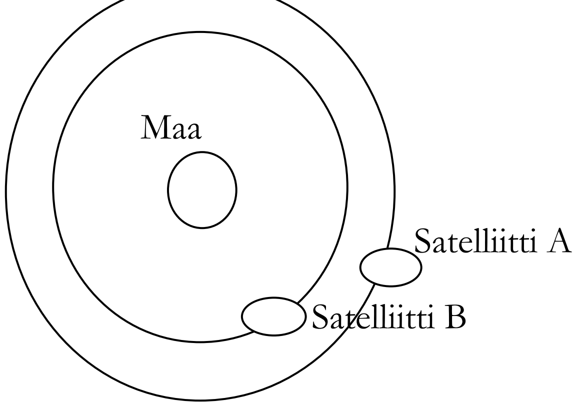
Keskellä oleva "neliö" vie hihnaa $2d$.

Koska hihnan pituus on 2,8 m, niin saadaan siis yhtälö

$$\pi \cdot d + 2d = 2{,}8$$
$$(\pi + 2)d = 2{,}8 \quad \left|:(\pi+2)\right.$$
$$d = \frac{2{,}8}{\pi + 2} = 0{,}544... \approx 0{,}54 \text{ (m)}$$

Vastaus: Telan pohjaympyrän halkaisija on 0,54 m.

127. Merkitään Satelliitti A:n radan säteen pituutta kirjaimella x ja satelliittien korkeuseroa kirjaimella h.



Satelliitti B:n radan säteen pituus on siis $x + h$.

Satelliitti B:n radan pituus on $p_B = 2\pi(x + h)$.

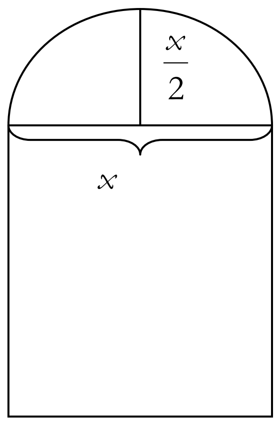
Satelliitti A:n radan pituus on $p_A = 2\pi x$

Ratojen ero on 150 km, joten saadaan yhtälö

$$
\begin{aligned}
p_B - p_A &= 2\pi(x+h) - 2\pi x = 150 \\
2\pi x + 2\pi h - 2\pi x &= 150 \\
2\pi h &= 150 \quad |:2\pi \\
h &= \frac{150}{2\pi} = 23{,}87... \approx 24 \ \ \text{(km)}
\end{aligned}
$$

Vastaus: Korkeusero on 24 km.

128. Merkitään ikkunan leveyttä eli ikkunan yllä olevan puoliympyrän halkaisijan pituutta kirjaimella x. Puoliympyrän säde on siis $\frac{x}{2}$.



Ikkunan korkeus on kaksi kertaa niin suuri kuin leveys eli $2x$.

Ikkunan piirin pituus on 6,2 m, joten

$$
\begin{aligned}
x + 2x + 2x + \pi \cdot \frac{x}{2} &= 6{,}2 \\
5x + \frac{\pi x}{2} &= 6{,}2 \quad |\cdot 2 \\
10x + \pi x &= 12{,}4 \\
(10+\pi)x &= 12{,}4 \quad |:(10+\pi) \\
x &= \frac{12{,}4}{10+\pi} = 0{,}9435... \ \ \text{(m)}
\end{aligned}
$$

Ikkunan leveys on siis $x = 0{,}9435\ldots\ \text{m} \approx 0{,}94\ \text{m}$.

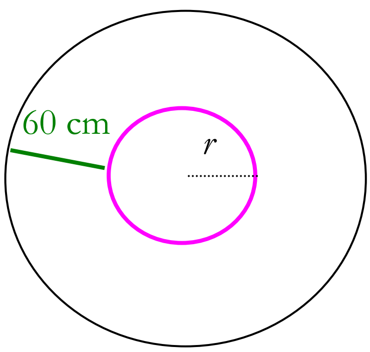
Ikkunan korkeus on

$$2x + \frac{x}{2} = 2 \cdot 0{,}9435...\,\text{m} + \frac{0{,}9435...\,\text{m}}{2} = 2{,}3589...\,\text{m} \approx 2{,}4\ \text{m}$$

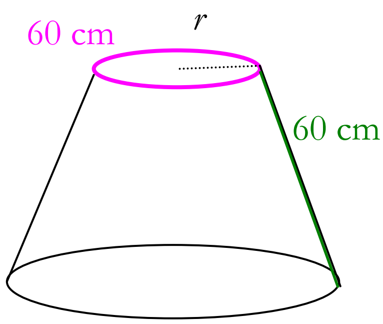
Vastaus: Ikkunan leveys on 94 cm ja korkeus 2,4 m.

129. Piirretään tilannekuva.

ylhäältä



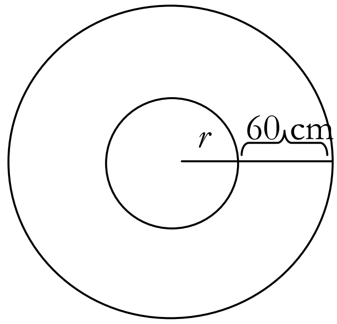
sivulta



Ympyrän kehän pituus on sama kuin vyötärön mitta 60 cm.

$$2\pi r = 60 \quad |: 2\pi$$
$$r = \frac{60}{2\pi} = 9{,}549...\ (\text{cm})$$

Ulomman ympyrärenkaan säde on
$r + 60\,\text{cm} = 69{,}549...\ \text{cm}$.



Ympyrärenkaan saa leikatuksi kankaasta, jonka leveys on vähintään sama kuin ulomman ympyrän halkaisija
$2 \cdot 69{,}549...\,\text{cm} = 139{,}098...\,\text{cm} \approx 140\ \text{cm}$

Kankaan leveyden pitää olla siis vähintään 140 cm.

Vastaus: 140 cm

130. Ympyrän pinta-ala $A = \pi r^2$.

a) $A = \pi \cdot (42\,\text{mm})^2 = 5541{,}7...\,\text{mm}^2 \approx 5500\,\text{mm}^2 = 55\,\text{cm}^2$

b) $r = \dfrac{3{,}1\,\text{m}}{2} = 1{,}55\,\text{m}$
$A = \pi \cdot (1{,}55\,\text{m})^2 = 7{,}547...\text{m}^2 \approx 7{,}5\,\text{m}^2$

c) $A = \pi \cdot (5a)^2 = 25\pi a^2 \left(\approx 78{,}53...a^2\right)$

Vastaus: a) 55 cm^2 b) 7,5 m^2 c) 25□ a^2

131. Ympyrän ala on $A = \pi r^2$.

a) Halkaisija d= 12 m eli säde $r = \dfrac{12\,\text{m}}{2} = 6\,\text{m}$.

$$A = \pi \cdot (6\ \text{m})^2 = 113{,}097...\ \text{m}^2 \approx 110\,\text{m}^2$$

b) Kehän pituus $p = 2\pi r$ = 150 cm, joten

$$2\pi r = 150 \,\big|\, : 2\pi$$
$$r = \frac{150}{2\pi} = 23{,}873...$$

Pinta-ala $A = \pi \cdot (23{,}873...\,\text{cm})^2 = 1790{,}493...\,\text{cm}^2 \approx 0{,}2\,\text{m}^2$

Vastaus: a) 110 m^2 b) 0,2 m^2

132. Lasketaan pinta-alan avulla säteen pituus. $A = \pi r^2$

a) Pinta-ala on 144 mm^2 eli

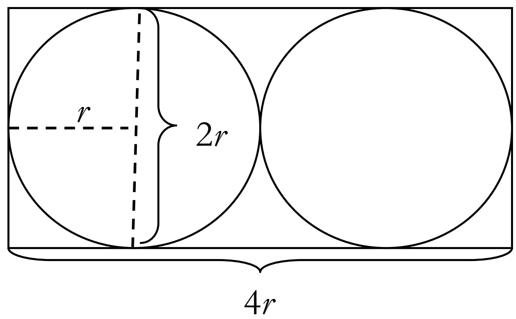
$$\pi r^2 = 144 \ \ |: \pi$$
$$r^2 = \frac{144}{\pi}$$
$$r = \pm\sqrt{\frac{144}{\pi}}$$
$$r = 6{,}770... \approx 6{,}77\ (\text{mm})$$

b) 16 ha = 1600 a = 160000 m^2

$$\pi r^2 = 160000 \;|:\pi$$
$$r^2 = \frac{160000}{\pi}$$
$$r = \pm\sqrt{\frac{160000}{\pi}}$$
$$r = 115{,}67... \approx 230\ (\mathrm{m})$$

Vastaus: a) 6,77 mm b) 230 m

133. Merkitään pöydän kannen sädettä kirjaimella *r*.
Levyn leveys on siis 2*r* ja pituus 4*r*.



Yhden kannen eli ympyrän ala on 2,0 m^2 eli

$$\pi r^2 = 2{,}0 \;|:\pi$$
$$r^2 = \frac{2{,}0}{\pi}$$
$$r = \pm\sqrt{\frac{2{,}0}{\pi}} = \pm 0{,}79788...\ (\mathrm{m})$$

Koska $r > 0$, niin $r = 0{,}79788\ldots$ m

Pöydän kansien eli kahden ympyrän ala on

$$A_{pöydät} = 2 \cdot \pi r^2 = 2 \cdot 2\text{m}^2 = 4\text{m}^2.$$

Levyn ala on

$$A_{levy} = 4r \cdot 2r = 8r^2 = 8 \cdot (0{,}79788...\,\text{m})^2 = 5{,}0929...\,\text{m}^2$$

Hukkaan mennyt ala on

$$A = A_{levy} - A_{pöydät} = 5{,}0929...\,\text{m}^2 - 4\text{m}^2 = 1{,}0929...\,\text{m}^2 \approx 1{,}1\ \text{m}^2$$

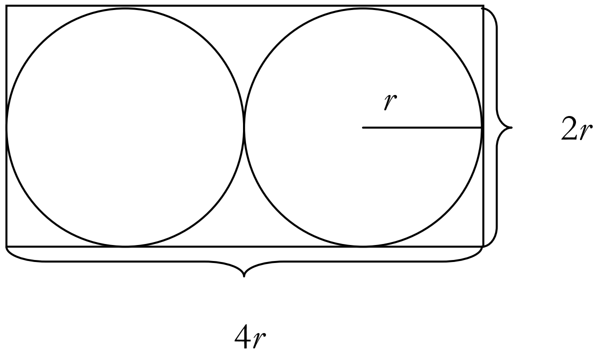
Hukkaan mennyt ala prosentteina

$$\frac{A}{A_{levy}} = \frac{1{,}0929...\,\text{m}^2}{5{,}0929...\,\text{m}^2} = 0{,}2146... = 21{,}46...\% \approx 21\%$$

Vastaus: 1,1 m^2 eli 21 %

134. Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella *r*.

Suorakulmion sivut ovat tällöin $2r$ ja $4r$.



$$A_{\text{suorakulmio}} = 2r \cdot 4r = 8r^2$$

$$A_{\text{ympyrät}} = 2 \cdot \pi r^2$$

Ympyröiden ala on suorakulmion alasta prosentteina

$$\frac{A_{\text{ympyrät}}}{A_{\text{suorakulmio}}} = \frac{2\pi \cancel{r^2}}{8\cancel{r^2}} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}\pi}{\underset{4}{\cancel{8}}} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785... \approx 79\,\%$$

Vastaus: Ympyröiden ala on 79 % suorakulmion alasta.

135. Hallin halkaisija $d = 160$ m, joten hallin säde $r = \dfrac{160\,\mathrm{m}}{2} = 80\,\mathrm{m}$.

Koko hallin pinta-ala $A = \pi \cdot (80\,\mathrm{m})^2 = 20106{,}19...\mathrm{m}^2$

10 % kuluu ajoreittiehin, joten pysäköintitilaa on 90 % hallin pinta-alasta eli

$$A_{\text{pysäköinti}} = 0{,}9 \cdot A = 0{,}9 \cdot 20106{,}19...\,\mathrm{m}^2 = 18095{,}57...\mathrm{m}^2$$

Yksi auto vie tilaa 6,0 m^2, joten halliin mahtuu autoja

$$\frac{A_{pysäköinti}}{6{,}0\,\mathrm{m}^2} = \frac{18095{,}57...\mathrm{m}^2}{6{,}0\,\mathrm{m}^2} = 3015{,}92...(\mathrm{kpl})$$

Vastaus: Autoja mahtuu 3016 kpl.

136. Ympyrän halkaisija on 12 cm, joten ympyrän säde $r = \dfrac{12\,\text{cm}}{2} = 6\,\text{cm}$.

$$A_{\text{puoliympyrät}} = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 = \pi \cdot (6\,\text{cm})^2 = 113{,}097...\text{cm}^2$$

$$A_{\text{neliö}} = 12\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm} = 144\,\text{cm}^2$$

Tapa 1:
Lasketaan kuinka monta prosenttia puoliympyröiden ala on neliön alasta.

$$\frac{A_{\text{puoliympyrät}}}{A_{\text{neliö}}} = \frac{113{,}097...\text{cm}^2}{144\,\text{cm}^2} = 0{,}7853... = 78{,}53...\%$$

Väritetty ala on neliön alasta prosentteina

$$100\ \% - 78{,}53\ldots\ \% = 21{,}46\ldots\% \approx 21\ \%$$

Tapa 2:
Lasketaan ensin väritetyn alueen pinta-ala.

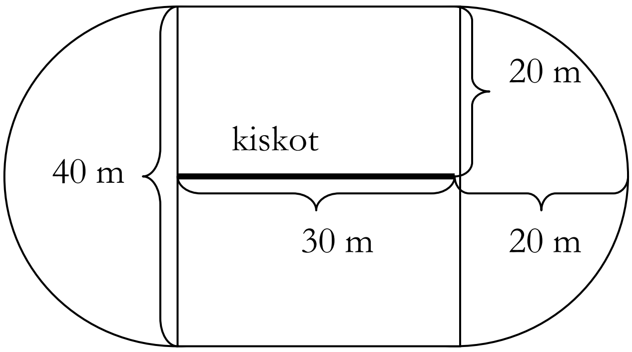
$$\begin{aligned} A_{\text{väritetty}} &= A_{\text{neliö}} - A_{\text{puoliympyrät}} \\ &= 144\,\text{cm}^2 - 133{,}097...\text{cm}^2 \\ &= 30{,}902...\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Väritetty ala on neliön alasta prosentteina

$$\frac{A_{\text{väritetty}}}{\mathrm{A}_{\text{neliö}}} = \frac{30{,}902...\text{cm}^2}{144\,\text{cm}^2} = 0{,}2146... \approx 21\%$$

Vastaus: 21%

137. Piirretään tilannekuva. Nosturin saavuttama alue koostuu suorakulmiosta ja sen päissä olevista puoliympyröistä.



Suorakulmion ala

$$A_1 = 30\,\text{m} \cdot 40\,\text{m} = 1200\,\text{m}^2$$

Puoliympyröiden ala

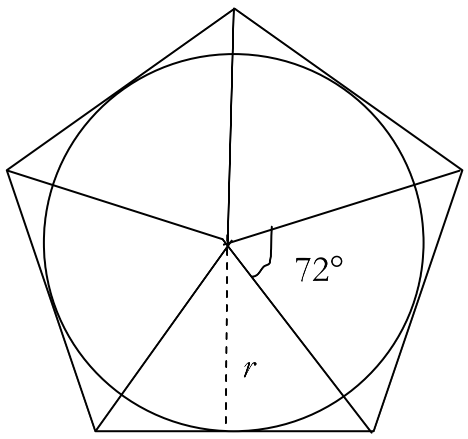
$$A_2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot (20\,\text{m})^2 = \pi \cdot (20\,\text{m})^2 = 1256{,}63...\text{m}^2$$

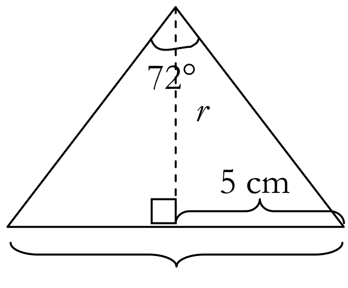
Nosturin saavuttama alue

$$A_1 + A_2 = 1200\,\text{m}^2 + 1256{,}63...\text{m}^2 = 2456{,}6...\text{m}^2 \approx 2460\,\text{m}^2$$

Vastaus: 2460 m^2

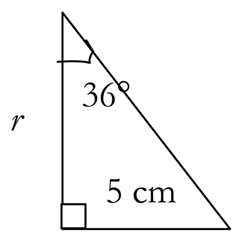
138. Merkitään ympyrän säteen pituutta kirjaimella *r*.
Säännöllinen viisikulmio voidaan jakaa viiteen tasakylkiseen kolmioon, joiden huippukulman suuruus on $\frac{360°}{5} = 72°$. Kolmion korkeus on ympyrän säde *r*. Korkeusjana puolittaa kolmion huippukulman ja kannan. Huippukulman puolikas on $\frac{72°}{2} = 36°$ ja kannan puolikas $\frac{10\,\text{cm}}{2} = 5\,\text{cm}$.





Korkeusjana *r* jakaa tasakylkisen kolmion kahteen suorakulmaiseen kolmioon.

$$\tan 36° = \frac{5}{r} \quad \Big| \cdot r$$
$$r \cdot \tan 36° = 5 \quad \Big| : \tan 36°$$
$$r = \frac{5}{\tan 36°} = 6{,}8819\ldots\ \text{(cm)}$$



a) Ympyrän kehän pituus on siis

$$p = 2\pi r = 2\pi \cdot 6{,}8819...\,\text{cm} = 43{,}240...\,\text{cm} \approx 43\,\text{cm}$$

b) Ympyrän pinta-ala on siis

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (6{,}8819...\,\text{cm})^2 = 148{,}78...\,\text{cm}^2 \approx 1\,\text{dm}^2$$

Vastaus: a) 43 cm b) 1 dm^2

139. a) Ympyrän säde r = 5,7 cm

Kehän pituus $p = 2\pi r = 2\pi \cdot 5{,}7\,\text{cm} = 35{,}8141...\,\text{cm} \approx 35{,}8\,\text{cm}$

Pinta-ala on $A = \pi r^2 = \pi \cdot (5{,}7\,\text{cm})^2 = 102{,}070...\,\text{cm}^2 \approx 102\,\text{cm}^2$

b) Ympyrän halkaisija d = 18,3 cm, joten säde $r = \dfrac{18{,}3}{2}\,\text{cm} = 9{,}15\,\text{cm}$

Kehän pituus $p = 2\pi r = 2\pi \cdot 9{,}15\,\text{cm} = 57{,}4911...\,\text{cm} \approx 57{,}5\,\text{cm}$
Pinta-ala on $A = \pi r^2 = \pi \cdot (9{,}15\,\text{cm})^2 = 263{,}021...\,\text{cm}^2 \approx 263\,\text{cm}^2$

Vastaus: a) 35,8 cm, 102 cm^2 b) 57,5 cm, 263 cm^2

140. Merkitään lammen säteen pituutta kirjaimella *r*. Maikki ui matkan, joka on lammen halkaisija *d*= 2*r*.

Lammen ympärysmitta on 6,4 km, joten saadaan

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 6{,}4 \quad \Big|:\pi \\ 2r &= \frac{6{,}4}{\pi} \\ 2r &= d = 2{,}03718\ldots(\text{m}) \end{aligned}$$

Uintinopeus on 3,5 km/h, joten aikaa Maikilta kuluu

$$\begin{aligned} 3{,}5 &= \frac{2{,}03718\ldots}{t} \quad \Big|\cdot t \\ 3{,}5t &= 2{,}03718\ldots \quad \Big|:3{,}5 \\ t &= \frac{2{,}03718\ldots}{3{,}5} = 0{,}582052\ldots(\text{h}) \end{aligned}$$

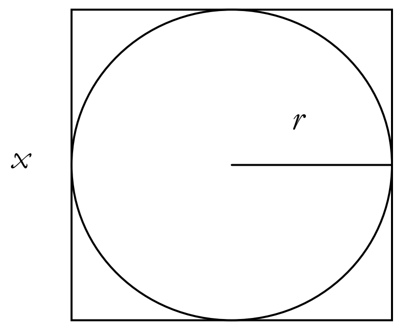
$$\text{nopeus} = \frac{\text{matka}}{\text{aika}}$$

Aika minuutteina on

$$0{,}582052\ldots \cdot 60\,\text{min} = 34{,}923\ldots\text{min} \approx 35\,\text{min}$$

Vastaus: 35 min

141. Neliön ala $A_{\text{neliö}} = 68\,\text{cm}^2$
Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella x ja ympyrän sädettä kirjaimella r.



Ratkaistaan neliön sivun pituus neliön alan avulla.

$$x^2 = 68$$
$$x = \pm\sqrt{68}$$
$$x = 8{,}246...(\text{cm})$$

Kuvion mukaan ympyrän säde r on puolet neliön sivun pituudesta eli

$$r = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{68}}{2} = 4{,}123...(\text{cm})$$

Ympyrän ala on siis

$$A_{\text{ympyrä}} = \pi r^2 = \pi \cdot (4{,}123...\,\text{cm})^2 = 53{,}407...\ \text{cm}^2$$

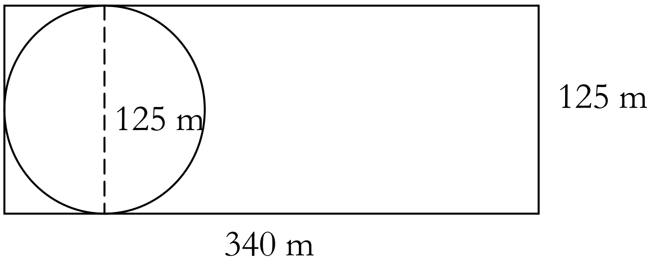
Valkoiseksi jäävä pinta-ala saadaan, kun neliön pinta-alasta vähennetään ympyrän pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_{\text{valkoinen}} &= A_{\text{neliö}} - A_{\text{ympyrä}} \\ &= 68\,\text{cm}^2 - 53{,}407...\,\text{cm}^2 \\ &= 14{,}592...\,\text{cm}^2 \\ &\approx 15\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 15 cm^2

142. Piirretään mallikuva.

Konserttitalon pohja on ympyrän muotoinen.



Ympyrän säde

$$r = \frac{125\,\text{m}}{2} = 62{,}5\,\text{m}$$

Suorakulmion eli tontin ala

$$A_{\text{suorakulmio}} = 125\,\text{m} \cdot 340\,\text{m} = 42500\,\text{m}^2$$

Ympyrän eli konserttitalon pohjan ala

$$A_{\text{ympyrä}} = \pi \cdot (62{,}5\,\text{m})^2 = 12271{,}84...\text{m}^2$$

Tapa 1:
Lasketaan, paljonko ympyrän ala on suorakulmion alasta prosentteina.

$$\frac{A_{\text{ympyrä}}}{A_{\text{suorakulmio}}} = \frac{\pi \cdot (62{,}5\,\text{m})^2}{42500\,\text{m}^2} = 0{,}2887... = 28{,}87...\%$$

Käyttämättä jää 100 % – 28,87…% = 71,12 % ≈ 71 %

Tapa 2:
Lasketaan, kuinka paljon tontista jää käyttämättä.

$$\begin{aligned} A_{\text{käyttämättä}} &= A_{\text{suorakulmio}} - A_{\text{ympyrä}} \\ &= 42500\,\text{m}^2 - \pi \cdot (62{,}5\,\text{m})^2 \\ &= 30228{,}153...\text{m}^2 \end{aligned}$$

Käyttämättä jäänyt ala koko tontin alasta prosentteina on

$$\frac{A_{\text{käyttämättä}}}{A_{\text{suorakulmio}}} = \frac{30228{,}153...\text{m}^2}{42500\,\text{m}^2} = 0{,}7112... = 71{,}12...\% \approx 71\%$$

Vastaus: 71%

143. Puoliympyrän säde on x. Kentän pituus leveimmällä kohdalla on siis $6x$.

Kentän suoran osuuden pituus on siis $6x – 2x = 4x$.

Radan pituus on 357 m, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 2\pi x + 4x + 4x &= 357 \\ (2\pi + 8)x &= 357 \\ x &= \frac{357}{(2\pi + 8)} = 24{,}9944...(\text{m}) \end{aligned}$$

Suoran osuuden pituus on siis

$$4x = 4 \cdot 24{,}9944\ldots\ \text{m} = 99{,}977\ldots \text{m} \approx 100\,\text{m}$$

Vastaus: 100 m

2.2 Sektori ja segmentti

144. a) $b=\dfrac{52^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi\cdot 3{,}5\,\text{m}=3{,}176...\,\text{m}\approx 3{,}2\,\text{m}$

b) $b=\dfrac{48^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi\cdot 1{,}3\,\text{cm}=1{,}08908...\,\text{cm}\approx 1{,}1\,\text{cm}$

145. a) $A=\dfrac{58^\circ}{360^\circ}\cdot \pi\cdot (9{,}1\,\text{m})^2=41{,}91...\,\text{m}^2\approx 42\,\text{m}^2$

b) $A=\dfrac{142^\circ}{360^\circ}\cdot \pi\cdot (78\,\text{mm})^2=7539{,}19...\text{mm}^2\approx 7500\,\text{mm}^2=75\,\text{cm}^2$

146. Sektorin keskuskulma $\alpha=130^\circ$. Ympyrän säde $r=26\,\text{cm}$.

a) $b=\dfrac{130^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi\cdot 26\ \text{cm}=58{,}9921...\ \text{cm}\approx 59\,\text{cm}$

b) $A=\dfrac{130^\circ}{360^\circ}\cdot \pi\cdot (26\,\text{cm})^2=766{,}897...\,\text{cm}^2\approx 770\,\text{cm}^2$

147. Kaaren pituus b = 114 mm. Sektorin kaaren pituus ja keskuskulma ovat suoraan verrannolliset.

Keskuskulma (°)	**Kaaren pituus (mm)**
α	114
360°	$2\pi \cdot 87$

Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{360^\circ} &= \frac{114}{2\pi \cdot 87} \\ \alpha \cdot 2\pi \cdot 87 &= 360^\circ \cdot 114 \quad |:(2\pi \cdot 87) \\ \alpha &= \frac{360^\circ \cdot 114}{2\pi \cdot 87} \\ \alpha &= 75{,}077...^\circ \approx 75^\circ \end{aligned}$$

Vastaus: 75°

148. Suotuisia sektoreita on neljä, joista kunkin keskuskulma on 15°. Lasketaan 4· 15°= 60° keskuskulmaa vastaavan kaaren pituus, kun säde on $r = \frac{1{,}5\,\text{m}}{2} = 0{,}75\,\text{m}$.

Väritettyjen sektoreiden kaarien pituudet yhteensä ovat siis

$$b = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 0{,}75\,\text{m} = 0{,}785...\,\text{m} \approx 0{,}79\,\text{m}$$

Vastaus: 79 cm

149. Tapa 1: Lasketaan ensin ympyrän säde *r*.
Sektorin keskuskulma on $\alpha = 60°$ ja kaaren pituus $b = 125$ mm.

$$\frac{60°}{360°} \cdot 2\pi \cdot r = 125 \quad |\cdot 360°$$
$$60° \cdot 2\pi \cdot r = 45000° \quad |:(60° \cdot 2\pi)$$
$$r = \frac{45000°}{60° \cdot 2\pi} = 119{,}366...$$

Ympyrän kehän pituus on $p = 2\pi \cdot 119{,}366...\,\text{mm} = 750\,\text{mm}$

Tapa 2:

Koko kehää vastaava keskuskulma on 360°. Tiedetään, että 60° keskuskulmaa vastaava kaari on 125 mm. Tämä on kuudesosa koko ympyrästä, joten koko ympyrän kehän pituus siis on
$p = 6 \cdot 125\,\text{mm} = 750\,\text{mm}$.

Vastaus: 750 mm

150. Ympyrän sektorin kaaren pituus $b = r$. Merkitään kysyttyä keskuskulman suuruutta α.

$$r = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r \;\big|\cdot 360°$$
$$r \cdot 360° = \alpha \cdot 2\pi r \;\big|:(2\pi r)$$
$$\alpha = \frac{\cancel{r} \cdot 360°}{2\pi \cancel{r}} = \frac{360°}{2\pi} (= 57{,}2957...° \approx 57)$$

Vastaus: $\alpha = \dfrac{360°}{2\pi} \approx 57°$

151. Sektorin alan kaava on

$$A_s = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{\alpha}{360°} \cdot A_{\text{ympyrä}}$$

Tapa 1:

Sektorin keskuskulma $\alpha = 14°$ ja ala $A_s = 10{,}6\ \text{m}^2$.Sijoitetaan annetut arvot sektorin alan laskukaavaan ja ratkaistaan ympyrän ala.

$$\frac{\alpha}{360°} \cdot A_{\text{ympyrä}} = A_s$$
$$\frac{14°}{360°} \cdot A_{\text{ympyrä}} = 10{,}6 \quad |\cdot 360°$$
$$14° \cdot A_{\text{ympyrä}} = 3816° \quad |:14°$$
$$A_{\text{ympyrä}} = \frac{3816}{14} = 272{,}57... \approx 273 \ \left(\text{m}^2\right)$$

Tapa 2:
Sektorin keskuskulma ja pinta-ala ovat suoraan verrannolliset.

Keskuskulma (°)	**Pinta-ala (m^2)**
14°	10,6
360°	A

Saadaan verranto

$$\frac{14°}{360°} = \frac{10{,}6}{A}$$
$$14 \cdot A = 10{,}6 \cdot 360 \quad |:14$$
$$A = \frac{10{,}6 \cdot 360}{14} = 272{,}57... \approx 273 \ \left(\mathrm{m}^2\right)$$

Vastaus: koko ympyrän ala on 273 m^2.

152. Sektorin alan kaava on

$$A_s = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{\alpha}{360°} \cdot A_{\text{ympyrä}}$$

Tapa 1:
Sektorin pinta-ala on $A_s = 5{,}25\,\text{cm}^2$ ja ympyrän ala on $A_{\text{ympyrä}} = 32\,\text{cm}^2$.
Sijoitetaan annetut arvot sektorin alan kaavaan ja ratkaistaan keskuskulma.

$$\frac{\alpha}{360°} \cdot A_{\text{ympyrä}} = A_s$$

$$\frac{\alpha}{360°} \cdot 32 = 5{,}25 \quad |\cdot 360°$$

$$\alpha \cdot 32 = 1890° \quad |:32$$

$$\alpha = \frac{1890°}{32} = 59{,}06...° \approx 59°$$

Tapa 2
Sektorin keskuskulma ja pinta-ala ovat suoraan verrannolliset.

Keskuskulma (°)	Pinta-ala (cm²)
α	5,25
360°	32

Saadaan verranto

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{5{,}25}{32}$$

$$32 \cdot \alpha = 5{,}25 \cdot 360° \quad |:32$$

$$\alpha = \frac{5{,}25 \cdot 360°}{32} = 59{,}06...° \approx 59°$$

Vastaus: Keskuskulma on 59°.

153. Ympyrän säde $r = 53\,\text{cm}$. Ympyrän sektorin kaaren pituus on $b = 65\ \text{cm}$.

a) Merkitään sektorin keskuskulmaa kirjaimella α.
Sektorin kaaren pituus lasketaan kaavalla

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$

Sijoitetaan annetut lähtöarvot kaavaan. (Säde ja kaaren pituus ovat samassa yksikössä.)

$$\begin{aligned} 65 &= \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 53 \quad |\cdot 360° \\ 65 \cdot 360° &= \alpha \cdot 2\pi \cdot 53 \quad |:(2\pi \cdot 53) \\ \alpha &= \frac{65 \cdot 360°}{2\pi \cdot 53} = 70{,}268...° \approx 70° \end{aligned}$$

b) Sektorin ala lasketaan kaavalla

$$A_s = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$

Sijoitetaan laskettu keskuskulman arvo $\alpha = 70{,}268...°$ sekä ympyrän säde r =65 cm kaavaan.

$$A_s = \frac{70{,}268...°}{360°} \cdot \pi (53\ \text{cm})^2 = 1722{,}5\ \text{cm}^2 \approx 1700\,\text{cm}^2$$

Vastaus: a) 70° b) 1700 cm^2

154. Koko ympyrän muotoisen kankaan ala on

$$A_{\text{ympyrä}} = \pi \cdot (28\,\text{cm})^2 = 2463{,}008...\text{cm}^2.$$

Kankaasta valmistetaan 10 kpl sektorin muotoisia viuhkoja, jolloin kangasta jää yli 68 cm^2. Viuhkojen pinta-ala yhteensä on siis 68 cm^2 pienempi kuin koko kankaan ala eli

$$\begin{aligned} A_{\text{viuhkat}} &= A_{\text{ympyrä}} - 68\,\text{cm}^2 \\ &= 2463{,}008\ \text{cm}^2 - 68\,\text{cm}^2 \\ &= 2395{,}008...\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Yhden viuhkan ala on

$$A = \frac{A_{\text{viuhkat}}}{10} = \frac{2395{,}008...\text{cm}^2}{10} = 239{,}5...\ \text{cm}^2 \approx 240\,\text{cm}^2$$

”Viuhkasektorin” keskuskulma voidaan ratkaista kahdella tavalla.

Tapa 1:
Ratkaistaan keskuskulma sektorin alan kaavan avulla.

$$\frac{\alpha}{360°} \cdot A_{\text{ympyrä}} = A_s$$

$$\frac{\alpha}{360°} \cdot 2463{,}008... = 239{,}5... \quad |\cdot 360°$$

$$\alpha \cdot 2463{,}008... = 239{,}5... \cdot 360° \quad |: 2463{,}008...$$

$$\alpha = \frac{239{,}5... \cdot 360°}{2463{,}008...} = 35{,}00...° \approx 35°$$

Tapa 2:
Sektorin keskuskulma ja pinta-ala ovat suoraan verrannolliset.

Keskuskulma (°)	Pinta-ala (cm^2)
α	239,5…
360°	2463,008…

Saadaan verranto

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{239{,}5...}{2463{,}008...}$$

$$2463{,}008... \cdot \alpha = 239{,}5... \cdot 360° \quad |: 2463{,}008...$$

$$\alpha = \frac{239{,}5... \cdot 360°}{2463{,}008...} = 35{,}0...° \approx 35°$$

Vastaus: Yhden viuhkan pinta-ala on 240 cm^2. Yhden viuhkan keskuskulma on 35°.

155. Tikkataulu on ympyrä, jonka säde $r = 22$ cm. Numeron 20 osuma-alue on sektori, jonka keskuskulma on 18°.

Koko sektorin pinta-ala on

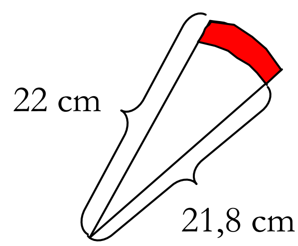
$$A_{\text{koko sektori}} = \frac{18°}{360°} \cdot \pi \cdot (22\text{cm})^2 = 76{,}0265...\ \text{cm}^2$$

Tuplapisteet eli 40 pistettä saa tämän sektorin ulkokehältä, jonka leveys on 1,2 cm.

Lasketaan sen sektorin osan ala, jonka säde on
$r = 22$ cm – 1,2 cm = 20,8 cm.

$$A_{\text{osa sektorista}} = \frac{18°}{360°} \cdot \pi \cdot (20{,}8\,\text{cm})^2 = 67{,}9589...\ \text{cm}^2$$

Tuplapisteet eli 40 pistettä saa siis alueelta, jonka ala on

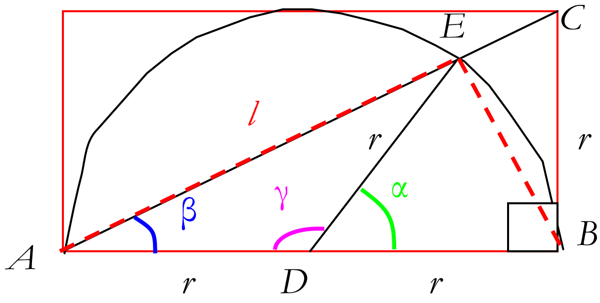


$$\begin{aligned} A_{40\text{ pietettä}} &= A_{\text{koko sektori}} - A_{\text{osa sektorista}} \\ &= 76{,}0265...\ \text{cm}^2 - 67{,}9589...\text{cm}^2 \\ &= 8{,}0676...\text{cm}^2 \\ &\approx 8{,}1\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 8,1 cm^2

156. Tehdään kuvaan apumerkintöjä.
Suorakulmaisesta kolmiosta *ABC* saadaan

$$\tan\beta = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$
$$\beta = 26{,}565...° \approx 26{,}57°$$



Kolmio *ADE* on tasakylkinen, koska kylkinä ovat ympyrän säteet *r*, joten

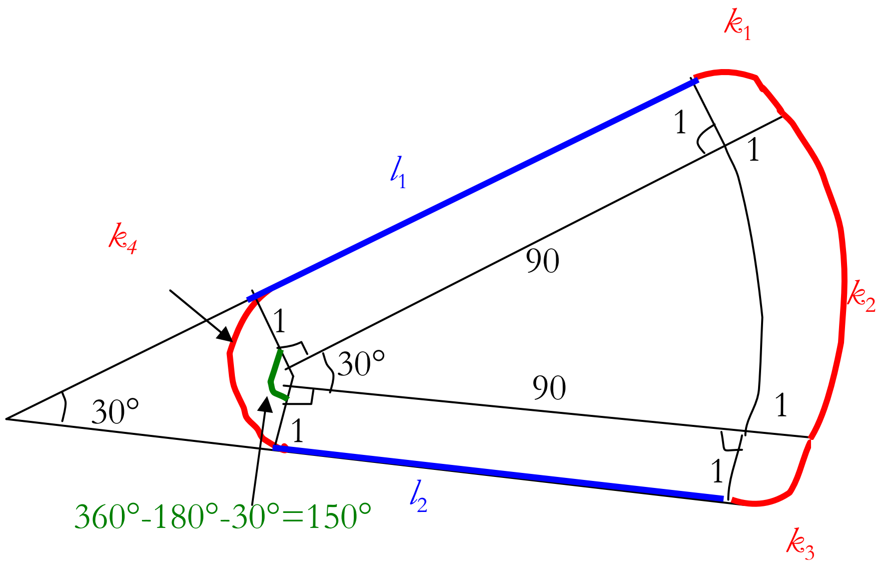
$$\gamma = 180° - 2\beta = 180° - 2 \cdot 26{,}565...° = 126{,}869...°$$
$$\alpha = 180° - \gamma = 180° - 126{,}869...° = 53{,}130...°$$

Lävistäjä *l* jakaa ympyrän kehän keskuskulmien α ja γ suhteessa

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{53{,}130...°}{126{,}869...°} = 0{,}41877... \approx 0{,}419$$

Vastaus: 0,419

157. Piirretään kuvio tilanteesta.



Toimitsijan reitti koostuu seuraavista osista:

Jana l_1, pituus 90,

Kaari k_1, pituus $\frac{1}{4}\cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$,

Kaari k_2, pituus $\frac{30°}{360°}\cdot 2\pi \cdot 91 = 91\cdot\frac{\pi}{6}$,

Kaari k_3, pituus sama kuin kaarella k_1 eli $\frac{\pi}{2}$,

Jana l_2, pituus 90,

Kaari k_4, pituus $\frac{150°}{360°}\cdot 2\pi \cdot 1 = \frac{5}{6}\pi$.

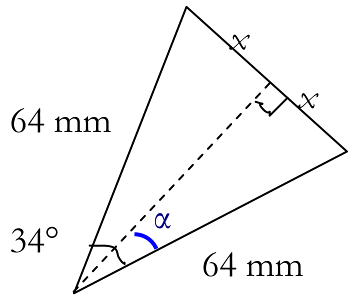
Koko reitin pituus on siis

$$2\cdot 90 + 2\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{91}{6}\pi + \frac{5}{6}\pi = 180 + (1 + \frac{91}{6} + \frac{5}{6})\pi = 180 + 17\pi \approx 233$$

Vastaus: Reitin pituus on 233 m.

158. Kuvaan merkitty jänne ja ympyrän säteet rajaavat tasakylkisen kolmion. Kolmion korkeusjana puolittaa huippukulman ja jänteen.

a) Merkitään jänteen pituutta $2x$.
Huippukulman puolikas on



$$\alpha = \frac{34°}{2} = 17°$$

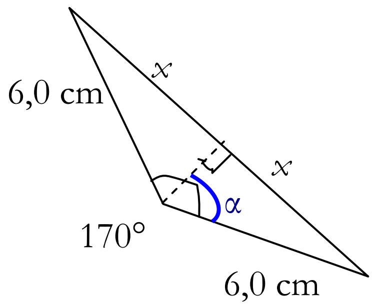
Lasketaan pituus x muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin\alpha = \frac{x}{64}$$

$$\sin 17° = \frac{x}{64} \quad \Big| \cdot 64$$

$$x = 64 \cdot \sin 17° = 18{,}7117...$$

Jänteen pituus on $2x = 2 \cdot 18{,}7117...\text{ mm} = 37{,}4235...\text{ mm} \approx 37\text{ mm}$



b) Merkitään jänteen pituutta $2x$.
Tasakylkisen kolmion huippukulma on
$360° - 190° = 170°$.

Huippukulman puolikas on

$$\alpha = \frac{170°}{2} = 85°$$

Lasketaan pituus x muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\sin\alpha = \frac{x}{6,0}$$

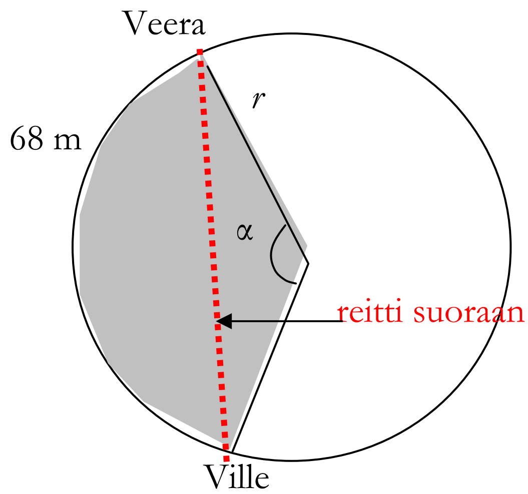
$$\sin 85° = \frac{x}{6,0} \quad \Big| \cdot 6,0$$

$$x = 6,0 \cdot \sin 85° = 5,9771...$$

Jänteen pituus on $2x = 2 \cdot 5,9771...\text{cm} = 11,954...\text{cm} \approx 12\ \text{cm}$

Vastaus: a) 37 mm b) 12 cm

159. Piirretään tilannekuva.
Lasketaan ensin kuinka suurta keskuskulmaa α vastaa 68 m, että tiedetään tarkkailijoiden (Veera ja Ville) sijainti.



Sektorin keskuskulma ja kaaren pituus ovat suoraan verrannolliset.

Keskuskulma (°)	Kaari (m)
α	68
360°	200

Saadaan verranto

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{68}{200}$$

$$200\alpha = 24480^\circ \quad |:200$$

$$\alpha = \frac{24480^\circ}{200} = 122{,}4^\circ$$

Merkitään luistinradan sädettä kirjaimella *r*. Tiedetään, että koko radan ympärysmitta on 200 m. Lasketaan säteen pituus.

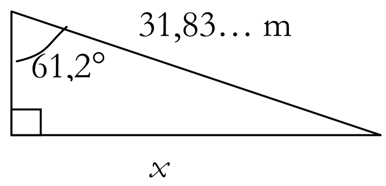
$$2\pi r = 200 \quad |:2\pi$$

$$r = \frac{200}{2\pi} = 31{,}83\ldots(\text{m})$$

Suoraan menevä reitti on muodostuvan tasakylkisen kolmion kanta.
Kolmion kyljet ovat radan säteet $r = 31{,}83\ldots$ m ja huippukulma 122,4°.

Tasakylkisen kolmion korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman.
Merkitään kannan puolikasta kirjaimella x.
Huippukulman puolikas on

$$\frac{122{,}4°}{2} = 61{,}2°$$



Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan.

$$\begin{aligned} \sin 61{,}2° &= \frac{x}{31{,}83...} \quad \Big|\cdot 31{,}83... \\ x &= \sin 61{,}2° \cdot 31{,}83... \\ &= 27{,}8937... \end{aligned}$$

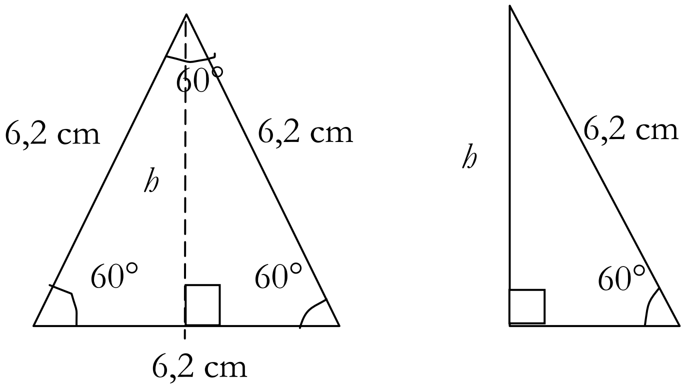
Suoran reitin pituus on siis $2x = 2 \cdot 27{,}8937...\,\text{m} = 55{,}787...\,\text{m}$

Lasketaan, kuinka paljon suora reitti on lyhyempi.

68 m – 55,787… m = 12,213… m≈12 m

Vastaus: 12 m lyhyempi

160. Lasketaan ensin tasasivuisen kolmion pinta-ala. Kolmion kaikki kulmat ovat 60°. Jaetaan kolmio korkeusjanalla *h* kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.



Ratkaistaan suorakulmaisesta kolmiosta korkeus *h*.

$$\begin{aligned} \sin 60° &= \frac{h}{6{,}2} \quad |\cdot 6{,}2 \\ 6{,}2 \cdot \sin 60° &= h \\ h &= 6{,}2 \sin 60° \end{aligned}$$

Lasketaan tasasivuisen kolmion ala.

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{6{,}2\,\text{cm} \cdot 6{,}2\,\text{cm} \cdot \sin 60°}{2} = 16{,}645...\ \text{cm}^2$$

Lasketaan sektorin ala. Sektorin keskuskulmana on tasasivuisen kolmion huippukulma, 60°.

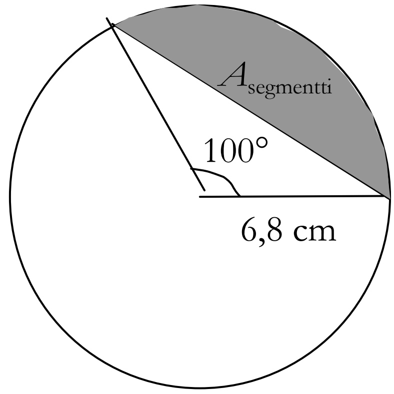
$$A_{\text{sektori}} = \frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot (6{,}2\,\text{cm})^2 = 20{,}127...\,\text{cm}^2$$

Koska sektorin keskuskulma on alle 180°, segmentin ala saadaan vähennyslaskulla.

$$\begin{aligned} A_{\text{segmentti}} &= A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} \\ &= 20{,}127...\,\text{cm}^2 - 16{,}645...\,\text{cm}^2 \\ &= 3{,}482...\,\text{cm}^2 \\ &\approx 3{,}5\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 3,5 cm^2

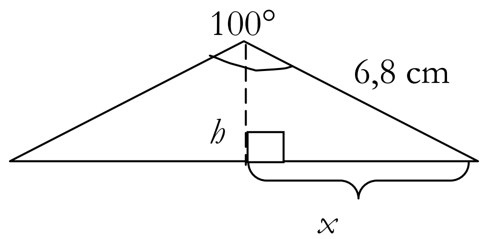
161. Piirretään tilannekuva. Sektorin keskuskulma on 100° ja säde 6,8 cm. Kaari ja jänne rajaavat segmentin.



Lasketaan ensin muodotuneiden sektorin ja tasakylkisen kolmion kolmion pinta-alat.

$$A_{\text{sektori}} = \frac{100°}{360°} \cdot \pi \cdot (6{,}8\,\text{cm})^2 = 40{,}352...\text{cm}^2$$

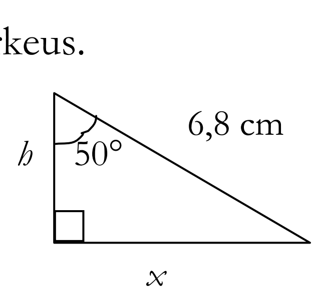
Tasakylkisen kolmion kyljet ovat ympyrän säteet $r = 6{,}8$ cm.
Korkeusjana h puolittaa kannan ja huippukulman. Merkitään kannan puolikasta kirjaimella x.



Huippukulman puolikas on $\frac{100°}{2} = 50°$.

Kolmion pinta-alan laskemiseksi tarvitaan kanta ja korkeus.

Ratkaistaan x ja h suorakulmaisesta kolmiosta.



$$\sin 50° = \frac{x}{6{,}8} \quad | \cdot 6{,}8$$

$$x = 6{,}8 \cdot \sin 50°\,(\text{cm})$$

$$\cos 50° = \frac{h}{6{,}8} \quad |\cdot 6{,}8$$
$$h = 6{,}8 \cdot \cos 50° \,(\mathrm{cm})$$

Kolmion ala

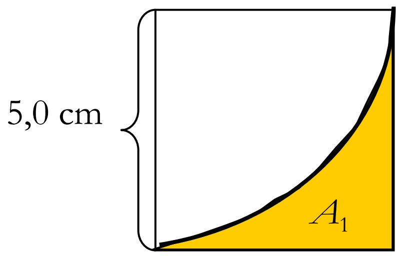
$$\begin{aligned} A_{\text{kolmio}} &= 2 \cdot \frac{xh}{2} = xh \\ &= 6{,}8\,\mathrm{cm} \cdot \sin 50° \cdot 6{,}8\,\mathrm{cm} \cdot \cos 50° = 22{,}768...\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

Koska sektorin keskuskulma on alle 180°, saadaan segmentin pinta-ala vähennyslaskulla.

$$\begin{aligned} A_{\text{segmentti}} &= A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} \\ &= 40{,}352...\,\mathrm{cm}^2 - 22{,}768...\,\mathrm{cm}^2 \\ &= 17{,}583...\,\mathrm{cm}^2 \\ &\approx 18\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 18 cm^2

162. Tarkastellaan osaa kuviosta. Neliön sivun pituus on 5,0 cm.



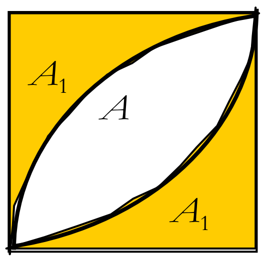
Lasketaan ensin kuinka suuri ala A_1 jää neliöstä sektorin ulkopuolelle.

$$A_{\text{neliö}} = 5{,}0\,\text{cm} \cdot 5{,}0\,\text{cm} = 25\,\text{cm}^2$$

$$A_{\text{sektori}} = \frac{90°}{360°} \cdot \pi \cdot (5{,}0\,\text{cm})^2 = 19{,}63...\text{cm}^2$$

$$A_1 = A_{\text{neliö}} - A_{\text{sektori}} = 25\,\text{cm}^2 - 19{,}63...\text{cm}^2 = 5{,}365...\text{cm}^2$$

Kysytty ala A saadaan, kun neliön alasta vähennetään kaksi väritettyä aluetta.



$$\begin{aligned} A &= A_{\text{neliö}} - 2 \cdot A_1 \\ &= 25\,\text{cm}^2 - 2 \cdot 5{,}365...\,\text{cm}^2 \\ &= 14{,}269...\,\text{cm}^2 \approx 14\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 14 cm^2

163. a) säde r = 5,0 cm, keskuskulma α = 32°
Sektorin ala on

$$A_s = \frac{32°}{360°} \cdot \pi \cdot (5{,}0\,\text{cm})^2 = 6{,}981...\text{cm}^2 \approx 7{,}0\,\text{cm}^2$$

b) säde r = 6,0 cm, sektorin ala A =24,5 cm^2
Sektorin keskuskulma saadaan sektorin pinta-alan kaavalla

$$A = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$

$$24{,}5 = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi \cdot 6^2 \quad | \cdot 360°$$

$$24{,}5 \cdot 360° = \alpha \cdot \pi \cdot 36 \quad | : (36\pi)$$

$$\alpha = \frac{24{,}5 \cdot 360°}{36\pi}$$

$$\alpha = 77{,}98...° \approx 78°$$

c) sektorin keskuskulma α = 132°, sektorin ala A = 30,0 cm^2
Ympyrän säde r saadaan sektorin pinta-alan kaavalla

$$A = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$

$$30 = \frac{132°}{360°} \cdot \pi r^2 \qquad |\cdot 360$$

$$30 \cdot 360 = 132 \cdot \pi r^2 \qquad |:(132\pi)$$

$$\frac{30 \cdot 360}{132\pi} = r^2$$

$$r^2 = \frac{10800}{132\pi}$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{10800}{132\pi}} = \pm 5{,}103...$$

Koska $r > 0$, niin r = 5,103… cm ≈ 5,1 cm.

Vastaus: a) 7,0 cm^2 b) 78° d) 5,1 cm

164. Koska sektorin keskuskulma on 120°, niin se on kolmasosa täydestä ympyrästä. Sektorin kaaren pituus on 7,8 cm.

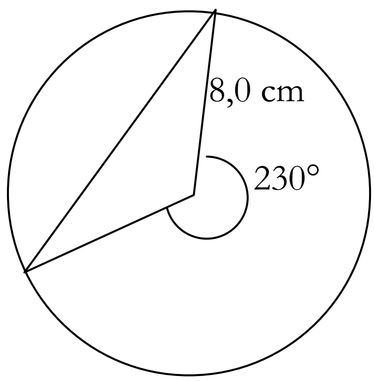
a) Koko ympyrän kehän pituus siis on $3 \cdot 7{,}8\,\text{cm} = 23{,}4\,\text{cm} \approx 23$ cm

b) Ympyrän säde *r* saadaan kehän pituuden avulla

$$2\pi r = 23{,}4\,\text{cm} \quad \left|\, : 2\pi\right.$$
$$r = \frac{23{,}4\,\text{cm}}{2\pi} = 3{,}7242...\,\text{cm} \approx 3{,}7\,\text{cm}$$

Vastaus: a) 23 cm b) 3,7 cm

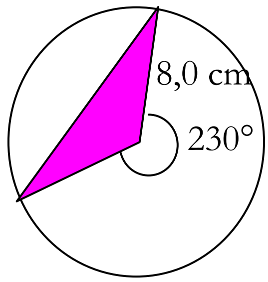
165. Sektorin asteluku on yli 180°, joten segmentin ala saadaan lisäämällä sektorin alaan kolmion ala.

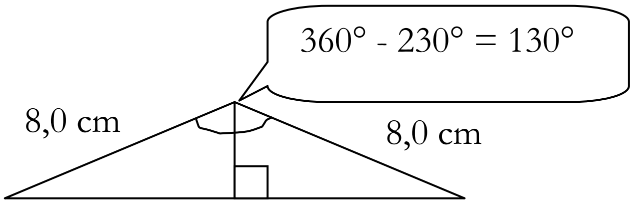


Sekrorin ala on

$$A_{\text{sektori}} = \frac{230°}{360°} \cdot \pi \cdot (8{,}0\,\text{cm})^2 = 128{,}456...\text{cm}^2$$

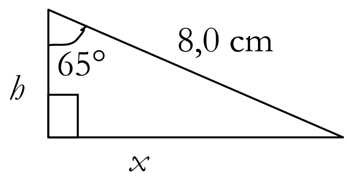
Muodostuva kolmio on tasakylkinen, koska säteet ovat sen kylkinä.





Jaetaan kolmio korkeusjanalla kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan. Huippukulman puolikas on $\frac{130°}{2} = 65°$

Lasketaan kolmion korkeus *h* ja kanta *x*.



$$\cos 65° = \frac{h}{8{,}0} \quad |\cdot 8{,}0$$
$$h = 8{,}0 \cdot \cos 65°$$

$$\sin 65° = \frac{x}{8{,}0} \quad |\cdot 8{,}0$$
$$x = 8{,}0 \cdot \sin 65°$$

Koko tasakylkisen kolmion ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{kolmio}} &= 2 \cdot \frac{xh}{2} = xh \\ &= 8{,}0\,\text{cm} \cdot \sin 65° \cdot 8{,}0\,\text{cm} \cdot \cos 65° \\ &= 24{,}5134...\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Segmentin ala on

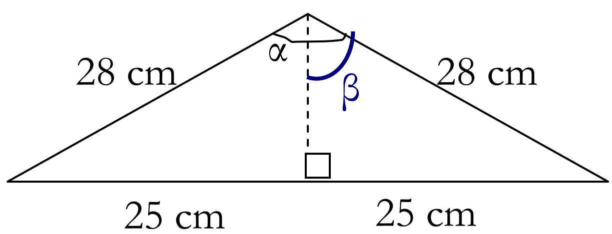
$$\begin{aligned} A_{\text{segmentti}} &= A_{\text{sektori}} + A_{\text{kolmio}} \\ &= 128{,}456...\text{cm}^2 + 24{,}5134...\text{cm}^2 \\ &= 152{,}969...\text{cm}^2 \\ &\approx 150\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 150 cm^2

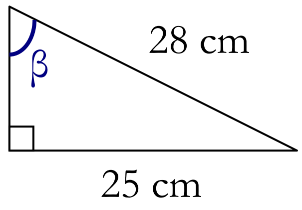
166. a) Merkitään sektorin keskuskulmaa kirjaimella α.

Kuvan mukaan sektorin sisälle muodostuu tasakylkinen kolmio, jonka huippukulmana on sektorin keskuskulma, kylkinä sektorin säteet (28 cm) ja kantana jänne.

Korkeusjana jakaa tasakylkisen kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi, jolloin huippukulma ja kanta puolittuvat. Merkitään huippukulman puolikasta β. Kanna puolikas on $\frac{50\,\text{cm}}{2} = 25\,\text{cm}$.



Ratkaistaan muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta kulma β sinin avulla.



$$\sin\beta = \frac{25}{28}$$
$$\beta = 63{,}23...^\circ$$

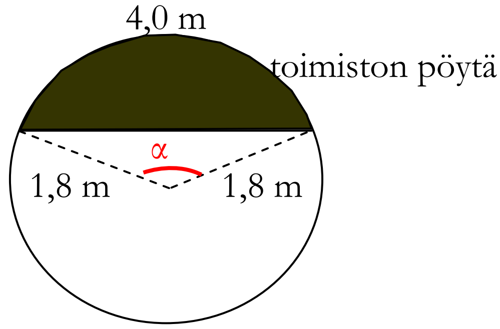
Keskuskulma $\alpha = 2\beta = 2 \cdot 63{,}23...^\circ = 126{,}468...^\circ \approx 130^\circ$

b) Lasketaan sektorin ala A_s

$$A_s = \frac{\alpha}{360^\circ}\pi r^2$$
$$= \frac{126{,}468...^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (28\,\text{cm})^2 = 865{,}261...\text{cm}^2 \approx 870\,\text{cm}^2$$

Vastaus: a) 130° b) $870\ \text{cm}^2$

167. Piirretään tilannekuva.
Pöydän ala on väritetyn segmentin ala.
Lasketaan ensin sektorin keskuskulma α.



Sektorin kaaren pituus b = 4,0 m ja säde r = 1,8 m, joten keskuskulma saadaan sektorin kaaren pituuden kaavalla

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$

$$4{,}0 = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 1{,}8 \;\Big|\cdot 360°$$

$$4{,}0 \cdot 360° = \alpha \cdot 2\pi \cdot 1{,}8 \;\Big|:(2\pi \cdot 1{,}8)$$

$$\alpha = \frac{4{,}0 \cdot 360°}{2\pi \cdot 1{,}8} = 127{,}323...°$$

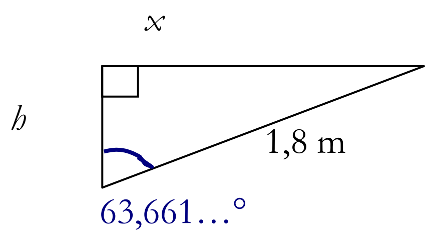
Pöytä on siis osa sektoria, jonka keskuskulma on 127,323…°.
Lasketaan ensin sektorin ala

$$A_s = \frac{127{,}323...°}{360°} \cdot \pi \cdot (1{,}8\text{ m})^2 = 3{,}6\,\text{m}^2$$

Jänne erottaa sektorista tasakylkisen kolmion, jonka kyljet ovat ympyrän säteitä $r = 1,8$ m ja huippukulma on $\alpha = 127,323\ldots°$.

Korkeusjana h puolittaa tasakylkisen kolmion kannan ja huippukulman. Huippukulman puolikas on $\dfrac{127,323...°}{2} = 63,661...°$. Merkitään kannan puolikasta x.

Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta voidaan laskea x ja h, joiden avulla saadaan tasakylkisen kolmion ala.



$$\sin 63,661...° = \frac{x}{1,8} \quad |\cdot 1,8$$
$$x = 1,8 \cdot \sin 63,661...°$$

$$\cos 63,661...° = \frac{h}{1,8} \quad |\cdot 1,8$$
$$h = 1,8 \cdot \sin 63,661...°$$

Tasakylkisen kolmion ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{kolmio}} &= 2 \cdot \frac{xh}{2} = xh \\ &= 1,8\text{ m} \cdot \sin 63,661...° \cdot 1,8\text{ m} \cdot \cos 63,661...° \\ &= 1,28825...\ \text{m}^2 \end{aligned}$$

Segmentin eli pöydän ala on

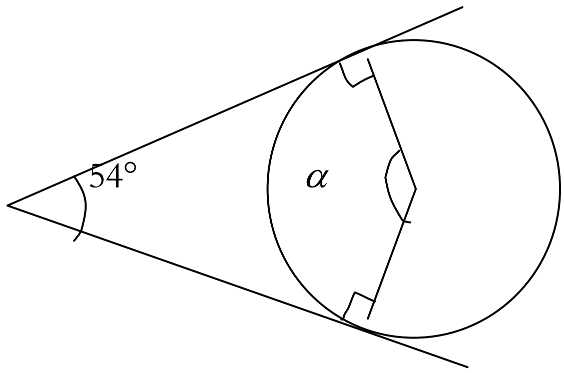
$$\begin{aligned} A_{\text{segmentti}} &= A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} \\ &= 3{,}6\,\text{m}^2 - 1{,}28825...\text{m}^2 \\ &= 2{,}3117...\text{m}^2 \\ &\approx 2{,}3\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 2,3 m^2

2.3 Ympyrän tangentti

168. a) Koska nelikulmion kulmien summa on 360°, niin

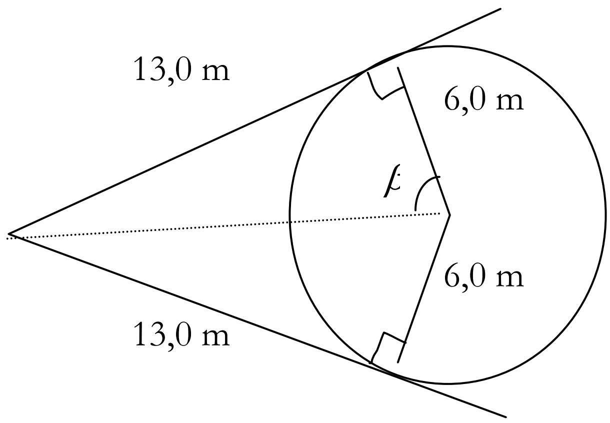
$$\alpha + 54^\circ = 180^\circ$$
$$\alpha = 180^\circ - 54^\circ$$
$$\alpha = 126^\circ$$



b) Olkoon β keskuskulman puolikas.

Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\tan\beta = \frac{13{,}0}{6{,}0}$$
$$\beta = 65{,}224...^\circ$$



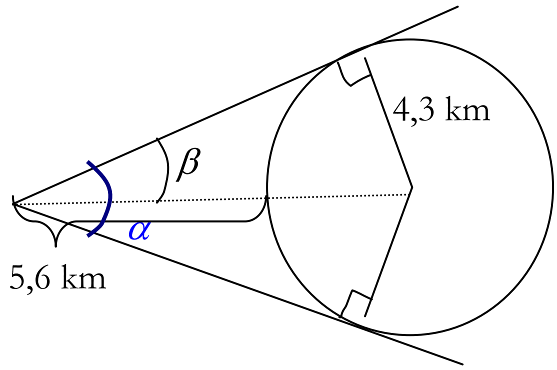
Keskuskulma on

$$\alpha = 2\beta = 2 \cdot 65{,}224...^\circ \approx 130^\circ$$

Vastaus: a) 126° b) 130°

169. a) Merkitään kuvaan apukulma $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$.

Lasketaan kulman β suuruus muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta.



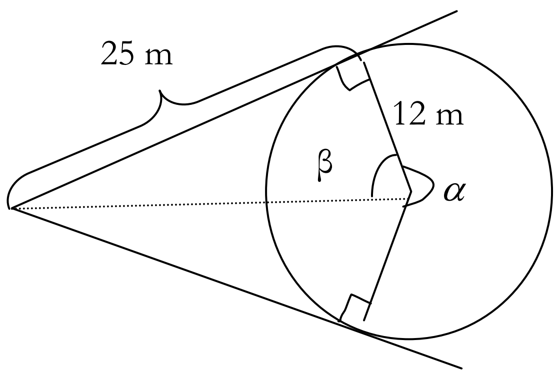
$$\sin\beta = \frac{4,3}{5,6+4,3}$$

$$\sin\beta = \frac{4,3}{9,9}$$

$$\beta = 25,743...° \approx 26°$$

$$\alpha = 2\beta = 2 \cdot 25,743...° = 51,487...° \approx 51°$$

b) Merkitään kuvioon apukulma β. Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan



$$\tan\beta = \frac{25}{12}$$

$$\beta = 64,358...°$$

Koko ympyrän keskuskulman suuruus on 360°, joten

$$2\beta + \alpha = 360°$$

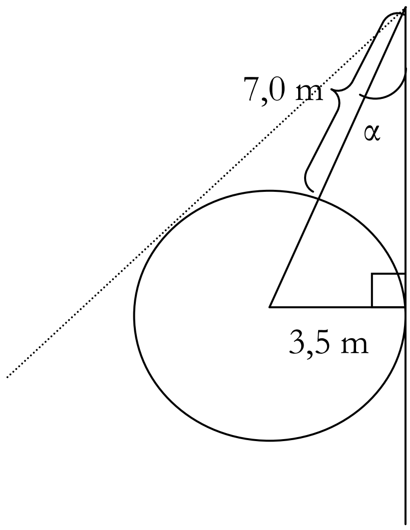
$$2 \cdot 64,358...° + \alpha = 360°$$

$$\alpha = 360° - 128,717...°$$

$$\alpha = 231,282...° \approx 231°$$

Vastaus: a) 51° b) 231°

170. Ulkopuolisen pisteen etäisyys ympyrän kehästä on 2 · 3,5 m = 7,0 m.
Piirretään tilannekuva. Merkitään kuvaan apukulma α, joka on puolet tangenttikulmasta (tangenttien väliin muodostuva kulma).



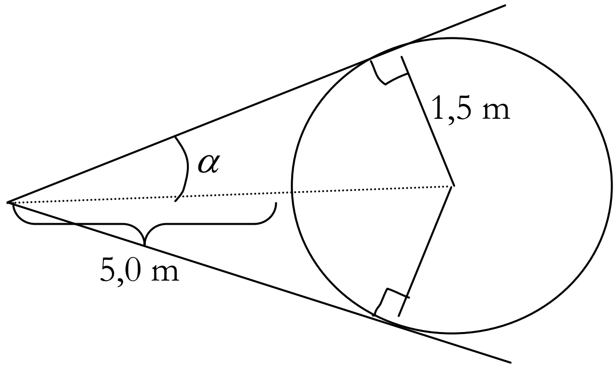
Ympyrän säde on kohtisuorassa tangenttia vastaan, joten muodostuu suorakulmainen kolmio, josta saadaan

$$\sin\alpha = \frac{3,5}{3,5+7,0}$$
$$\sin\alpha = \frac{3,5}{10,5}$$
$$\alpha = 19,4712...^\circ$$

Tangenttikulma on siis $2\alpha = 2\cdot 19,4712...^\circ = 38,942...^\circ \approx 39^\circ$.

Vastaus: 39°

171. Symbolin halkaisija on 3,0 m, joten säde on $\frac{3{,}0\,\mathrm{m}}{2} = 1{,}5$ m. Teosta katsellaan 5,0 m etäisyydeltä.



Piirretään tilannekuva. Merkitään kuvioon apukulma α.
Kulma α on puolet siitä kulmasta, jossa taideteos näkyy.

Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\sin\alpha = \frac{1{,}5}{5{,}0 + 1{,}5}$$
$$\sin\alpha = \frac{1{,}5}{6{,}5}$$
$$\alpha = 13{,}342...^\circ$$

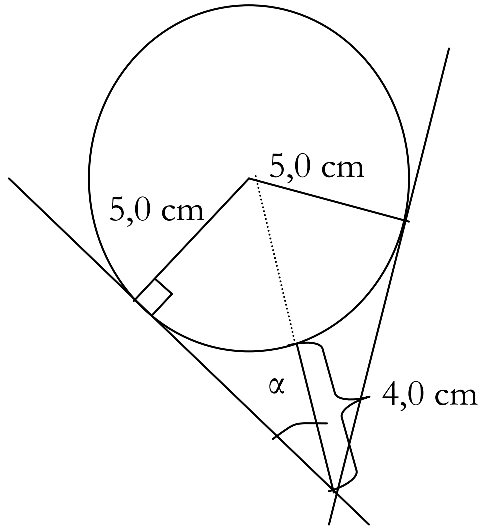
Tangenttikulma eli kulma, josta teosta katsellaan on

$$2\alpha = 2 \cdot 13{,}342...^\circ = 26{,}684...^\circ \approx 27^\circ$$

Vastaus: 27°

172. Ympyrän säde on 5,0 cm. Ulkopuolisen pisteen etäisyys ympyrän kehästä on 4,0 cm. Piirretään tilannekuva.

Merkitään apukulma α, joka on puolet tangentti-kulmasta (tangenttien välinen kulma).



Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

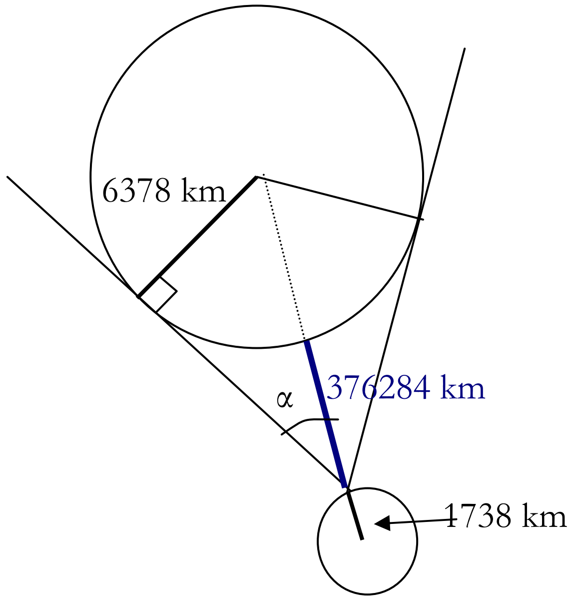
$$\sin\alpha = \frac{5{,}0}{5{,}0 + 4{,}0}$$
$$\sin\alpha = \frac{5{,}0}{9{,}0}$$
$$\alpha = 33{,}748...^\circ$$

Tangenttikulma on siis $2\alpha = 2 \cdot 33{,}748...^\circ = 67{,}497...° \approx 67^\circ$

Vastaus: 67°

173. Etäisyys maan pinnalta kuun pinnalle on
384400 km – 6378 km – 1738 km= 376284 km

Piirretään tilannekuva.
Merkitään kuvaan apukulma α, joka on puolet kysytystä tangenttikulmasta.



Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\sin\alpha = \frac{6378}{6378 + 376284}$$

$$\sin\alpha = \frac{6378}{382662}$$

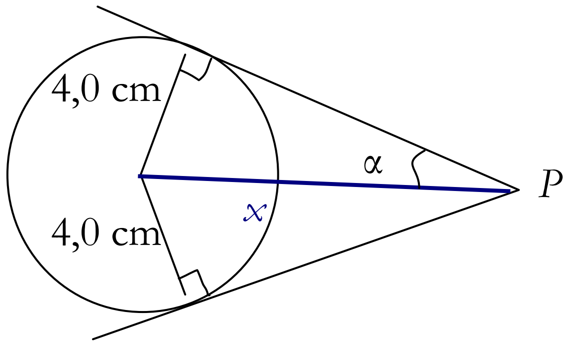
$$\alpha = 0{,}9550...^\circ$$

Kysytty kulma on siis $2\alpha = 2 \cdot 0{,}9550...^\circ = 1{,}9100...° \approx 1{,}91^\circ$

Vastaus: 1,91°

174. Piirretään tilannekuva.
Merkitään ympyrän keskipisteen ja pisteen *P* välistä etäisyyttä x.
Merkitään kuvaa apukulma α, joka on puolet tangenttikulmasta eli

$$\alpha = \frac{48°}{2} = 24°$$



Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\sin\alpha = \frac{4{,}0}{x}$$

$$\sin 24^\circ = \frac{4{,}0}{x}$$

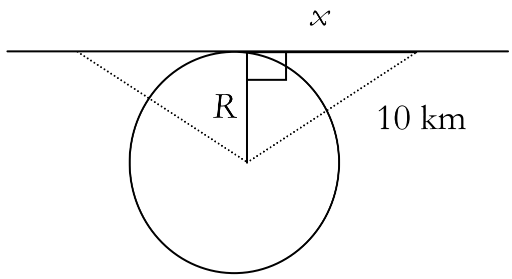
$$x = \frac{4{,}0}{\sin 24^\circ} = 9{,}834...$$

Pisteen *P* etäisyys ympyrän kehästä on siis

$$9{,}834\ldots\text{cm} - 4{,}0\text{ cm} = 5{,}834\ldots\text{cm} \approx 5{,}8\text{ cm}.$$

Vastaus: 5,8 cm

175. a) R = 6370 km

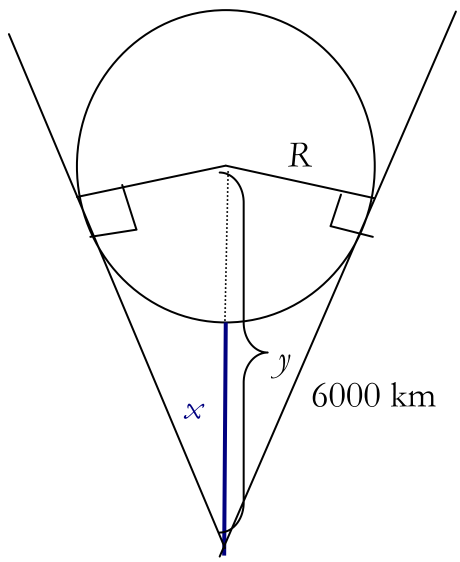


Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan Pythagoraan lauseella

$$x^2 + 6370^2 = (6370+10)^2$$
$$x^2 = 127500$$
$$x = \pm\sqrt{1227500} = \pm 357{,}07...$$

Koska $x > 0$, niin x = 357,07… km ≈ 360 km.

b) R = 6370 km
Merkitään kuvaan etäisyys $y = x + R$.
Tällöin muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan Pythagoraan lauseella



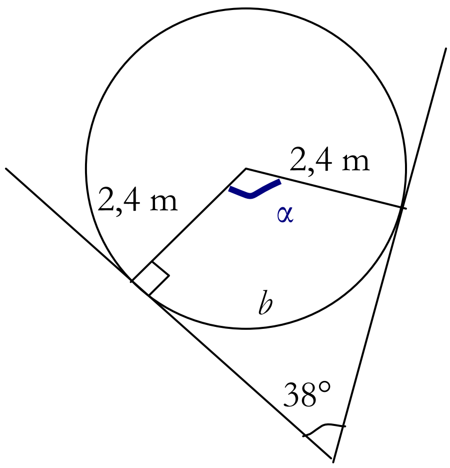
$$y^2 = 6000^2 + 6370^2$$
$$y = \pm\sqrt{76576900}$$
$$y = \pm 8750{,}822...$$

Koska $y > 0$, niin y = 8750,822… km.

Etäisyys x on siis
$y - R = 8750{,}822\ldots\text{ km} - 6370\text{ km} = 2380{,}82\ldots\text{ km} \approx 2380\text{ km}.$

Vastaus: a) 360 km b) 2380 km

176. Ympyrän säde $r = 2{,}4$ m. Merkitään kuvioon apukulma α, joka on kaarta b vastaavan sektorin keskuskulma.



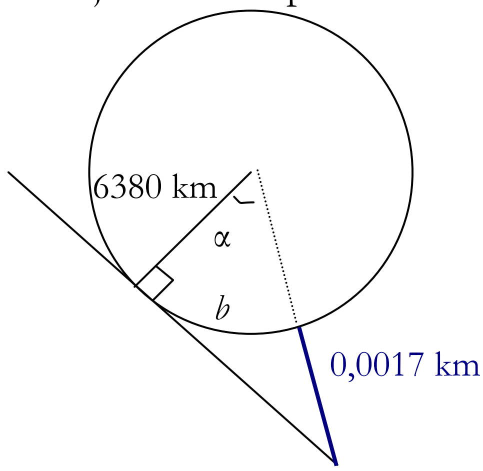
Sektorin keskuskulma on
α = 180° – 38° = 142°

Kaaren pituus on

$$b = \frac{142^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2{,}4\text{ m} = 5{,}948\ldots\text{m} \approx 5{,}9\text{ m}$$

Vastaus: 5,9 m

177. Piirretään tilannekuva. Maapallon säde on 6380 km ja henkilön pituus on 170 cm = 0,0017 km.



Henkilö näkee matkan, joka vastaa kuvan keskuskulmaa α vastaavan sektorin kaaren pituutta *b*.

Lasketaan ensin kulma α.
Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\cos\alpha = \frac{6380}{6380 + 0{,}0017}$$

$$\cos\alpha = \frac{6380}{6380{,}0017}$$

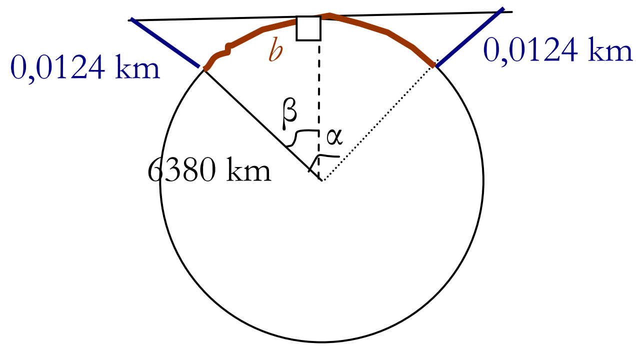
$$\alpha = 0{,}0418...^\circ$$

Tätä keskuskulmaa vastaava kaaren pituus *b* on

$$b = \frac{0{,}0418...^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6380\,\text{km} = 4{,}657...\ \text{km} \approx 4{,}66\ \text{km}$$

Vastaus: 4,66 km

178. Piirretään tilannekuva.
Maapallon säde on 6380 km.
Lintutornien korkeus on
12,4 m= 0,0124 km.



Kaisa ja Juuso näkevät toisensa, jos kaaren *b* pituus on suurempi tai yhtä suuri kuin 15 km.

Merkitään kuvaan kaarta *b* vastaava keskuskulma α sekä keskuskulman puolikas β.

Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta voidaan laskea ensin kulma β.

$$\cos\beta = \frac{6380}{6380 + 0{,}0124}$$
$$\beta = 0{,}1129...^\circ$$

Keskuskulma $\alpha = 2\beta = 2 \cdot 0{,}1129...^\circ = 0{,}2259...^\circ$.

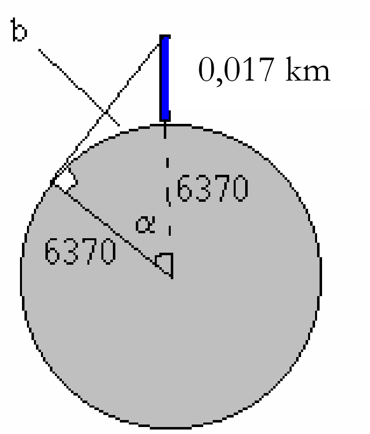
Tätä keskuskulmaa vastaava kaaren pituus *b* on

$$b = \frac{0{,}2259...^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6380\,\text{km} = 25{,}157...\,\text{km}$$

Koska b = 25,157… km > 15 km, niin torneista nähdään siis pidemmälle kuin 15 km päähän. Juuso ja Kaisa siis näkevät toisensa (kiikareilla katsottaessa).

Vastaus: kyllä

179. Piirretään tilannekuva. Maapallon säde on 6370 km.



Kotikaupungin ensimmäiset valot ovat 17 m = 0,017 km korkeudella.

Santerin ajomatkan pituus on kaaren pituus b. Sen laskemiseen tarvitaan keskuskulma α.

Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\cos\alpha = \frac{6370}{6370 + 0{,}017}$$

$$\cos\alpha = \frac{6370}{6370{,}017}$$

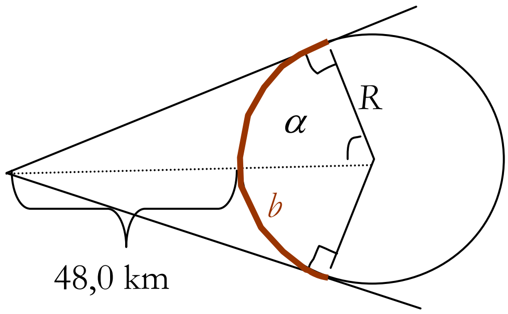
$$\alpha = 0{,}1323...^\circ$$

Ajomatkan pituus siis on

$$b = \frac{0{,}1323...^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6370\,\text{km} = 14{,}7166...\,\text{km} \approx 15\,\text{km}$$

Vastaus: 15 km

180. Piirretään tilannekuva.
Satelliitti lentää 48,0 km korkeudessa.



Maapallon ympärysmitta on 40000 km, joten säteeksi R saadaan

$$2\pi R = 40000 \,|\, :(2\pi)$$
$$R = \frac{40000}{2\pi} = 6366{,}19...$$

Merkitään kuvaan apukulma α ja maapallon säde R =6366,19… km.

Satelliitista nähdään keskuskulmaa 2α vastaava ympyräsektorin kaaren pituus b.

Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta voidaan ensin ratkaista kulma α.

$$\cos\alpha = \frac{6366{,}19...}{6366{,}19... + 48{,}0}$$
$$\cos\alpha = \frac{6366{,}19...}{6414{,}19...}$$
$$\alpha = 7{,}0138...^\circ$$

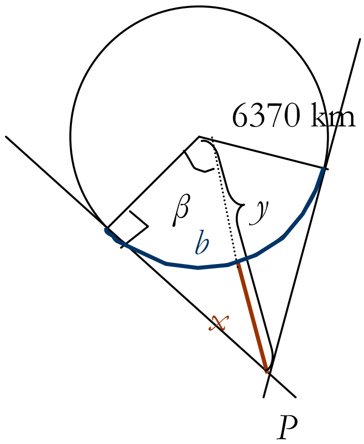
$$2\alpha = 2 \cdot 7{,}0138...^\circ = 14{,}0277...^\circ$$

Kaaren pituus b on

$$b=\frac{2\cdot 7{,}01172...^\circ}{360^\circ}\cdot 2\cdot\pi\cdot 6366{,}19...\text{km}=1558{,}639...\text{km}\approx 1560\,\text{km}$$

Vastaus: 1560 km

181. Piirretään tilannekuva. Suomen pituutta vastaa kaaren pituus b =1160 km. Merkitään tätä kaarta vastaavaa keskuskulmaa 2β.



Merkitään kysyttyä korkeutta kirjaimella x ja kirjaimella y ympyrän keskipisteen ja pisteen P välistä etäisyyttä.

Kaaren pituus b ja keskuskulman suuruus ovat suoraan verrannollisiasuureita

$$\frac{2\beta}{360^\circ}=\frac{1160}{2\cdot\pi\cdot 6370}$$
$$2\cdot\pi\cdot 6370\cdot 2\beta=1160\cdot 360$$
$$\beta=5{,}216...^\circ$$

Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

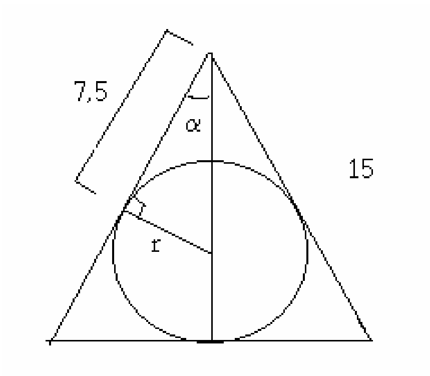
$$\cos\,5{,}216...^\circ=\frac{6370}{y}$$
$$y=\frac{6370}{\cos\,5{,}216...^\circ}=6396{,}49...$$

Kysytyksi korkeudeksi x saadaan

$$x = y - 6370 \text{ km} = 6396{,}49...\text{km - }6370\text{ km} = 26{,}49...\text{km} \approx 26{,}5 \text{ km}$$

Vastaus: 26,5 km

182. Piirretään tilannekuva.



Tapa 1:
Suurin mahdollinen ympyrä sivuaa tasasivuisen kolmion sivuja niiden keskipisteessä. Kolmion sivut ovat siis ympyrän tangentteja.

Tasasivuisen kolmion sivun pituus on 15 cm, joten sivun puolikas on $\dfrac{15\,\text{cm}}{2} = 7{,}5\,\text{cm}$.
Tasasivuisen kolmion jokainen kulma on 60°. Nämä kulmat ovat ympyrän tangenttikulmia, joten tangenttikulman puolikas $\alpha = \dfrac{60°}{2} = 30°$.

Ympyrän säde r saadaan määritettyä muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta

$$\tan 30^\circ = \frac{r}{7{,}5} \qquad |\cdot 7{,}5$$

$$r = 7{,}5 \cdot \tan 30^\circ$$

$$r = 4{,}330...\text{ (cm)}$$

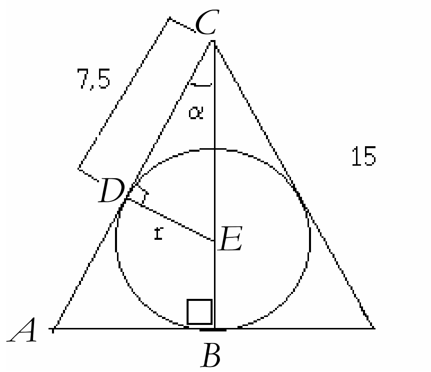
Kun säde tunnetaan, saadaan ympyrän kehän pituus

$$p = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 4{,}330...\,\text{cm} = 27{,}206...\,\text{cm} \approx 27\,\text{cm}\,.$$

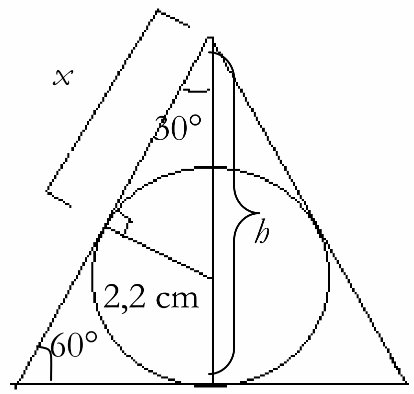
Vastaus: 27 cm

Tapa 2:

Tilanteeseen muodostuu yhdenmuotoiset kolmiot *ABC* ja *CDE* kk-lauseen mukaan. Vastinsivujen suhteiden avulla saadaan ratkaistua säde *r* verrannolla, kuten myöhemmin tehtävässä 209 on ratkaistu vastaavassa tapauksessa.



183. Piirretään tilannekuva. Tasasivuisen kolmion kulmat ovat 60°.



Suurin mahdollinen ympyrä sivuaa tasasivuisen kolmion sivuja niiden keskipisteessä. Ympyrän säde on 2,2 cm. Merkitään ympyrän tangentin (kolmion sivun) pituutta $2x$ ja kolmion korkeutta h.

Korkeusjan puolittaa huippukulman. Huippukulman puolikas on siis

$$\frac{60°}{2} = 30°$$

Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan pituudet x ja h.

$$\tan 30^\circ = \frac{2{,}2}{x}$$

$$x = \frac{2{,}2}{\tan 30^\circ} = 3{,}8105...$$

$$\tan 30^\circ = \frac{3{,}8105...}{h}$$

$$h = \frac{3{,}8105...}{\tan 30^\circ} = 6{,}6$$

Kolmion ala on $A_{\text{kolmio}} = \dfrac{2xh}{2} = xh = 3{,}8105...\text{cm} \cdot 6{,}6\,\text{cm} = 25{,}149...\text{cm}^2$.

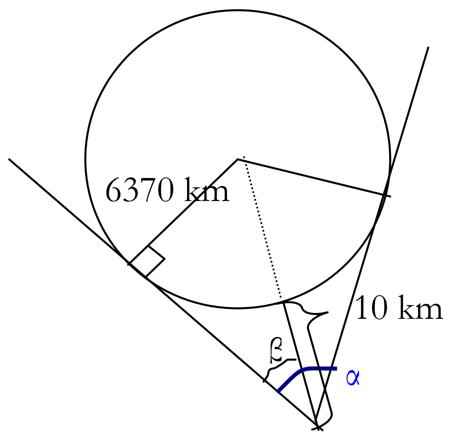
Ympyrän ala on $A_{\text{ympyrä}} = \pi \cdot (2{,}2\,\text{cm})^2 = 15{,}205...\text{cm}^2$.

Verrataan vielä alojen erotusta ympyrän alaan

$$\begin{aligned}\frac{A_{\text{kolmio}}-A_{\text{ympyrä}}}{A_{\text{ympyrä}}}&=\frac{25{,}149...\text{cm}^2-15{,}205...\text{cm}^2}{15{,}205...\text{cm}^2}\\&=0{,}6539...\\&\approx 65\%\end{aligned}$$

Vastaus: 65 %

184. a)Piirretään tilannekuva. Merkitään kuvaan apukulma $\beta=\dfrac{\alpha}{2}$.

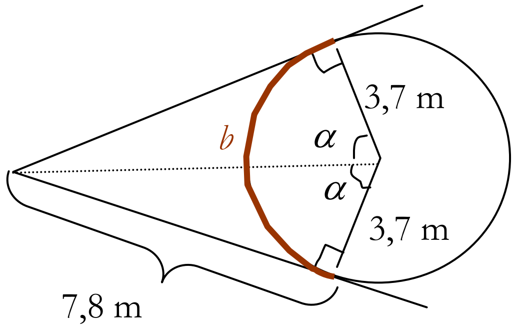


Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\begin{aligned}\sin\beta&=\frac{6370}{6370+10}\\\beta&=86{,}7916...^\circ\approx 87^\circ\end{aligned}$$

$$\alpha=2\beta=2\cdot 86{,}7916...^\circ=173{,}583...^\circ\approx 174^\circ$$

b) Piirretään tilannekuva. Merkitään kuvioon apukulma α.
Kysytty kaaren pituus on keskuskulmaa 2α vastaavan kaaren pituus.



Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\tan\alpha = \frac{7{,}8}{3{,}7}$$
$$\alpha = 64{,}622...^\circ$$

Keskuskulma $2\alpha = 2\cdot 64{,}622...^\circ = 129{,}244...^\circ$

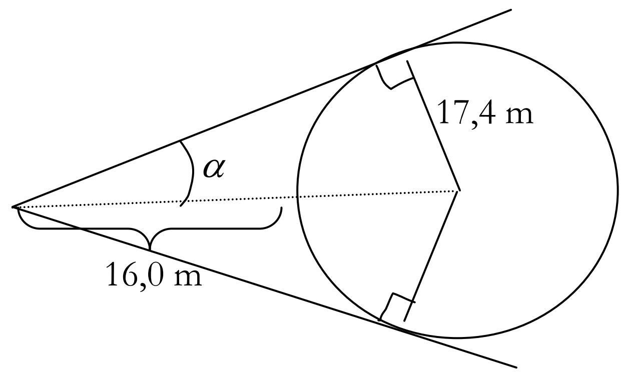
Kaaren pituus on siis

$$b = \frac{129{,}244...^\circ}{360^\circ}\cdot 2\pi\cdot 3{,}7\,\mathrm{m} = 8{,}346...\,\mathrm{m} \approx 8{,}3\,\mathrm{m}$$

Vastaus: a) 174° b) 8,3 m

185. Piirretään tilannekuva. Ympyrän muotoisen tornin halkaisija on 34,8 m, joten säde on $\frac{34{,}8\text{ m}}{2} = 17{,}4$ m. Tornia katsellaan 16,0 m etäisyydeltä.

Piirretään tilannekuva. Merkitään kuvioon apukulma α.
Kulma α on puolet siitä kulmasta, jossa torni näkyy.



Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\sin\alpha = \frac{17{,}4}{16{,}0 + 17{,}4}$$
$$\sin\alpha = \frac{17{,}4}{33{,}4}$$
$$\alpha = 31{,}396...^\circ$$

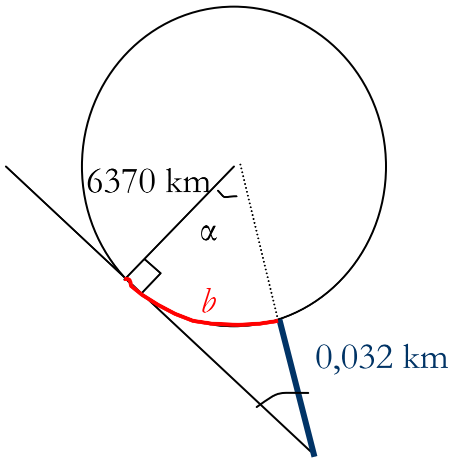
Tangenttikulma eli kulma, josta teosta katsellaan on

$$2\alpha = 2 \cdot 31{,}396...^\circ = 62{,}793...^\circ \approx 63^\circ$$

Vastaus: 63°

186. Piirretään tilannekuva.
Tähystyskori on 32 m = 0,032 km korkeudessa.

Korista nähdään kaaren b pituus.
Kulma α on tätä kaarta vastaavan sektorin keskuskulma.



Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

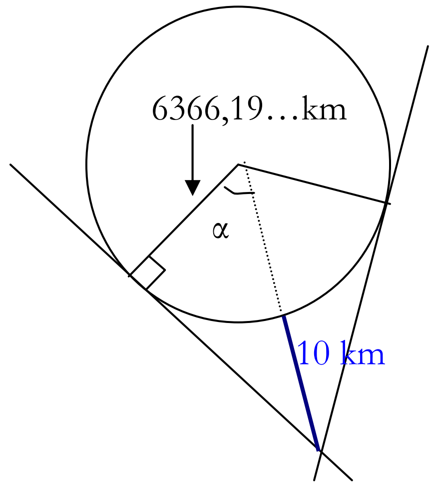
$$\cos\alpha = \frac{6370}{6370 + 0{,}032}$$
$$\cos\alpha = \frac{6370}{6370{,}032}$$
$$\alpha = 0{,}1816...^\circ$$

Kaaren pituus b on

$$b = \frac{0{,}1816...^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6370\,\text{km} = 20{,}191...\ \text{km} \approx 20\ \text{km}$$

Vastaus: 20 km

187. Maapallon säde R saadaan kehän pituuden avulla



$$R = \frac{40000\,\text{km}}{2 \cdot \pi} = 6366{,}19...\,\text{km}$$

Lentokone lentää 10 km korkeudella. Lentokoneesta nähdään sektorin kaari, jonka keskuskulman puolikas on α.

Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\cos\alpha = \frac{6366{,}19...}{6366{,}19... + 10}$$

$$\cos\alpha = \frac{6366{,}19...}{6376{,}19..}$$

$$\alpha = 3{,}209...^\circ$$

Kysyttyä kaaren pituutta vastaavan keskuskulman suuruus on

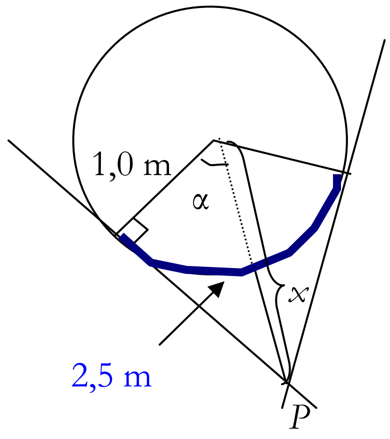
$$2\alpha = 2 \cdot 3{,}209...^\circ = 6{,}4186...^\circ$$

Päiväntasaajaa vastaava keskuskulma on 360°. Päiväntasaajasta näkyy siis

$$\frac{6{,}4186...^\circ}{360^\circ} = 0{,}0178... \approx 1{,}8\,\%$$

Vastaus: 1,8 %

188. Piirretään tilannekuva. Mainospylvään läpimitta on 2,0 m, joten säde on siis $\dfrac{2{,}0\,\text{m}}{2} = 1{,}0\,\text{m}$.



Merkitään pisteellä *P* sitä kohtaa, jossa henkilö seisoo nähdessään koko mainoksen. Merkitään kirjaimella *x* tämän pisteen ja ympyrän keskipisteen välistä etäisyyttä. Mainosta kuvaa tummennettu sektorin kaaren pituus 2,5 m.

Merkitään kuvaan apukulma α. Kulmaa α vastaa tällöin puolikas kaari 2,5 m : 2 = 1,25 m.

Kaaren pituus ja vastaava keskuskulma ovat suoraan verrannolliset, joten saadaan

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{1{,}25}{2\cdot\pi\cdot 1{,}0}$$
$$2\pi\alpha = 450^\circ$$
$$\alpha = 71{,}61...^\circ$$

Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\cos 71{,}61...^\circ = \frac{1{,}0}{x}$$
$$x = \frac{1{,}0}{\cos 71{,}61...^\circ}$$
$$x = 3{,}171...$$

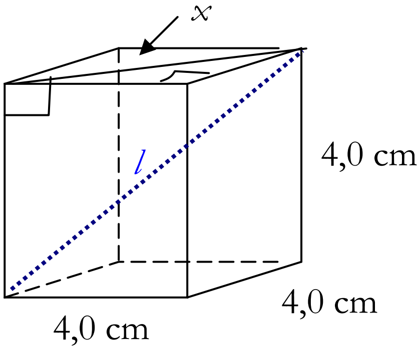
Tällöin pylvään etäisyys katsojasta on

$$x - 1{,}0\text{ m} = 3{,}171...\text{m} - 1{,}0\text{ m} = 2{,}171...\text{m} \approx 2{,}2\text{ m}$$

Vastaus: 2,2 m

3.1 Lieriö

189. Piirretään kuva. Kuution särmän pituus on 4,0 cm. Merkitään pohjan lävistäjää x ja avaruuslävistäjää l.



Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$x^2 = 4{,}0^2 + 4{,}0^2$$
$$x^2 = 32$$
$$x = \pm\sqrt{32}$$

Koska $x > 0$, niin $x = \sqrt{32} = 5{,}656...$ cm.

Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

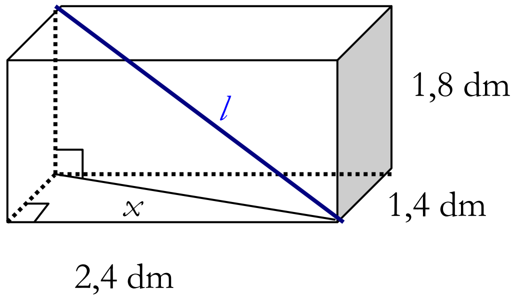
$$l^2 = x^2 + 4{,}0^2$$
$$l^2 = 5{,}656...^2 + 16$$
$$l = \pm\sqrt{48} = \pm 6{,}928...$$

Koska $l > 0$, niin $l = 6{,}928\ldots$ cm $\approx 6{,}9$ cm.

Vastaus: Avaruuslävistäjän pituus on 6,9 cm.

190. Särmiön pohjana on suorakulmio, jonka mitat ovat 1,4 dm ja 2,4 dm. Särmiön korkeus on 1,8 dm.

Merkitään pohjan lävistäjää x ja avaruuslävistäjää l.



Pohjaan muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$x^2 = 2{,}4^2 + 1{,}4^2$$
$$x^2 = 7{,}72$$
$$x = \pm\sqrt{7{,}72} = \pm 2{,}778...$$

Koska $x > 0$, niin $x = 2{,}778\ldots$ dm.

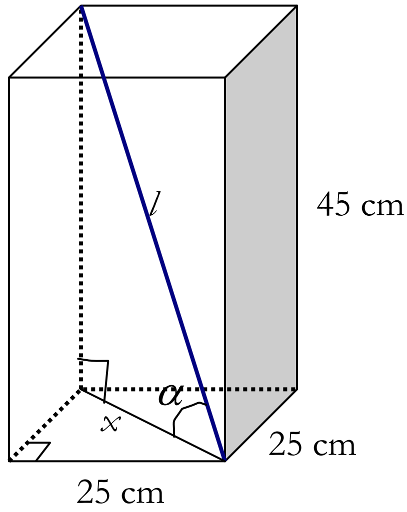
Avaruuslävistäjä saadaan toisesta muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta

$$l^2 = x^2 + 1{,}8^2$$
$$l^2 = 2{,}778...^2 + 1{,}8^2$$
$$l^2 = 10{,}96$$
$$l = \pm\sqrt{10{,}96} = \pm 3{,}310...$$

Koska $l > 0$, niin $l = 3{,}310...\,\text{dm} \approx 3{,}3\,\text{dm}$

Vastaus: 3,3 dm

191. Suoran särmiön pohjana on neliö, jonka sivun pituus on 25 cm. Särmiön korkeus on 45 cm.



Merkitään pohjan lävistäjää kirjaimella x ja avaruuslävistäjää l.

a) Pohjaan muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$x^2 = 25^2 + 25^2$$
$$x^2 = 1250$$
$$x = \pm\sqrt{1250} = \pm 35{,}355...$$

Koska $x > 0$, niin $x = 35{,}355\ldots$ cm.

Toisesta muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$l^2 = x^2 + 45^2$$
$$l^2 = 35{,}355...^2 + 45^2$$
$$l = \pm\sqrt{3275} = \pm 57{,}227...$$

Koska $l > 0$, niin $l = 57{,}227\ldots$ cm $\approx$ 57 cm.

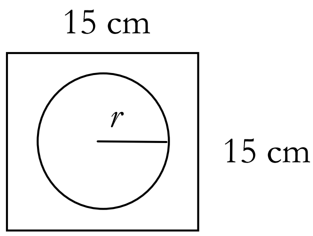
b) Merkitään kysyttyä kulmaa α. Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\sin\alpha = \frac{45}{57{,}227...}$$
$$\alpha = 51{,}844...^\circ \approx 52^\circ$$

Vastaus: a) 57 cm b) 52°

192. Kuution särmän pituus on 15 cm. Lieriön korkeus on myös 15 cm.

Ympyräpohjaisen lieriön pohjaympyrän kehän pituus on 63 cm, joten säteeksi *r* saadaan



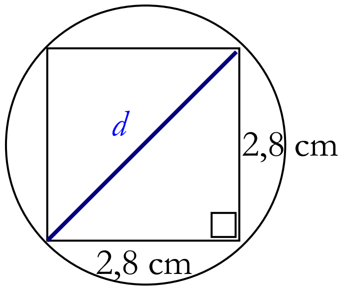
$$2\pi r = 63 \;|:2\pi$$
$$r = \frac{63}{2\pi} = 10{,}026...$$

Koska lieriön pohjan säde $r = 10{,}026\ldots$ cm , niin halkaisija on $d = 2 \cdot 10{,}026\ldots$ cm=20,053… cm.

Koska $d > 15$ cm, niin lieriön pohja ei sovi kuution pohjalle, joten lieriö ei mahdu kuutioon, vaikka lieriön korkeus onkin yhtä suuri kuin kuution.

Vastaus: ei mahdu

193. Rautatanko on suora särmiö, jonka pohjana on neliö, jonka sivun pituus on 2,8 cm. Tangon poikkileikkaus on siis neliö. Piirretään tilannekuva. Merkitään putken halkaisijaa kirjaimella *d*.



Putken halkaisijan on oltava yhtä suuri tai suurempi kuin tangon pohjan lävistäjä *d*.

$$d^2 = 2{,}8^2 + 2{,}8^2$$
$$d^2 = 15{,}68$$
$$d = \pm\sqrt{15{,}68} = \pm 3{,}959...$$

Koska $d > 0$, niin $d = 3{,}959\ldots$ cm $\approx 4{,}0$ cm.

Vastaus: 4,0 cm

194. a) Tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= 3{,}0\,\text{cm} \cdot 4{,}5\,\text{cm} \cdot 6{,}2\,\text{cm} \\ &= 83{,}7\,\text{cm}^3 \\ &\approx 84\,\text{cm}^3 \end{aligned}$$

b) Tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= 8{,}0\,\text{m} \cdot 8{,}0\,\text{m} \cdot 2{,}0\,\text{m} \\ &= 128\,\text{m}^3 \\ &\approx 130\,\text{m}^3 \end{aligned}$$

c) Tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= A_{\text{pohja}} \cdot \text{korkeus} \\ &= 5{,}5\,\text{m}^2 \cdot 1{,}6\,\text{m} \\ &= 8{,}8\,\text{m}^3 \end{aligned}$$

Vastaus: a) 84 cm^3 b) 130 m^3 c) 8,8 m^3

195. a) Tilavuus on

$$V_{\text{lieriö}} = \pi \cdot (4{,}2\,\text{cm})^2 \cdot 7{,}8\,\text{cm} = 432{,}25...\text{cm}^3 \approx 430\,\text{cm}^3$$

b) Pohjaympyrän säde on 4,00 m, joten

$$V_{\text{lieriö}} = \pi \cdot (4{,}00\,\text{m})^2 \cdot 2{,}00\,\text{m} = 100{,}53...\text{m}^3 \approx 101\,\text{m}^3$$

Vastaus: a) 430 cm^3 b) 101 m^3

196. a)Suoran särmiön kokonaispinta-ala on

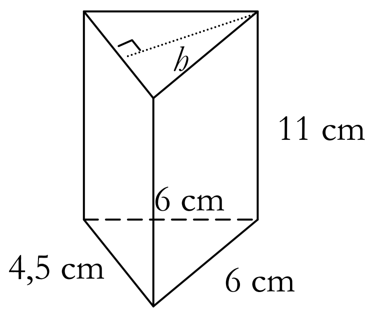
$$\begin{aligned} A_{\text{särmiö}} &= 2\cdot(5{,}0\,\text{cm}\cdot 12{,}0\,\text{cm}) + 2\cdot(7{,}0\,\text{cm}\cdot 12{,}0\,\text{cm}) + 2\cdot(5{,}0\,\text{cm}\cdot 7{,}0\,\text{cm}) \\ &= 358\,\text{cm}^2 \\ &\approx 360\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

b) Ympyräpohjaisen lieriön kokonaispinta-ala on

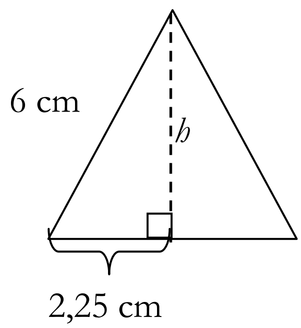
$$\begin{aligned} A_{\text{lieriö}} &= 2\cdot A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} \\ &= 2\cdot\pi\cdot(3{,}0\,\text{cm})^2 + 2\pi\cdot 3{,}0\,\text{cm}\cdot 5{,}0\,\text{cm} \\ &= 150{,}796...\,\text{cm}^2 \\ &\approx 1{,}5\,\text{dm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: a) 360 cm^2 b) 1,5 dm^2

197. Pohjana olevan tasakylkisen kolmion kyljet ovat 6 cm ja kanta on 4,5 cm. Paketin korkeus on 11 cm.



a) Lasketaan kolmion pinta-ala. Määritetään ensin tasakylkisen kolmion korkeus *h*.
Korkeusjana puolittaa kannan. Kanna puolikas on $\frac{4{,}5\,\text{cm}}{2} = 2{,}25\,\text{cm}$.



Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan Pythagoraan lauseella

$$\begin{aligned} 2{,}25^2 + h^2 &= 6^2 \\ h^2 &= 36 - 5{,}0625 \\ h &= \pm\sqrt{30{,}9375} \\ h &= \pm 5{,}56214... \end{aligned}$$

Koska *h* >0, niin *h* = 5,56214… cm

Paketin pohjakolmioiden pinta-ala on siis

$$A_{\text{pohjat}} = 2 \cdot \frac{4{,}5\,\text{cm} \cdot 5{,}56214...\text{cm}}{2} = 25{,}029...\ \text{cm}^2$$

Paketin tahkot ovat suorakulmioita, joiden pinta-ala on

$$A_{\text{tahkot}} = 2 \cdot 6\,\text{cm} \cdot 11\,\text{cm} + 4{,}5\,\text{cm} \cdot 11\,\text{cm} = 181{,}5\ \text{cm}^2$$

Kokonaispinta-ala on siis

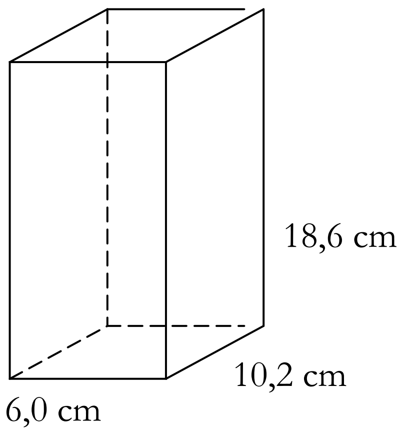
$$\begin{aligned} A &= A_{\text{pohjat}} + A_{\text{tahkot}} \\ &= 25{,}029...\text{cm}^2 + 181{,}5\,\text{cm}^2 \\ &= 206{,}529...\text{cm}^2 \\ &\approx 210\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

b) Tilavuus on $V = A_{\text{pohja}} \cdot \text{korkeus}$.

$$V = \frac{4{,}5\ \text{cm} \cdot 5{,}56214...\text{cm}}{2} \cdot 11\,\text{cm} = 137{,}663\ \text{cm}^3 \approx 140\,\text{cm}^3$$

Vastaus: a) 210 cm^2 b) 140 cm^3

198. Pakkauksen pinta-ala muodostuu tahkoista ja kahdesta pohjasta.



$$
\begin{aligned}
A_{\text{särmiö}} &= 2\cdot 6{,}0\,\text{cm}\cdot 18{,}6\,\text{cm} + 2\cdot 10{,}2\,\text{cm}\cdot 18{,}6\,\text{cm} + 2\cdot 6{,}0\,\text{cm}\cdot 10{,}2\,\text{cm} \\
&= 725{,}04\,\text{cm}^2 \\
&\approx 730\,\text{cm}^2
\end{aligned}
$$

199. Jääpala on kuution muotoinen. Sen tilavuus on

$$V = (2{,}0\,\text{cm})^3 = 8{,}0\,\text{cm}^3 = 0{,}0080\,\text{dm}^3 = 0{,}0080\ \text{l}$$

Boolimaljassa on 3,0 l nestettä. Maljan tilavuus on 4,0 l, joten sinne voidaan lisätä 1,0 l lisää, jolloin jääpaloja siis mahtuu

$$\frac{1{,}0\,\text{l}}{0{,}0080\,\text{l}} = 125\ \text{kappaletta.}$$

Vastaus: 125 kpl

200. Ympyräpohjaisen lieriön muotoisen pylvään halkaisija $d = 95$ cm $= 0{,}95$ m ja korkeus $h = 4{,}0$ m.

Pylvään vaipan ala on $A_p = \pi d \cdot h = \pi \cdot 0{,}95\,\mathrm{m} \cdot 4{,}0\,\mathrm{m} = 11{,}938...\,\mathrm{m}^2$.

a) Julisteen leveys on 1,0 m ja korkeus on 75 cm = 0,75 m.
Julisteen ala on $A_j = 1{,}0\,\mathrm{m} \cdot 0{,}75\,\mathrm{m} = 0{,}75\,\mathrm{m}^2$.

$$\frac{A_j}{A_p} = \frac{0{,}75\,\mathrm{m}^2}{11{,}938...\,\mathrm{m}^2} = 0{,}0628... = 6{,}28...\,\% \approx 6{,}3\%$$

b) Yhden pylvään tilavuus on $V = A_{\mathrm{pohja}} \cdot h$.
Pohja on ympyrä, jonka säde on $r = \dfrac{d}{2} = \dfrac{0{,}95\,\mathrm{m}}{2} = 0{,}475\,\mathrm{m}$.

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot (0{,}475\,\mathrm{m})^2 \cdot 4{,}0\,\mathrm{m} = 2{,}8352...\,\mathrm{m}^3$$

Pylväitä on 6 kpl, joten niiden tilavuus on

$$V_{\mathrm{pylväät}} = 6 \cdot 2{,}8352...\,\mathrm{m}^3 = 17{,}0117...\,\mathrm{m}^3 \approx 17\,\mathrm{m}^3.$$

Vastaus: a) 6,3 % b) 17 m^3

201. a) Pohjaympyrän halkaisija $d = 25$ cm, joten säde $r = \frac{25\,\text{cm}}{2} = 12{,}5\,\text{cm}$.
Suoran ympyrälieriön muotoisen kakun korkeus $h = 9$ cm.
Kakun tilavuus on siis

$$\begin{aligned} V_{\text{lieriö}} &= \pi r^2 \cdot h \\ &= \pi \cdot (12{,}5\,\text{cm})^2 \cdot 9\,\text{cm} \\ &= 4417{,}86...\text{cm}^3 \\ &\approx 4{,}4\ \text{dm}^3 \end{aligned}$$

Kakun tilavuus on siis 4,4 litraa.

b) Vieraat söivät kakusta $\frac{1}{2}$, joten jäljelle jäi $\frac{1}{2}$. Tästä otto söi puolet , joten Otto söi kakusta $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Oton ja vieraiden jälkeen kakusta on siis jäljellä $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Kun Liisa ottaa tästä kolmasosan eli loppupalasta jää jäljelle kaksi kolmasosaa $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$. Litroina tämä on

$$\frac{1}{6} \cdot 4{,}4178...\text{l} \approx 0{,}7\,\text{l}.$$

Vastaus: a) 4,4 l b) 0,7 l (kuudesosa kakusta)

202. a) Purkki 1 on ympyrälieriö, jonka pohjan säde on $r = \frac{7{,}5\,\text{cm}}{2} = 3{,}75\,\text{cm}$ ja korkeus 13 cm.

Purkin 1 tilavuus on

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \cdot (3{,}75\,\text{cm})^2 \cdot 13\,\text{cm} \\ &= 574{,}32...\text{cm}^3 \\ &\approx 570\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Purkki 2 on ympyrälieriö, jonka pohjan säde on $\frac{7{,}5 + 2{,}5}{2}\,\text{cm} = 5{,}0\,\text{cm}$ ja korkeus on $\frac{13\,\text{cm}}{2} = 6{,}5$ cm.

Purkin 2 tilavuus on

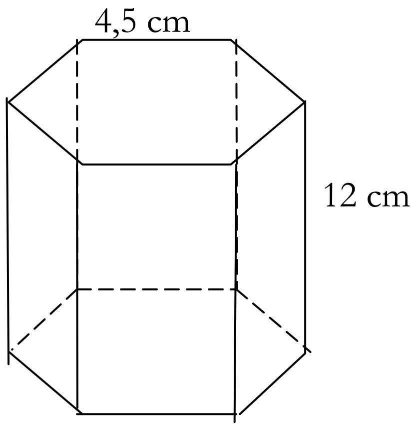
$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \cdot (5{,}0\ \text{cm})^2 \cdot 6{,}5\ \text{cm} \\ &= 510{,}50...\text{cm}^3 \\ &\approx 510\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

b) Kuinka paljon enemmän isommassa purkissa on hilloa enemmän kuin pienemmässä purkissa? Verrataan siis tilavuuksien erotusta pienemmän purkin tilavuuteen:

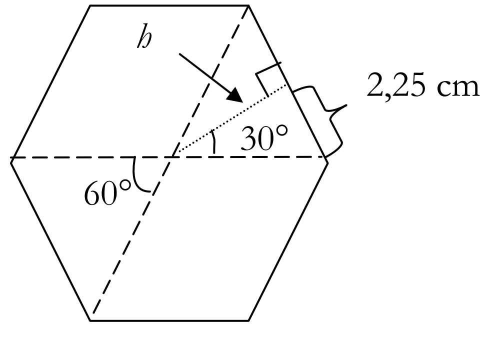
$$\frac{574{,}32...\text{cm}^3 - 510{,}50...\text{cm}^3}{510{,}50...\ \text{cm}^3} = 0{,}125 = 12{,}5\% \approx 13\%$$

Vastaus: a) 570 cm^3, 510 cm^3 b) 13%

203. Hahmotellaan kuva kappaleesta.



Lieriön pohja on säännöllinen kuusikulmio, jonka sivun pituus on 4,5 cm.
Pohja voidaan jakaa kuuteen yhtäsuureen kolmioon, joiden huippukulma on
$\frac{360°}{6} = 60°$.



Koska kolmiot ovat tasakylkisiä, niiden kantakulmatkin ovat 60°, joten kolmiot ovat siis tasasivuisia.

Lasketaan ensin pohjan ala. Tarkastellaan yhden tasasivuisen kolmion alaa. Merkitään kolmion korkeutta kirjaimella *h*. Korkeusjana puolittaa huippukulman. Huippukulman puolikas on $\frac{60°}{2} = 30°$. Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\begin{aligned} \tan 30^\circ &= \frac{2{,}25}{h} \quad \Big| \cdot h \\ h \cdot \tan 30° &= 2{,}25 \quad \Big| : \tan 30° \\ h &= \frac{2{,}25}{\tan 30^\circ} = 3{,}897...(\text{cm}) \end{aligned}$$

Pohja muodostuu kuudesta kolmiosta, joten pohjan ala on

$$A_{\text{pohja}} = 6 \cdot \left(\frac{4{,}5\,\text{cm} \cdot 3{,}897...\,\text{cm}}{2} \right) = 52{,}61...\,\text{cm}^2.$$

Sivutahko on suorakulmio, joten sen ala on

$$A_{\text{sivutahko}} = 4{,}5\,\text{cm} \cdot 12\,\text{cm} = 54\,\text{cm}^2$$

Sivutahkoja on kuusi samanlaista, joten koko särmiön pinta-ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{särmiö}} &= 2 \cdot A_{\text{pohja}} + 6 \cdot A_{\text{sivutahko}} \\ &= 2 \cdot 52{,}61\ldots\,\text{cm}^2 + 6 \cdot 54\,\text{cm}^2 \\ &= 429{,}22\ldots\,\text{cm}^2 \\ &\approx 430\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Särmiön tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= A_{\text{pohja}} \cdot \text{korkeus} \\ &= 52{,}61\ldots\text{cm}^2 \cdot 12\,\text{cm} \\ &= 631{,}33\ldots\text{cm}^3 \\ &\approx 630\,\text{cm}^3 \end{aligned}$$

Vastaus: Särmiön kokonaispinta-ala on 430 cm^2 ja tilavuus 630 cm^3.

204. Olkoon kuution sivun pituus x. Tällöin kuution kokonaispinta-ala on $6 \cdot x^2$. Toisaalta tiedetään, että kokonaispinta-ala on 4,86 cm^2. Saadaan siis yhtälö

$$\begin{aligned} 6x^2 &= 4{,}86 \quad |:6 \\ x^2 &= 0{,}81 \\ x &= \pm 0{,}90 \end{aligned}$$

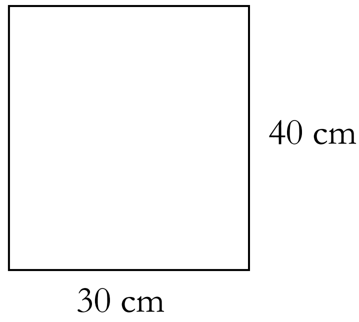
Koska sivu $x > 0$, joten $x = 0{,}90$ cm.

Kuution tilavuus on

$$V_{\text{kuutio}} = x^3 = (0{,}90\,\text{cm})^3 = 0{,}729\,\text{cm}^3.$$

Vastaus: 0,729 cm^3

205. Jos lieriön korkeus on 40 cm, pohjaympyrän kehä on 30 cm, jolloin pohjaympyrän säde on

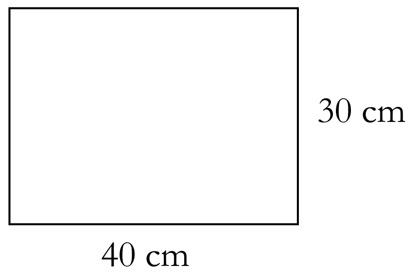


$$r_1 = \frac{30}{2\pi}\,\text{cm} = 4{,}774...\text{cm}\,.$$

Lieriön tilavuus on

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \cdot (4{,}774...\ \text{cm})^2 \cdot 40\ \text{cm} \\ &= 2864{,}78...\text{cm}^3 \\ &\approx 2800\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Jos korkeus on 30 cm, pohjaympyrän kehä on 40 cm, jolloin säde



$$r_2 = \frac{40}{2\pi}\,\text{cm} = 6{,}366...\text{cm}$$

Lieriön tilavuus on

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \cdot (6{,}366...\ \text{cm})^2 \cdot 30\ \text{cm} \\ &= 3819{,}71...\text{cm}^3 \\ &\approx 3800\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Koska $V_2 > V_1$, niin jälkimmäisen lieriön tilavuus on siis suurempi.

Tilavuuksien suhde on

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{2864{,}78\ldots\,\mathrm{cm}^3}{3819{,}71\ldots\,\mathrm{cm}^3} = 0{,}75 \quad \text{eli } \frac{3}{4}.$$

Vastaus: Lieriön, jonka korkeus on 30 cm, tilavuus on suurempi.
Tilavuuksien suhde on $\frac{3}{4}$.

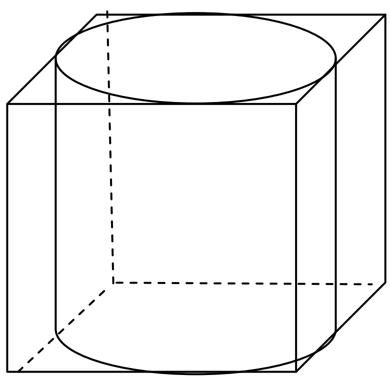
Matemaattisempi tapa olisi kirjoittaa lauseke ilman laskimen antamia välituloksia:

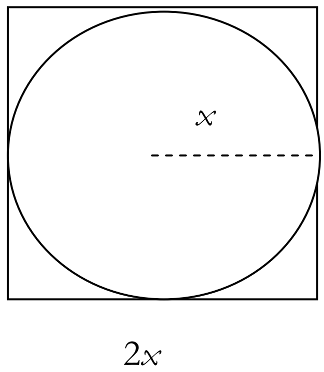
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{30}{2\pi}\right)^2 \cdot 40}{\pi \cdot \left(\frac{40}{2\pi}\right)^2 \cdot 30} = \frac{900 \cdot 40}{1600 \cdot 30} = \frac{3}{4}.$$

Tällaisten lausekkeiden sieventäminen voi kuitenkin olla opiskelijoille erittäin vaikeaa.

206. Hahmotellaan tilannekuva.
Merkitään kuution sivun pituutta $2x$, jolloin lieriön pohjaympyrän säde $r = x$

tilanne ylhäältä katsottuna:





Kuution korkeus on yhtä suuri kuin sivun pituus eli $2x$, joten lieriönkin korkeus on oltava sama.

Kuution tilavuus on

$$V_{\text{kuutio}} = (2x)^3 = 8x^3.$$

Lieriön tilavuus on

$$\begin{aligned} V_{\text{lieriö}} &= A_{\text{pohja}} \cdot \text{korkeus} \\ &= \pi x^2 \cdot 2x \\ &= 2\pi x^3 \end{aligned}$$

Lieriön tilavuuden suhde kuution tilavuuteen on

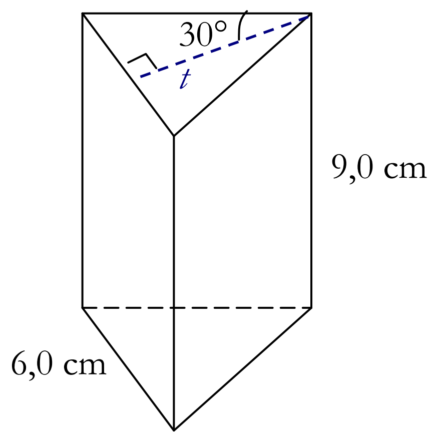
$$\frac{\cancel{2}\pi x^3}{\underset{4}{\cancel{8}}x^3} = \frac{\pi}{4} = 0{,}7853... = 78{,}53...\% \approx 79\%$$

Vastaus: 79 %

207. a) Pohjana olevan tasasivuisen kolmion sivun pituus on 6,0 cm. Olkoon pohjana olevan tasasivuisen kolmion korkeus *t*. Korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan.

Huippukulman puolikas on $\frac{60°}{2} = 30°$. ja

kannan puolikas $\frac{6{,}0\,\text{cm}}{2} = 3{,}0\,\text{cm}$.



Muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\tan 30^\circ = \frac{3{,}0}{t} \quad |\cdot t$$

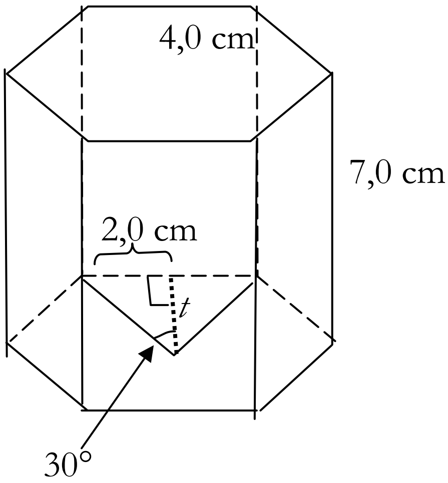
$$t \cdot \tan 30° = 3{,}0$$

$$t = \frac{3{,}0}{\tan 30^\circ} = 5{,}196...\ (\text{cm})$$

Särmiön tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= A_{\text{pohja}} \cdot \text{korkeus} \\ &= \left(\frac{6{,}0\ \text{cm} \cdot 5{,}196...\text{cm}}{2}\right) \cdot 9{,}0\ \text{cm} \\ &= 140{,}296...\text{cm}^3 \\ &\approx 140\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

b) Särmiön korkeus on 7,0 cm. Pohja on säännöllinen kuusikulmio, jonka sivun pituus on 4,0 cm. Pohja koostuu kuudesta identtisestä kolmiosta, joiden kantana on 4,0 cm.

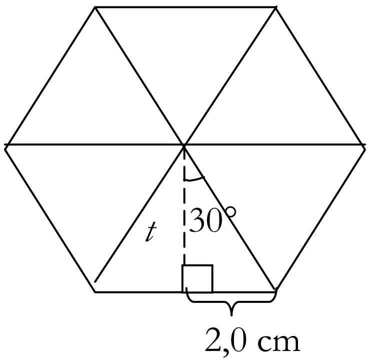


Kolmiot ovat tasakylkisiä ja niiden huippukulma on $\frac{360°}{6} = 60°$. Tällöin muutkin kulmat ovat 60 ° (kantakulmat yhtäsuuret), joten kolmiot ovat tasasivuisia.

Merkitään kolmion korkeutta kirjaimellan *t*. Korkeusjan puolittaa huippukulman ja kannan. Huippukulman puolikas on

$\frac{60°}{2} = 30°$ ja kannan puolikas

$\frac{4{,}0\,\text{cm}}{2} = 2{,}0\,\text{cm}$.



Pohjan alan laskemiseen tarvitaan kolmion korkeus *t*: Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\tan 30^\circ = \frac{2{,}0}{t} \;\Big|\cdot t$$
$$t \cdot \tan 30^\circ = 2{,}0 \;\Big|: \tan 30^\circ$$
$$t = \frac{2{,}0}{\tan 30^\circ} = 3{,}464...(\mathrm{cm})$$

Lieriön tilavuus on siis

$$\begin{aligned} V &= A_{\text{pohja}} \cdot \text{korkeus} \\ &= 6 \cdot A_{\text{kolmio}} \cdot \text{korkeus} \\ &= 6 \cdot \left(\frac{4{,}0\ \text{cm} \cdot 3{,}464...\text{cm}}{2} \right) \cdot 7{,}0\ \text{cm} \\ &= 290{,}98..\text{cm}^3 \\ &\approx 290\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

Vastaus: a) 140 cm^3 b) 290 cm^3

208. Merkitään kuution sivun pituutta kirjaimella x. Kuution tilavuus on 512 cm^3, joten saadaan yhtälö

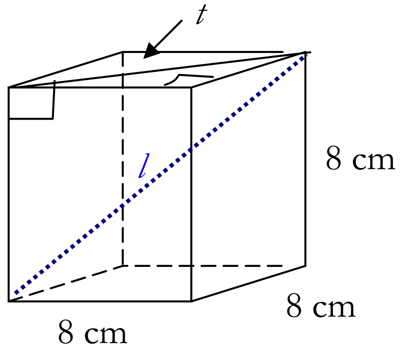
$$x^3 = 512$$
$$x = \sqrt[3]{512} = 8$$

Kuution sivun pituus on siis 8 cm.

a) Kuution pinta-ala koostuu kuudesta neliöstä, joiden ala yhteensä on

$$
\begin{aligned}
A &= 6 \cdot x^2 \\
&= 6 \cdot (8\,\mathrm{cm})^2 \\
&= 384\,\mathrm{cm}^2
\end{aligned}
$$

b) Kuution sivun pituus on 8 cm. Merkitään kuution pohjan lävistäjää kirjaimella t ja avaruuslävistäjää kirjaimella l.



Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta voidaan ensin laskea pohjan lävistäjä t Pythagoraan lauseella

$$
\begin{aligned}
t^2 &= 8^2 + 8^2 \\
t^2 &= 128 \\
t &= \pm\sqrt{128} \\
t &= \pm 11{,}3137...
\end{aligned}
$$

Koska $t > 0$, niin $t = 11{,}3137\ldots$ cm.

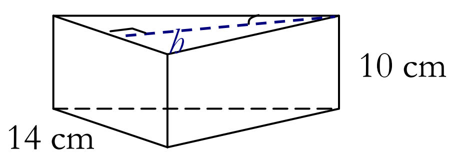
Toisesta muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta voidaan laskea avaruuslävistäjä l myös Pythagoraan lauseella

$$l^2 = t^2 + 8^2$$
$$l^2 = 11{,}3137...^2 + 8^2$$
$$l^2 = 192$$
$$l = \pm\sqrt{192}$$
$$l = \pm 13{,}856...$$

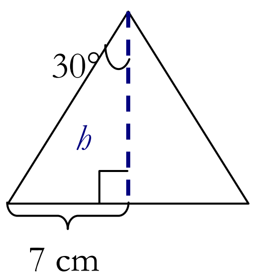
Koska $l > 0$, niin $l = 13{,}856\ldots$ cm ≈ 13,9 cm

Vastaus: a) 384 cm^2 b) 13,9 cm

209. Pakkauksen pohja on tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on 14 cm. Pakkauksen korkeus on 10 cm.



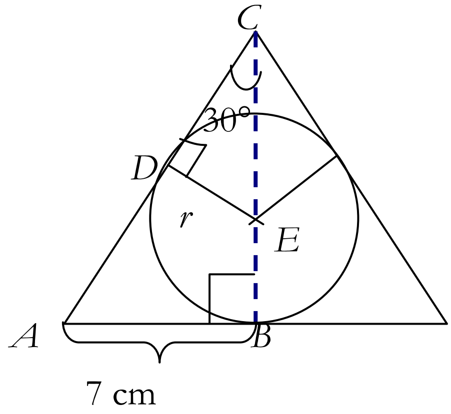
Tasasivuisen kolmion kulmat ovat 60°. Kolmion korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman. Kannan puolikas on $\frac{14\,\text{cm}}{2} = 7\,\text{cm}$ ja huippukulman puolikas $\frac{60°}{2} = 30°$.



Kakku on suora, ympyräpohjainen lieriö. Merkitään kakun sädettä kirjaimella *r*.

Tapa 1:

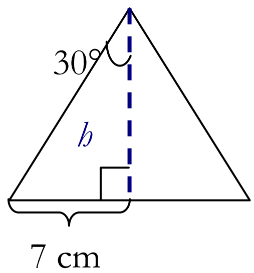
Kolmiot *ABC* ja *CDE* ovat yhdenmuotoisia kk- lauseen mukaan. Vastinsivujen suhde pitää s
iis olla sama eli



$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CE}$$

$$\frac{7}{r} = \frac{14}{h - r}$$

Ratkaistaan pohjakolmion korkeus h muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta



$$\tan 30° = \frac{7}{h} \quad \Big| \cdot h$$

$$h \cdot \tan 30° = 7 \quad \Big| : \tan 30°$$

$$h = \frac{7}{\tan 30°} = 12{,}124... \text{ (cm)}$$

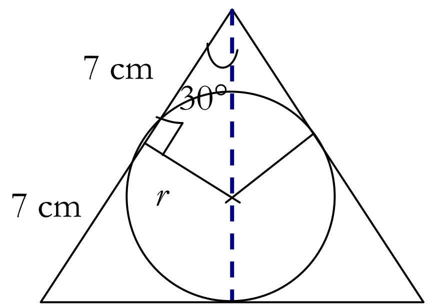
Vastinsivujen suhteilla muodostetusta verrannosta voidaan nyt ratkaista säde r

$$\frac{7}{r}=\frac{14}{h-r}$$
$$\frac{7}{r}=\frac{14}{12{,}124...-r}$$
$$14r=7(12{,}124...-r)$$
$$14r=84{,}870...-7r$$
$$21r=84{,}870 \;\big|:21$$
$$r=\frac{84{,}870...}{21}=4{,}041...\ \text{(cm)}$$

Kakun ympärysmitta on

$$p=2\pi r=2\pi\cdot 4{,}041...\ \text{cm}=25{,}393...\text{cm}\approx 25\,\text{cm}$$

Tapa 2:
Suurin mahdollinen ympyrä sivuaa tasasivuisen kolmion sivuja niiden keskipisteessä. Ympyrän säde on kohtisuorassa kolmion sivuja vastaan. (Ympyrän tangentti on kohtisuorassa sädettä vastaan.)



Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

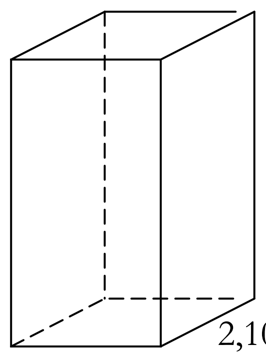
$$\tan 30°=\frac{r}{7}\;\big|\cdot 7$$
$$r=7\cdot\tan 30°$$
$$r=4{,}041...\ \text{(cm)}$$

Kakun ympärysmitta on

$$p = 2\pi r = 2\pi \cdot 4{,}041...\ \text{cm} = 25{,}393...\text{cm} \approx 25\,\text{cm}$$

Vastaus: 25 cm

210. Lasketaan ensin särmiön tilavuus.



$$\begin{aligned} V_{\text{särmiö}} &= 0{,}8\,\text{m} \cdot 2{,}10\,\text{m} \cdot 0{,}32\,\text{m} \\ &= 0{,}5376\,\text{m}^3 \end{aligned}$$

$$\text{tiheys} = \frac{\text{massa}}{\text{tilavuus}} \text{ eli}$$

$$\text{massa} = \text{tiheys} \cdot \text{tilavuus}$$

Hautakivi painaa siis

$$2{,}7 \cdot 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0{,}5376\,\text{m}^3 = 1451{,}52\,\text{kg} \approx 1500\,\text{kg}$$

Kiven voi nostaa nosturilla, koska 1500 kg < 2000 kg.

Vastaus: Voidaan nostaa.

211. a) Lieriön pohjaympyrän säde on $r = \dfrac{11{,}0\,\mathrm{cm}}{2} = 5{,}50\,\mathrm{cm}$
ja korkeus h = 10,5 cm. Juuston tilavuus on

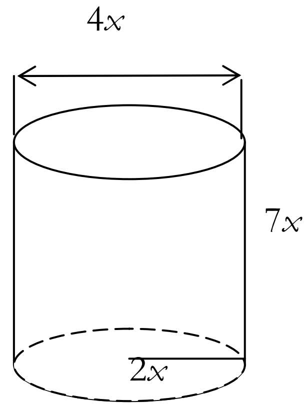
$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot (5{,}50\,\mathrm{cm})^2 \cdot 10{,}5\,\mathrm{cm} = 997{,}84...\mathrm{cm}^3 \approx 998\,\mathrm{cm}^3$$

b) Ympyräpohjaisen lieriön (Oltermannin) vaippana on suorakulmio, jonka kanta on pohjaympyrän kehä ja korkeus h =10,5 cm. Juuston päällä on muovia joka pinnalla. Alaan lasketaan vaipan lisäksi siis mukaan myös pohjat.

$$\begin{aligned} A &= A_{\text{vaippa}} + 2 \cdot A_{\text{pohja}} \\ &= 2\pi r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2 \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 5{,}50\,\mathrm{cm} \cdot 10{,}5\,\mathrm{cm} + 2 \cdot \pi \cdot (5{,}50\,\mathrm{cm})^2 \\ &= 552{,}92...\mathrm{cm}^3 \\ &\approx 553\,\mathrm{cm}^3 \end{aligned}$$

Vastaus: a)998 cm^3 b) 553 cm^3

212. a) Tynnyrin(ympyrälieriön) pohjan halkaisijan ja korkeuden suhde on 4 : 7. Olkoon siis lieriön pohjaympyrän halkaisijan pituus $4x$, jolloin lieriön korkeus on $7x$. Pohjan säde on $2x$.



Lieriön tilavuuden lauseke on näin ollen

$$V = \pi \cdot (2x)^2 \cdot 7x$$

Tiedetään, että tynnyrin tilavuus on 140 l = 140 dm^3, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \pi \cdot (2x)^2 \cdot 7x &= 140 \\ 28\pi x^3 &= 140 \quad |: 28\pi \\ x^3 &= \frac{140}{28\pi} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{140}{28\pi}} = 1{,}167...(\text{dm}) \end{aligned}$$

Tynnyrin halkaisija on siis $4 \cdot 1{,}167...\text{dm} \approx 4{,}7\ \text{dm}$.

b) Tynnyrin vaippa on suorakulmio, jonka kantana on pohjaympyrän kehä ja korkeus $7x$. Kokonaispinta-alaan tarvitaan lisäksi 2 pohjaa. Peltiä tarvitaan siis

$$\begin{aligned}A &= A_{\text{vaippa}} + 2\cdot A_{\text{pohja}}\\ &= 2\cdot\pi\cdot(2x)\cdot 7x + 2\cdot\pi\cdot(2x)^2\\ &= 2\cdot\pi\cdot(2\cdot 1{,}167\ldots\text{dm})\cdot 7\cdot 1{,}167\ldots\text{dm} + 2\cdot\pi\cdot(2\cdot 1{,}167\ldots\text{dm})^2\\ &= 154{,}16\ldots\text{dm}^2\\ &\approx 1{,}5\,\text{m}^2\end{aligned}$$

Vastaus: a) 4,7 dm b) 1,5 m^2

3.2 Kartio

213. Pyramidin sivutahkoina on neljä tasakylkistä kolmiota.

Yhden sivutahkon ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{6{,}2\,\text{m} \cdot 10{,}4\,\text{m}}{2}$$

Vaipan ala on

$$A_v = 4 \cdot A_{\text{kolmio}} = 4 \cdot \frac{6{,}2\,\text{m} \cdot 10{,}4\,\text{m}}{2} = 128{,}96\,\text{m}^2.$$

Pohjana on neliö, jonka ala on

$$A_{\text{pohja}} = (6{,}2\,\text{m})^2 = 38{,}44\,\text{m}^2.$$

Kokonaispinta-ala on

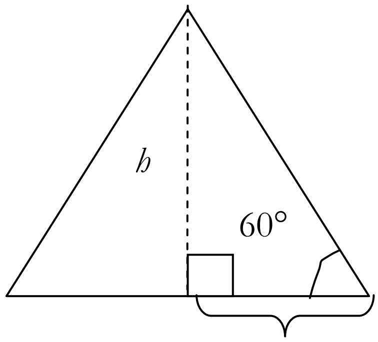
$$A_{\text{koko}} = 128{,}96\ \text{m}^2 + 38{,}44\ \text{m}^2 = 167{,}4\,\text{m}^2 \approx 170\,\text{m}^2.$$

Vastaus: 170 m^2

214. a) Pohja on säännöllinen kuusikulmio, joka koostuu kuudesta tasasivuisesta kolmiosta. Kolmioiden kaikki kulmat ovat siis 60°.

Lasketaan ensin kolmion korkeus *h*. Koskeusjana puolittaa tasasivuisen kolmion kannan.

$$\tan 60° = \frac{h}{7} \quad |\cdot 7$$
$$h = 7 \cdot \tan 60°$$
$$h = 12{,}124...$$



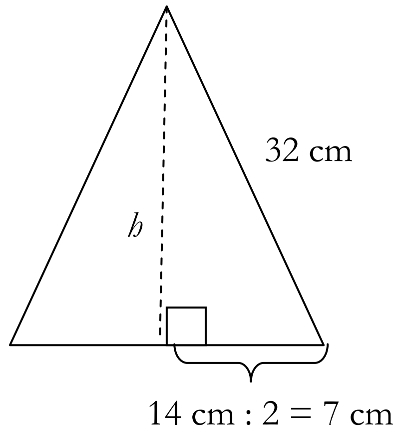
Yhden kolmion ala

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{14\,\text{cm} \cdot 12{,}124...\ \text{cm}}{2} = 84{,}870...\,\text{cm}^2$$

Pohjan ala on siis

$$\begin{aligned} A_{\text{pohja}} &= 6 \cdot A_{\text{kolmio}} \\ &= 6 \cdot 84{,}870...\,\text{cm}^2 \\ &= 509{,}22...\,\text{cm}^2 \\ &= 5{,}0922...\ \text{dm}^2 \approx 5{,}1\,\text{dm}^2 \end{aligned}$$

b) Lasketaan ensin yhden sivutahkon pinta-ala. Sivutahkot ovat tasakylkisiä kolmioita.



Korkeusjana puolittaa kolmion kannan. Kolmion korkeus h saadaan Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned} 32^2 &= h^2 + 7^2 \\ h^2 &= 32^2 - 7^2 \\ h^2 &= 975 \\ h &= \pm\sqrt{975} = \pm 31{,}224... \end{aligned}$$

Yhden kolmion ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{14\,\text{cm} \cdot 31{,}224...\,\text{cm}}{2} = 218{,}574...\ \text{cm}^2$$

Vaippa muodostuu kuudesta tasakylkisestä kolmiosta, joten vaipan ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{vaippa}} &= 6 \cdot A_{\text{kolmio}} \\ &= 6 \cdot 218{,}574...\,\text{cm}^2 \\ &= 1311{,}44...\,\text{cm}^2 \\ &= 13{,}1144...\ \text{dm}^2 \\ &\approx 13\,\text{dm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: a) 5,1 dm^2 b) 13 dm^2

215. Suoran ympyräkartion vaipan ala on

$$A_v = \pi rs = \pi \cdot 5{,}1\,\text{mm} \cdot 12\,\text{mm} = 192{,}26...\,\text{mm}^2.$$

Pohjan ala on

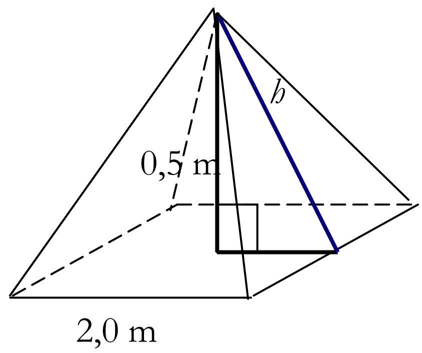
$$A_p = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (5{,}1\,\text{mm})^2 = 81{,}712...\,\text{mm}^2.$$

Kokonaispinta-ala on

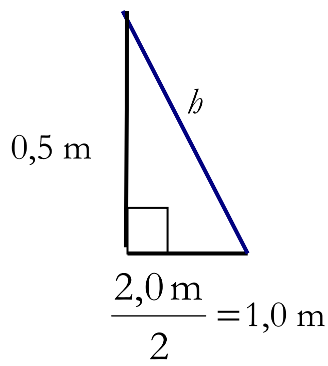
$$\begin{aligned} A_{\text{koko}} &= A_v + A_p \\ &= 192{,}26...\,\text{mm}^2 + 81{,}712...\text{mm}^2 \\ &= 273{,}978...\,\text{mm}^2 \\ &\approx 270\,\text{mm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 270 mm^2

216. Lasketaan ensin sivutahkoina olevien tasakylkisten kolmioiden korkeus h.



$$h^2 = 0{,}5^2 + 1^2$$
$$h^2 = 1{,}25$$
$$h = \pm\sqrt{1{,}25} \approx \pm 1{,}118...$$



Koska $h > 0$, niin h = 1,118… m

Yhden kolmion ala on

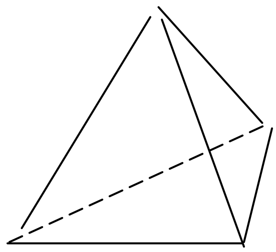
$$A_k = \frac{2{,}0\text{ m} \cdot 1{,}118...\text{ m}}{2} = 1{,}118...\text{ m}^2$$

Vaippa koostuu neljästä kolmiosta, joten vaipan ala on

$$\begin{aligned} A_v &= 4 \cdot A_k \\ &= 4 \cdot 1{,}118...\text{ m}^2 \\ &= 4{,}472...\text{ m}^2 \\ &\approx 4{,}5 \quad \text{m}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: Lasia tarvitaan 4,5 m^2

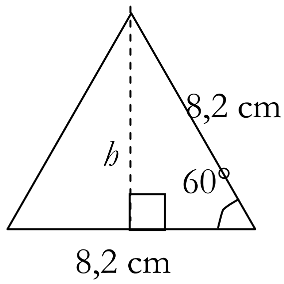
217. Säännöllisen tetraedrin kaikki neljä tahkoa ovat tasasivuisia kolmioita.



