

Kertaustehtävät

1. c) Värähtelyn jaksonaika on $T = \frac{300 \text{ s}}{600} = 0,50 \text{ s}$.

Värähtelyn taajuus on $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,50 \text{ s}} = 2,0 \text{ Hz}$.

2. b) Harmoninen voima on muotoa $F = -kx$. Sovitaan suunta alas positiiviseksi. Tasapainotilassa on voimassa yhtälö $kx = mg$.

Jousivakio on $k = \frac{mg}{x} = \frac{1,0 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{0,10 \text{ m}} = 98,1 \text{ N/m}$.

Jaksonaika on $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1,0 \text{ kg}}{98,1 \text{ N/m}}} \approx 0,63 \text{ s}$.

3. a) Aallonpituus on $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1500 \text{ m/s}}{440 \text{ 1/s}} \approx 3,4 \text{ m}$.

4. c) Taittumislaista $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$ saadaan $\sin \alpha_2 = \frac{v_2 \sin \alpha_1}{v_1} = \frac{1500 \text{ m/s} \cdot \sin 10^\circ}{340 \text{ m/s}}$, josta taitekulma on $\alpha_2 \approx 50^\circ$.

5. b) Urkupilliin syntyy seisova aalto: nyt putken ilmatilan pituus on neljäsosa seisovan aallon aallonpituudesta. Urkupillin perustaajuus on

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{332 \text{ m/s} \cdot \sqrt{\frac{291,15 \text{ K}}{273,15 \text{ K}}}}{4 \cdot 0,550 \text{ m}} \approx 156 \text{ Hz}.$$

6. b) Taittumislaista $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$ saadaan $\sin \alpha_2 = \frac{n_1 \sin \alpha_1}{n_2} = \frac{1,31 \cdot \sin 16^\circ}{1,33}$, josta $\alpha_2 \approx 15,8^\circ$.

7. c) Taittumislaista $\frac{\sin \alpha_r}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$ saadaan $\sin \alpha_r = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1,00}{1,61}$, josta kokonaisheijastumisen rajakulma on $\alpha_r \approx 38,4^\circ$.

8. b) Viivasuurennos on $m = \frac{k}{e} = \frac{|b|}{|a|} = \frac{25 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} \approx 1,7$.

9. d) Peilin kuvausyhtälöä käytettäessä kuperan peilin polttoväli on negatiivinen. Peilin kuvausyhtälöstä $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ saadaan $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a}$, ja edelleen

$$b = \frac{af}{a-f} = \frac{28 \text{ cm} \cdot (-12 \text{ cm})}{28 \text{ cm} - (-12 \text{ cm})} = \frac{-336 \text{ cm}^2}{40 \text{ cm}} = -8,4 \text{ cm}.$$

10. c) Taittovoimakkuuden yhtälöstä $D = \frac{1}{f}$ saadaan polttoväliksi

$$f = \frac{1}{D} = \frac{1}{+1,9 \text{ 1/m}} \approx 0,53 \text{ m}.$$

11. Värähtelyn jaksonaika on $T = \frac{32}{13} \text{ s} = 2,462 \text{ s} \approx 2,5 \text{ s}$.

Taajuus on $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2,462 \text{ s}} \approx 0,41 \text{ Hz}$.

12. Sydämen värähtelytaajuus on $f = 157 \frac{1}{\text{min}} = \frac{157}{60 \text{ s}} = 2,617 \text{ Hz} \approx 2,6 \text{ Hz}$.

Jaksonaika on $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2,617 \frac{1}{\text{s}}} \approx 0,38 \text{ s}$.

13. Jaksonajan yhtälöstä $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ saadaan jousen jousivakion suuruudeksi

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1,0 \text{ kg}}{(2,0 \text{ s})^2} \approx 9,87 \text{ N/m}.$$

Yhtälöstä $F = -kx$ venymän suuruudeksi saadaan $x = -\frac{F}{k} = -\frac{-2,0 \text{ N}}{9,87 \text{ N/m}} \approx 0,20 \text{ m}$.

14. a) Värähtelevän punnuksen värähtelyn jaksonaika on $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, kun m on punnuksen massa ja k jousen jousivakio. Kun punnuksen massa on $2m$, jakson aika on

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} = 2\pi\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{2} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{2}T_1,$$

joten jaksonaika muuttuu $\sqrt{2}$ -kertaiseksi.

b) Kun punnuksen massa on $\frac{1}{2}m$ ja jousivakio $2k$, jakson aika on

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}m}{2k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{4}\frac{m}{k}} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{2}T_1,$$

joten jaksonaika muuttuu $\frac{1}{2}$ -kertaiseksi eli pienenee puoleen.

15. Pianoon kohdistuva painon suuruus on $G = mg = 260 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 2550,6 \text{ N}$.

Köyden ylöspäin suuntautuva jousivoima on $F = -kx$, joten köyden venymä on $x = -\frac{F}{k}$.

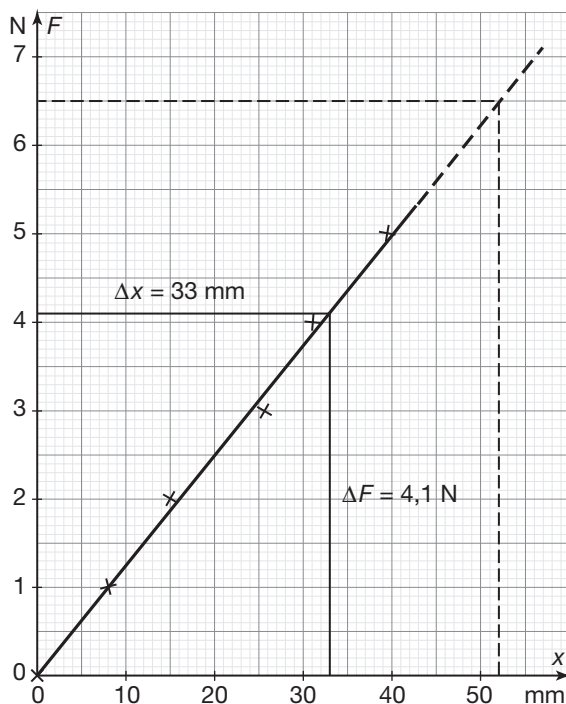
Tasapainotilanteessa köyden jousivoima on yhtä suuri kuin pianoon kohdistuva paino.

Valitaan suunta alas positiiviseksi, jolloin jousivoima on negatiivinen eli $F = -2550,6 \text{ N}$.

Köyden venymän suuruus on $x = -\frac{F}{k} = -\frac{-2550,6 \text{ N}}{57 \cdot 10^3 \text{ N/m}} \approx 4,5 \text{ cm}$.

