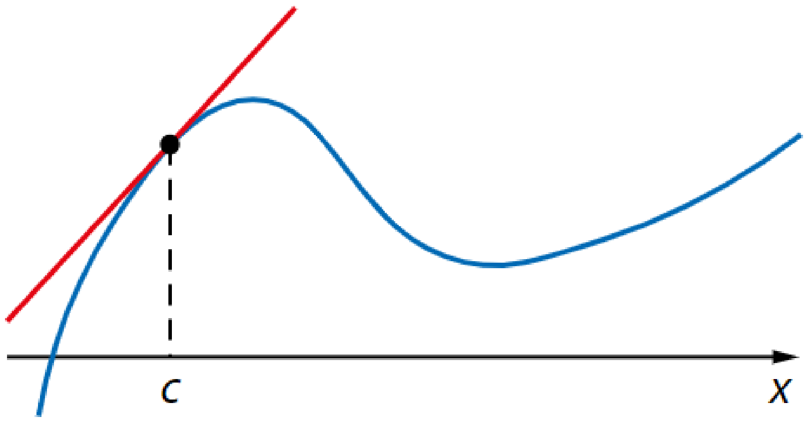
-Kulmakerroin määrittää aina suoralle "muutosnopeuden"
-funktiolle, joka ei ole suora voidaan määrittää hetkellinen muutos nopeus piirtämällä tangentti yhteen funktion pisteeseen (tangentti on suora joten sen muutosnopeus voidaan määrittää)

Funktion hetkellinen muutosnopeus eli derivaatta kohdassa $x = c$

1. Piirretään funktion kuvaajalle kohtaan $x = c$ tangentti.

2. Funktion hetkellinen muutosnopeus kohdassa $x = c$ saadaan määrittämällä tangentin kulmakerroin.



1) Vakiofunktion derivaatta

Vakiofunktion $f(x) = c$ derivaatta on $f'(x) = 0$.

Esimerkiksi:

$f(x) = 2$	$f'(x) = 0$
$g(x) = -1$	$g'(x) = 0$

2) Potenssifunktion derivaatta

Potenssifunktion $f(x) = x^n$ derivaatta on $f'(x) = nx^{n-1}$.

Esimerkiksi:

$f(x) = x^5$

1 2

$f'(x) = 5x^{5-1}$

$f'(x) = 5x^4$

1. Alkuperäinen eksponentti ”putoaa” derivaatan kertoimeksi.

2. Eksponentti pienenee yhdellä.

Funktion jokaisen termin voi derivoida erikseen. Esimerkiksi:

$$
\begin{aligned}
&D(4x^3 - 3x^2 + 1) \\
&= D(4x^3) + D(-3x^2) + D(1) \\
&= 4 \cdot 3x^{3-1} - 3 \cdot 2x^{2-1} + 0 \\
&= 12x^2 - 6x
\end{aligned}
$$

Derivoi funktio.