Lasketaan ensin yhden kolmion pinta-ala.

$$\sin 60° = \frac{h}{8{,}2} \quad |\cdot 8{,}2$$

$$h = 8{,}2 \cdot \sin 60° = 7{,}101...$$



Kolmion ala

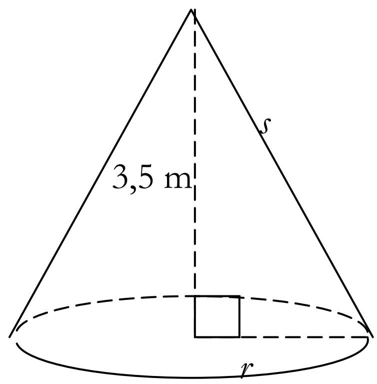
$$A_k = \frac{8{,}2\,\text{cm} \cdot 7{,}101...\,\text{cm}}{2} = 29{,}115...\,\text{cm}^2$$

Koko tetraedrin ala on

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot A_k \\ &= 4 \cdot 29{,}115...\,\text{cm}^2 \\ &= 116{,}46...\,\text{cm}^2 \\ &\approx 120 \ \ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 120 cm^2

218. Hahmotellaan kuva wigwamista. Pohjaympyrän säde $r = \dfrac{2{,}6\,\text{m}}{2} = 1{,}3\,\text{m}$.



Lasketaan sivujanan *s* pituus kartion sisälle muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$
\begin{aligned}
s^2 &= 3{,}5^2 + 1{,}3^2 \\
s^2 &= 13{,}94 \\
s &= \pm\sqrt{13{,}94} \\
s &= \pm 3{,}733...
\end{aligned}
$$

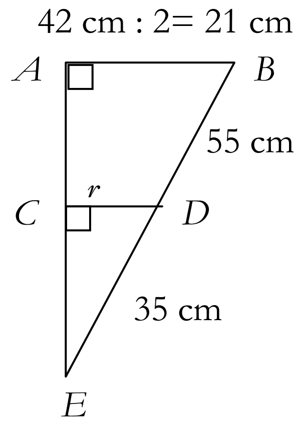
Koska $s > 0$, niin $s = 3{,}733\ldots$ m

Puhvelinnahkaa kuluu kartion vaipan alan verran. Vaipan ala on

$$
\begin{aligned}
A_v &= \pi r s \\
&= \pi \cdot 1{,}3\,\text{m} \cdot 3{,}733...\text{m} \\
&= 15{,}248...\text{m}^2 \\
&\approx 15\,\text{m}^2
\end{aligned}
$$

Vastaus: 15 m^2

219. Merkitään sangon pohjan sädettä kirjaimella *r*.



Kartion sisälle muodostuu kartion korkeusjanan avulla kaksi kolmiota.

Kolmioissa *ABE* ja *CDE* on kummassakin 90° kulma sekä kulma *E*, joten kolmiot ovat yhdenmuotoisia (kk-lause).

Vastiosat ovat nerrannolliset, jolloin saadaan

$$\frac{21}{r} = \frac{55+35}{35}$$
$$90r = 735 \qquad |:90$$
$$r = 8{,}1666\ldots \quad (\text{cm})$$

Sangon pohjaan kuluu peltiä

$$A_{\text{pohja}} = \pi r^2 = \pi \cdot (8{,}166\ldots\text{cm})^2 = 209{,}526\ldots\text{cm}^2.$$

Sangon vaipan ala saadaan, kun ison kartion vaipan alasta vähennetään pienen kartion vaipan ala.

Lasketaan kummankin kartion vaippojen alat.

$$A_{\text{vaippa/iso}} = \pi \cdot 21\,\text{cm} \cdot 90\,\text{cm} = 5937{,}61\ldots\ \text{cm}^2$$
$$A_{\text{vaippa/pieni}} = \pi \cdot 8{,}166\ldots\text{cm} \cdot 35\,\text{cm} = 897{,}97\ldots\ \text{cm}^2$$

Sangon vaipan ala on siis

$$\begin{aligned} A_v &= A_{\text{iso}} - A_{\text{pieni}} \\ &= 5937{,}61...\text{cm}^2 - 897{,}97...\text{cm}^2 \\ &= 5039{,}63...\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Sankoon kuluu peltiä

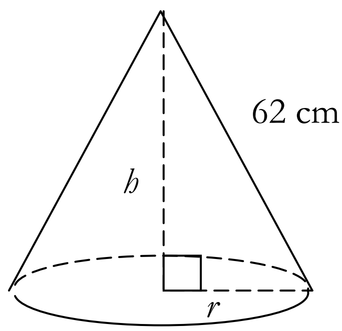
$$\begin{aligned} A_{\text{pohja}} + A_{\text{vaippa}} &= 209{,}526...\text{cm}^2 + 5039{,}63...\text{cm}^2 \\ &= 5249{,}16...\text{cm}^2 \\ &= 52{,}4916...\text{dm}^2 \\ &\approx 52\ \text{dm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 52 dm^2

220. Ympyrän säde on 62 cm. Sektorin keskuskulma on 110°. Sektorin kaaren pituus on

$$b=\frac{110°}{360°}\cdot 2\pi\cdot 62\,\text{cm}=119{,}031...\,\text{cm}$$

Merkitään kartion pohjaympyrän sädettä kirjaimella r ja kartion korkeutta h.
Koska sektorin kaaren pituus on yhtäsuuri kuin pohjaympyrän kehän pituus, saadaan yhtälö



$$\begin{aligned}2\pi r&=119{,}031... \quad |:(2\pi)\\ r&=18{,}9444...\ \ (\text{cm})\end{aligned}$$

Kartion vaipan ala on

$$\begin{aligned}A_v&=\pi rs\\ &=\pi\cdot 18{,}944...\,\text{cm}\cdot 62\,\text{cm}\\ &=3689{,}97...\,\text{cm}^2\\ &=36{,}8997...\ \text{dm}^2\\ &\approx 37\,\text{dm}^2\end{aligned}$$

Kartion korkeus h saadaan Pythagoraan lauseella

$$\begin{aligned}h^2 + r^2 &= 62^2 \\ h^2 + 18{,}944...^2 &= 62^2 \\ h^2 &= 62^2 - 18{,}944...^2 \\ h^2 &= 3485{,}108... \\ h &= \pm\sqrt{3485{,}108...} \\ h &= \pm 59{,}034...\end{aligned}$$

Koska $h > 0$, niin $h = 59{,}034...$ cm ≈ 59 cm.

Vastaus: Vaipan ala 37 dm^2, korkeus 59 cm

221. a) Kartion pohja on ympyrä. Ympyräkartion tilavuus

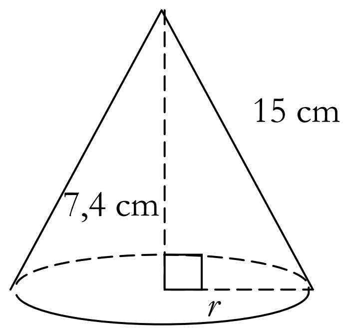
$$\begin{aligned}V &= \frac{A_p \cdot h}{3} \\ &= \frac{\pi r^2 h}{3} \\ &= \frac{\pi \cdot (34\,\text{cm})^2 \cdot 52\,\text{cm}}{3} \\ &= 62949{,}13...\,\text{cm}^3 \\ &= 62{,}94...\,\text{dm}^3 \\ &\approx 63\,\text{dm}^3\end{aligned}$$

b) Pyramidin pohja on neliö. Pyramidin tilavuus

$$\begin{aligned} V &= \frac{A_p \cdot h}{3} \\ &= \frac{2{,}6\,\mathrm{m} \cdot 2{,}6\,\mathrm{m} \cdot 3{,}1\,\mathrm{m}}{3} \\ &= 6{,}985...\mathrm{m}^3 \\ &\approx 7{,}0\,\mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

Vastaus: a) 63 dm^3 b) 7,0 m^3

222. Sivujanan pituus on 15 cm ja korkeus 7,4 cm. Hahmotellaan kuva kartiosta. Merkitään pohjaympyrän sädettä *r*.



Pythagoraan lauseella saadaan

$$\begin{aligned} r^2 + 7{,}4^2 &= 15^2 \\ r^2 &= 170{,}24 \\ r &= \pm\sqrt{170{,}24} \\ r &= \pm 13{,}047... \end{aligned}$$

Koska $r > 0$, niin $r = 13{,}047…$ cm

Kartion tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= \frac{A_p \cdot h}{3} \\ &= \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \\ &= \frac{\pi \cdot (13{,}047\ldots \text{ cm})^2 \cdot 7{,}4 \text{ cm}}{3} \\ &= 1319{,}234\ldots \text{cm}^3 \\ &\approx 1{,}3 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

Vastaus: 1,3 dm^3

223. a) Kuution särmä, kartion korkeus ja pohjaympyrän halkaisija ovat yhtäsuuret.

Kartion korkeus h = 16 cm
Pohjaympyrän säde $r = \dfrac{16 \text{ cm}}{2} = 8 \text{ cm}$.
Kartion tilavuus on

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot (8 \text{ cm})^2 \cdot 16 \text{ cm}}{3} = 1072{,}33\ldots \text{cm}^3 \approx 1{,}1 \text{ dm}^3$$

b) Lasketaan kuution tilavuus.

$$V_{\text{kuutio}} = 16\,\text{cm} \cdot 16\,\text{cm} \cdot 16\,\text{cm} = 4096\,\text{cm}^3$$

Verrataan kuution tilavuutta kartion tilavuuteen.

$$\frac{V_{\text{kuutio}}}{\text{V}_{\text{kartio}}} = \frac{4096\,\text{cm}^3}{1072{,}33...\text{cm}^3} = 3{,}819... = 381{,}9...\%$$

Kuution tilavuus on 381,9… % – 100 % = 281,9… % ≈280 % suurempi.

Vastaus: 280 %

224. Särmiön pohja on neliö, jonka sivun pituus on 7,0 cm ja korkeus *h*= 20,0 cm. Tilavuus on

$$V_{\text{särmiö}} = A_p \cdot h = 7{,}0\,\text{cm} \cdot 7{,}0\,\text{cm} \cdot 20{,}0\,\text{cm} = 980\,\text{cm}^3.$$

Särmiön päällä olevan kartion pohjana on neliö, jonka sivun pituus on 7,0 cm ja korkeus h = 2,0 cm. Tilavuus on

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_{\text{kartio}} &= \frac{A_p \cdot h}{3} \\ &= \frac{(7{,}0\,\text{cm})^2 \cdot 2{,}0\,\text{cm}}{3} \\ &= 32{,}666...\text{cm}^3 \end{aligned}$$

Karkkirasian tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{särmiö}} + V_{\text{kartio}} \\ &= 980\,\text{cm}^3 + 32{,}666...\text{cm}^3 \\ &= 1012{,}66...\text{cm}^3 \\ &\approx 1000\,\text{cm}^3 \\ &= 1{,}0\,\text{dm}^3 \end{aligned}$$

Vastaus: 1,0 dm^3

225. Alussa:

Korkeus h = 14 m
Läpimitta d = 24 cm
Säde $r = \dfrac{24\,\text{cm}}{2} = 12\,\text{cm} = 0{,}12\,\text{m}$

Puun tilavuus

$$V_{\text{alussa}} = \frac{\pi \cdot (0{,}12\,\text{m})^2 \cdot 14\,\text{m}}{3} = 0{,}2111\ldots\ \text{m}^3$$

5 vuoden kuluttua:

Korkeus h = 14 m + 5 · 0,3 m = 15,5 m
Läpimitta d = 24 cm + 5 · 0,4 m = 26 cm
Säde $r = \dfrac{26\,\text{cm}}{2} = 13\,\text{cm} = 0{,}13\,\text{m}$

Puun tilavuus

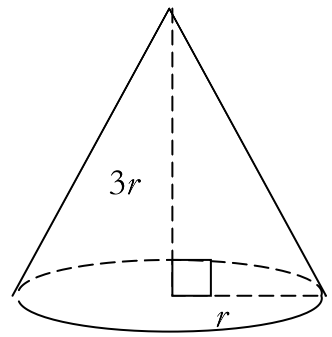
$$V_{5\text{ v kuluttua}} = \frac{\pi \cdot (0{,}13\,\text{m})^2 \cdot 15{,}5\,\text{m}}{3} = 0{,}2743\ldots\ \text{m}^3$$

Tilavuus on kasvanut

$$\begin{aligned} V_{5\text{ v kuluttua}} - V_{\text{alussa}} &= 0{,}2743\ldots\text{m}^3 - 0{,}2111\ldots\text{m}^3 \\ &= 0{,}0631\ldots\text{m}^3 \\ &= 63{,}1\ldots\text{dm}^3 \\ &\approx 63\ \ \text{dm}^3 \end{aligned}$$

Vastaus: Tilavuus on kasvanut 63 dm^3.

226. Merkitään pohjaympyrän sädettä kirjaimella *r*. Korkeus on tällöin 3*r*.



Koska kartion tilavuus on 1200 cm^3, saadaan yhtälö

$$\frac{\pi r^2 \cdot \cancel{3}r}{\cancel{3}} = 1200$$

$$\pi r^3 = 1200 \quad |:\pi$$

$$r^3 = \frac{1200}{\pi}$$

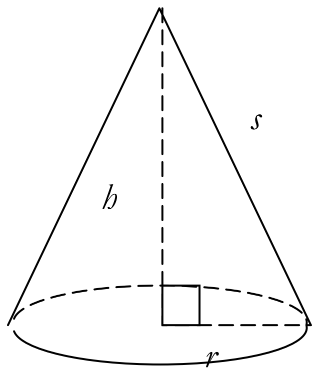
$$r = \sqrt[3]{\frac{1200}{\pi}} = 7{,}2556... \approx 7{,}3(\text{cm})$$

Korkeus on siis

$$h = 3r = 3 \cdot 7{,}22556...\,\text{cm} = 21{,}76...\,\text{cm} \approx 22\ \text{cm}.$$

Vastaus: Korkeus 22 cm, pohjan säde 7,3 cm.

227. Merkitään kartion sivujanaa kirjaimella s. Tällöin pohjan säde $r = s - 2{,}5$.



a) Koska vaipan ala on 547 cm², saadaan yhtälö

$$\pi rs = 547$$
$$\pi \cdot (s - 2{,}5) \cdot s = 547$$
$$\pi s^2 - 2{,}5\pi s = 547$$
$$\pi s^2 - 2{,}5\pi s - 547 = 0$$
$$s = \frac{-(-2{,}5\pi) \pm \sqrt{(-2{,}5\pi)^2 - 4 \cdot \pi \cdot (-547)}}{2\pi}$$
$$s = \frac{2{,}5\pi \pm \sqrt{6935{,}48...}}{2\pi}$$
$$s = \frac{2{,}5\pi \pm 83{,}279...}{2\pi}$$

$$s = \frac{2{,}5\pi + 83{,}279...}{2\pi} = 14{,}504... \quad \text{tai} \quad s = \frac{2{,}5\pi - 83{,}279...}{2\pi} = -12{,}004...$$

Koska sivujana on positiivinen, niin $s = 14{,}504...$ cm $\approx 14{,}5$ cm.

Säde $r = s - 2{,}5$ cm $= 14{,}504...$ cm $- 2{,}5$ cm $= 12{,}004...$ cm ≈ 12 cm.

b) Tilavuutta varten tarvitaan kartion korkeus *h*.
Kartion sisään muodotusvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan Pythagoraan lauseella

$$h^2 + r^2 = s^2$$
$$h^2 = s^2 - r^2$$
$$h = \pm\sqrt{s^2 - r^2}$$
$$h = \pm\sqrt{14{,}504...^2 - 12{,}004...^2}$$
$$h = \pm 8{,}140...$$

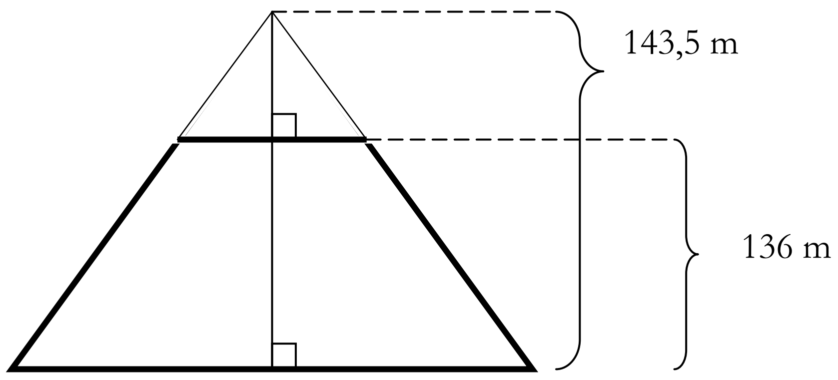
Koska $h > 0$, niin $h = 8{,}140…$ cm.

Kartion tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi r^2 h}{3} \\ &= \frac{\pi \cdot (12{,}004...\ \text{cm})^2 \cdot 8{,}140...\text{cm}}{3} \\ &= 1228{,}487...\ \text{cm}^3 \\ &= 1{,}228487...\ \text{dm}^3 \\ &\approx 1{,}2\,\text{dm}^3 \end{aligned}$$

Vastaus: a) sivujana 14,5 cm, säde 12 cm b) 1,2 dm^3

228. Piirretään pyramidin poikkileikkauskuva.



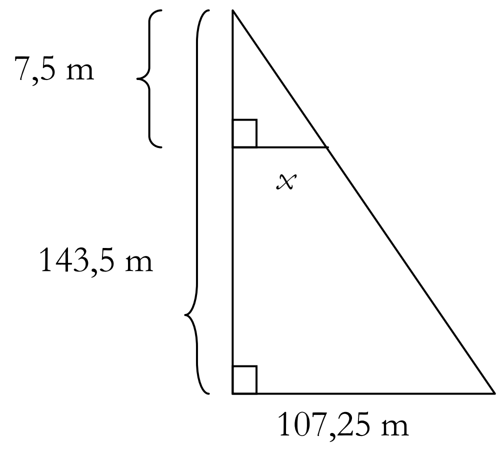
a) Khafren pyramidin tilavuus tällä hetkellä saadaan, kun vähennetään alkuperäisen pyramidin tilavuudesta ”pudonneen osan” tilavuus. Tällaista kappaletta kutsutaan katkaistuksi kartioksi.

Khafren alkuperäinen tilavuus

$$V_{\text{alku}} = \frac{A_p h}{3} = \frac{214{,}5\text{m} \cdot 214{,}5\text{m} \cdot 143{,}5\text{m}}{3} = 2200823{,}625\ \text{m}^3.$$

Pudonneen osan korkeus on 143,5 m – 136 m = 7,5 m.

Pohjaneliön sivun pituus saadaan poikkileikkauskuvan suorakulmaisten kolmioiden avulla.



Kummallakin suorakulmaisella kolmiolla on sama huippukulma, joten kk-lauseen mukaan kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Tällöin niiden vastinosien suhde on sama eli

$$\begin{aligned} \frac{x}{107{,}25} &= \frac{7{,}5}{143{,}5} \\ 143{,}5x &= 7{,}5 \cdot 107{,}25 \quad | :143{,}5 \\ x &= \frac{804{,}375}{143{,}5} = 5{,}605... \end{aligned}$$

Pudonneen osan tilavuus on siis

$$V_{\text{pudonnut}} = \frac{A_p h}{3} = \frac{(2 \cdot 5{,}605...\,\text{m})^2 \cdot 7{,}5\,\text{m}}{3} = 314{,}205...\,\text{m}^3$$

Khafren tilavuus tällä hetkellä on

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{alku}} - V_{\text{pudonnut}} \\ &= 2200823{,}625\ \text{m}^3 - 314{,}205...\ \text{m}^3 \\ &= 2200509{,}41...\ \text{m}^3 \\ &\approx 2200000\ \text{m}^3 \end{aligned}$$

b) Tilavuuden pieneneminen prosentteina saadaan, kun verrataan pudonneen osan tilavuutta pyramidin alkuperäiseen tilavuuteen.

$$\frac{V_{\text{pudonnut}}}{V_{\text{alkuperäinen}}} = \frac{314{,}205...\,\text{m}^3}{2200823{,}625\,\text{m}^3} = 0{,}01427...\ \% \approx 0{,}014\ \%$$

Vastaus a) Khafren nykyinen tilavuus on 2200000 m^3.
b) Tilavuus on pienentynyt 0,014 %.

229. Jos säde on neljäsosa korkeudesta, niin

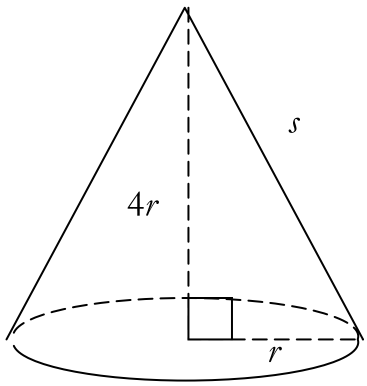
$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{4}h \quad |\cdot 4 \\ 4r &= h \\ h &= 4r \end{aligned}$$

Koska ympyräkartion tilavuus on 660 cm^3, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{A_p \cdot h}{3} &= 660 \\ \frac{\pi r^2 \cdot 4r}{3} &= 660 \quad |\cdot 3 \\ 4\pi r^3 &= 1980 \quad |:(4\pi) \\ r^3 &= 157{,}56... \\ r &= \sqrt[3]{157{,}56...} = 5{,}401... \end{aligned}$$

Korkeus $h = 4r = 4 \cdot 5{,}401... = 21{,}604...\ (\mathrm{cm})$

Vaipan alan laskemiseksi tarvitaan vielä sivujana *s*.



$$
\begin{aligned}
s^2 &= h^2 + r^2 \\
s &= \pm\sqrt{h^2 + r^2} \\
s &= \pm\sqrt{21{,}604...^2 + 5{,}401...^2} \\
s &= \pm\sqrt{495{,}928...} \\
s &= \pm 22{,}269....\ (\mathrm{cm})
\end{aligned}
$$

Koska $s > 0$, niin $s = 22{,}269…$ cm.

Vaipan ala on

$$
\begin{aligned}
A_v &= \pi r s \\
&= \pi \cdot 5{,}401...\,\mathrm{cm} \cdot 22{,}269...\,\mathrm{cm} \\
&= 377{,}87...\ \mathrm{cm}^2 \\
&= 3{,}7787...\ \mathrm{dm}^2 \\
&\approx 3{,}8\ \mathrm{dm}^2
\end{aligned}
$$

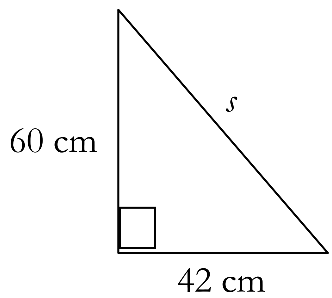
Vastaus: Vaipan ala on 3,8 dm^2.

230. a) Pohjana on ympyrä, jonka säde $r = 42$ cm. Kartion korkeus $h = 60$ cm, joten tilavuus on

$$\begin{aligned}V &= \frac{A_p \cdot h}{3}\\ &= \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}\\ &= \frac{\pi \cdot (42\ \text{cm})^2 \cdot 60\,\text{cm}}{3}\\ &= 110835{,}38...\,\text{cm}^3\\ &= 110{,}83538...\,\text{dm}^3\\ &\approx 110\,\text{dm}^3\end{aligned}$$

Vaipan alaa varten tarvitaan sivujanan *s* pituus. Se saadaan kartion sisään muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned}s^2 &= 60^2 + 42^2\\ s^2 &= 5364\\ s &= \pm\sqrt{5364}\\ s &= \pm 73{,}239...\end{aligned}$$



Koska $s > 0$, niin $s = 73{,}239\ldots$ cm.

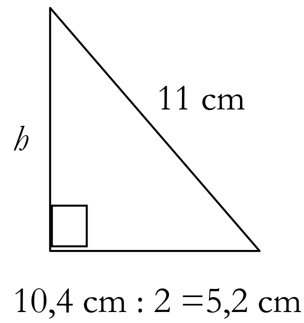
Vaipan ala on siis

$$\begin{aligned} A_v &= \pi r s \\ &= \pi \cdot 42\,\text{cm} \cdot 73{,}239...\,\text{cm} \\ &= 9663{,}702...\,\text{cm}^2 \\ &= 96{,}63702...\text{dm}^2 \\ &\approx 97\,\text{dm}^2 \end{aligned}$$

b) Pohjana on suorakulmio, jonka ala on

$$A_p = 10{,}4\,\text{cm} \cdot 8{,}4\,\text{cm} = 87{,}36\,\text{cm}^2$$

Tilavuuden laskemiseksi tarvitaan pyramidin korkeus h.



Pyramidin sisälle syntyvästä suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\begin{aligned} h^2 + 5{,}2^2 &= 11^2 \\ h^2 &= 11^2 - 5{,}2^2 \\ h^2 &= 93{,}96 \\ h &= \pm\sqrt{93{,}96} = \pm 9{,}693...\,(\text{cm}) \end{aligned}$$

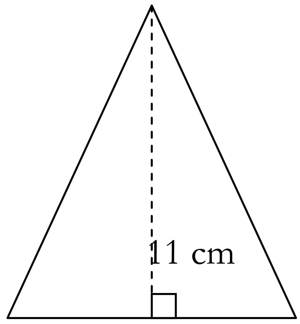
Koska $h > 0$, niin $h = 9{,}693\ldots$ cm.

Tilavuus on

$$V=\frac{A_p\cdot h}{3}=\frac{87{,}36\,\mathrm{cm}^2\cdot 9{,}693...\mathrm{cm}}{3}=282{,}26...\mathrm{cm}^3\approx 280\,\mathrm{cm}^3.$$

Vaippa koostuu pohjasta ja neljästä sivutahkosta, jotka ovat tasakylkisiä kolmioita. Pohjan ala on $A_p=87{,}36\,\mathrm{cm}^2$.

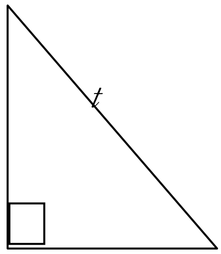
Sivutahkoista kaksi on tasakylkisiä kolmioita, joiden kanta on 2 · 4,2 cm = 8,4 cm ja korkeus 11 cm. Näiden ala on



$$A_{\text{kolmiot}}=2\cdot\frac{11\,\mathrm{cm}\cdot 8{,}4\,\mathrm{cm}}{2}=92{,}4\,\mathrm{cm}^2.$$

Toiset kaksi sivutahkoa ovat tasakylkisiä kolmioita, joiden kanta on 10,4 cm. Lasketaan näiden kolmioiden korkeus t.

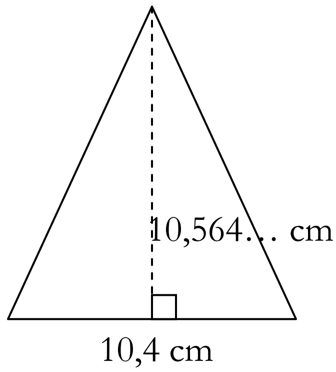
Pyramidin sisälle syntyvästä suorakulmaisesta kolmiosta saadaan



$$t^2=9{,}693...^2+4{,}2^2$$
$$t^2=111{,}6$$
$$t=\pm\sqrt{111{,}6}$$
$$t=\pm 10{,}564...$$

Koska $t>0$, niin $t = 10{,}564...$ cm.

Kahden viimeisen sivutahkokolmion ala on siis



$$A_{\text{kolmiot}} = 2 \cdot \frac{10{,}564\ldots\,\text{cm} \cdot 10{,}4\,\text{cm}}{2} = 109{,}866\ldots\,\text{cm}^2$$

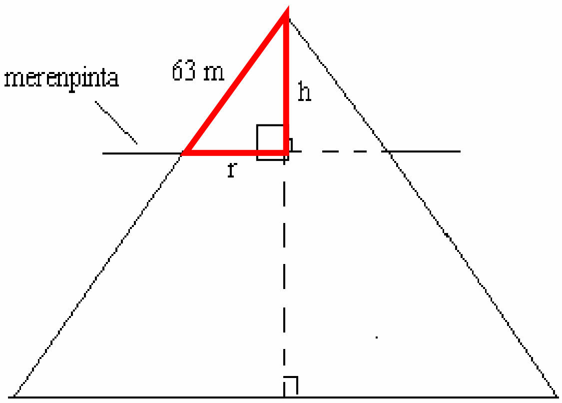
Koko vaipan ala on kaikkien kolmioiden ala yhteensä eli

$$A_v = 92{,}4\,\text{cm}^2 + 109{,}866\ldots\,\text{cm}^2 = 202{,}266\ldots\,\text{cm}^2 \approx 202\,\text{cm}^2.$$

Vastaus: a) 97 dm^2, 110 dm^3 b) 202 cm^2, 280 cm^3

231. Piirretään jäävuoren poikkileikkauskuva.

Merkitään meren yläpuolisen pikkukartion pohjaympyrän sädettä kirjaimella r ja korkeutta kirjaimella h.



a) Koska ympärysmitta on 345 m saadaan yhtälö

$$2\pi r = 345 \,|: 2\pi$$
$$r = \frac{345}{2\pi}$$
$$r = 54{,}908...$$

Ympyräpohjaisen kartion pohjan säde on siis $r = 54{,}908\ldots$ m ja sivujanan pituus $s = 63$ m. Vaipan ala on

$$\begin{aligned} A_v &= \pi r s \\ &= \pi \cdot 54{,}908... \text{ m} \cdot 63 \text{ m} \\ &= 10867{,}5 \text{ m}^2 \\ &\approx 109 \text{ a} \end{aligned}$$

b) Kartion sisään muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan Pythagoraan lauseen mukaan

$$
\begin{aligned}
r^2+h^2&=63^2\\
h^2&=63^2-r^2\\
h^2&=63^2-54{,}908...^2\\
h&=\pm\sqrt{954{,}061...}\\
h&=\pm 30{,}887...
\end{aligned}
$$

Koska $h>0$, niin $h=30{,}887\ldots$ m

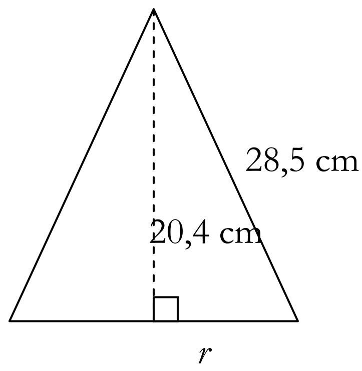
Jos jäävuoren todellinen korkeus on x, niin 30 % tästä siis näkyy meren pinnan yläpuolella eli

$$
\begin{aligned}
0{,}3x&=30{,}887\ldots\text{ m} \quad \vert : 0{,}3\\
x&=102{,}959\ldots\text{m}
\end{aligned}
$$

Vastaus: a) 109 a b) Jäävuoren todellinen korkeus on 103 m.

232. Ympyräkartion korkeus h = 20,4 cm. Tilavuutta varten tarvitaan pohjan säde r.

Koska sivujanan pituus on 28,5 cm, kartion sisään muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan



$$\begin{aligned} r^2 + 20{,}4^2 &= 28{,}5^2 \\ r^2 &= 396{,}09 \\ r &= \pm\sqrt{396{,}09} \\ r &= \pm 19{,}902... \end{aligned}$$

Koska $r > 0$, niin r = 19,902… cm.

Kartion tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= \frac{A_p \cdot h}{3} \\ &= \frac{\pi r^2 h}{3} \\ &= \frac{\pi \cdot (19{,}902...\,\mathrm{cm})^2 \cdot 20{,}4\,\mathrm{cm}}{3} \\ &= 8461{,}60...\,\mathrm{cm}^3 \\ &= 8{,}46160...\,\mathrm{dm}^3 \\ &\approx 8{,}461 \end{aligned}$$

Vastaus: 8,46 l

233. Merkitään pyramidin pohjan sivun pituutta kirjaimella a ja korkeutta h. Pohjan ala on

$$A_{\text{pohja}} = a^2.$$

Koska pyramidin tilavuus on 3500 m^3, saadaan yhtälö

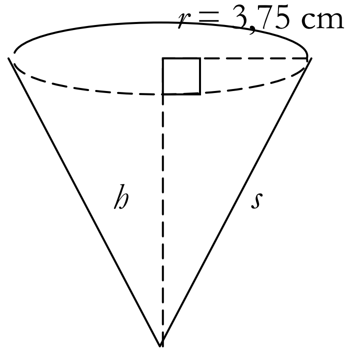
$$\begin{aligned}
\frac{A_{\text{pohja}} \cdot h}{3} &= V \\
\frac{a^2 \cdot 25}{3} &= 3500 \qquad |\cdot 3 \\
25a^2 &= 10500 \qquad |:25 \\
a^2 &= 420 \\
a &= \pm\sqrt{420} \\
a &= \pm 20{,}49\ldots \ (\text{m})
\end{aligned}$$

Koska $a > 0$, niin $a = 20{,}49\ldots$ m ≈ 20 m.

Vastaus: Sivun pituus on 20 m.

234. Tötteröön kartio, jonka suuaukon halkaisija on 7,5 cm, joten sen säde $r = \dfrac{7{,}5\,\text{cm}}{2} = 3{,}75\ \text{cm}$.

Merkitään kartion sivujanaa kirjaimella *s*. Koska tötterön vaipan ala on 145 cm^2, saadaan yhtälö



$$
\begin{aligned}
\pi r s &= A_v \\
\pi \cdot 3{,}75 \cdot s &= 145 \quad |:(3{,}75\pi) \\
s &= \frac{145}{3{,}75\pi} \\
s &= 12{,}307...\ (\text{cm})
\end{aligned}
$$

Tötterön korkeus saadaan Pythagoraan lauseella tötterön sisään muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$
\begin{aligned}
h^2 + r^2 &= s^2 \\
h^2 + 3{,}75^2 &= 12{,}307...^2 \\
h^2 &= 12{,}307...^2 - 3{,}75^2 \\
h^2 &= 137{,}423... \\
h &= \pm\sqrt{137{,}423...} \\
h &= \pm 11{,}722...\ (\text{cm})
\end{aligned}
$$

Koska $h > 0$, niin $h = 11{,}722\ldots\ \text{cm} \approx 12\ \text{cm}$.

Vastaus: Korkeus on 12 cm.

3.3 Pallo

235. Pallon säde $r = 2{,}4$ m, joten tilavuus on

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot (2{,}4\,\text{m})^3}{3} = 57{,}90...\text{m}^3 \approx 58\,\text{m}^3$$

Pallon pinta-ala on

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (2{,}4\,\text{m})^2 = 72{,}38...\text{m}^2 \approx 72\,\text{m}^2$$

Vastaus: tilavuus 58 m^3, pinta-ala 72 m^2

236. Puolipallon säde $r = \dfrac{6{,}5\ \text{cm}}{2} = 3{,}25\,\text{cm}$.

Kauhan tilavuus on puolet vastaavan pallon tilavuudesta eli

$$V_{\text{kauha}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi \cdot (3{,}25\ \text{cm})^3}{3} = 0{,}07189...\text{dm}^3 = 0{,}07189...\ \text{l}$$

0,072 l = 0,72 dl

Vastaus: 0,72 dl

237. a) Rantapallon säde $r = \dfrac{5{,}2\,\mathrm{m}}{2} = 2{,}6\,\mathrm{m}$. Tilavuus on

$$V = \frac{4\pi \cdot (2{,}6\,\mathrm{dm})^3}{3} = 73{,}62...\mathrm{dm}^3 \approx 74\ \mathrm{l}$$

b) Pallon pinta-ala on

$$A = 4\pi \cdot (2{,}6\,\mathrm{dm})^2 = 84{,}94...\mathrm{dm}^2 \approx 85\ \mathrm{dm}^2$$

Muovia kuluu siis 85 dm^2.

Vastaus: a) 74 l b) 85 dm^2

238. Kuulan säde $r = \dfrac{12{,}16\ \mathrm{cm}}{2} = 6{,}08\,\mathrm{cm} = 0{,}0608\,\mathrm{m}$

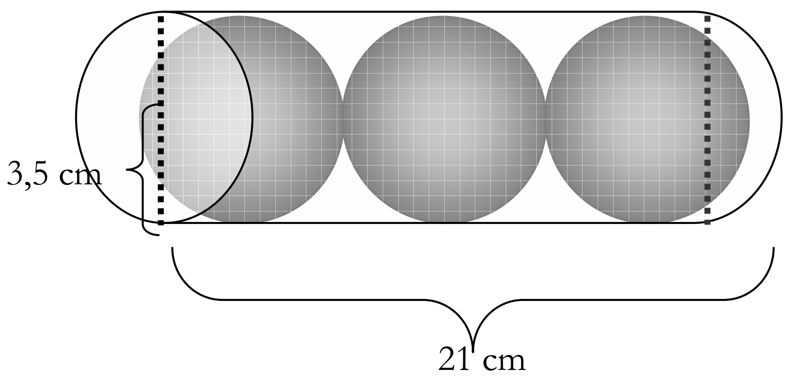
Tilavuus on

$$V = \frac{4\pi \cdot (0{,}0608\,\mathrm{m})^3}{3} = 0{,}0009414...\mathrm{m}^3$$

$$\begin{aligned}\text{massa} &= \text{tiheys} \cdot \text{tilavuus}\\ &= 7708\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0{,}0009414...\text{m}^3\\ &= 7{,}2567...\text{kg}\\ &\approx 7257\,\text{g}\end{aligned}$$

Vastaus: 7257 g

239. Hahmotellaan tilannekuva pakkauksesta.



Pallolla ja lieriöllä on sama säde $r = 3{,}5$ cm.

Pallojen tilavuus yhteensä on siis

$$V_{\text{pallot}} = 3 \cdot \frac{4\pi \cdot (3{,}5\text{ cm})^3}{3} = 538{,}783...\text{cm}^3$$

Lieriön korkeus on 21 cm, joten tilavuus on

$$V_{\text{lieriö}} = \pi \cdot (3{,}5\,\text{cm})^2 \cdot 21\,\text{cm} = 808{,}174...\text{cm}^3$$

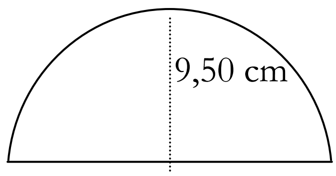
Tyhjän tilan osuus on siis

$$\begin{aligned}\frac{V_{\text{lieriö}} - V_{\text{pallot}}}{V_{\text{lieriö}}} &= \frac{808{,}174...\text{cm}^3 - 538{,}783...\text{cm}^3}{808{,}174...\text{cm}^3} \\ &= 0{,}33333... \\ &\approx 33\ \%\end{aligned}$$

Vastaus: 33 %

240. Juustokupu on puolipallo, jonka säde $r = \dfrac{19{,}0\ \text{cm}}{2} = 9{,}50\ \text{cm}$

Puolipallon ala on



$$\begin{aligned}A &= \frac{4\pi \cdot (9{,}50\,\text{cm})^2}{2} \\ &= 567{,}05...\text{cm}^2 \\ &\approx 567\ \text{cm}^2\end{aligned}$$

Muovia tarvitaan siis 567 cm^2.

Vastaus: 567 cm^2

241. Saippuakuplan säde $r = 3{,}0\,\text{cm}$.
Kokonaisen kuplan eli pallon tilavuus on

$$V = \frac{4\pi \cdot (3{,}0\,\text{cm})^3}{3} = 113{,}09...\text{cm}^3$$

Kupla putoaa lattialle, jolloin muodostuu puolipallo.
Merkitään puolipallon sädettä x. Kokonaisella kuplalla ja muodostuvalla puolipallolla on sama tilavuus, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi x^3}{3} &= 113{,}09... \\
\frac{4\pi x^3}{6} &= 113{,}09... \quad |\cdot 6 \\
4\pi x^3 &= 678{,}58... \quad |: 4\pi \\
x^3 &= 54 \\
x &= 3{,}779... \\
x &\approx 3{,}8
\end{aligned}$$

Puolipallon säde $x = 3{,}8$ cm.

Vastaus: 3,8 cm

242. Merkitään kuution sivun pituutta kirjaimella x. Kuution tilavuus on 160 cm^3, joten saadaan

$$\begin{aligned} x^3 &= 160 \\ x &= \sqrt[3]{160} \\ x &= 5{,}428... \end{aligned}$$

Kuution sivun pituus on siis $x = 5{,}428\ldots$ cm, joten yhden tahkon pinta-ala on x^2. Koska kuutiossa on kuusi tahkoa, niin kokonaispinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= 6 \cdot x^2 \\ &= 6 \cdot (5{,}428...\,\text{cm})^2 \\ &= 176{,}833...\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Merkitään pallon sädettä kirjaimella r. Pallon tilavuus on myös 160 cm^3, joten saadaan

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi r^3 &= 160 \quad |\cdot 3 \\ 4\pi r^3 &= 480 \quad |: 4\pi \\ r^3 &= \frac{480}{4\pi} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{480}{4\pi}} = 3{,}367... \end{aligned}$$

Pallon säde $r = 3{,}367\ldots$ cm, joten pallon pinta-ala on

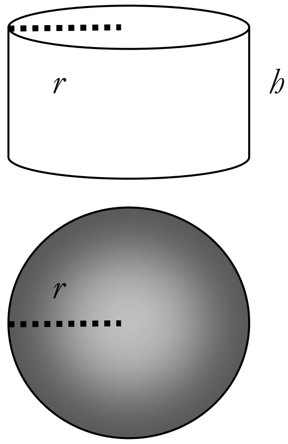
$$\begin{aligned} A &= 4\pi r^2 \\ &= 4\cdot\pi\cdot(3{,}367\ldots\,\mathrm{cm})^2 \\ &= 142{,}527\ldots\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

Verrataan pallon pinta-alaa kuution pinta-alaan

$$\frac{A_{\text{pallo}}}{A_{\text{kuutio}}} = \frac{142{,}527\ldots\,\mathrm{cm}^2}{176{,}833\ldots\,\mathrm{cm}^2} = 0{,}8059\ldots = 80{,}59\ldots\,\% \approx 81\,\%$$

Vastaus: 81 %

243. Merkitään lieriön pohjan sädettä r ja korkeutta h. Koska lieriöllä ja pallolla on sama halkaisija, pallon säde on myös r.



$$V_{\text{lieriö}} = \pi r^2 h$$

$$V_{\text{pallo}} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Tilavuudet ovat yhtäsuuret eli

$$V_{\text{lieriö}} = V_{\text{pallo}}$$

$$\pi r^2 h = \frac{4\pi r^3}{3} \qquad \Big| : \pi r^2$$

$$h = \frac{4\pi r^3}{3\pi r^2} = \frac{4r}{3}$$

Muovin menekki riippuu kappaleiden pinta-aloista.

$$A_{\text{pallo}} = 4\pi r^2$$

$$\begin{aligned} A_{\text{lieriö}} &= A_{\text{pohjat}} + A_{\text{vaippa}} \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ &= 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{4r}{3} \\ &= 2\pi r^2 + \frac{8\pi r^2}{3} \end{aligned}$$

Verrataan lieriön pinta-alaa pallon pinta-alaan

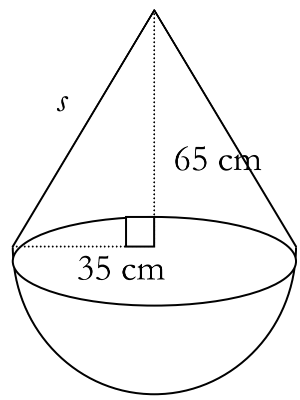
$$
\begin{aligned}
\frac{A_{\text{lieriö}}}{A_{\text{pallo}}} &= \frac{2\pi r^2 + \frac{8\pi r^2}{3}}{4\pi r^2} \\
&= \frac{\left(2\pi + \frac{8\pi}{3}\right) r^2}{4\pi r^2} \\
&= \frac{\left(2\pi + \frac{8\pi}{3}\right)}{4\pi} \\
&= 1{,}1666...
\end{aligned}
$$

Lieriön ala on 1,1666…-kertainen, joten muovia tarvitaan siihen 16,66… % ≈ 17 % enemmän.

Vastaus: 17 %

244. Muovin menekki riippuu kappaleen pinta-alasta. Hahmotellaan kuva poijusta. Kartion korkeus on 65 cm ja puolipallon halkaisija 70 cm, joten säde $r = \dfrac{70\,\text{cm}}{2} = 35\,\text{cm}$.

Kartion pinta-alaa varten tarvitaan sivujanan pituus. Merkitään kartion sivujanaa *s*.



Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\begin{aligned} s^2 &= 65^2 + 35^2 \\ s^2 &= 5450 \\ s &= \pm\sqrt{5450} \\ s &= \pm 73{,}824... \end{aligned}$$

Koska $s > 0$, niin $s = 73{,}824\ldots$ cm.

Kartion vaipan ala on

$$A_{\text{vaippa}} = \pi \cdot 35\,\text{cm} \cdot 73{,}824...\text{cm} = 8117{,}38...\text{cm}^2$$

Puolipallon ala on

$$A_{\text{puolipallo}} = \frac{4\pi \cdot (35\,\text{cm})^2}{2} = 7696{,}90...\text{cm}^2$$

Kartion ja puolipallon yhteispinta-ala on

$$\begin{aligned} 8117{,}38...\text{cm}^2 + 7696{,}90...\text{cm}^2 &= 15814{,}287...\,\text{cm}^2 \\ &= 1{,}5814287...\,\text{m}^2 \\ &\approx 1{,}6\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 1,6 m^2

245. a) Olkoon pallon alkuperäinen säde *r*, jolloin kasvanut säde on 1,2*r*. Pallon pinta-alat alussa ja lopussa ovat

$$A_{\text{alussa}} = 4\pi r^2$$

$$A_{\text{lopussa}} = 4\pi(1{,}2r)^2 = 5{,}76\pi r^2$$

Verrataan pinta-aloja keskenään

$$\frac{A_{\text{lopussa}}}{A_{\text{alussaa}}} = \frac{5{,}76\pi r^2}{4\pi r^2} = 1{,}44$$

Pallon ala 1,44-kertaistuu eli se kasvaa 44%.

b) Olkoon alkuperäinen säde r, jolloin kasvanut säde on $1{,}5r$.
Pallon pinta-alat alussa ja lopussa ovat

$$A_{\text{alussa}} = 4\pi r^2$$

$$A_{\text{lopussa}} = 4\pi(1{,}5r)^2 = 9\pi r^2$$

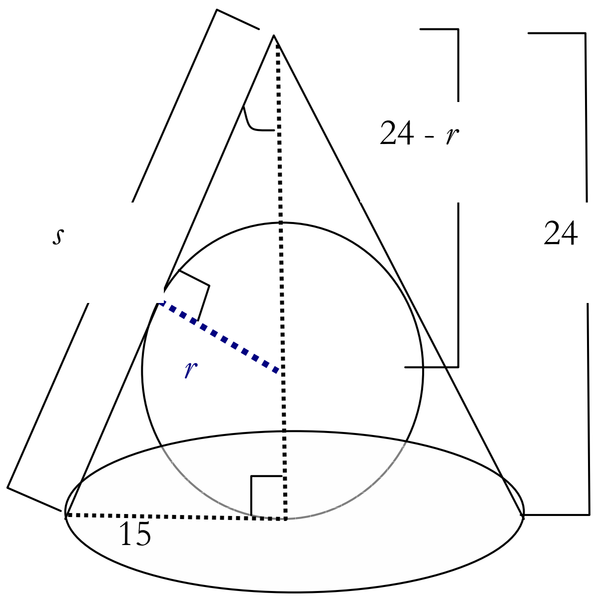
Verrataan pinta-aloja keskenään

$$\frac{A_{\text{lopussa}}}{A_{\text{alussa}}} = \frac{9\pi r^2}{4\pi r^2} = 2{,}25$$

Pallon ala 2,25-kertaistuu eli se kasvaa 125%.

Vastaus: a) 44 % b) 125 %

246. Hahmotellaan tilannekuva. Kartion pohjan säde on 15 cm ja korkeus 24 cm. Merkitään kartion sisällä olevan suurimman mahdollisen pallon sädettä *r* ja kartion sivujanaa *s*.



Kuvassa on kaksi kolmiota, jotka ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla (huippukulmat samat sekä molemmissa suorakulma).

Vastinsivujen suhteista saadaan verranto

$$\frac{r}{15} = \frac{24 - r}{s}$$

Sivujana *s* saadaan Pythagoraan lauseella sisälle muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta

$$s^2 = 15^2 + 24^2$$
$$s^2 = 801$$
$$s = \pm\sqrt{801}$$
$$s = \pm 28{,}301...$$

Koska $s > 0$, niin $s = 28{,}301...$ cm.

Sijoitetaan $s = 28{,}301...$ verrantoyhtälöön

$$\begin{aligned}
\frac{r}{15} &= \frac{24-r}{28{,}301...} \\
28{,}301...r &= 360 - 15r \\
43{,}301...r &= 360 \quad \big| : 43{,}301... \\
r &= \frac{360}{43{,}301...} = 8{,}3137...
\end{aligned}$$

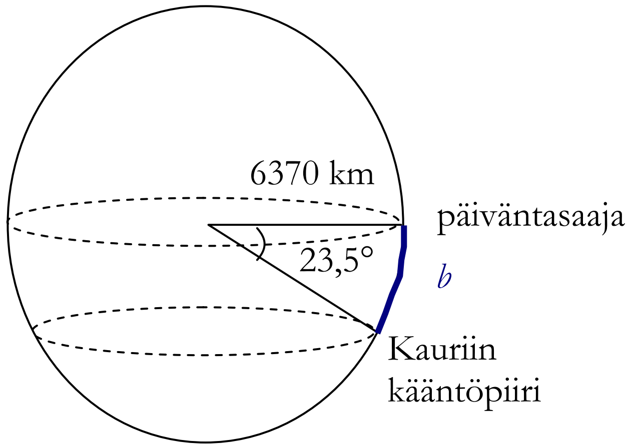
Pallon tilavuus on siis

$$\begin{aligned}
V &= \frac{4\pi \cdot (8{,}3137...\text{cm})^3}{3} \\
&= 2406{,}98...\text{cm}^3 \\
&= 2{,}40698...\ \text{dm}^3 \\
&\approx 2{,}4\ \text{dm}^3
\end{aligned}$$

Vastaus: 2,4 dm^3

247. Hahmotellaan tilannekuva.

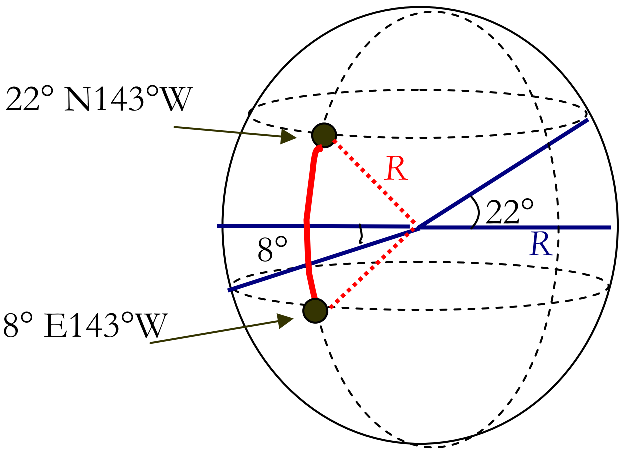
Kysytty etäisyys on muodostuvan sektorin kaaren pituus *b*.



$$b = \frac{23{,}5^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6370\,\text{km}$$
$$= 2612{,}67...\text{km}$$
$$\approx 2610\,\text{km}$$

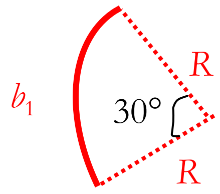
Vastaus: 2610 km

248. Hahmotellaan tilannekuva.
Maapallon säde $R = 6370$ km.



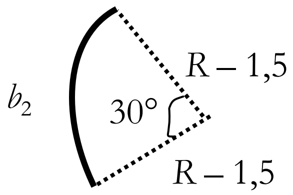
Tarkastellaan kuvaan muodostunutta punaista sektoria. Sen kaaren pituus b_1 on lentotukialuksen kulkema matka.
Sektorin keskuskulma on 22° + 8°= 30°.

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{30°}{360°} \cdot 2\pi R \\ &= \frac{1}{12} \cdot 2\pi \cdot 6370\,\text{km} \\ &= 3335{,}324...\,\text{km} \end{aligned}$$



Sukellusvene seuraa laivaa 1,5 km syvyydessä. Tarkastellaan sektoria, jonka kaaren pituus b_2 on sukellusveneen kulkema matka.

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{30°}{360°} \cdot 2\pi(R - 1{,}5\,\text{km}) \\ &= \frac{1}{12} \cdot 2\pi(6370\,\text{km} - 1{,}5\,\text{km}) \\ &= \frac{1}{12} \cdot 2\pi \cdot 6368{,}5\,\text{km} \\ &= 3334{,}538...\,\text{km} \end{aligned}$$

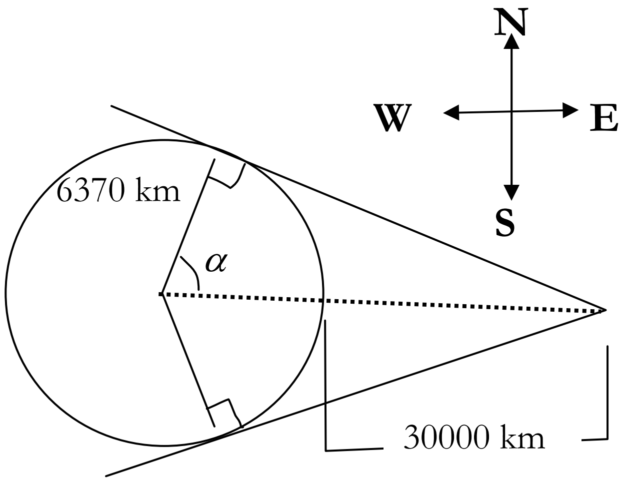


Matkojen ero on

$$\begin{aligned} b_1 - b_2 &= 3335{,}324...\,\text{km} - 3334{,}538...\,\text{km} \\ &= 0{,}785...\,\text{km} \\ &\approx 0{,}8\,\text{km} \end{aligned}$$

Vastaus: 0,8 km

249. Hahmotellaan tilannekuva.
Satelliitti on 30000 km korkeudessa suoraan päiväntasaajan yläpuolella. Maapallon säde R = 6370 km.



Näkyvyysalue muodostuu tangenttien väliin. Pohjoisen leveysasteen määrää kulma α.

Lasketaan kulma α muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta.

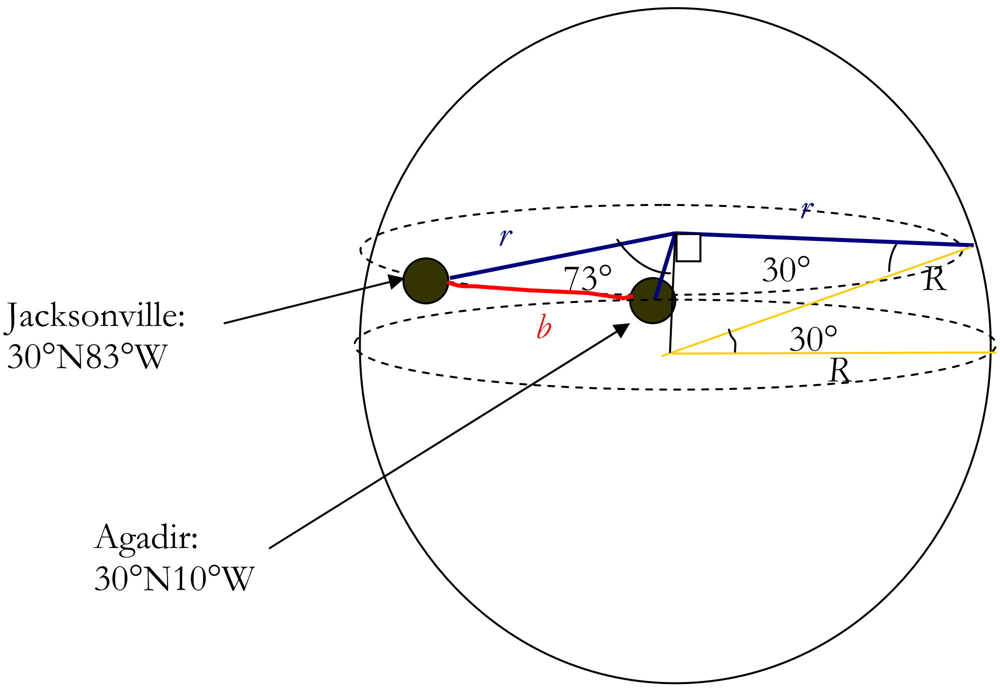
$$\cos\alpha = \frac{6370\ \text{km}}{30000\,\text{km} + 6370\,\text{km}}$$

$$\cos\alpha = \frac{6370\,\text{km}}{36370\,\text{km}}$$

$$\alpha = 80{,}012...^\circ$$

Vastaus: Kysytty leveyspiiri on 80° pohjoista leveyttä.

250. Laiva lähtee Agadirista, joka sijaitsee 30° pohjoista leveyttä ja 10° läntistä pituutta. Laiva kulkee pitkin samaa 30. leveyspiiriä, kunnes saapuu Jacksonvilleen, joka sijaitsee 83° läntistä pituutta. Molemmat pituuspiirit ovat läntistä pituutta, joten pituuspiirien ero on siis $83° - 10° = 73°$. Tämä kulma on maapallon sisään muodostuvan sektorin keskuskulma. Sektorin kaaren pituus on laivan kulkema matka *b*.



Lasketaan ensin pikkuympyrän eli 30° leveyspiirin säde *r*. Maapallon sisään muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\cos 30° = \frac{r}{R}$$

$$\cos 30° = \frac{r}{6370} \quad \Big| \cdot 6370$$

$$r = 6370 \cdot \cos 30°$$

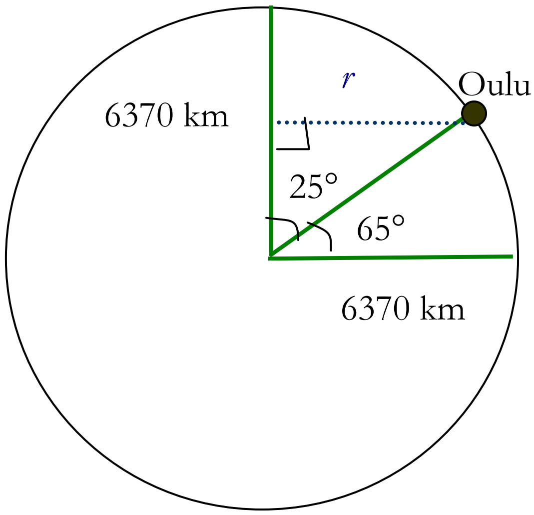
$$r = 5516{,}58... \quad \text{(km)}$$

Laivan kulkema matka on siis sen sektorin kaaren pituus, jonka keskuskulma on 73° ja säde r = 5516,58… km. Sektorin kaaren pituus b on

$$b = \frac{73°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 5516{,}58\ldots \text{ km}$$
$$= 7028{,}623\ldots \text{km}$$
$$\approx 7029 \text{ km}$$

Vastaus: 7029 km

251. Viljami liikkuu vuorokaudessa matkan, jonka vastaa r-säteisen ympyrän kehää. Hahmotellaan kuva maapallosta. Maapallon säde on 6370 km. Oulu sijaitsee 65. leveysasteella.



Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\sin 25^\circ = \frac{r}{6370} \bigg| \cdot 6370$$
$$r = 6370 \cdot \sin 25^\circ = 2692{,}07\ldots$$

Vuorokaudessa (24 h) kuljettu matka on siis

$$2 \cdot \pi \cdot 2692{,}07\ldots \text{km} = 16914{,}82\ldots \text{km}.$$

Nopeus on

$$v = \frac{16914{,}82...\text{km}}{24\,\text{h}} = 704{,}78...\frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 705\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Vastaus: $705\frac{\text{km}}{\text{h}}$

252. Kurpitsan halkaisija on 43,0 cm, joten säde $r = \frac{43{,}0\,\text{cm}}{2} = 21{,}5\,\text{cm}$

a) Kuoren pinta-ala on

$$A_{\text{pallo}} = 4\pi \cdot (21{,}5\,\text{cm})^2 = 5808{,}80...\text{cm}^2 \approx 58{,}1\,\text{dm}^2$$

b) Kurpitsan tilavuus on

$$V = \frac{4\pi \cdot (21{,}5\ \text{cm})^3}{3} = 41{,}629...\text{dm}^3 \approx 41{,}6\,\text{dm}^3$$

Vastaus: a) 58,1 dm^2 b) 41,6 dm^3

253. Pallon halkaisija on 5,0 cm, joten säde $r = \frac{5{,}0\,\text{cm}}{2} = 2{,}5\,\text{cm}$.

Annos sisältää kaksi palloa, joten annoksen tilavuus on

$$V_{\text{pallot}} = 2 \cdot \frac{4\pi \cdot (2{,}5\ \text{cm})^3}{3} = 130{,}89...\text{cm}^3 = 0{,}13089...\text{dm}^3 = 0{,}13089...\text{l}$$

Annoksen hinta on 2,00 €, joten litrahinta on

$$\frac{2{,}00\,€}{0{,}13089...\text{l}} = 15{,}27...\frac{€}{\text{l}} \approx 15\frac{€}{\text{l}}$$

Vastaus: 15 €/l

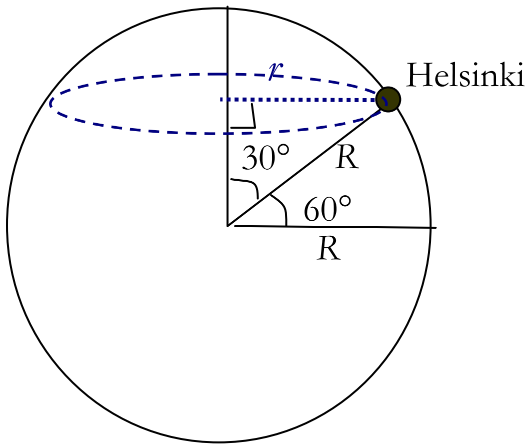
254. Merkitään pallon sädettä *r*. Pallon tilavuus on 125 cm^3, joten saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi r^3}{3} &= 125 \quad \big| \cdot 3 \\
4\pi r^3 &= 375 \quad \big| : 4\pi \\
r^3 &= \frac{375}{4\pi} \\
r &= \sqrt[3]{\frac{375}{4\pi}} = 3{,}1017... \approx 3{,}10
\end{aligned}$$

Pallon säde on siis $r \approx 3{,}10$ cm.

Vastaus: 3,10 cm.

255. Hahmotellaan kuva. Helsinki sijaitsee 60. leveyspiirillä. Kun kuljetaan suoraan itään, kuljetaan 60. leveyspiirillä.



Merkitään tämän leveyspiirin sädettä kirjaimella r. Lasketaan tämän leveyspiirin pituus eli r – säteisen ympyrän kehän pituus. Maapallon säde R = 6370 km.

Maapallon sisään muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\sin 30^\circ = \frac{r}{6370}$$

$$r = 6370 \cdot \sin 30^\circ$$

$$r = 3185$$

Kuljettu matka on näin ollen

$$2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 3185\,\text{km} = 20011{,}94...\text{km} \approx 20000\,\text{km}\,.$$

Vastaus: 20000 km

256. Ilmapallon säde r = 1,6 m = 16 dm. Pallon tilavuus on

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi \cdot (16\,\mathrm{dm})^3}{3} = 17157{,}28...\mathrm{dm}^3.$$

Ilman tiheys on $1{,}29\,\dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{dm}^3}$.

$$\begin{aligned}
\text{massa} &= \text{tiheys} \cdot \text{tilavuus} \\
&= 1{,}29\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{dm}^3} \cdot 17157{,}28...\mathrm{dm}^3 \\
&= 22132{,}8...\mathrm{g} \\
&\approx 22{,}1\,\mathrm{kg}
\end{aligned}$$

Vastaus: 22,1 kg

Kertausosa

1. Kulma α on 37° suurempi kuin kulma β eli $\alpha = \beta + 37°$.
Koska kulmat α ja β ovat vieruskulmia, niiden summa on 180° eli

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 180° \\ \beta + 37° + \beta &= 180° \\ 2\beta &= 143° \quad |:2 \\ \beta &= 71{,}5° \end{aligned}$$

Siis $\alpha = \beta + 37° = 71{,}5° + 37° = 108{,}5°$

Vastaus: $\alpha = 108{,}5°, \beta = 71{,}5°$

2. Kuvaan merkityt kulmat ovat samankohtaisia kulmia. Koska suorat *s* ja *t* ovat yhdensuuntaisia, samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuria eli

$$\begin{aligned} 3x + 24° &= 104° - 5x \\ 3x + 5x &= 104° - 24° \\ 8x &= 128° \quad |:8 \\ x &= 16° \end{aligned}$$

3. Merkitään kolmion lyhintä sivua kirjaimella x.

Pisin sivu on siis $3x$ ja toiseksi pisin sivu $x + 15$ cm.

Kolmion piiri on 120 cm eli

$$\begin{aligned} x + 3x + x + 15 &= 120 \\ 5x &= 105 \quad |:5 \\ x &= 21 \end{aligned}$$

Pisin sivu on siis $3x = 3 \cdot 21\,\text{cm} = 63\,\text{cm}$.
Toiseksi pisin $x + 15\,\text{cm} = 21\,\text{cm} + 15\,\text{cm} = 36\,\text{cm}$.
Lyhin sivu $x = 21$ cm.

Vastaus: 63 cm, 36 cm , 21 cm

4. Suunnikkaan kahden kulman suhde on 2 : 5. Merkitään kulmien suuruuksia $2x$ ja $5x$.

Suunnikkaan kulmien summa on 360° ja vastakkaiset kulmat ovat yhtäsuuret, joten saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 2x + 2x + 5x + 5x &= 360° \\ 14x &= 360° \quad |:14 \\ x &= \frac{360°}{14} = 25{,}714...° \end{aligned}$$

Kulmien suuruudet siis ovat

$$2x = 2 \cdot 25{,}714...° = 51{,}4285...° \approx 51°$$
$$5x = 5 \cdot 25{,}714...° = 128{,}571...° \approx 129°$$

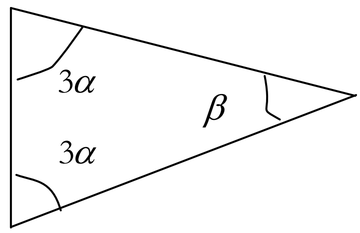
Vastaus: Kulmat ovat 51° ja 129° (2 kpl kumpaakin).

5. Suorakulmion kulmat ovat kaikki suoria, joten

$$3\alpha + \alpha = 90°$$
$$4\alpha = 90° \quad |:4$$
$$\alpha = 22{,}5°$$

Suorakulmion lävistäjät ovat yhtäpitkät. Lisäksi lävistäjät puolittavat toisensa. Tarkastellaan suorakulmiosta tiettyä kohtaa, joka on tasakylkinen kolmio.

Kolmion kolmas kulma on β ristikulmana.

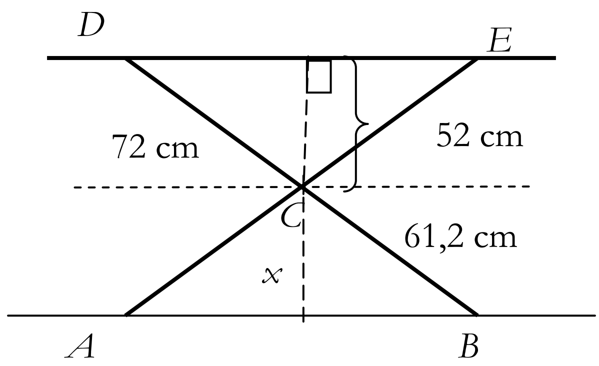


Kolmion kulmien summa on 180°, joten saadaan yhtälö

$$3\alpha + 3\alpha + \beta = 180°$$
$$6\alpha + \beta = 180°$$
$$6 \cdot 22{,}5° + \beta = 180°$$
$$135° + \beta = 180°$$
$$\beta = 45°$$

Vastaus: $\alpha = 22{,}5°$, $\beta = 45°$

6. Janat AB ja DE ovat yhdensuuntaisia.



Kolmiot ABC ja ECD ovat yhdenmuotoiset (kk-lause), koska

- kulmat C ristikulmina yhtäsuuret,
- kulmat E ja A samankohtaisina kulmina yhtäsuuret.

Merkitään pisteen C korkeutta kirjaimella x.
Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan vastinsivujen suhteena verranto

$$\frac{52}{x} = \frac{72}{61{,}2}$$
$$72x = 3182{,}4 \quad |:72$$
$$x = 44{,}2$$

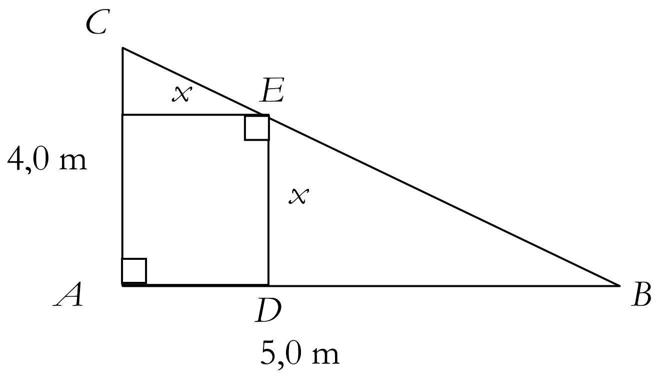
Pöydän korkeus on siis

52 cm + 44,2 cm = 96,2 cm ≈ 96 cm.

Vastaus: 96 cm

7. Hahmotellaan tilannekuva. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 5,0 m ja 4,0 m.

Merkitään sisään piirretyn neliön sivua kirjaimella x.



Kolmiot ABC ja DBE ovat yhdenmuotoiset (kk-lause), koska

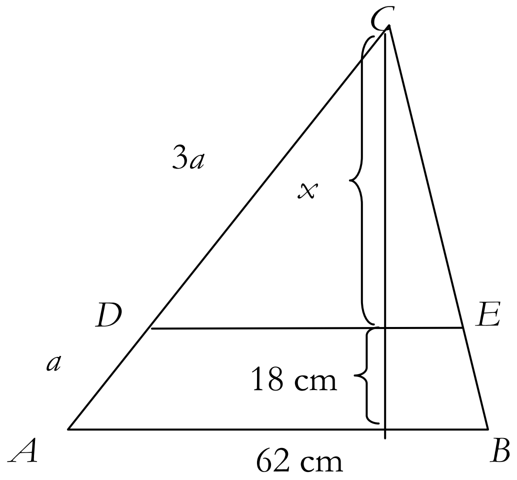
- molemmissa 90° kulma,
- kulma B yhteinen.

Vastinsivut ovat siis verrannolliset, joten saadaan

$$\begin{aligned}\frac{5}{5-x} &= \frac{4}{x}\\ 5x &= 4\cdot(5-x)\\ 5x &= 20-4x\\ 9x &= 20 \quad |:9\\ x &= 2{,}222... \approx 2{,}2 \quad (\mathrm{m})\end{aligned}$$

Vastaus: 2,2 m

8. Koska $AD : DC = 1 : 3$, niin merkitään sivun AD pituutta kirjaimella a. Tällöin sivun DC pituus on $3a$. Janojen AB ja DE etäisyys on 18 cm. Merkitään pisteen C etäisyyttä (kolmion DEC korkeus) janasta DE kirjaimella x.



Kolmiot ABC ja DEC ovat yhdenmuotoiset (kk-lause), koska

- kulmat A ja D ovat samankohtaisina kulmina yhtäsuuret,
- molemmissa kolmioissa on kulma C.

Vastinsivut ovat verrannolliset eli

$$\frac{x}{x+18} = \frac{3a}{3a+a}$$

$$\frac{x}{x+18} = \frac{3\cancel{a}}{4\cancel{a}}$$

$$\frac{x}{x+18} = \frac{3}{4}$$

$$4x = 3(x+18)$$

$$4x = 3x + 54$$

$$x = 54$$

Kolmion *ABC* korkeus on *x* + 18 cm = 54 cm + 18 cm = 72 cm.

Kolmion ala on

$$\begin{aligned} A &= \frac{62\ \text{cm} \cdot 72\ \text{cm}}{2} \\ &= 2232\ \text{cm}^2 \\ &= 22{,}32\ \text{dm}^2 \\ &\approx 22\ \text{dm}^2 \quad \left(0{,}22\,\text{m}^2\right) \end{aligned}$$

Vastaus: 0,22 m^2

9. Kootaan annetut tiedot taulukkoon. Merkitään vaimon pituutta luonnollisessa koossa kirjaimella *x*.

Pituus kuvassa (cm)	**Pituus luonnossa (cm)**
8,8	187
7,8	*x*

Pituudet kuvassa ja luonnossa ovat suoraan verrannolliset (vastinsivujen suhteet ovat samat) eli

$$\begin{aligned} \frac{8{,}8}{7{,}8} &= \frac{187}{x} \\ 8{,}8x &= 1458{,}6 \quad \big|: 8{,}8 \\ x &= 165{,}75 \approx 166\ \text{(cm)} \end{aligned}$$

Vastaus: Vaimon todellinen pituus on 166 cm.

10. Urheilukentän ala kartalla on 20 cm^2. Olkoon ala luonnossa (todellinen ala) A.

Kartan mittakaava $k = \frac{1}{2000}$. Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö eli

$$\frac{20}{A} = \left(\frac{1}{2000}\right)^2$$
$$\frac{20}{A} = \frac{1}{4000000}$$
$$A = 80000000$$

Ala on A =80 000 000 cm^2 = 0,8 ha.

Vastaus: 0,8 ha

11. Kahden yhdenmuotoisen kuvion mittakaava $k = \frac{2}{5}$. Merkitään pienemmän kuvion alaa A_1 ja suuremman ala A_2. Koska pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, niin saadaan

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$$
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{4}{25}$$

Pienempi kuvio on suuremmasta kuviosta

$$\frac{4}{25}=\frac{16}{100}=16\%$$

Vastaus: 16 %

12. Olkoon esimerkiksi kuvan leveys ennen suurennusta s, jolloin leveys suurennuksen jälkeen on $1{,}25s$. Merkitään kuvan pinta-alaa alussa A_1 ja lopussa A_2. Kootaan tiedot taulukkoon.

Leveys	**Ala**
s	A_1
$1{,}25s$	A_2

Valokuvat ovat yhdenmuotoisia, joten mittakaavan neliö on pinta-alojen suhde eli

$$\left(\frac{s}{1{,}25s}\right)^2=\frac{A_1}{A_2}$$

$$\left(\frac{1}{1{,}25}\right)^2=\frac{A_1}{A_2}$$

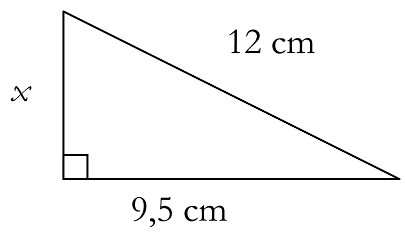
$$\frac{1}{1{,}5625}=\frac{A_1}{A_2}$$

$$A_2=1{,}5625A_1$$

Suurennuksen jälkeen kuva on 1,5625-kertainen vanhaan nähden eli sen koko kasvaa 56,25 % ≈ 56 %.

Vastaus: 56 %

13. Kuvan suorakulmaisesta kolmiosta saadaan Pythagoraan lauseella



$$
\begin{aligned}
x^2 + 9{,}5^2 &= 12^2 \\
x^2 &= 53{,}75 \\
x &= \pm\sqrt{53{,}75} = \pm 7{,}331...
\end{aligned}
$$

Koska $x > 0$, niin x = 7,331… cm ≈ 7,3 cm.

Vastaus: 7,3 cm

14. Merkitään suorakulmaisen kolmion toista kateettia kirjaimella x. Toinen kateetti on tällöin $x - 3{,}0$ cm. Hypotenuusan pituus on 22 cm, joten Pythagoraan lauseella saadaan

$$\begin{aligned} x^2 + (x-3{,}0)^2 &= 22^2 \\ x^2 + (x-3{,}0)(x-3{,}0) &= 484 \\ x^2 + x^2 - 3{,}0x - 3{,}0x + 9{,}0 &= 484 \\ 2x^2 - 6{,}0x - 475 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{6{,}0 \pm \sqrt{(-6{,}0)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-475)}}{4} \\ &= \frac{6{,}0 \pm \sqrt{3836}}{4} \end{aligned}$$

$$x = \frac{6{,}0 + \sqrt{3836}}{4} = 16{,}983... \quad \text{tai} \quad x = \frac{6{,}0 - \sqrt{3836}}{4} = -13{,}983...$$

Koska $x > 0$, niin $x = 16{,}983\ldots$ cm.

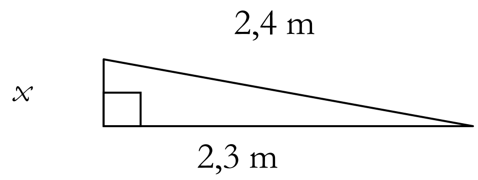
Kateetit ovat siis

$x = 16{,}983\ldots \text{ cm} \approx 17 \text{ cm}$ ja

$x - 3{,}0 \text{ cm} = 16{,}983\ldots \text{ cm} - 3{,}0 \text{ cm} = 13{,}983\ldots \text{ cm} \approx 14 \text{ cm}$

Vastaus: 17 cm, 14 cm

15. Hahmotellaan kuva. Sisäänkäynnissä on portaikon päälle suunniteltu luiska, jonka pituus on 2,4 m. Luiskan pää on 2,3 m päässä ovesta. Merkitään portaikon korkeutta kirjaimella x.



Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan Pythagoraan lauseella

$$x^2 + 2{,}3^2 = 2{,}4^2$$
$$x^2 = 0{,}47$$
$$x = \pm\sqrt{0{,}47} = \pm 0{,}685...$$

Koska $x > 0$, niin $x = 0{,}685\ldots$ m $\approx 0{,}69$ m

Vastaus: 0,69 m

16. a) Kolmio on suorakulmainen, joten

$$\cos\alpha = \frac{17\,\text{cm}}{25\ \text{cm}}$$
$$\alpha = 47{,}156...^\circ \approx 47^\circ$$

b) Kolmio on suorakulmainen, joten

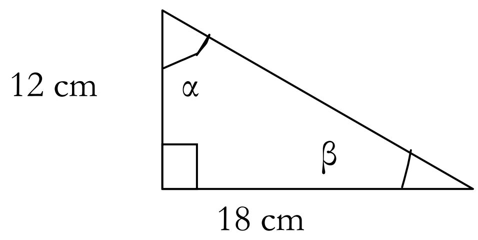
$$\sin 35° = \frac{5{,}4\,\text{m}}{x} \quad \Big| \cdot x$$

$$x \cdot \sin 35° = 5{,}4\,\text{m} \quad \Big| : \sin 35°$$

$$x = \frac{5{,}4\,\text{m}}{\sin 35°} = 9{,}4146...\,\text{m} \approx 9{,}4\,\text{m}$$

Vastaus: a) 47° b) 9,4 m

17. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 12 cm ja 18 cm. Merkitään kolmion kulmia α, β ja 90°. Hahmotellaan kuva kolmiosta.



Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\tan \alpha = \frac{18\,\text{cm}}{12\ \text{cm}}$$

$$\alpha = 56{,}3099...° \approx 56°$$

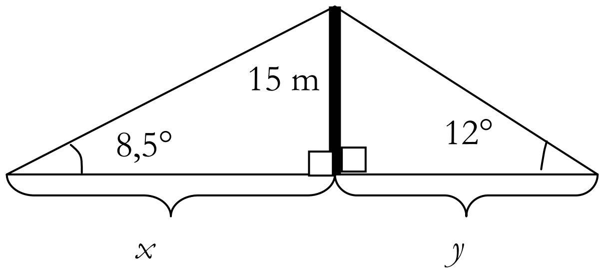
$$\tan \beta = \frac{12\,\text{cm}}{18\,\text{cm}}$$

$$\beta = 33{,}690...° \approx 34°$$

Suorakulmaisen kolmion kolmas kulma on 90°.

Vastaus: Suoran kulman lisäksi kulmat 56° ja 34°.

18. Majakan huippu on 15 m korkeudessa. Laivat ovat vastakkaisilla puolilla siten, että toisesta laivasta huippu näkyy 12° kulmassa ja toisesta 8,5° kulmassa. Hahmotellaan tilannekuva.



Merkitään toisen laivan etäisyyttä majakasta kirjaimella x ja toisen etäisyyttä y.

Laivojen välinen etäisyys on tällöin $x + y$.

Muodostuvista suorakulmaisista kolmiosta saadaan

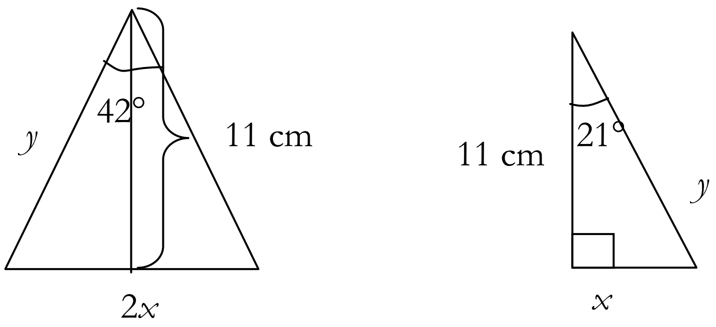
$$\begin{aligned} \tan 8{,}5° &= \frac{15\,\mathrm{m}}{x} \quad \Big|\cdot x \\ x \cdot \tan 8{,}5° &= 15\,\mathrm{m} \\ x &= \frac{15\,\mathrm{m}}{\tan 8{,}5°} = 100{,}367...\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 12° &= \frac{15\,\mathrm{m}}{y} \Big|\cdot y \\ y \cdot \tan 12° &= 15\,\mathrm{m} \\ y &= \frac{15\,\mathrm{m}}{\tan 12°} = 70{,}569...\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Etäisyys $x + y$ = 100,367… m + 70,569… m = 170,9367… m ≈ 170 m

Vastaus: 170 m

19. Tasakylkisen kolmion huippukulma on 42° ja korkeus 11 cm. Korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan. Huippukulman puolikas on $\frac{42°}{2} = 21°$. Merkitään kannan pituutta $2x$ ja kyljen pituutta y.



Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\tan 21° = \frac{x}{11} \quad |\cdot 11$$
$$x = 11 \cdot \tan 21° = 4,2225\ldots$$

Koska korkeusjana puolitti kannan, niin koko kannan pituus on siis

$$2x = 2 \cdot 4,2225\ldots\text{cm} = 8,445\ldots\text{cm} \approx 8,4 \text{ cm}.$$

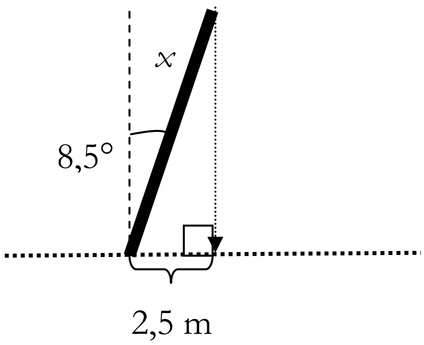
Tasakylkisen kolmion kyljen pituus y saadaan myös suorakulmaisesta kolmiosta

$$\cos 21° = \frac{11}{y} \quad |\cdot y$$
$$y \cdot \cos 21° = 11 \quad |: \cos 21°$$
$$y = \frac{11}{\cos 21°} = 11,7825\ldots$$

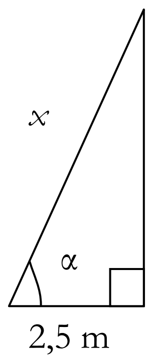
Kyljen pituus on siis $y = 11,7825\ldots$ cm ≈ 12 cm.

Vastaus: Kylkien pituus 12 cm ja kanta 8,4 cm

20. Piirretään mallikuva. Merkitään puun pituutta kirjaimella x.



Tilanteesta muodostuu suorakulmainen kolmio, jossa
$\alpha = 90° - 8,5° = 81,5°$.



$$\cos 81,5° = \frac{2,5}{x} \quad \Big| \cdot x$$

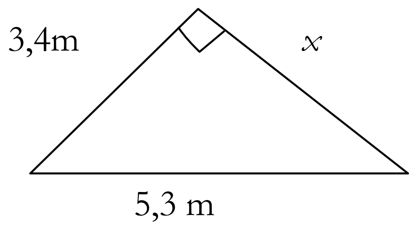
$$x \cdot \cos 81,5° = 2,5 \quad \Big| : \cos 81,5°$$

$$x = \frac{2,5}{\cos 81,5°} = 16,91367...$$

Puun pituus on x=16,91367… m ≈ 17 m.

Vastaus 17 m

21. a) Lasketaan ensi kolmion korkeus x.
Suorakulmaisesta kolmiosta saadaan



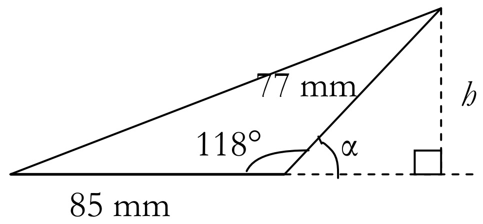
$$\begin{aligned} x^2 + 3{,}4^2 &= 5{,}3^2 \\ x^2 &= 16{,}53 \\ x &= \pm\sqrt{16{,}53} = \pm 4{,}0657... \end{aligned}$$

Koska $x > 0$, niin $x = 4{,}0657\ldots$ m

Kolmion ala on siis

$$A = \frac{3{,}4\,\text{m} \cdot 4{,}0657...\,\text{m}}{2} = 6{,}9117...\,\text{m}^2 \approx 6{,}9\,\text{m}^2$$

b)



Kuviossa oleva kulma $\alpha = 180° - 118° = 62°$. Lasketaan ensin kolmion korkeus h.

Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

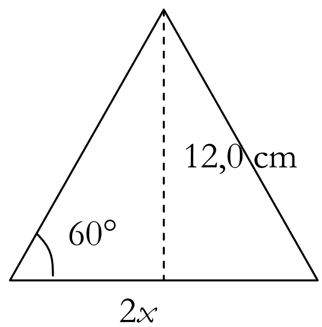
$$\begin{aligned} \sin 62° &= \frac{h}{77} \quad \Big| \cdot 77 \\ 77 \cdot \sin 62° &= h \\ h &= 67{,}98696... \end{aligned}$$

Kysytyn kolmion ala on

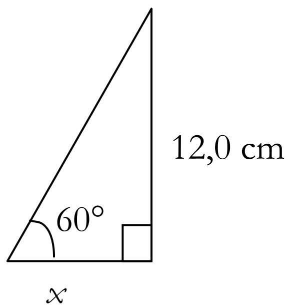
$$A = \frac{85\,\text{mm} \cdot 67{,}98696...\,\text{mm}}{2} = 2889{,}4...\,\text{mm}^2 = 28{,}894...\,\text{cm}^2 \approx 29\,\text{cm}^2$$

Vastaus: a) 6,9 m^2 b) 29 cm^2

22. Tasasivuisen kolmion korkeus on 12,0 cm. Kaikki kulmat ovat 60°.
Merkitään kolmion kantaa lausekkeella $2x$.
Koska korkeusjana puolittaa kannan, on kannan puolikas x.



Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan



$$\begin{aligned} \tan 60° &= \frac{12{,}0}{x} \quad \Big| \cdot x \\ x \cdot \tan 60° &= 12{,}0 \\ x &= \frac{12{,}0}{\tan 60°} = 6{,}9282... \end{aligned}$$

Kolmion kanta on siis

$$2x = 2 \cdot 6{,}9282...\,\text{cm} = 13{,}856...\,\text{cm}\,.$$

Kolmion ala on

$$A = \frac{13{,}856...\,\text{cm} \cdot 12{,}0\,\text{cm}}{2} = 83{,}1384...\,\text{cm}^2 \approx 83{,}1\,\text{cm}^2$$

Vastaus: 83,1 cm^2

23. Merkitään suorakulmaisen kolmion toista kateettia kirjaimella x. Kateettien pituusero on 5,0 cm, joten toinen kateetti on esimerkiksi $x - 5{,}0$ cm.

Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat samat kuin kolmion kanta ja korkeus. Koska kolmion ala A = 38 cm^2, niin saadaan

$$\begin{aligned}
A &= 38 \\
\frac{x(x-5{,}0)}{2} &= 38 \\
\frac{x^2 - 5{,}0x}{2} &= 38 \qquad |\cdot 2 \\
x^2 - 5{,}0x &= 76 \\
x^2 - 5{,}0x - 76 &= 0
\end{aligned}$$

$$x = \frac{5{,}0 \pm \sqrt{(-5{,}0)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-76)}}{2}$$

$$x = \frac{5{,}0 \pm \sqrt{329}}{2}$$

$$x = \frac{5{,}0 + \sqrt{329}}{2} = 11{,}569... \quad \text{tai} \quad x = \frac{5{,}0 - \sqrt{329}}{2} = -6{,}569...$$

Koska $x>0$, niin x = 11,569… cm.

Kateetit ovat siis

x = 11,569… cm ≈ 12 cm

x – 5,0 cm = 11, 569… cm – 5,0 cm =6,569… cm ≈ 6,6 cm.

Vastaus: Kateetit ovat 12 cm ja 6,6 cm.

24. Merkitään kolmion kantaa kirjaimella x ja korkeutta kirjaimella h. Kannan ja korkeuden summa on 23 cm eli

$$x + h = 23$$
$$h = 23 - x$$

Koska kolmion ala on 45 cm^2, niin saadaan yhtälö

$$\frac{x(23-x)}{2} = 45 \quad \big|\cdot 2$$

$$-x^2 + 23x = 90$$

$$-x^2 + 23x - 90 = 0$$

$$x = \frac{-23 \pm \sqrt{23^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-90)}}{-2}$$

$$= \frac{-23 \pm \sqrt{169}}{-2}$$

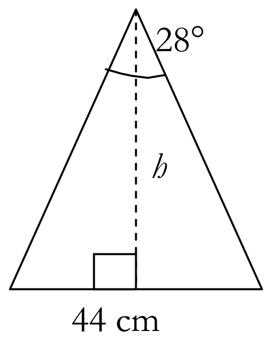
$$= \frac{-23 \pm 13}{-2}$$

$$x = \frac{-23-13}{-2} = 18 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-23+13}{-2} = 5$$

Kolmion kanta x = 5,0 cm tai x = 18 cm

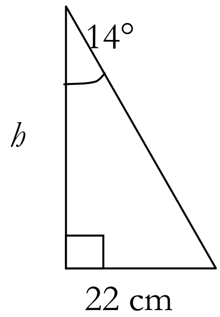
Vastaus: 5,0 cm tai 18 cm

25. Merkitään tasakylkisen kolmion korkeutta kirjaimella h. Huippukulma on 28° ja kanta 44 cm.



Korkeusjana puolittaa huippukulman ja kannan. Huippukulman puolikas on $\frac{28°}{2} = 14°$ ja kannan puolikas on $\frac{44\text{ cm}}{2} = 22\text{ cm}$.

Muodostuu suorakulmainen kolmio, josta saadaan



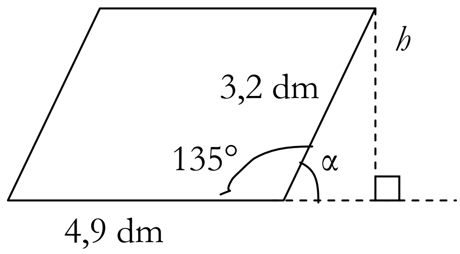
$$\tan 14° = \frac{22}{h} \quad \Big| \cdot h$$
$$h \cdot \tan 14° = 22$$
$$h = \frac{22}{\tan 14°} = 88{,}237...$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{44\text{ cm} \cdot 88{,}237...\text{ cm}}{2} = 1941{,}2...\text{ cm}^2 \approx 19\text{ dm}^2$$

Vastaus: 19 dm^2

26. a) Lasketaan suunnikkaan korkeus h muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta.



Kolmion kulma $\alpha = 180° - 135° = 45°$.

Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\sin 45° = \frac{h}{3,2} \quad \left| \cdot 3,2 \right.$$
$$h = 3,2 \cdot \sin 45° = 2,2627...$$

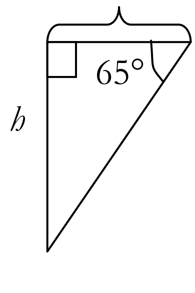
Nelikulmion ala on

$$A = 4,9\,\text{dm} \cdot 2,2627...\,\text{dm} = 11,087...\,\text{dm}^2 \approx 11\ \text{dm}^2$$

b) Kyseessä on tasakylkinen puolisuunnikas, koska kantakulmat ovat yhtäsuuret.

Tilanteesta muodostuu suorakulmainen kolmio, josta voidaan laskea puolisuunnikkaan korkeus h.

$$\frac{115\,\text{cm} - 82\,\text{cm}}{2} = 16,5\,\text{cm}$$



$$\tan 65° = \frac{h}{16,5} \quad \left| \cdot 16,5 \right.$$
$$h = \tan 65° \cdot 16,5 = 35,384...$$

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{35{,}384...\,\mathrm{cm}\left(82\,\mathrm{cm}+115\,\mathrm{cm}\right)}{2} \\
&= \frac{35{,}384...\,\mathrm{cm}\cdot 197\,\mathrm{cm}}{2} \\
&= 3485{,}35...\,\mathrm{cm}^2 \\
&\approx 35\ \mathrm{dm}^2
\end{aligned}
$$

Vastaus: a) 11 dm^2 b) 35 dm^2

27. Merkitään suorakulmion (huoneen) leveyttä kirjaimella x.
Pituus on tällöin $x - 5{,}0$ m.

Suorakulmion (huoneen) ala on 84 m^3 eli

$$x(x-5{,}0)=84$$

$$x^2-5{,}0x-84=0$$

$$x=\frac{5{,}0\pm\sqrt{(-5{,}0)^2-4\cdot 1\cdot(-84)}}{2}$$

$$x=\frac{5{,}0\pm\sqrt{361}}{2}=\frac{5{,}0\pm 19}{2}$$

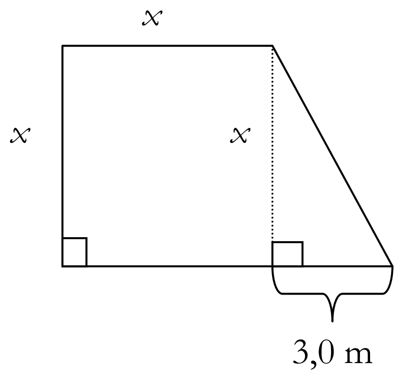
$$x=\frac{5{,}0+19}{2}=12 \quad \text{tai} \quad x=\frac{5{,}0-19}{2}=-7$$

Koska $x > 0$, niin $x = 12$ m

Tällöin pituus on x – 5,0 m= 12 m – 5,0 m= 7,0 m.

Vastaus: Mitat ovat 12 m ja 7,0 m.

28. Hahmotellaan puolisuunnikkaan kuva. Merkitään yhdensuuntaisista sivuista lyhyempää kirjaimella x. Erisuuntaisista sivuista toinen on kohtisuorassa yhdensuuntaisia sivuja vastaan. Tämän sivun pituus on myös x (puolisuunnikkaan korkeus). Yhdensuuntaisten sivujen pituusero on 3,0 m, joten toisen pituus on x + 3,0m.



Pinta-ala on 162 m^2, joten saadaan

$$\frac{x(x+x+3{,}0)}{2} = 162 \quad |\cdot 2$$

$$x(2x+3{,}0) = 324$$

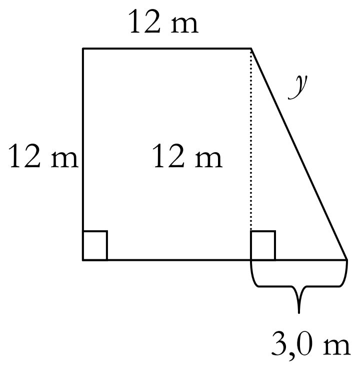
$$2x^2 + 3{,}0x - 324 = 0 \quad |:2$$

$$x^2 + 1{,}5x - 162 = 0$$

$$x = \frac{-1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 - 4\cdot 1\cdot(-162)}}{2}$$

$$x = \frac{-1{,}5 \pm \sqrt{650{,}25}}{2}$$

$$x = \frac{-1{,}5 + 25{,}5}{2} = 12 \quad \text{tai} \qquad x = \frac{-1{,}5 - 25{,}5}{2} - 13{,}5$$



Koska $x > 0$, niin $x = 12$ m.

Tällöin toinen yhdensuuntainen sivu on
$x + 3{,}0$ m=15 m.

Merkitään puolisuunnikkaan viimeistä sivua kirjaimella y.

Sivu y saadaan muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella

$$\begin{aligned} y^2 &= 12^2 + 3{,}0^2 \\ y^2 &= 153 \\ y &= \pm\sqrt{153} = \pm 12{,}369... \end{aligned}$$

Koska $y > 0$, niin $y = 12{,}369\ldots$ m $\approx 12{,}4$ m.

Vastaus: Sivut ovat 12 m, 12 m, 12,4 m ja 15 m.

29. Sormuksen halkaisija d = 1,8 cm =18 mm, joten sen kehän pituus on

$$p = d\pi = 18\,\text{mm} \cdot \pi = 56{,}548...\text{mm}$$

Kehälle mahtuu 2,0 mm timantteja

$$\frac{56{,}548...\text{mm}}{2{,}0\,\text{mm}} = 28{,}27... \approx 28 \text{ kappaletta.}$$

Vastaus: 28 kpl

30. Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella r. Ympyrän ala on 36 cm^2, joten

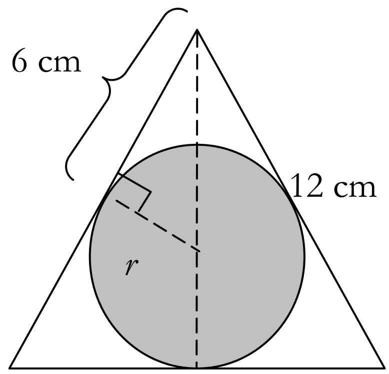
$$\begin{aligned} \pi r^2 &= 36 \quad |:\pi \\ r^2 &= \frac{36}{\pi} \\ r &= \pm\sqrt{\frac{36}{\pi}} = \pm 3{,}385...(\text{cm}) \end{aligned}$$

Kehän pituus p on

$$p = 2\pi \cdot 3{,}385...\text{cm} = 21{,}26...\text{cm} \approx 21\,\text{cm}$$

Vastaus: 21 cm

31. Kolmio on tasasivuinen. Tasasivuisen kolmion sisään piirretty ympyrä sivuaa kolmion sivuja niiden puolessavälissä. Kolmion sivun pituus on 12 cm ja kaikki kulmat ovat 60°.



Kolmion huippukulma on siis myös 60°. Korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman. Kannan puolikas on $\frac{12\,\text{cm}}{2} = 6\,\text{cm}$ ja huippukulman puolikas $\frac{60°}{2} = 30°$.

Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$
\begin{aligned}
\tan 30^\circ &= \frac{r}{6} \\
r &= 6 \cdot \tan 30^\circ \\
&= 3{,}464\ldots
\end{aligned}
$$

Ympyrän ala on

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot (3{,}464\ldots\,\text{cm})^2 = 37{,}69\ldots\text{cm}^2 \approx 38\,\text{cm}^2$$

Vastaus: 38 cm^2

32. Olkoon ympyrän säde *r*, jolloin sen ala $A = \pi r^2$. Tätä alaa vastaa 360 asteen keskuskulma. Ympyrän sektorin alaa 250 cm^2 vastaa 30 asteen keskuskulma. Keskuskulma ja vastaava sektorin ala ovat suoraan verrannollisia, joten

$$\frac{30°}{360°} = \frac{250}{\pi r^2}$$

$$30\pi r^2 = 90000 \quad |: 30\pi$$

$$r^2 = \frac{3000}{\pi}$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{3000}{\pi}} = \pm 30{,}90...$$

Ympyrän säde $r > 0$, joten $r = 30{,}90\ldots$cm ≈ 31 cm.

Vastaus: 31 cm

33. Koko ympyrän kehää *p* vastaa 360 asteen keskuskulma ja 4,2 dm sektorin kaaren pituutta vastaa 15 asteen keskuskulma.

Kaaren pituus ja kaarta vastaavan sektorin keskuskulman suuruus ovat suoraan verrannolliset.

$$\frac{15^\circ}{360^\circ} = \frac{4{,}2\,\text{dm}}{p}$$

$$15p = 1512\,\text{dm} \quad |:15$$

$$p = 100{,}8\,\text{dm}$$

$$p \approx 100\,\text{dm}$$

Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella *r*, jolloin

$$p = 2\pi r$$

$$100{,}8\,\text{dm} = 2\pi r \;|:(2\pi)$$

$$r = \frac{100{,}8\,\text{dm}}{2\pi} = 16{,}04...\,\text{dm} \approx 16\,\text{dm}$$

Vastaus: säde 16 dm, kehän pituus 100 dm

34. Sektorin kaaren pituus on sama kuin ympyrän säde $r = 75$ cm. Sektorin keskuskulmaa α vastaa siis kaari, jonka pituus on 75 cm. 360 asteen keskuskulmaa vastaa koko ympyrän kehä p

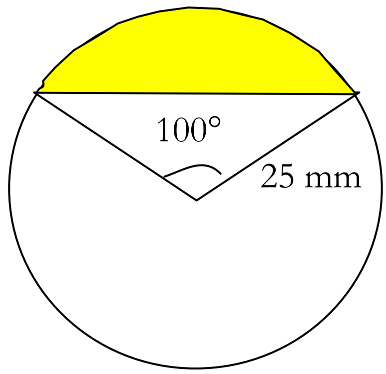
$$p = 2\pi \cdot 75\,\text{cm} = 471{,}23...\text{cm}$$

Koska keskuskulma ja vastaava kaaren pituus ovat suoraan verrannolliset, niin saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{360^\circ} &= \frac{75}{471{,}23...} \\
471{,}23...\alpha &= 27000^\circ \quad |:471{,}23... \\
\alpha &= 57{,}29...^\circ \\
\alpha &\approx 57^\circ
\end{aligned}$$

Vastaus: 57°

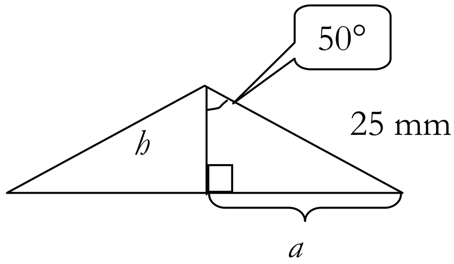
35. Ympyrän säde $r = 25$ mm. Sektorin keskuskulma on 100°. Koska sektorin keskuskulma on alle 180°, segmentin ala saadaan vähentämällä sektorin alasta keskuskolmion ala.



Sektorin ala

$$A_{\text{sektori}} = \frac{100^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 25^2 = 545{,}415...\left(\text{mm}^2\right)$$

Keskuskolmio on tasakylkinen. Korkeusjana puolittaa huippukulman (sektorin keskuskulman) ja kannan. Huippukulman puolikas on $\frac{100°}{2}=50°$.



Lasketaan ensin keskuskolmion korkeus h ja kannan puolikas a.

$$\begin{aligned}\cos 50° &= \frac{h}{25} \quad |\cdot 25\\ h &= 25\cdot\cos 50°\\ &= 16{,}069...\ (\mathrm{mm})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 50° &= \frac{a}{25} \quad |\cdot 25\\ a &= 25\cdot\sin 50°\\ a &= 19{,}1511...\ (\mathrm{mm})\end{aligned}$$

Keskuskolmion kanta on 2a, joten ala on

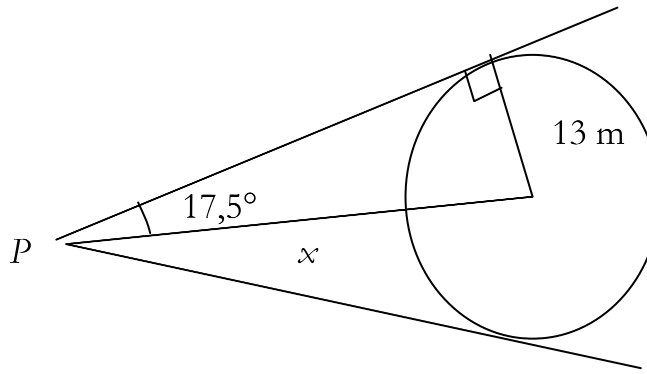
$$\begin{aligned}A_{\text{kolmio}} &= \frac{2ah}{2} = ah\\ &= 19{,}1511...\ \mathrm{mm}\cdot 16{,}069...\ \mathrm{mm}\\ &= 307{,}75...\mathrm{mm}^2\end{aligned}$$

Segmentin ala on

$$\begin{aligned} A_{\text{segmentti}} &= A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} \\ &= 545{,}415...\,\text{mm}^2 - 307{,}75...\,\text{mm}^2 \\ &= 237{,}662...\text{mm}^2 \\ &\approx 240\,\text{mm}^2 \end{aligned}$$

Vastaus: 240 mm^2

36. Ympyrän säde r = 13 m. Merkitään pisteen P etäisyyttä ympyrän keskipisteestä kirjaimella x. Jana x puolittaa tangenttikulman. Tangenttikulman puolikas on $\frac{35°}{2} = 17{,}5°$.



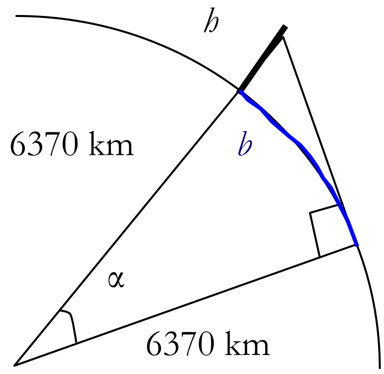
Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\begin{aligned} \sin 17{,}5° &= \frac{13}{x} \quad |\cdot x \\ x \sin 17{,}5° &= 13 \quad |: \sin 17{,}5° \\ x &= \frac{13}{\sin 17{,}5°} = 43{,}23...(\text{m}) \end{aligned}$$

Pisteen P etäisyys kehästä on
$x - r$ = 42,23… m – 13 m = 30,23… m ≈ 30 m

Vastaus: 30 m

37. Hahmotellaan tilannekuva. Merkitään lähetysalueen ulottuvuutta yhteensuuntaan kirjaimella b ja radiomaston korkeutta kirjaimella h = 35 m = 0,035 km. Maapallon säde R = 6370 km.



Merkitään lähetysaöueen ulottuvuutta (kaaren pituutta) vastaavan keskuskulman suuruutta α.

Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\cos\alpha = \frac{6370}{6370 + 0{,}035}$$
$$\cos\alpha = 0{,}999...$$
$$\alpha = 0{,}1899...^\circ$$

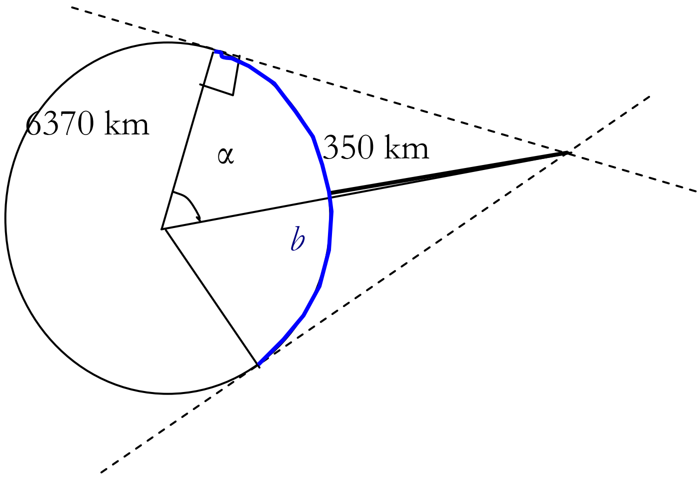
Lähetysalue ulottuu kaaren b päähän.

$$b = \frac{0{,}1899...^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370\,\text{km} = 21{,}116...\,\text{km} \approx 21\,\text{km}$$

Vastaus: 21 km

38. Hahmotellaan tilannekuva. Maapallon säde 6370 km. Sukkula on 350 km korkeudella. Merkitään näkyvyysaluetta eli kaaren pituutta *b* ja tätä vastaavaa keskuskulmaa 2α.