16. a) Lisätään taulukkoon jousen venymä $x = l - l_0$, kun $l_0 = 185 \text{ mm}$ on jousen alkuperäinen pituus.

F/N	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
l/mm	185	193	200	211	217	224
x/mm	0	8	15	26	32	39



Merkitään mittaustuloksia vastaavat pisteet (x, F) -koordinaatistoon, ja asetetaan pistejoukkoon suora, kun x on jousen venymä ja F venyttävä voima. Jousi vastustaa venyttävää voimaa yhtä suurella, mutta vastakkaissuuntaisella voimalla F_j . Tällöin myös

ΔF_j ja ΔF ovat yhtä suuria. Jousen jousivakio k määritetään suhteena $\frac{\Delta F_j}{\Delta x} \left(= \frac{\Delta F}{\Delta x} \right)$.

Jousivakio on kuvion perusteella $k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{4,1 \text{ N}}{33 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \approx 120 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

b) Jos oletetaan, että voima on harmoninen myös mittausalueen ulkopuolella venymän ollessa 52 mm, kuvion perusteella 52 mm:n venymään tarvittava voima on 6,5 N.

17. a) Värähtelyn taajuus säilyy, vaikka värähdysliike siirtyy jousesta toiseen.

Värähdysliikkeen etenemisnopeus jousessa B on $v_B = \lambda f = 0,80 \text{ m} \cdot 5,0 \text{ Hz} = 4,0 \text{ m/s}$.

b) B on aalto-opillisesti tiheämpää ainetta, koska nopeus v_B on pienempi kuin nopeus v_A (aallonpituus jousessa on suurempi). Aallon heijastuessa tiheämmästä aineesta tapahtuu puolen aallon vaihesiirto.

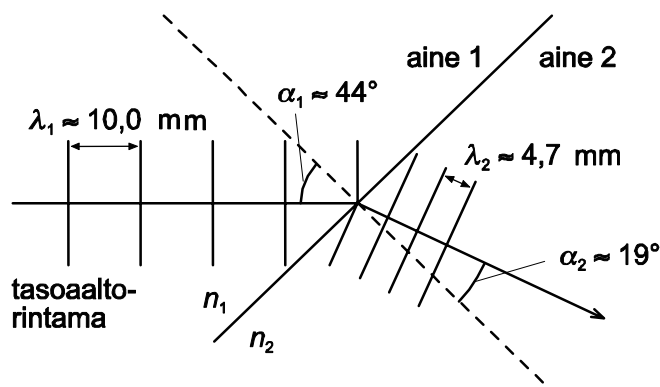
18. a) Aallonpituus on $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{6,4 \text{ m/s}}{4,01/\text{s}} \approx 1,6 \text{ m}$. Jousi on kiinnitetty molemmista päistä, joten kiinnityskohtiin muodostuu seisovan aallon solmut. Seinästä lukien solmujen paikat ovat $\frac{1,6 \text{ m}}{2} = 0,8 \text{ m}$ ja $1,6 \text{ m}$.

b) Ensimmäinen kupu on kohdassa $\frac{1,6 \text{ m}}{4} = 0,4 \text{ m}$ ja toinen $0,4 \text{ m} + \frac{1,6 \text{ m}}{2} = 1,2 \text{ m}$.

19. a) Kumpikin kivi synnyttää veden pinnalle muutamia ympyränmuotoisia aaltorintamia. Kun aaltorintamat kohtaavat, ne interferoivat. Samankokoiset kivet synnyttävät likimain yhtä voimakasta aaltoilua. Tietyissä suunnissa havaitaan likimain tyyni veden pinta, koska näissä suunnissa aaltojen aallonharjat ovat vastakkaisessa vaiheessa, jolloin amplitudiltaan yhtä suuret aallot sammuttavat toisensa. Tietyissä suunnissa havaitaan voimakasta aaltoilua. Näissä suunnissa aallot ovat samassa vaiheessa. Aallot vahvistavat toisiaan.

b) Jokainen kiven pinnan kohta, johon aaltorintama törmää, on uuden ympyränmuotoisen alkeisaallon lähde. Syntyneet alkeisaallot interferoivat. Syntyneiden aaltorintamien suunta poikkeaa alkuperäisten aaltorintamien suunnasta. Tätä kutsutaan diffraktioksi. Veden aallot voivat edetä näin ollen myös kiven taakse.

20.



Taittuneen aallon suunta ja aallonpituus λ_1 yhdessä määräävät taittuneen aallon aallonpituuden λ_2 .

Piirroksista saadaan mittaamalla $\lambda_1 \approx 10,0 \text{ mm}$ ja $\lambda_2 \approx 4,7 \text{ mm}$ sekä $\alpha_1 \approx 44^\circ$ ja $\alpha_2 \approx 19^\circ$.

Lasketaan λ_2 mitattujen kulmien avulla taittumislaista:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \text{ joten } \lambda_2 = \lambda_1 \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = 10,0 \text{ mm} \cdot \frac{\sin 19^\circ}{\sin 44^\circ} \approx 4,7 \text{ mm}.$$

Taitekerroin n_{12} saadaan kulmien avulla:

$$n_{12} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin 44^\circ}{\sin 19^\circ} \approx 2,1.$$

Taitekerroin voidaan laskea myös aallonpituuksien avulla: $n_{12} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{10,0 \text{ mm}}{4,7 \text{ mm}} \approx 2,1$.

21. a) Oikein. Aineesta 1 rajapintaan tulee yhtä monta aaltoa aikayksikössä kuin rajapinnasta lähtee aineeseen 2, joten taajuus on vakio. Aaltolähde määrää taajuuden.

b) Väärin. Aaltoliikkeen perusyhtälön $v = \lambda f$ mukaan jos aallonpituus pienenee, nopeuskin pienenee, koska taajuus on vakio.

22. a) Taittumislain $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$ mukaan

$$\sin \alpha_2 = \frac{v_2 \cdot \sin \alpha_1}{v_1} = \frac{7200 \text{ m/s} \cdot \sin 59^\circ}{6300 \text{ m/s}} = 0,9796, \text{ joten taitekulma } \alpha_2 \approx 78^\circ.$$

b) Kokonaisheijastumisessa aallon tulokulma α_i on samalla kokonaisheijastumisen rajakulma α_r ja taitekulma on 90° .

Taittumislaki $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$ saa muodon $\frac{\sin \alpha_1}{\underbrace{\sin 90^\circ}_1} = \frac{v_1}{v_2}$, joten $\sin \alpha_r = \frac{6300 \text{ m/s}}{7200 \text{ m/s}} = 0,8750$.

Kokonaisheijastumisen rajakulma on $\alpha_r \approx 61^\circ$.

c) Maanjäristysaaltojen etenemisestä tehdään havaintoja eri puolilla maailmaa olevilla tutkimusasemilla (seismografisilla asemilla). Aaltojen etenemisestä, heijastumisista, taittumisista ja nopeuksista saadaan tietoa vertaamalla samojen aaltojen havaitsemishetkiä eri asemilla.

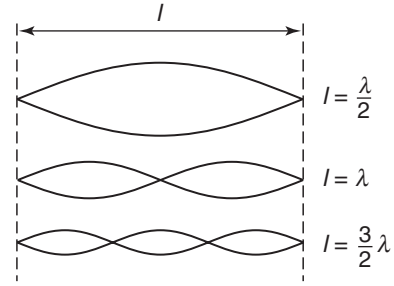
d) Kun selvitetään maanjäristysaaltojen eteneminen maankuoressa, samalla saadaan tietoa maapallon sisuksen rakenteesta, esimerkiksi tiedetään, että maapallon ytimen uloin osa on nestemäinen.

23. a) Perusvärähtelyssä langan pituus l on puolet aallonpituudesta, joten

$$\lambda = 2l = 2 \cdot 0,90 \text{ m} = 1,8 \text{ m}.$$

Ensimmäisessä ylävärähtelyssä aallon pituus on yhtä suuri kuin langan pituus, joten

$$\lambda = l = 0,90 \text{ m}.$$



Toisessa ylävärähtelyssä langan pituus on $l = \frac{3}{2}\lambda$, joten aallonpituus on

$$\lambda = \frac{2}{3}l = \frac{2}{3} \cdot 0,90 \text{ m} = 0,60 \text{ m}.$$

b) Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan nopeus on $v = \lambda f = 1,8 \text{ m} \cdot 82 \frac{1}{\text{s}} \approx 150 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

24. Olkoon rinteiden väli s . Kun paukahduksia kuuluu kolme, ääni kulkee kaksi kertaa edestakaisin rinteiden välillä. Tällöin saadaan yhtälö $4s = vt$, jossa s on rinteiden välimatka, äänen nopeus $v = 343 \text{ m/s}$ ja $t = 9,3 \text{ s}$. Rinteiden välimatka on

$$s = \frac{vt}{4} = \frac{343 \text{ m/s} \cdot 9,3 \text{ s}}{4} \approx 800 \text{ m}.$$

25. a) Äänen kulkiessa ilmasta veteen taitesuhde on $n_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{340 \text{ m/s}}{1500 \text{ m/s}} \approx 0,23$.

b) Taittumislaki $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$ saadaan muotoon $\sin \alpha_r = \frac{v_1}{v_2} = \frac{340 \text{ m/s}}{1500 \text{ m/s}}$, josta

kokonaisheijastumisen rajakulma on $\alpha_r \approx 13^\circ$. Suurin tulokulma on 13° .

c) Kun ääni saapuu ilmasta ilman ja veden rajapintaan, heijastuneessa aallossa ei tapahdu vaihesiirtoa, koska ääni heijastuu aalto-opillisesti harvemmasta aineesta (vedessä äänen nopeus on suurempi kuin ilmassa).

Kun aalto menee ilman ja veden rajapinnan läpi, vaihesiirtoa ei tapahdu, meneepä ääni pinnan läpi kummasta suunnasta tahansa.

26. a) Taittumislaki $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$ saadaan muotoon $\sin \alpha_r = \frac{v_1}{v_2} = \frac{340 \text{ m/s}}{1500 \text{ m/s}}$,

josta kokonaisheijastumisen rajakulmaksi saadaan $\alpha_r \approx 13^\circ$:

tulokulma voi olla välillä $0 \leq \alpha_i \leq 13^\circ$.

b) Vesi on äänen etenemisen suhteen aalto-opillisesti harvempi aine kuin ilma.

Kokonaisheijastumista ei tapahdu, joten ääni pääsee vedestä ilmaan tulokulman arvoilla $0 \leq \alpha_i \leq 90^\circ$.

27. Ääniaallot vaimentavat toisensa, kun ne ovat vastakkaisissa vaiheissa: tällöin matkaero on aallonpituuden puolikas.

Yhtälöstä $\frac{\lambda}{2} = 4,6 \text{ m} - 3,8 \text{ m}$ saadaan aallonpituudeksi $\lambda = 1,6 \text{ m}$.

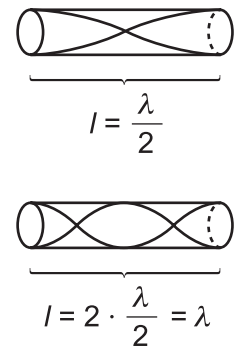
Äänen nopeus ilmassa on $v = \lambda f = 1,6 \text{ m} \cdot 210 \frac{1}{\text{s}} \approx 340 \text{ m/s}$.

28. Ääniraudan äänen aallonpituus on $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340 \text{ m/s}}{440 \text{ 1/s}} \approx 0,773 \text{ m}$.

a) Laatikon avoimeen päähän muodostuu kupu ja suljettuun solmu, jolloin laatikon pituus on neljäsosa aallonpituudesta. Laatikon pituudeksi saadaan $l = \frac{\lambda}{4} = \frac{0,773 \text{ m}}{4} \approx 19 \text{ cm}$.

b) Nyt laatikon molemmissa päissä on kupu, joten laatikon pituus on puolet aallonpituudesta eli $l = \frac{\lambda}{2}$. Taajuus on $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340 \text{ m/s}}{0,773 \text{ m}} \approx 880 \text{ Hz}$.

29. a) Interferenssin vaikutuksesta putkeen syntyy seisova aalto. Putken avoimiin päihin syntyy kuvut ja välille yksi tai useita solmukohtia. Äänenvoimakkuuden ensimmäinen maksimi syntyy, kun putkessa on yksi solmu, tällöin värähtelevän ilmapatsaan pituus on puolet aallonpituudesta eli $l = \frac{\lambda}{2}$. Toinen maksimi syntyy, kun putkessa on kaksi solmua: tällöin ilmapatsaan pituus on kaksi aallonpituuden puolikasta eli $l = 2 \cdot \frac{\lambda}{2} = \lambda$.



b) Kun ensimmäinen äänenvoimakkuuden maksimi havaitaan, aallonpituus on

$\lambda_1 = 2l = 2 \cdot 1,10 \text{ m} = 2,20 \text{ m}$. Äänen nopeus on $v_1 = \lambda_1 f_1 = 2,20 \text{ m} \cdot 150 \frac{1}{\text{s}} = 330 \text{ m/s}$.

Kun havaitaan toinen äänenvoimakkuuden maksimi, aallonpituus on $\lambda_2 = l = 1,10 \text{ m}$.