$f(x) = -2$ $\qquad$ $g(x) = x - 6$ $\qquad$ $h(x) = x^6$

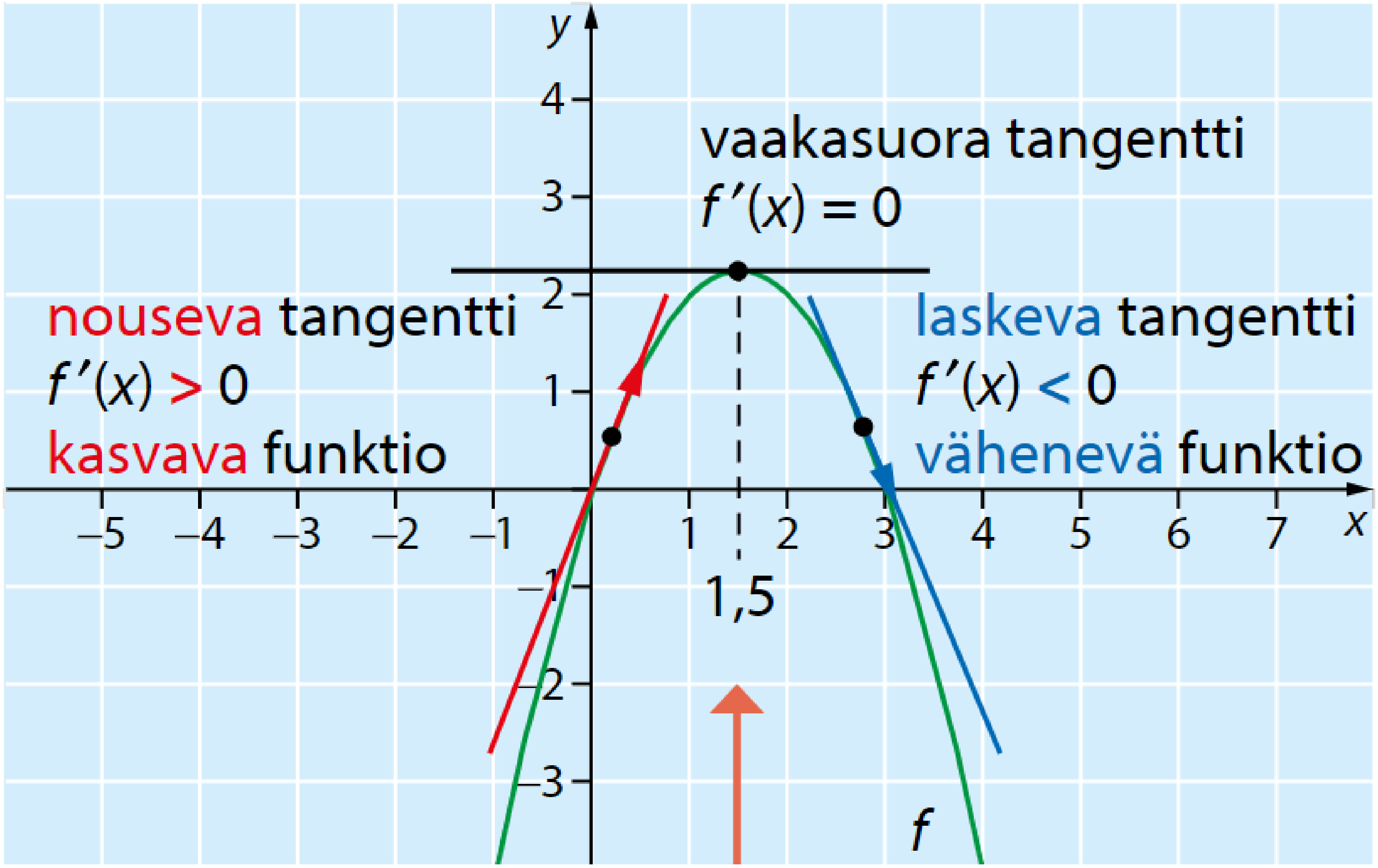
$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2 - 2x - 5 \\
g(x) &= 4x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \\
h(x) &= \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - 6
\end{aligned}
$$

-Kun derivoit funktion f(x) niin saat sen "Derivaattafunktion" f'(x). Derivaattafunktio kertoo miten funktio kulkee.

- Jos f'(x)<0 pisteessä niin f(x) kulkee alaspäin.

-Jos f'(x)>0 on positiivinen pisteessä niin f(x) kulkee ylöspäin

-Jos f'(x)=0 pisteessä niin siinä kohtaa on "paraabelihuippu"



Funktion *f* ääriarvojen määrittäminen algebrallisesti

1. Määritetään derivaatta f'.
2. Ratkaistaan derivaatan nollakohdat yhtälöstä $f'(x) = 0$.
3. Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.
4. Päätellään kulkukaavion avulla ääriarvokohdat (max/min).
5. Lasketaan ääriarvot sijoittamalla ääriarvokohdat funktion lausekkeeseen.

Määritä funktion $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ ääriarvokohdat ja ääriarvot.

1. **Määritetään funktion derivaatta f'.**

$$f'(x) = -2x + 4$$

2. **Ratkaistaan derivaatan nollakohdat.**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -2x + 4 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

3. Laaditaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.

Valitaan testikohdat nollakohdan $x = 2$ eri puolilta: $x = -1$ ja $x = 3$.

- $f'(-1) = -2 \cdot (-1) + 4 = 6 > 0$
- $f'(3) = -2 \cdot 3 + 4 = -2 < 0$

	(-1)	2	(3)
f'	$+$		$-$
f	↗		↘
		max	

4. Päätellään kulkukaavion avulla ääriarvokohdat.

Kohdassa $x = 2$ funktio vaihtaa kulkusuuntansa kasvavasta väheneväksi. Kohta $x = 2$ on tällöin maksimikohta.