Lasketaan keskuskulman puolikas α muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta.



$$\cos\alpha = \frac{6370}{6370+350}$$
$$\cos\alpha = \frac{6370}{6720}$$
$$\cos\alpha = 0{,}9479...$$
$$\alpha = 18{,}573...°$$

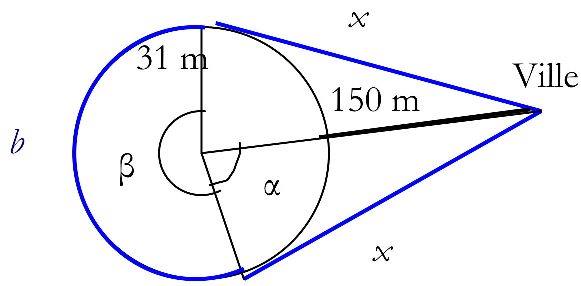
Koko näkyvyysaluetta vastaava keskuskulma 2α on koko maapallon keskuskulmasta (360°) prosentteina

$$\frac{2\alpha}{360°} = \frac{2\cdot 18{,}573...°}{360°} = 0{,}103... \approx 10\,\%$$

Vastaus 10 %

39. Hahmotellaan tilannekuva. Teatterin halkaisija on 62 m, joten säde

$$r = \frac{62\,\text{m}}{2} = 31\,\text{m}.$$

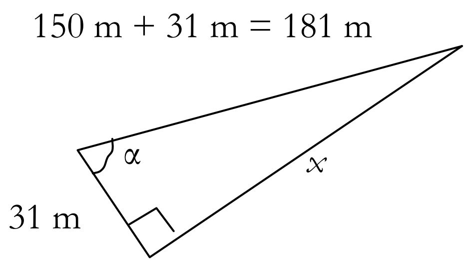


Ville seisoo 150 m päässä teatterista

Lyhin reitti teatterin ympäri koostuu kahdesta suorasta x ja ympyrän kaaresta *b*.

Kaaren pituuden *b* laskemiseksi tarvitaan ensin keskuskulmat α ja β.

Suorien osien pituus saadaan muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta.



$$\begin{aligned} x^2 + 31^2 &= 181^2 \\ x^2 &= 181^2 - 31^2 \\ x^2 &= 31800 \\ x &= \pm\sqrt{31800} \\ x &= \pm 178{,}325...\ (\text{m}) \end{aligned}$$

Lasketaan kulman α suuruus muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{31}{181} \\ \cos\alpha &= 0{,}1712... \\ \alpha &= 80{,}138...^\circ \end{aligned}$$

Ympyrän kehää pitkin kuljettavaa matkaa vastaa keskuskulma

$$\beta = 360^\circ - 2\alpha = 360^\circ - 2\cdot 80{,}138...^\circ = 199{,}723...^\circ$$

Kaaren b pituus on

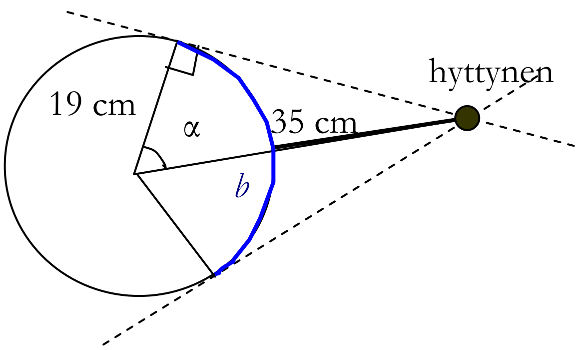
$$b = \frac{199{,}723...^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 31\,\mathrm{m} = 108{,}06...\,\mathrm{m}$$

Koko matkan pituus on

$$b + 2x = 108{,}06...\mathrm{m} + 2 \cdot 178{,}325...\mathrm{m} = 464{,}711...\mathrm{m} \approx 460\,\mathrm{m}$$

Vastaus: 460 m

40. Piirretään tilannekuva. Pallon halkaisija on 38 cm, joten säde $r = \frac{38\,\mathrm{cm}}{2} = 19\,\mathrm{cm}$. Hyttysen (pisteen) etäisyys pallon kehästä on 35 cm. Hyttynen näkee pallosta kaaren b verran.



Lasketaan ensin kaaren puolikasta vastaavan keskuskulman α suuruus muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta.

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{19}{35+19} \\
\cos\alpha &= \frac{19}{54} \\
\cos\alpha &= 0{,}3518... \\
\alpha &= 69{,}39...^\circ
\end{aligned}
$$

Koko hyttysen näkökenttää vastaava keskuskulma on

$$2\alpha = 2 \cdot 69{,}39\ldots^\circ = 138{,}79\ldots^\circ.$$

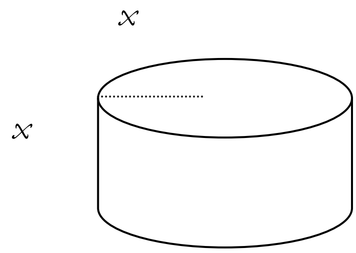
Näkökentän keskuskulma on koko ympyrän keskuskulmasta (360°) prosentteina

$$\frac{138{,}79...^\circ}{360^\circ} = 0{,}385... \approx 39\,\%$$

Vastaus: 39 %

41. Merkitään purkin (lieriön) pohjaympyrän sädettä x. Purkin korkeus h on yhtä suuri kuin pohjan säde eli $h = x$.

Tilavuus on



$$\begin{aligned} V &= A_p \cdot h \\ &= \pi x^2 \cdot x \\ &= \pi x^3 \end{aligned}$$

Koska purkkiin mahtuu 1,2 dl = 0,12 l kalaa, sen tilavuus $V = 0{,}12\ \text{dm}^3 = 120\ \text{cm}^3$.

$$\begin{aligned} V &= 120 \\ \pi x^3 &= 120 \quad |: \pi \\ x^3 &= \frac{120}{\pi} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{120}{\pi}} = 3{,}367...(\text{cm}) \end{aligned}$$

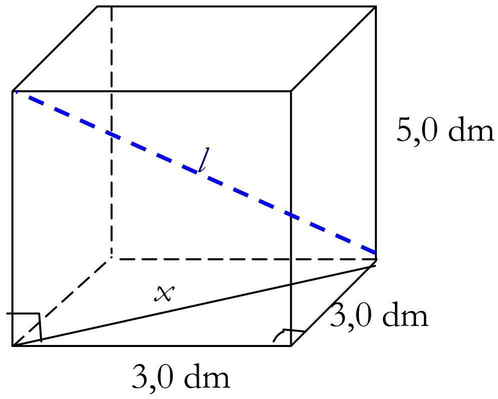
Pohjan halkaisija on siis

$$2r = 2 \cdot 3{,}367...\text{cm} = 6{,}7355...\text{cm} \approx 6{,}7\ \text{cm}$$

Vastaus: 6,7 cm

42. Hahmotellaan kuva. Särmiön pohja on neliö,jonka sivun pituus on 3,0 dm. Särmiön korkeus on 5,0 dm. Merkitään pohjaneliön lävistäjää x ja avaruuslävistäjää l.

Pohjaan muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan



$$x^2 = 3{,}0^2 + 3{,}0^2$$
$$x^2 = 18$$
$$x = \pm\sqrt{18}$$
$$x = \pm 4{,}242...$$

Koska $x > 0$, niin $x = 4{,}242\ldots$ dm.

Toisesta muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$l^2 = x^2 + 5{,}0^2$$
$$l^2 = 4{,}242...^2 + 25$$
$$l^2 = 43$$
$$l = \pm\sqrt{43} = \pm 6{,}557...$$

Koska $l > 0$, niin $l = 6{,}557\ldots$ dm $\approx 6{,}6$ dm.

Vastaus: 6,6 dm

43. Merkitään jääkuution särmää kirjaimella x. Kuutio painaa 16,1 g. Jään tiheys on 0,917 kg/l.

Koska $\text{tiheys} = \dfrac{\text{massa}}{\text{tilavuus}}, \text{tilavuus} = \dfrac{\text{massa}}{\text{tiheys}}$.

Jääkuution tilavuus on siis

$$\frac{16{,}1\,\text{g}}{0{,}917\,\dfrac{\text{kg}}{\text{dm}^3}} = \frac{0{,}0161\,\text{kg}}{0{,}917\,\dfrac{\text{kg}}{\text{dm}^3}} = 0{,}01755...\text{dm}^3 = 17{,}55...\text{cm}^3$$

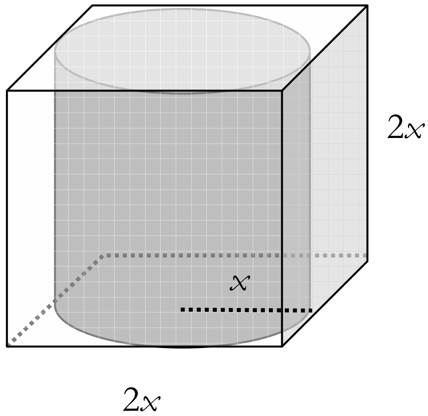
Jos särmän pituus on x, niin kuution tilavuus on x^3 eli

$$\begin{aligned} x^3 &= 17{,}55... \\ x &= 2{,}599... \\ x &\approx 2{,}60 \end{aligned}$$

Särmä $x \approx 2{,}60$ cm.

Vastaus: 2,60 cm

44. Hahmotellaan kuva. Merkitään kuution sivun pituutta $2x$, jolloin lieriön säde on x. Kuution ja lieriön korkeudet ovat samat eli $2x$.



Lieriön tilavuus on

$$V_{\text{lieriö}} = \pi x^2 \cdot 2x = 2\pi x^3.$$

Kuution tilavuus on

$$V_{\text{kuutio}} = (2x)^3 = 8x^3$$

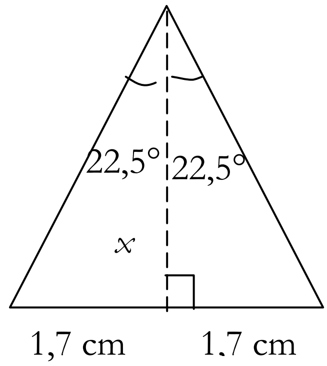
Lieriön tilavuus kuution tilavuudesta on

$$\frac{V_{\text{lieriä}}}{V_{\text{lkuutio}}} = \frac{2\pi x^3}{8x^3} = \frac{2\pi}{8} = 0{,}7853... \approx 79\%$$

Vastaus: 79 %

45. Pohjana oleva säännöllinen 8-kulmio voidaan jakaa 8 samanlaiseen, tasakylkiseen kolmioon. Kolmion huippukulma on $\dfrac{360°}{8} = 45°$.

Säännöllisen 8- kulmion sivun pituus on 3,4 cm, joka on sama kuin tasakylkisen kolmion kanta. Kolmion korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman. Kannan puolikas on $\dfrac{3{,}4\text{ cm}}{2} = 1{,}7$ cm ja huippukulman puolikas on $\dfrac{45°}{2} = 22{,}5°$.



Merkitään kolmion korkeutta x. Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\tan 22{,}5° = \frac{1{,}7\,\text{cm}}{x}$$

$$x = \frac{1{,}7\,\text{cm}}{\tan 22{,}5°} = 4{,}104...\text{cm}$$

Kolmion ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{3{,}4\text{cm} \cdot 4{,}104...\text{cm}}{2} = 6{,}9770...\text{cm}^2.$$

Pohjan ala on tällöin

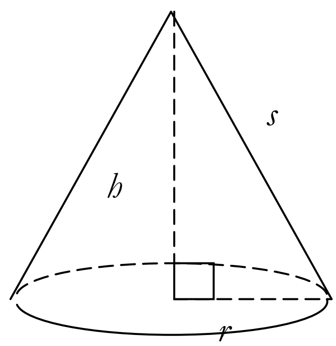
$$A = 8 \cdot A_{\text{kolmio}} = 8 \cdot 6{,}9770...\text{cm}^2 = 55{,}8166...\text{ cm}^2$$

Koska vaippa muodostuu kahdeksasta suorakulmiosta, joiden kanta on 3,4 cm ja korkeus 10,2 cm, on kokonaispinta-ala

$$\begin{aligned}A_{\text{koko}} &= 2\cdot A_{\text{pohja}} + 8\cdot A_{\text{suorakulmio}}\\ &= 2\cdot 55{,}8166...\text{cm}^2 + 8\cdot 3{,}4\,\text{cm}\cdot 10{,}2\,\text{cm}\\ &= 389{,}07...\text{cm}^2\\ &\approx 390\,\text{cm}^2\end{aligned}$$

Vastaus: 390 cm^2

46. Ympyräkartion korkeus h = 12 dm
Pohjaympyrän halkaisija on 8,0 dm, joten säde
$r = \dfrac{8{,}0\,\text{dm}}{2} = 4{,}0\,\text{dm}$.



Tilavuus on

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi\cdot(4{,}0\,\text{dm})^2\cdot 12\,\text{dm}}{3} = 201{,}06...\text{dm}^3 \approx 200\,\text{dm}^3$$

Vaipan alan laskemiseksi tarvitaan sivujanan s pituus. Muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

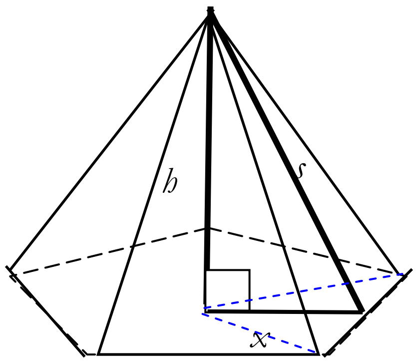
$$\begin{aligned}s^2 &= h^2 + r^2\\ s^2 &= 12^2 + 4^2\\ s^2 &= 160\\ s &= \pm\sqrt{160} = \pm 12{,}64...\ (\text{dm})\end{aligned}$$

Vaipan ala on

$$A_v = \pi rs = \pi \cdot 4{,}0\,\text{dm} \cdot 12{,}64...\,\text{dm} = 158{,}95..\text{dm}^2 \approx 160\,\text{dm}^2$$

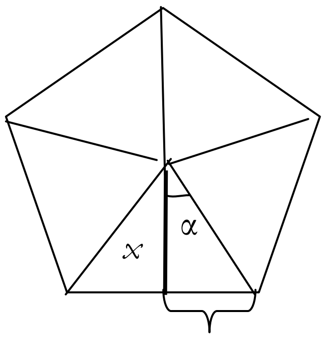
Vastaus: Tilavuus on 200 dm^3 ja vaipan ala 160 dm^2.

47. Kartion pohja on säännöllinen viisikulmio, jonka sivun pituus on 4,1 m. Korkeus h = 6,4 m. Hahmotellaan kuva kartiosta.



Vaipan pinta-alaa varten tarvitaan sivutahkoina olevien tasakylkisten kolmioiden korkeus. Merkitään tätä kirjaimella s.
Merkitään pyramidin sisälle muodostuvan suorakulmaisen kolmion toista kateettia kirjaimella x.

Pohja voidaan jakaa viideksi keskenään samanlaiseksi kolmioksi. Tällöin jokaisen kolmion huippukulma on $\dfrac{360°}{5} = 72°$.
Kolmion korkeusjana x puolittaa huippukulman ja kannan. Huippukulman puolikas on
$\alpha = \dfrac{72°}{2} = 36°$.



Ratkaistaan ensin kateetin x pituus. Pohjalle muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan

$$\begin{aligned} \tan 36° &= \frac{2{,}05}{x} \quad |\cdot x \\ x\tan 36° &= 2{,}05 \quad |:\tan 36° \\ x &= \frac{2{,}05}{\tan 36°} = 2{,}821...\ (\mathrm{m}) \end{aligned}$$

Sivutahkon korkeus s saadaan Pythagoraan lauseella toisesta suorakulmaisesta kolmiosta

$$\begin{aligned} s^2 &= h^2 + x^2 \\ s^2 &= 6{,}4^2 + 2{,}821...^2 \\ s^2 &= 48{,}921... \\ s &= \pm\sqrt{48{,}921...} = \pm 6{,}994...\ (\mathrm{m}) \end{aligned}$$

Sivutahkokolmion ala on

$$A_k = \frac{4{,}1\,\mathrm{m}\cdot 6{,}994...\mathrm{m}}{2} = 14{,}338...\ \mathrm{m}^2$$

Pyramidin vaippa koostuu viidestä kolmiosta, joten ala on

$$A_v = 5\cdot A_k = 5\cdot 14{,}338...\mathrm{m}^2 = 71{,}692...\mathrm{m}^2 \approx 72\,\mathrm{m}^2$$

Vastaus: 72 m^2

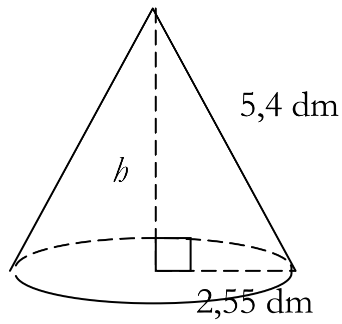
48. Ympyrän säde r = 5,4 dm. Sektorin keskuskulma on 170°. Lasketaan ensin sektorin kaaren pituus eli ympyräkartion pohjan kehän pituus.

$$b = \frac{170°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 5{,}4\,\text{dm} = 16{,}0221...\text{dm}$$

Merkitään pohjaympyrän sädettä kirjaimella x. Tällöin

$$\begin{aligned} 2\pi x &= 16{,}0221... \quad |:(2\pi) \\ x &= \frac{16{,}0221...}{2\pi} \\ x &= 2{,}55 \ \ (\text{dm}) \end{aligned}$$

Kartion sivujana ja alkuperäisen ympyräsektorin säde ovat yhtä suuret. Kartion korkeus h saadaan kartion sisälle muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.



$$\begin{aligned} h^2 + 2{,}55^2 &= 5{,}4^2 \\ h^2 &= 5{,}4^2 - 2{,}55^2 \\ h^2 &= 22{,}6575 \\ h &= \pm\sqrt{22{,}6575} = \pm 4{,}759... \ (\text{dm}) \end{aligned}$$

Koska $h > 0$, niin h = 4,759… dm.

Kartion tilavuus on

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot (2{,}55\,\text{dm})^2 \cdot 4{,}759...\text{dm}}{3} = 32{,}412...\text{dm}^3 \approx 32\ \text{dm}^3$$

Vastaus: 32 dm^3

49. Samppanjalasin suuaukon säde $r = \dfrac{6{,}1\,\text{cm}}{2} = 3{,}05\,\text{cm}$.

Lasin tilavuus on 12 cl. Muutetaan tilavuus kuutiosenttimetreiksi.

12 cl = 1,2 dl = 0,12 l = 0,12 dm^3 = 120 cm^3

Lasi on ympyräpohjainen kartio, jonka tilavuus on siis 120 cm^3.

Saadaan yhtälö

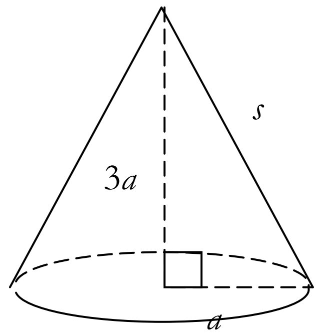
$$\begin{aligned}
\frac{\pi r^2 h}{3} &= V \\
\frac{\pi \cdot 3{,}05^2 \cdot h}{3} &= 120 \quad |\cdot 3 \\
\pi \cdot 3{,}05^2 \cdot h &= 360 \quad |:\left(3{,}05^2 \pi\right) \\
h &= \frac{360}{3{,}05^2 \pi} \\
h &= 12{,}318...\ (\text{cm})
\end{aligned}$$

Koko lasin korkeus on siis

12,318… cm + 6,8 cm = 19,111… cm≈ 19 cm

Vastaus: 19 cm

50. Ympyräkartion pohjan halkaisijan ja korkeuden suhde on 2 : 3. Merkitään kartion pohjan halkaisijaa merkinnällä 2*a*. Kartion korkeus on tällöin 3*a*.



Pohjan säde $r = \frac{2a}{2} = a$

Kartion vaipan alaa varten tarvitaan sivujanan *s* pituus.

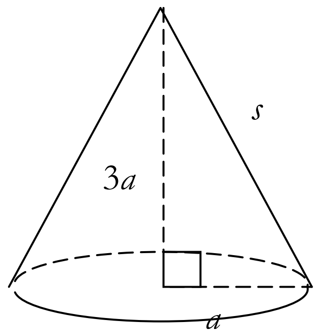
Kartion tilavuus on

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi a^2 \cdot \cancel{3}a}{\cancel{3}} = \pi a^3$$

Koska tilavuus on 1200 cm^3, saadaan yhtälö

$$\pi a^3 = 1200 \quad |:\pi$$
$$a^3 = \frac{1200}{\pi}$$
$$a = \sqrt[3]{\frac{1200}{\pi}}$$
$$a = \sqrt[3]{381{,}97...}$$
$$a = 7{,}255... \ (\text{cm})$$

Kartion sisään muodostuvasta suorakulmaisesta kolmiosta saadaan Pythagoraan lauseella sivujanan *s* pituus.



$$
\begin{aligned}
s^2 &= a^2 + (3a)^2 \\
s^2 &= a^2 + 9a^2 \\
s^2 &= 10a^2 \\
s &= \pm\sqrt{10a^2} \\
s &= \pm\sqrt{10 \cdot 7{,}255...^2} \\
s &= \pm\sqrt{526{,}44...} \\
s &= \pm 22{,}944...
\end{aligned}
$$

Koska $s > 0$, niin $s = 2{,}944\ldots$ cm.

Vaipan ala on

$$A_v = \pi rs = \pi \cdot 7{,}255...\ \text{cm} \cdot 22{,}944...\text{cm} = 523{,}002...\text{cm}^2 \approx 520\,\text{cm}^2$$

Vastaus: 520 cm^2

51. Rantapallon tilavuus on 33,0 l = 33,0 dm³. Merkitään pallon sädettä kirjaimella *r*. Saadaan yhtälö

$$
\begin{aligned}
V &= 33{,}0 \quad \mathrm{dm}^3 \\
\frac{4\pi r^3}{3} &= 33{,}0 \quad |\cdot 3 \\
4\pi r^3 &= 99{,}0 \quad |: 4\pi \\
r^3 &= \frac{99{,}0}{4\pi} \\
r &= \sqrt[3]{\frac{99{,}0}{4\pi}} = 1{,}9897\ldots
\end{aligned}
$$

Pallon säde on siis r= 1,9897… dm.

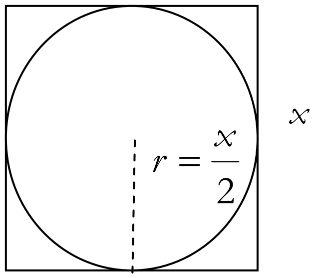
Muovin menekki riippuu pallon alasta. Pallon ala on

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (1{,}9897\ldots\mathrm{dm})^2 = 49{,}7538\ldots\mathrm{dm}^2 \approx 49{,}8\,\mathrm{dm}^2$$

Muovia siis tarvitaan 49,8 dm².

Vastaus: 49,8 dm²

52. Kuution sisällä on suurin mahdollinen pallo Merkitään kuution sivua kirjaimella x, joten pallon säde $r = \dfrac{x}{2}$



Kuution ja pallon pinta-alat ovat

$$A_{kuutio} = 6 \cdot x^2$$

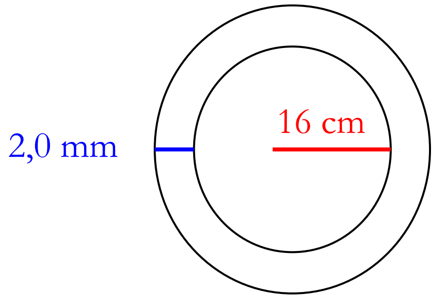
$$A_{pallo} = 4 \cdot \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 4\pi \frac{x^2}{4} = \pi x^2$$

Pallon alan suhde kuution pinta-alaan on

$$\frac{A_{pallo}}{A_{kuutio}} = \frac{\pi x^2}{6x^2} = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$$

Vastaus: $\dfrac{\pi}{6} \approx 0{,}52$

53. Valaisimen sisäsäde on 16 cm ja ulkosäde on siis 16 cm + 0,2 cm =16,2 cm



Valaisimen tilavuus on

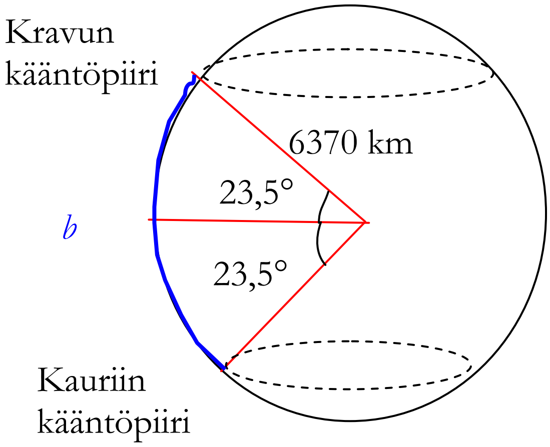
$$\begin{aligned} V_{\text{valaisin}} &= V_{\text{ulko}} - V_{\text{sisä}} \\ &= \frac{4\pi \cdot (16{,}2\,\text{cm})^3}{3} - \frac{4\pi(16\,\text{cm})^3}{3} \\ &= \frac{4\pi \cdot 4251{,}528\,\text{cm}^3 - 4\pi \cdot 4096\,\text{cm}^3}{3} \\ &= 651{,}4741\ldots\text{cm}^3 \\ &= 0{,}6514741\ldots\ \text{dm}^3 \end{aligned}$$

Lasin tiheys on 2,5 kg/dm^3 , joten valaisin painaa siis

$$2{,}5\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot 0{,}6514741\ldots\text{dm}^3 = 1{,}6286\ldots\text{kg} \approx 1{,}6\,\text{kg}$$

Vastaus: 1,6 kg

54. Maapallon säde on 6370 km. Kysytty etäisyys on kuvaan muodostuneen sektorin (keskuskulma 23,5°+23,5°=47°) kaaren pituus *b*.



$$\begin{aligned} b &= \frac{47°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6370\,\text{km} \\ &= 5225{,}34...\,\text{km} \\ &\approx 5230\,\text{km} \end{aligned}$$

Vastaus: 5230 km

55. Lasketaan kannateltavan aineksen tilavuus.

Tanko on ympyrälieriö, jonka pituus on 1,5 m=150 cm ja halkaisija 1,9 cm. Tangon säde on $\frac{1{,}9\,\text{cm}}{2} = 0{,}95\ \text{cm}$.

Tangon tilavuus on siis

$$V_{\text{tanko}} = \pi \cdot (0{,}95\,\text{cm})^2 \cdot 150\,\text{cm} = 425{,}293...\,\text{cm}^3.$$

Tangon päissä olevien pallojen säde on 14 cm, joten pallojen tilavuus on

$$V_{\text{pallot}} = 2 \cdot \frac{4\pi \cdot (14\,\text{cm})^3}{3} = 22988{,}08...\,\text{cm}^3$$

Yhteistilavuus on siis

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{tanko}} + V_{\text{pallot}} \\ &= 425{,}293...\,\text{cm}^3 + 22988{,}08...\,\text{cm}^3 \\ &= 23413{,}37...\,\text{cm}^3 \\ &= 23{,}41337...\,\text{dm}^3 \end{aligned}$$

Metallin tiheys on 7,8 kg/dm^3, joten tanko painaa

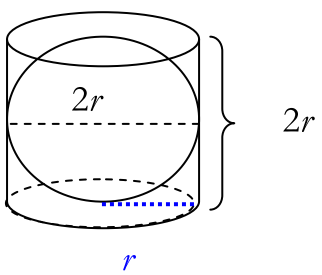
$$23{,}41337...\,\text{dm}^3 \cdot 7{,}8\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 182{,}624...\,\text{kg} \approx 180\,\text{kg}$$

Vastaus: 180 kg

56. Merkitään pallon sädettä kirjaimella r.
Tällöin lieriön pohjan halkaisija on $2r$ eli pallon halkaisija. Lieriön pohjaympyrän säde ja pallon säde ovat siis r. Lieriön korkeus $h = 2r$. Pallo siis juuri mahtuu lieriöön.

Lieriön tilavuus on

$$V_{\text{lieriö}} = A_{\text{pohja}} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$$



Pallon tilavuus on

$$V_{\text{pallo}} = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

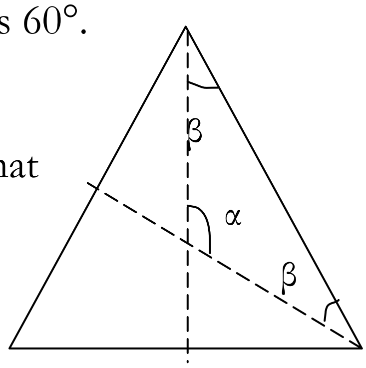
Pallon tilavuuden suhde lieriön tilavuuteen on

$$\frac{V_{\text{pallo}}}{V_{\text{lieriö}}} = \frac{\frac{4\pi r^3}{3}}{2\pi r^3} = \frac{4\pi r^3}{3} \cdot \frac{1}{2\pi r^3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Vastaus: $\frac{2}{3}$

Säännölliset monikulmiot

1. a) Koska kolmio on säännöllinen, sen kaikki kulmat ovat yhtä suuria (ja sivut yhtä pitkiä). Kolmion kulmien suuruus on siis 60°.



Kolmion kärjistä piirretyt janat puolittavat aina vastaisen sivun. Koska kolmio on säännöllinen, janat puolittavat tällöin myös kulmat eli

$$\beta = \frac{60°}{2} = 30°.$$

Säännöllisen kolmion sisälle muodostuu pienempi kolmio. Koska kolmion kulmien summa on 180°, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \beta &= 180° \\ \alpha + 2 \cdot 30° &= 180° \\ \alpha &= 180° - 60° \\ \alpha &= 120° \end{aligned}$$

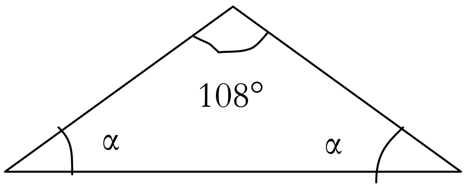
b) Viisikulmion ($n=5$) kulmien summa on

$$(n-2)\cdot 180° = (5-2)\cdot 180° = 540°.$$

Viisikulmion yhden kulman suuruus on siis

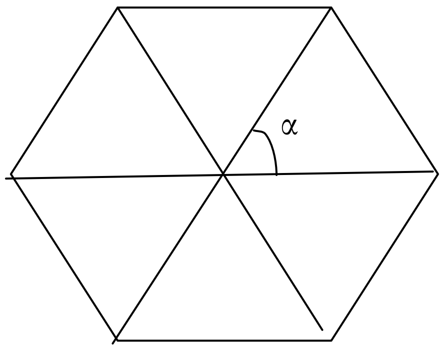
$$\frac{540°}{5} = 108°.$$

Koska viisikulmio on säännöllinen, sen kaikki sivut ovat yhtä pitkät. Tällöin viisikulmion sisään muodostuva kolmio on tasakylkinen, joten sen kantakulmat α ovat yhtä suuret.



Kolmion kulmien summa on 180°, joten viisikulmion sisään muodostuvasta kolmiosta saadaan

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha + 108° &= 180° \\ 2\alpha &= 180° - 108° \\ 2\alpha &= 72° \quad |:2 \\ \alpha &= 36° \end{aligned}$$



c) Säännöllinen kuusikulmio muodostuu kuudesta samanlaisesta kolmiosta.

Kolmioiden huiput ovat samassa pisteessä ja ne muodostavat yhdessä täysikulman eli

$$6\alpha = 360° \quad |:6$$
$$\alpha = 60°$$

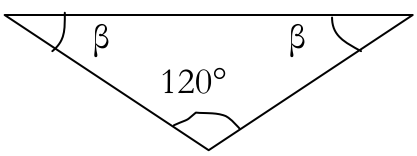
Vastaus: a) 120° b) 36° c) 60°

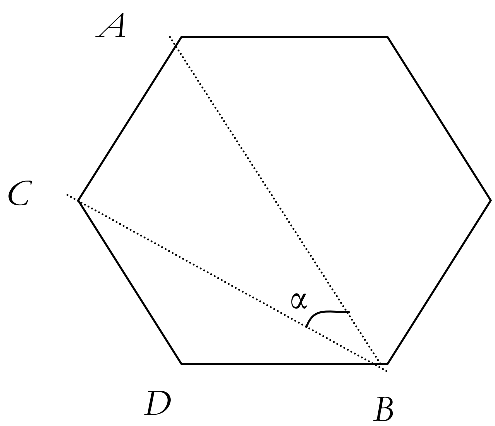
2. Kuusikulmion (n =6) kulmien summa on

$$(n-2)\cdot 180° = (6-2)\cdot 180° = 720°.$$

Säännöllisen kuusikulmion kulmat ovat kaikki yhtä suuria, joten yhden kulman suuruus on $\frac{720°}{6} = 120°$.

Koska säännöllisen kuusikulmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, kolmio *BDC* on tasakylkinen. Tällöin kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret.

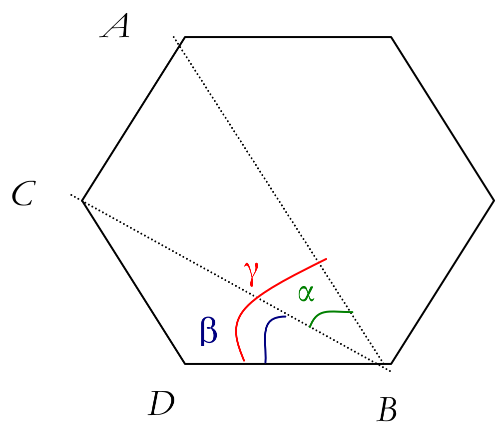




Kolmion kulmien summa on 180°, joten saadaan

$$
\begin{aligned}
2 \cdot \beta + 120° &= 180° \\
2\beta &= 180° - 120° \\
2\beta &= 60° \quad |: 2 \\
\beta &= 30°
\end{aligned}
$$

Jana *AB* puolittaa kuusikulmion, joten



$$\gamma = \frac{120°}{2} = 60°,$$

sillä kulma *B* on 120 °

Tällöin $\alpha = \gamma - \beta = 60° - 30° = 30°$.

Vastaus: $\alpha = 30°$

Yksikkömuunnokset

3. a) 0,567 m = 5,67 dm =56,7 cm

b) 1 m = 0,1 dam = 0,01 hm = 0,001 km

c) 1,07 dm = 10,7 cm

d) 1,07 dm = 0,107 m

4. a) 1,5 m^2 = 0,015 a

b) 11 m^2 = 0,11 a =0,0011 ha

c) 1,73265 km^2 = 173,265 ha = 17326,5 a

d) 1,73265 m^2 = 173,265 dm^2 = 17 326,5 cm^2 = 1 732 650 mm^2

5. a) $1{,}7\ m^3 = 1\ 700\ dm^3$

b) $1{,}73\ m^3 = 1730\ dm^3 = 1\ 730\ 000\ cm^3$

c) $5{,}6002\ m^3 = 0{,}005\ 6002\ dam^3$
$= 0{,}000\ 005\ 6002\ hm^3$
$= 5{,}6002 \cdot 10^{-6}\ hm^3$
$= 5{,}6002 \cdot 10^{-9}\ km^3$

d) $0{,}056\ m^3 = 56\ dm^3 = 56\ 000\ cm^3 = 56\ 000\ 000\ mm^3$

6. a) 6 dl = 0,6 l

b) 7,96 l = 79,6 dl

c) 17 ml = 1,7 dl = 0,17 dl

d) 0,37 dl = 3,7 cl

7. a) $27\ m^3 = 27000\ dm^3 = 27000\ l$

b) $0{,}54\ dm^3 = 0{,}54\ l = 5{,}4\ dl$

c) $17\ ml = 1{,}7\ cl = 0{,}17\ dl = 0{,}017\ l = 0{,}017\ dm^3 = 17\ cm^3$

d) $38\ l = 38\ dm^3 = 0{,}038\ m^3 = 0{,}000\ 038\ dam^3$

8. a) $4\ hm = 400\ m$

b) $5\ a = 500\ m^2 = 50\ 000\ dm^2$

c) $450\ cl = 45\ dl = 4{,}5\ l$

d) $46{,}7\ dm^3 = 0{,}0467\ m^3$