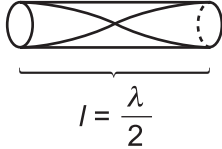
Äänen nopeus on $v_2 = \lambda_2 f_2 = 1,10 \text{ m} \cdot 295 \frac{1}{\text{s}} = 324,5 \text{ m/s}$.

Lasketaan nopeuksien keskiarvo: $v = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{330 \text{ m/s} + 324,5 \text{ m/s}}{2} \approx 327 \text{ m/s}$.

Äänen nopeus on 327 m/s.

30. a) Matalataajuinen värinä etenee äänen nopeudella kiinteässä maassa, esimerkiksi graniitissa 4000 m/s. Äänen nopeus ilmassa on vain vajaa kymmenesosa edellisestä, joten värinä havaitaan ennen ääntä.

b) Sopivalla nopeudella ajettaessa tikkaiden ohi virtaava viima saa ilman värähtelemään ja siten synnyttää seisovan aallon molemmista päistä avoimien askelmien sisälle. Tällöin askelmien päissä on seisovan aallon kuvut. Vauhdin kasvaessa syntyy ensin matalin ääni, jolloin askelman sisällä olevassa ilmapatsaassa on yksi solmu: askelmien pituus on puolet äänen aallonpituudesta.



Yhtälöstä $l = \lambda/2$ aallonpituudeksi saadaan $\lambda = 2l = 2 \cdot 0,55 \text{ m} = 1,1 \text{ m}$. Äänen taajuus on

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343 \text{ m/s}}{1,1 \text{ m}} \approx 310 \text{ Hz}.$$

31. Havaitun äänen taajuus on $f = 622 \text{ Hz}$. Aaltolähteen taajuus $f_0 = 596 \text{ Hz}$. Äänen etenemisnopeus on $v = 343 \text{ m/s}$ ja v_1 on aaltolähteen nopeus.

Dopplerin ilmiöön liittyvä havaittu taajuus, kun aaltolähde lähestyy havaitsijaa, on

$$f = f_0 \frac{v}{v - v_1}.$$

Ratkaistaan yhtälöstä aaltolähteen (linnun) nopeus v_1 :

$$f(v - v_1) = f_0 v$$

$$fv - fv_1 = f_0 v$$

$$fv - f_0 v = fv_1,$$

josta linnun (aaltolähteen) nopeudeksi saadaan

$$v_1 = \frac{fv - f_0 v}{f} = \frac{622 \text{ Hz} \cdot 343 \text{ m/s} - 596 \text{ Hz} \cdot 343 \text{ m/s}}{622 \text{ Hz}} \approx 52 \text{ km/h}.$$

32. a) Ääni etenee ilmassa pitkittäisenä aaltoliikkeenä. Äänen etenemisen suunnassa ilman molekyylit värähtelevät edestakaisin, jolloin ilmaan syntyy peräkkäisiä tihentymiä ja harventumia.

b) Äänen intensiteetti sekä äänen taajuus vaikuttavat eniten kuuloaistimuksen voimakkuuteen.

c) Ihmisen kuuleman äänen voimakkuus ei ole suoraan verrannollinen äänen intensiteettiin. Myös korvan herkkyys eri taajuuksien äänien suhteen vaihtelee. Äänen intensiteettitaso on $L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \text{ dB}$, jossa $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ on äänen intensiteetti

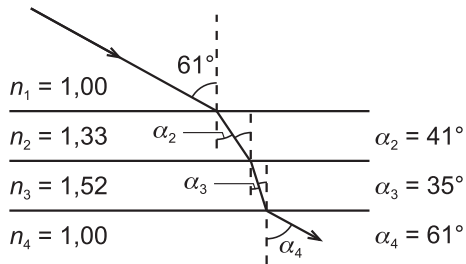
kuulokynnyksellä. Intensiteettitaso on 1 dB. Intensiteettitaso on asteikko on logaritminen, koska sen mukainen matemaattinen lainalaisuus vastaa korvan todellista toimintaa. Esimerkiksi tuotaessa yhden sähkömoottorin vierelle toinen sähkömoottori aistitun melutaso voimakkuus ei kaksinkertaistu, vaikka intensiteetti kaksinkertaistuu.

33. Äänen intensiteettitaso on $L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \text{ dB} = 10 \lg \frac{1,2 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} \text{ dB} \approx 91 \text{ dB}$.

34. Taitesuhde voidaan ilmoittaa aallonpituuksien avulla: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n_{12}$, josta aallonpituudeksi

$$\text{saadaan } \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{n_{12}} = \frac{589 \text{ nm}}{1,647} \approx 358 \text{ nm}.$$

35. Tarvittavat kulmat saadaan taittumislain $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$.



Sovelletaan taittumislakia eri pintaparien tilanteissa.

Ensimmäinen taittuminen: $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$, josta saadaan

$$\sin \alpha_2 = \frac{n_1 \cdot \sin \alpha_1}{n_2} = \frac{1,00 \cdot \sin 61^\circ}{1,33} \text{ ja } \alpha_2 \approx 41^\circ.$$

Toinen taittuminen: $\frac{\sin 41,12^\circ}{\sin \alpha_3} = \frac{n_3}{n_2}$, josta saadaan

$$\sin \alpha_3 = \frac{n_2 \cdot \sin 41,12^\circ}{n_3} = \frac{1,33 \cdot \sin 41,12^\circ}{1,52} \text{ ja } \alpha_3 \approx 35^\circ.$$

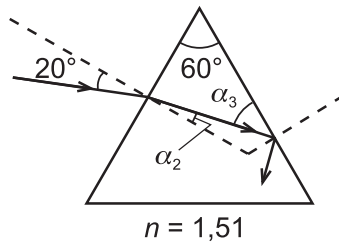
Kolmas taittuminen: $\frac{\sin 35,13^\circ}{\sin \alpha_4} = \frac{n_4}{n_3}$, josta saadaan

$$\sin \alpha_4 = \frac{n_3 \cdot \sin 35,13^\circ}{n_4} = \frac{1,52 \cdot \sin 35,13^\circ}{1,00} \text{ ja } \alpha_4 \approx 61^\circ.$$

36. Taittumislain mukaan on $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$, joten yhtälöstä

$$\sin \alpha_2 = \frac{n_1 \cdot \sin \alpha_1}{n_2} = \frac{1,00 \cdot \sin 20^\circ}{1,51}$$

ensimmäisen taittumisen jälkeen taitekulma on $\alpha_2 = 13,1^\circ$.



Lasketaan kulma α_3 : $\alpha_3 = 180^\circ - 60^\circ - (90^\circ - 13,1^\circ) = 43,1^\circ$.

Valon tulokulma valonsäteen osuessa oikeanpuoleiseen sivutahkoon on $90^\circ - \alpha_3 = 90^\circ - 43,1^\circ = 46,9^\circ$.

Tutkitaan, tapahtuuko oikeanpuoleisessa sivutahkossa kokonaisheijastuminen: kokonaisheijastuminen on mahdollinen, koska valo tulee optisesti tiheämmästä optisesti harvempaan aineeseen.

Tahtumislaista $\frac{\sin \alpha_r}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$ saadaan kokonaisheijastumisen rajakulma: $\sin \alpha_r = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1,00}{1,51}$,

josta kokonaisheijastumisen rajakulma on $\alpha_r \approx 41^\circ$.

Koska valonsäteen tulokulma on suurempi kuin kokonaisheijastumisen rajakulma, tapahtuu kokonaisheijastuminen.

37. a) Väliaineen taitekerroin riippuu valon aallonpituudesta. Tästä syystä eri aallonpituuden omaavat valonsäteet (eriväriset valonsäteet) taittuvat eri suuntiin prismoissa ja linseissä, jolloin kuvan terävyys heikkenee ja ääri viivat voivat näkyä jopa spektrin väreihin hajonneina. Hyvissä optisissa laitteissa dispersion haitat on poistettu.

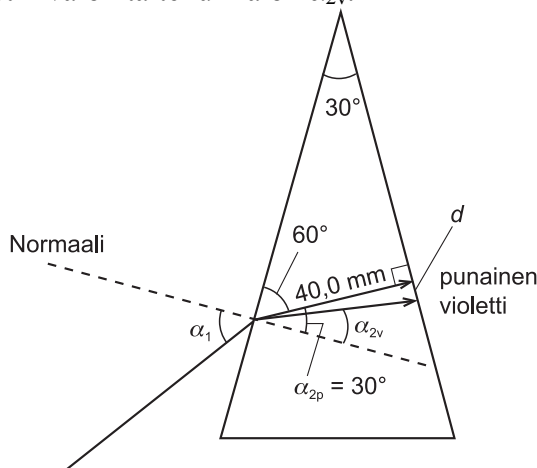
b) Lasin taitekertoimet punaiselle ja violetille valolle ovat $n_p = 1,505$ ja $n_v = 1,525$.

Ilman taitekerroin on $n_p = n_v = n = 1,000$.

Punaisen ja violetin valon tulokulma on $\alpha_{1p} = \alpha_{1v} = \alpha_1$.

Punaisen valon taitekulma on $\alpha_{2p} = 30,0^\circ$.

Violetin valon taitekulma on α_{2v} .



Käytetään taittumislakia punaiselle valolle:

$$\frac{\sin \alpha_{1p}}{\sin \alpha_{2p}} = \frac{n_p}{n}, \text{ josta } \sin \alpha_{1p} = \frac{n_p \sin \alpha_{2p}}{n} = \frac{1,505 \cdot \sin 30,0^\circ}{1,00},$$

josta tulokulma on $\alpha_{1p} = 48,8074^\circ$.

Käytetään taittumislakia violetille valolle:

$$\frac{\sin \alpha_{1v}}{\sin \alpha_{2v}} = \frac{n_v}{n}, \text{ josta } \sin \alpha_{2v} = \frac{n \sin \alpha_{1v}}{n_v} = \frac{1,000 \cdot \sin 48,8074^\circ}{1,525}, \text{ josta}$$

violetin valon tulokulma on $\alpha_{2v} = 29,5671^\circ$.

Olkoon d violetin valon ja punaisen valon osumakohtien ero toisella pinnalla.

Punaisen ja violetin valoallon välinen kulma on $30,0^\circ - 29,5671^\circ = 0,4329^\circ$.

Yhtälöstä $\tan 0,4329^\circ = \frac{d}{40,0 \text{ mm}}$ saadaan $d = 40,0 \text{ mm} \cdot \tan 0,4329^\circ = 0,302 \text{ mm}$.

38. Lasketaan ensin ensimmäisen kertaluvun taitekulma:

$$\tan \alpha = \frac{0,0656 \text{ m}}{2,00 \text{ m}}, \text{ josta taitekulma on } \alpha \approx 1,879^\circ.$$

Yhtälöstä $d \sin \alpha = k \lambda$ aallonpituus on

$$\lambda = \frac{d \sin \alpha}{k} = \frac{\frac{1 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{500} \cdot \sin 1,879^\circ}{1} \approx 656 \text{ nm}.$$

39. Yhtälöstä $d \sin \alpha = k \lambda$ valon aallonpituudeksi saadaan

$$\lambda = \frac{d \sin \alpha}{k} = \frac{\frac{1 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{5700} \cdot \sin 22,0^\circ}{1} \approx 657 \text{ nm}.$$

Punaisen valon taajuus on $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{2,998 \cdot 10^8 \text{ m}}{657,2 \text{ nm}} \approx 4,56 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$

40. Yhtälö $d \sin \alpha = k \lambda$ saadaan muotoon $\sin \alpha = \frac{k \lambda}{d}.$

Aallonpituus 400 nm: $\sin \alpha_1 = \frac{1 \cdot 400 \text{ nm}}{\frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{500}}, \text{ josta saadaan } \alpha_1 \approx 12^\circ.$

Aallonpituus 750 nm: $\sin \alpha_2 = \frac{1 \cdot 750 \text{ nm}}{\frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{500}}, \text{ josta saadaan } \alpha_2 \approx 22^\circ.$

Spektri näkyy kulmien 12° ja 22° välillä.

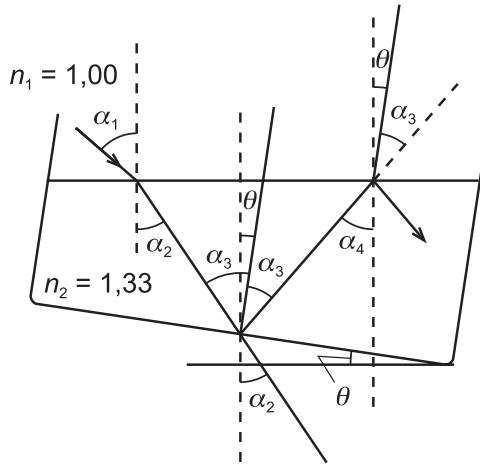
41. a) Koska ilmassa tapahtuu kokonaisheijastuminen, taittumislaki $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$ saadaan

muotoon $\frac{\sin \alpha_1}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1}$ eli $\sin \alpha_1 = \frac{1,00}{1,89}$, josta kokonaisheijastumisen rajakulma on

$\alpha_1 \approx 31,9^\circ.$

b) Tahtumislaki $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$ saadaan muotoon $\sin \alpha_2 = \frac{n_1 \sin \alpha_1}{n_2} = \frac{1,89 \cdot \sin 31,945^\circ}{1,33}$, josta kulma $\alpha_2 \approx 48,8^\circ$.

42. Kallistettaessa astiaa veden pinta asettuu vaakatasoon. Kun astiaa kallistetaan pohjasta, heijastunut säde kokonaisheijastuu veden ja ilman rajapinnassa.



Tahtumislaista $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$ saadaan $\sin \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_1 n_1}{n_2} = \frac{\sin 42^\circ \cdot 1,00}{1,33}$,

josta valon taitekulma on $\alpha_2 \approx 30,21^\circ$.

Lasketaan kokonaisheijastumisen rajakulma:

$$\sin \alpha_4 = \frac{n_1 \sin 90^\circ}{n_2} = \frac{1,00 \cdot \sin 90^\circ}{1,33}, \text{ josta kulma } \alpha_4 \approx 48,75^\circ.$$

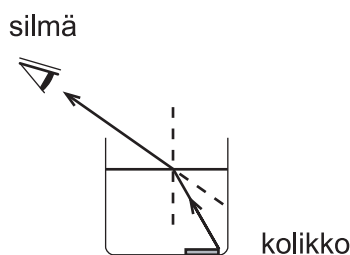
Kuvion perusteella α_4 ja $\alpha_3 + \theta$ ovat ristikulmina yhtä suuret eli $\alpha_4 = \alpha_3 + \theta$, josta $\alpha_3 = \alpha_4 - \theta$.

Samoin α_2 ja $\alpha_3 - \theta$ ovat ristikulmina yhtä suuret eli $\alpha_2 = \alpha_3 - \theta$, josta $\alpha_3 = \alpha_2 + \theta$.

Saadaan yhtälö $\alpha_2 + \theta = \alpha_4 - \theta$ eli $2\theta = \alpha_4 - \alpha_2$.

Kallistuskulma on $\theta = \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{2} = \frac{48,75^\circ - 30,21^\circ}{2} \approx 9,3^\circ$

43. a) Kolikosta saapuu valoaaltoja silmään siten, että valon kulkusuunta muuttuu valon läpäistessä vedenpinnan. Valon kulkusuunta kääntyy pinnan normaalista poispäin silmää kohti.



b) Veden pinnasta heijastunut valo on osittain polarisoitunut, eli osa sähkökentän värähtelyistä on absorboitunut. Polarisoivat aurinkolasit absorboivat heijastuneesta valosta osan sähkökentän värähtelyistä.

c) Valkoinen valo koostuu eri aallonpituuksia. Prismen taitekerroin on erilainen eri aallonpituuksille, jolloin eri aallonpituudet (eri värit) taittuvat eri suuntiin. Punaiselle valolle prismen taitekerroin on pienempi kuin violetille.

44. a) Oikein. Hilayhtälön $d \sin \alpha = k \lambda$ mukaan taipumiskulma α on sitä suurempi, mitä suurempi aallonpituus on. Punaisen valon aallonpituus on näkyvän valon eri aallonpituuksista (väreistä) suurin.

b) Väärin. Kun valo tulee optisesti kahden erilaisen aineen rajapintaan aineesta 1

aineeseen 2, taittumislain mukaan on $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$. Rajatauksessa taitekulma $\alpha_2 = 90^\circ$,

jolloin $\sin \alpha_2 = \sin 90^\circ = 1$. Tällöin tulokulmalle α_1 on $\sin \alpha_1 = \frac{n_2}{n_1} > 1$, sillä $n_2 > n_1$.

Tässä on ristiriita, sillä kaikilla kulmilla $\sin \alpha_1 \leq 1$.

45. a) Kun kaksi vastakkaisiin suuntiin kulkevaa aaltoa kohtaavat ja interferoivat, voi muodostua seisova aalto. Seisovassa aallossa esiintyy kupukohtia ja solmukohtia. Solmujen kohdalla aine ei liiku, kuvuissa aine värähtelee, eniten huipun kohdalla. Seisova aalto ei etene eikä kuljeta energiaa.

Esimerkiksi soittimien kieliin, jotka on kiinnitetty molemmista päistään soittimeen, muodostuu seisova aalto. Myös puhallinsoittimien, kuten huilujen ja urkupillien, sisällä ilmapatsaaseen voi muodostua seisova aalto.

b) Kun aaltolähde ja havaitsija liikkuvat toistensa suhteen, huomataan taajuuden olevan erilainen kuin siinä tapauksessa, että aaltolähde ja havaitsija olisivat paikoillaan. Kun esimerkiksi ambulanssi tulee sireenit ulvoen kohti paikallaan olevaa henkilöä ja ohituksen jälkeen loittonee, voi henkilö kuulla äänen olevan korkeampi lähestymisvaiheen aikana kuin loitonemisen aikana. Ambulanssin kulkiessa pois päin taajuus pienenee.

Ohitushetkellä taajuuden muutoksen huomaa selvästi.

Kaukaisten tähtien valossa voidaan havaita ns. punasiirtymä, jos tähti loittonee.

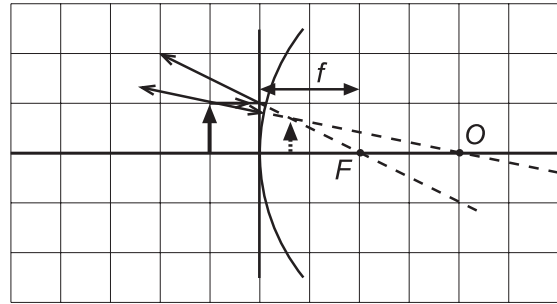
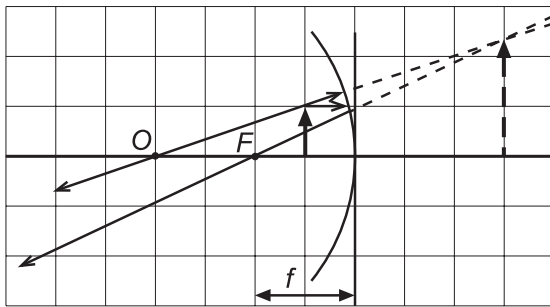
Esimerkiksi vetyatomista peräisin olevan valoaallon aallonpituus on laboratoriomittauksen arvoa pidempi, jos valo saapuu loittonevasta tähdestä. Nimitys "punasiirtymä" tulee siitä, että valon aallonpituus pitenee eli siirtyy spektrin punaista reunaa kohti. Vastaavasti Doppler-ilmiö aiheuttaa sinisiirtymän, jos tähti saapuu meitä kohti.

c) Jos valo heijastuu eristeestä tai kulkee jonkin aineen läpi, valo voi polarisoitua.

Valoaallossa olevan sähkökentän värähtelysuunta voi olla mikä tahansa, mutta jos valo on polarisoitunutta, sähkökenttä värähtelee vain tietyissä suunnissa. Sähkökentän värähtelysuunta on sovittu polarisaatiosuunnaksi. Jos valo on täydellisesti polarisoitunutta, sähkökenttä värähtelee vain yhdessä suunnassa.

Aurinkolaseissa käytetään hyödyksi polarisaatiota. Esimerkiksi pinnoista heijastunut valo voi olla polarisoitunutta. Polarisoivat aurinkolasit heikentävät tätä heijastunutta valoa ja vähentävät siten häikäisyä. Polarisaatiota hyödynnetään myös nestekidenäytöissä. Jotkin nesteliuokset kääntävät polarisaatiotasoa.

46.



47. Koska kuva on todellinen, peili on kovera. Peilien kuvausyhtälö $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ saadaan laventamalla muotoon $\frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{1}{f}$ ja edelleen $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{f}$.

Peilin polttoväliksi saadaan $f = \frac{ab}{a+b} = \frac{15 \text{ cm} \cdot 55 \text{ cm}}{15 \text{ cm} + 55 \text{ cm}} \approx 11,79 \text{ cm}$.

Koska polttoväli on puolet kaarevuussäteestä eli $f = \frac{r}{2}$, kaarevuussäteeksi saadaan $r = 2f = 2 \cdot 11,79 \text{ m} \approx 24 \text{ cm}$.

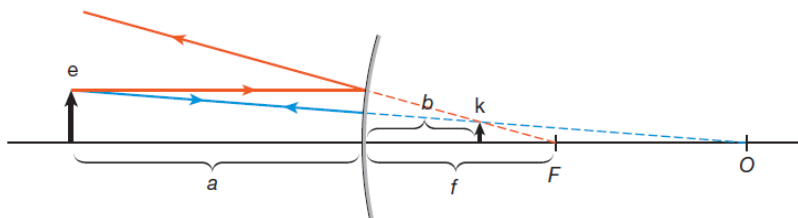
48. Peili on kupera, joten peilin polttoväli on $f = -\frac{r}{2} = -\frac{60 \text{ cm}}{2} = -30 \text{ cm}$. Peilin

kuvausyhtälöstä $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ saadaan kuvan paikan käänteisluku

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} = \frac{1}{-30 \text{ cm}} - \frac{1}{46 \text{ cm}} = -\frac{19}{345 \text{ cm}}.$$

Valekuvan sijainti on $b = -\frac{345 \text{ cm}}{19} \approx -18 \text{ cm}$.

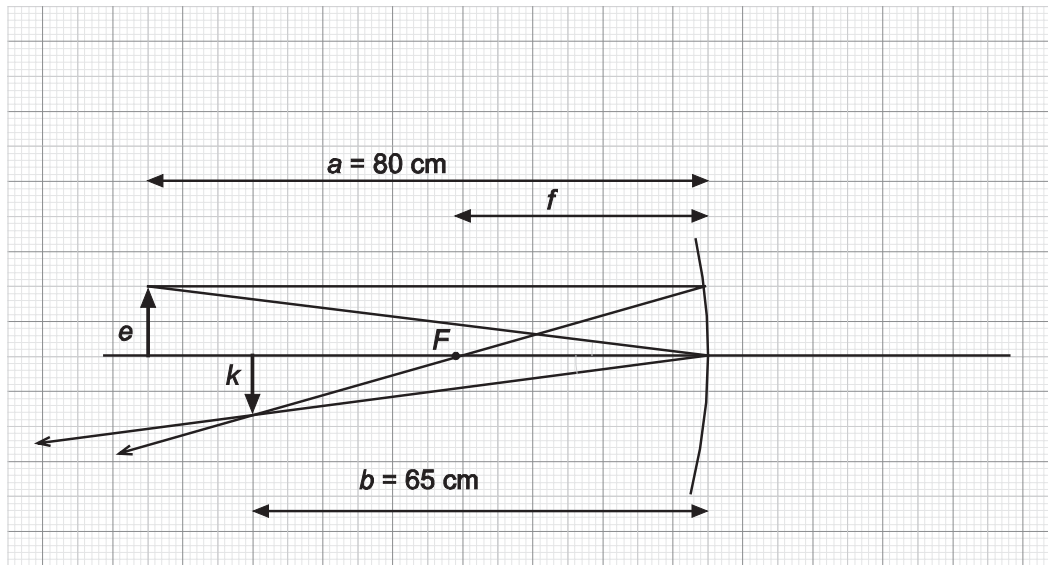
Peili muodostaa esineestä valekuvan 18 cm päähän peilin taakse.



49. Tehdään piirrokset mm-paperille oikeassa mittakaavassa seuraavassa järjestyksessä:

1. Piirretään esineeksi nuoli sekä sen kärjen kautta valonsäde peilin ja pääakselin leikkauspisteeseen. Peilistä heijastunut säde on tulevan säteen kanssa symmetrinen pääakselin suhteen. Ylösalaisin oleva nuoli piirretään kuvaksi 65,0 cm:n kohdalle. Nuolen kärki on heijastuneella säteellä.

2. Esineen kärjen kautta piirretään pääakselin suuntainen säde, joka heijastuu polttopisteen kautta ja kulkee kuvaa esittävän nuolen kärjen kautta. Mittaamalla peilin polttoväliksi saadaan 36 cm.



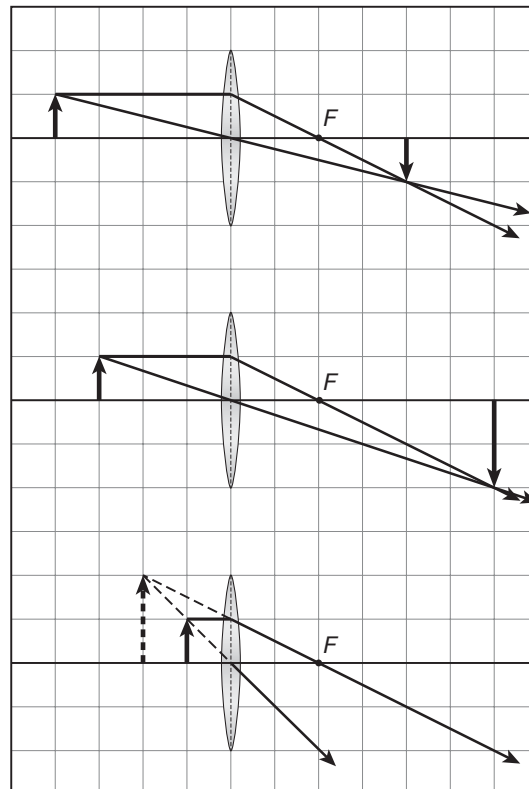
Peilin kuvausyhtälöstä $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ peilin polttoväliksi saadaan

$$f = \frac{ab}{a+b} = \frac{80,0 \text{ cm} \cdot 65,0 \text{ cm}}{80,0 \text{ cm} + 65,0 \text{ cm}} \approx 35,9 \text{ cm}.$$

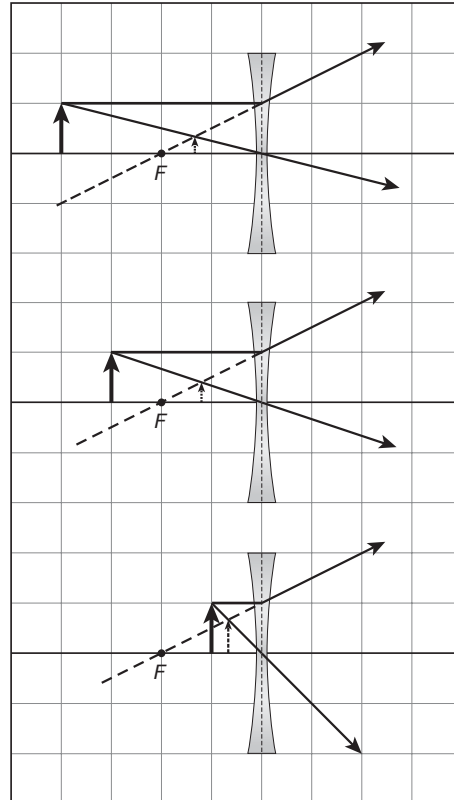
50. a) Kupera linssi muodostaa etäisyydellä $2f$ olevasta esineestä kuvan, joka on yhtä suuri kuin esine mutta ylösalaisin.

Kupera linssi muodostaa etäisyydellä $1,5f$ olevasta esineestä kuvan, joka on suurentunut ja ylösalaisin.

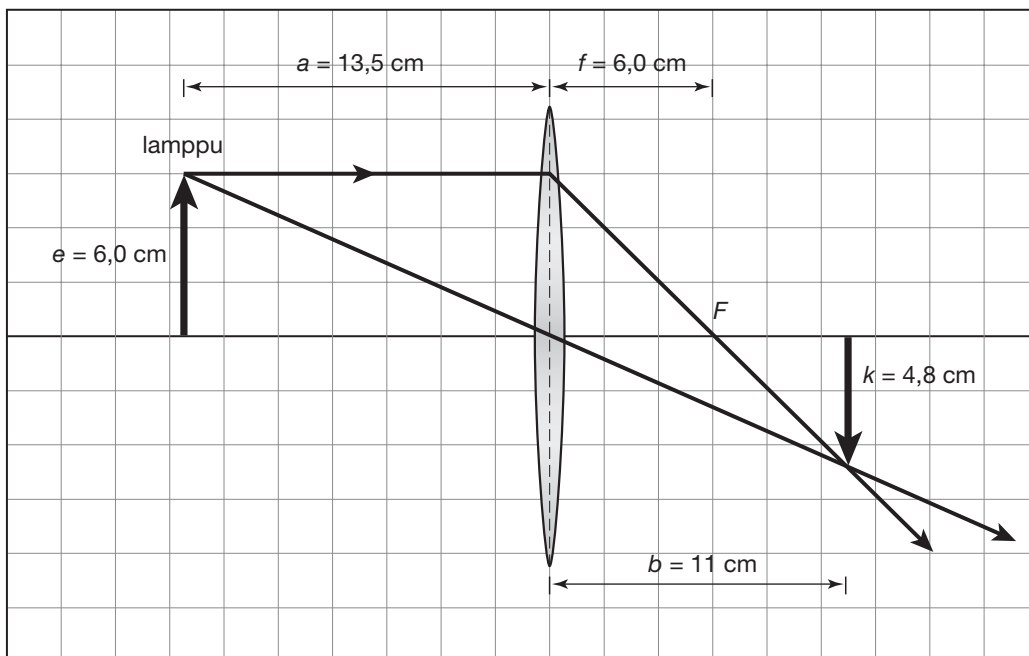
Kupera linssi muodostaa etäisyydellä $0,5f$ olevasta esineestä valekuvan, joka on suurentunut ja oikeinpäin



b) Kovera linssi muodostaa esineestä pienentyneen, oikeinpäin olevan valediagramin kaikissa tapauksissa. Mitä lähempänä linssiä esine on, sitä suurempi valediagrami on.



51. Koska linssi muodostaa todellisen kuvan, linssi on kupera. Viivasuurennoksen yhtälöstä $\frac{k}{e} = \frac{|b|}{|a|}$ kuvan etäisyys linssistä on $b = a \frac{k}{e} = 13,5 \text{ cm} \cdot \frac{4,8 \text{ cm}}{6,0 \text{ cm}} \approx 11 \text{ cm}$.



Linssin polttoväliksi saadaan $f = \frac{ab}{a+b} = \frac{13,5 \text{ cm} \cdot 10,8 \text{ cm}}{13,5 \text{ cm} + 10,8 \text{ cm}} = 6,0 \text{ cm}$.

52. Oikea vastausvaihtoehto on b).

Linssin taittovoimakkuus on $D = -2,0 \text{ d} = -2,0 \frac{1}{\text{m}}$.

Taittovoimakkuuden yhtälöstä $D = \frac{1}{f}$ linssin polttoväliksi saadaan

$$f = \frac{1}{-2,0 \text{ 1/m}} = -50 \text{ cm}.$$

Linssien kuvausyhtälöstä $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ valekuvan etäisyydeksi saadaan

$$b = \frac{af}{a-f} = \frac{100 \text{ cm} \cdot (-50 \text{ cm})}{100 \text{ cm} - (-50 \text{ cm})} \approx -33 \text{ cm}.$$

Viivasuurennos on $m = \frac{|b|}{|a|} = \left| \frac{-33,33 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} \right| \approx 0,33$.

53. Ensimmäisen linssin muodostama kuva toimii esineenä toiselle linssille.

Kuvausyhtälöstä $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}$ saadaan ensimmäisen linssin muodostaman kuvan paikaksi

$$b_1 = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1} = \frac{15,0 \text{ cm} \cdot 25,0 \text{ cm}}{15,0 \text{ cm} - 25,0 \text{ cm}} = -37,5 \text{ cm}.$$

Toiselle linssille esineen paikka on $a_2 = 50,0 \text{ cm} + 37,5 \text{ cm} = 87,5 \text{ cm}$.

Kuvausyhtälöstä $\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}$ saadaan toisen linssin muodostaman kuvan paikka:

$$b_2 = \frac{a_2 f_2}{a_2 - f_2} = \frac{87,5 \text{ cm} \cdot 30,0 \text{ cm}}{87,5 \text{ cm} - 30,0 \text{ cm}} \approx 45,7 \text{ cm}.$$