5. Lasketaan ääriarvot.

Lasketaan funktion f arvo maksimikohdassa $x = 2$.

$f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1$

Funktion (paikallinen) maksimiarvo on 1.

Jos funktio on rajattu tietylle välille (sallitaan vain tietyt x arvot) niin sen suurin ja pienin arvo on aina joko välin päätepisteissä tai derivaatan 0-kohdissa.

8. Polynomifunktio 12 p.

Olkoon $p(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 48x$.

1. Laske derivaatta $p'(x)$ ja ratkaise derivaatan nollakohdat. **(4 p.)**

2. Millä väleillä funktio p on kasvava? **(4 p.)**

3. Määritä funktion p pienin arvo. Missä kohdassa se saavutetaan? **(4 p.)**

8. Paraabelin tangentti 12 p.

Paraabeli $y = x^2 + bx + c$ kulkee pisteen $(9, 5)$ kautta, ja siinä sen tangentin kulmakerroin on 2. Määritä kertoimet b ja c derivaatan avulla.

8. Suurin arvo 12 p.

Lukuun 10 lisätään erään positiivisen luvun neliön ja kuution erotus. Määritä derivaatan avulla suurin mahdollinen arvo, joka näin voidaan saada.

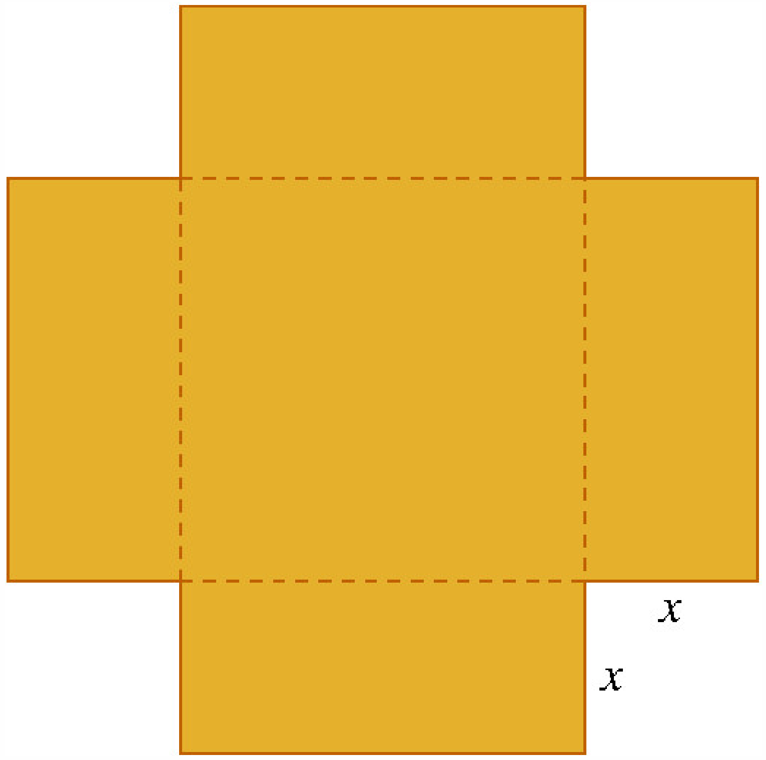
8. Taitellaan pahvista laatikko 12 p.

Aineisto

8.A Kuva: Leikattu pahvilevy

Neliön muotoisen pahvilevyn sivun pituus on 1,0 m. Sen jokaisesta kulmasta leikataan pois pienempi neliö, jonka sivun pituus on x (aineisto 8.A). Tämän jälkeen kaikki neljä reunoille jäänyttä suorakulmion muotoista osaa taitetaan 90 astetta ylöspäin ja teipataan kiinni vierekkäisiin osiin niin, että syntyy suorakulmainen laatikko ilman kantta. Millä muuttujan x arvolla tämän laatikon tilavuus on mahdollisimman suuri?

8.A Kuva: Leikattu pahvilevy



8. Huippuparaabeli 12 p.

Millä parametrien b ja c arvoilla paraabelin $y = -x^2 + bx + c$ huippu on pisteessä $(2, 1)$? Perustele vastauksesi derivaatan avulla.

13. Suurin pinta-ala 12 p.

Suorakulmion alareuna on positiivisella x-akselilla, vasen pystyreuna positiivisella y-akselilla ja oikea yläkulma paraabelilla $y = -x^2 + 9$. Määritä derivaatan avulla suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala.