

Yleistä matematiikan ylioppilaskokeesta

Tehtävien maksimipistemäärä on 12. Pisteet annetaan kokonaisluvuina. Kokeen enimmäispistemäärä on 120.

Kokeessa on kolme osiota seuraavan taulukon mukaisesti. Kahta eri B-osiota erottaa tehtävien vaativuustaso: B2-osion tehtävät ovat vaativampia kuin B1-osion tehtävät.

Osio	Tehtäviä	Kuinka monta tehtävää valitaan?	Apuvälineet
A	4	4	ilman teknistä apuvälinettä
B1	5	3	teknisen apuvälineen kanssa
B2	4	3	teknisen apuvälineen kanssa

Kokeen A-osassa kokelaalla ei ole käytössään seuraavia muuten koejärjestelmään sisältyviä ohjelmia:

- LibreOffice Calc
- wxMaxima
- Texas Instruments TI-Nspire CAS
- Casio ClassPad Manager
- Logger Pro
- Geogebra
- 4f Vihko

Näitä ohjelmistoja kutsutaan tässä teoksessa yhteisnimityksellä "tekninen apuväline".

Kokeen B-osassa kokelaalla ovat käytössä kaikki koejärjestelmään sisältyvät ohjelmat. Koejärjestelmän **KCalc-laskinohjelma** on kokeilaiden käytössä **myös kokeen A-osassa**.

Kokeissa sallitaan syksyn 2020 kokeeseen saakka (syksy 2020 mukaan lukien) seuraavien taulukkokirjojen käyttö:

- MAOL: MAOL-taulukot, Otava (sekä vastaava ruotsinnos)
- Ranta-Tiilikainen: Lukion taulukot, WSOY

Kokeen pituus on kuusi tuntia. Kokelas aloittaa koetilaisuuden käynnistämällä koneensa ja tunnistautumalla kokeeseen. Kokelas voi vastata sekä A-osan että B-osan tehtäviin, mutta kokeen alkaessa kokelaalla on käytössään vain osa koejärjestelmän ohjelmista. Palautettuaan A-osan kokelas saa käyttöönsä kaikki ohjelmat ja voi jatkaa B-osaan vastaamista. A-osan palautettuaan kokelas näkee vain B-osan tehtävät eikä voi enää palata vastaamaan A-osaan.

Vinkkejä kokeeseen

Kun vastaat koekysymyksiin, muista, että *hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut perustelut ja lopputulos.*

- Lue ensin tehtävät huolella läpi. Voit tehdä suttupaperiin huomioita tehtävistä.
- Aloita siitä tehtävästä, joka tuntuu omasta mielestäsi helpoilmalta. Muista, että kokeen A-osio on tehtävä loppuun ennen kuin tekniset apuvälineet saa käyttöönsä.
- Kokoa huolellisesti tehtävän annossa annetut tiedot vastausruutuun. Tarkista, että kirjoitat tehtävän ratkaisun juuri oikeaan vastausruutuun.
- Ole tarkka murtolukujen ja lausekkeiden sieventämisten kanssa.
- Mieti, millä keinoilla tehtävä voisi ratketa. Muista aina kirjoittaa näkyviin käyttämäsi yhtälöt, epäyhtälöt ja lausekkeet.

- Kirjoita ratkaisusi selkeästi:
 - Kirjoita laskut allekkain.
 - Sanallisissa tehtävissä kirjoita näkyviin muuttujille selitykset.
- Jos ratkaisuideasi ei toimi, kokeile jotain muuta. Apuna voit käyttää esimerkiksi
 - taulukoita
 - kaavioita
 - kuvioita.
- Muista tarkistaa ratkaisusi. Esimerkiksi yhtälöt on helppo tarkistaa sijoittamalla. Jotta tarkastaminen ei unohdu, merkitse esimerkiksi suttupaperille ne tehtävät, jotka kaipaavat vielä lopuksi tarkistamista.
- Mieti vastauksesi järkevyyttä.
- Kokoa tehtävän vastaukset loppuun. Tarkista samalla, että olet vastannut siihen, mitä kysytään.

Teknisen apuvälineen käyttö

- Käytä kokeessa ohjelmistoa, jota olet tottunut käyttämään. Harjoittele ohjelmiston käyttöä kunnolla, koska ohjelmisto ei helpota tehtävien ratkaisemista, jos sitä ei osaa käyttää.
- Muista kirjoittaa ratkaisusi näkyviin niin, että paperilla näkyvät kaikki tarvittavat vaiheet. Esimerkiksi yhtälöitä ratkaistaessa pitää vastauksen lisäksi löytyä aina myös yhtälö, joka on ratkaistu.
- Muista tarkistaa laskinohjelmiston asetukset. Trigonometrinen funktioiden kohdalla on tärkeää tarkastaa, että asetukset ovat oikeat kulmanyksikön kohdalla.
- Kiinnitä huomiota ratkaisujen esitystapaan ja matemaattisten merkintöjen oikeellisuuteen. Sekä kokeen A- että B-osissa matemaattiset lausekkeet ja symbolit on syytä tehdä sopivaa kaavaeditoria käyttäen.
- Seuraavaan on listattu eräitä laskinohjelmistojen toimintoja, jotka ainakin olisi syytä osata. Näiden lisäksi on tietysti paljon toimintoja, jotka helpottavat ja nopeuttavat tehtävien käsittelyä.

Laske riittävästi perustehtäviä.

- Perusasioiden (esimerkiksi sievennykset, yhtälöiden ratkaisu) tulee olla hyvin hallinnassa, jotta pystyy sovellustehtävissä keskittymään varsinaisen ongelman ratkaisemiseen.
- Riittävä harjoittelu auttaa ymmärtämään käsitteet oikein.
- Helppojen perustehtävien avulla voi kasvattaa itseluottamusta. Onnistuminen innostaa jatkamaan!

Laske riittävästi vaikeampia tehtäviä.

- Vaikeampien ja soveltavien tehtävien avulla oppiminen syventyy.
- Perusasioiden soveltaminen helpottuu.

Laske samoja tehtäviä (tai kirjan esimerkkejä) uudelleen.

- Malliratkaisusta saa apua ongelmatilanteisiin. Näin tehtävä ei jää ratkaisematta.
- Ratkaisun ymmärtäminen ei tarkoita, että tehtävän osaisi ratkaista itse. Itse tekemällä oppii!

Harjoittele ryhmässä.

- Pienessä ryhmässä laskemalla ongelmatilanteissa on helppo pyytää apua.
- Opettamalla muita oppii aina itsekkin lisää.
- Yhdessä miettimällä oppii erilaisia tapoja lähestyä tehtävän ratkaisua.

1 Lausekkeilla laskeminen

Käsitteitä

- **Alkuluku** on kokonaisluku (> 1), joka voidaan kirjoittaa vain itsensä ja luvun 1 tulona.
- Luvun a **vastaluku** on $-a$. Vastalukujen summa on nolla.
$$a + (-a) = 0$$
- Luvun a **itseisarvo** on sen etäisyys nolasta. Itseisarvo merkitään $|a|$.
- Luvun a ($a \neq 0$) **käänteisluku** on $\frac{1}{a}$. Luvun ja sen käänteisluvun tulo on 1.
$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$
- Luvun a **neliöjuuri** $\sqrt{a}$ on se ei-negatiivinen luku, jolle $(\sqrt{a})^2 = a$.

Prosentti

- **Prosentti** merkitsee sadasosaa eli $1\% = \frac{1}{100} = 0,01$.
- Luvun a **osuus** prosentteina luvusta b on $\frac{a}{b} \cdot 100\%$.
- **Prosenttiosuus** perusarvosta a eli $p\%$ luvusta a on $\frac{p}{100} \cdot a$.

Murtolukujen laskutoimitukset

- Murtoluvut ovat **samannimiset**, jos niillä on sama nimittäjä.
- Samannimiset murtoluvut voidaan **laskea yhteen** kaavalla

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n}.$$

- Murtolukujen **kertolaskussa** osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät keskenään.

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

- Murtolukujen **jakolasku** muutetaan kertolaskuksi siten, että jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla.

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}$$

- Kun suure a kasvaa tai pienenee $p\%$, muuttunut arvo voidaan laskea kertomalla a **prosenttikertoimella** $\frac{100 \pm p}{100}$.
- **Prosenttiyksikkö** kertoo prosenttiluvun absoluuttisen muutoksen.

Potenssien laskusäännöt

- Potenssin määritelmä: $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ kpl}} = a^n$
- Potenssimerkinnässä a^n **kantalukuna** on a ja **eksponenttina** n .
- Potenssit ovat **samankantaiset**, jos niillä on sama kantaluku.
- Potenssilausekkeita voidaan sieventää potenssikaavojen avulla.

Samankantaisten potenssien tulo	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Samankantaisten potenssien osamäärä	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$
Tulon potenssi	$(ab)^n = a^n \cdot b^n$
Osamäärän potenssi	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$
Potenssin potenssi	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Negatiivinen eksponentti	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$
	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, a \neq 0, b \neq 0$
Nollas potenssi	$a^0 = 1, a \neq 0$

Polynomi- ja murtolausekkeet

- Lukua tai numeroiden ja kirjaimien avulla merkittyä laskutoimitusta sanotaan **lausekkeeksi**.
- Lausekkeen **sieventäminen** tarkoittaa mahdollisten sulkujen poistamista ja kaikkien mahdollisten lausekkeen laskutoimitusten suorittamista.
- Kirjaimia sisältävän **lausekkeen arvo** lasketaan sijoittamalla kirjaimen paikalle haluttu luku.
- Lausekkeessa esiintyvät yhteenlaskettavat ovat **termejä**. Termillä voi olla **kerroin** ja **kirjainosa**.
- Kaksi termiä on **samanmuotoisia**, jos niillä on sama kirjainosa.
- Samanmuotoiset termit voidaan yhdistää käyttämällä **osittelulakia**.

$$ax \pm bx = (a \pm b)x$$

- Jos (polynomi)lauseke on sulkujen sisällä ja sulkujen edessä on miinusmerkki, sulut poistetaan vaihtamalla kaikkien suluissa olevien termien etumerkit. Plusmerkki sulkujen edessä ei muuta etumerkkejä.

$$-(+a) = -a$$

$$+(+a) = +a$$

$$-(-a) = +a$$

$$+(-a) = -a$$

- Polynomit voidaan **kertoa keskenään** kertolaskun osittelulakia käyttäen.

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

- **Murtolausekkeessa** muuttujakirjain voi olla myös nimittäjässä.
- Murtolausekkeita voidaan laskea yhteen, kertoa ja jakaa käyttäen hyväksi murtolukujen laskulakeja.
- Murtolausekkeita voi sieventää **supistamalla** mahdollinen yhteinen tekijä.

$$\frac{ax \pm bx}{cx} = \frac{x(a \pm b)}{cx} = \frac{a \pm b}{c}$$

Sievennä lauseke potenssikaavojen avulla ja laske lausekkeen arvo, kun $x = 8$ ja $y = -\frac{1}{4}$.

a) $\frac{xy^3 \cdot x^3 y^2}{x^2 y^4}$

b) $(2xy)^2 \cdot (x^2 y^4)^{-0,5}$

RATKAISU

a) Sievennetään ensin lauseke.

$$\frac{xy^3 \cdot x^3 y^2}{x^2 y^4} = \frac{x^{1+3} y^{3+2}}{x^2 y^4} = \frac{x^4 y^5}{x^2 y^4} = x^{4-2} y^{5-4} = x^2 y$$

$$\uparrow$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\uparrow$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Sijoitetaan kirjaimien x ja y paikalle $x = 8$ ja $y = -\frac{1}{4}$.

$$8^2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 64 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -16$$

b) Sievennetään ensin lauseke.

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\begin{aligned} (2xy)^2 \cdot (x^2 y^4)^{-0,5} &= 2^2 x^2 y^2 \cdot x^{2 \cdot (-0,5)} y^{4 \cdot (-0,5)} \\ &= 4x^2 y^2 \cdot x^{-1} y^{-2} \\ &= 4x^{2-1} y^{2-2} \\ &= 4xy^0 \\ &= 4x \end{aligned}$$

$$\leftarrow a^0 = 1$$

Sijoitetaan $x = 8$ kirjaimen x paikalle.

$$4 \cdot 8 = 32$$

Heikin Kone Oy myy tietokoneita ja älypuhelimia.

- a) Suomessa tietokoneista maksetaan valtiolle 24 % arvonlisäveroa. Vero lasketaan tuotteen verottomasta hinnasta. Kuinka monta prosenttia asiakkaan maksamasta hinnasta on veroa?
- b) Heikin Kone Oy laskee tablettitietokoneen hintaa 18 %. Tällöin viikon kappalemääräinen myynti lisääntyy 15 %. Miten muuttuvat kauppiaan viikon myyntitulot?

RATKAISU

- a) Merkitään tietokoneen verotonta hintaa kirjaimella k . Muodostetaan arvonlisäveroprosentin avulla prosenttikerroin.

$$100 \% + 24 \% = 124 \% = 1,24$$

Arvonlisävero lasketaan verottomasta hinnasta, joten verollinen hinta saadaan prosenttikertoimen avulla. Verollinen hinta on siis $1,24k$.

Veroa maksetaan $0,24k$. Verrataan tätä asiakkaan maksamaan verolliseen hintaan.

$$\frac{0,24k}{1,24k} = 0,1935... \approx 19 \%$$

- b) Merkitään tuotteen alkuperäistä myyntihintaa kirjaimella a ja viikon kappalemääräistä myyntiä kirjaimella b .

Kun hinta laskee 18 %, laskua kuvaava prosenttikerroin on $100 \% - 18 \% = 82 \% = 0,82$.

Alennettu hinta on siis $0,82a$.

Myyntin kasvua kuvaava prosenttikerroin on $100 \% + 15 \% = 115 \% = 1,15$.

Kasvanut myynti on siis $1,15b$.

Kauppiaan myyntitulot ennen muutoksia ovat ab .
Uudet myyntitulot ovat $0,82a \cdot 1,15b = 0,943ab$

Myyntitulot laskevat $1 - 0,943 = 0,057 = 5,7 \%$.

2

Ensimmäisen asteen yhtälö

Ensimmäisen asteen yhtälöt

- **Ensimmäisen asteen yhtälö** voidaan sieventää muotoon $ax + b = 0$ ($a \neq 0$).
- Yhtälöitä ratkaistaessa
 - yhtälön molemmille puolille voidaan lisätä sama luku
 - molemmat puolet voidaan kertoa tai jakaa samalla luvulla.
- Ensimmäisen asteen yhtälössä **murtolukukertoimet** ja **nimittäjät** kannattaa yleensä poistaa ennen yhtälön varsinaista ratkaisemista.
 - 1 Kirjoitetaan kaikki termit murtolukumuodossa.
Jos termissä ei ole nimittäjää, nimittäjäksi merkitään luku 1.
 - 2 Lavennetaan kaikki termit samannimisiksi.
 - 3 Yhtälön molemmat puolet kerrotaan yhteisellä nimittäjällä.
- **Yhtälön ratkaisun vaiheet:**
 - 1 Sievennetään yhtälöä.
 - Poistetaan sulut.
 - Poistetaan nimittäjät.
 - 2 Ratkaistavaa kirjainta sisältävät termit siirretään yhtälön vasemmalle ja vakiot yhtälön oikealle puolelle.
 - 3 Yhdistetään samanmuotoiset termit.
 - 4 Jaetaan ratkaistavan kirjaimen kertoimella.
- **Identtisissä yhtälöissä** muuttujatermit häviävät yhtälöä sievennettäessä kokonaan.
Jos yhtälö sievenee muotoon
 - $0 = 0$, yhtälön ratkaisuna on kaikki reaalityöt
 - $0 = c$, jossa $c \neq 0$, yhtälöllä ei ole ratkaisua.

Ensimmäisen asteen epäyhtälö

- Epäyhtälössä yhtäsuuruusmerkki on korvattu epäyhtälömerkillä ($<$, $>$, $\leq$ tai $\geq$).
- Ensimmäisen asteen epäyhtälöt ratkaistaan samalla tavalla kuin ensimmäisen asteen yhtälöt.
 - Epäyhtälön ratkaisussa tulee muistaa, että negatiivisella luvulla jaettaessa tai kerrottaessa **epäyhtälömerkin suunta vaihtuu**.

Verranto ja verrannollisuus

- Kun kaksi osamäärää (suhdetta) merkitään yhtä suuriksi, saadaan **verranto**. Verranto ratkaistaan **ristiinkertomalla**.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

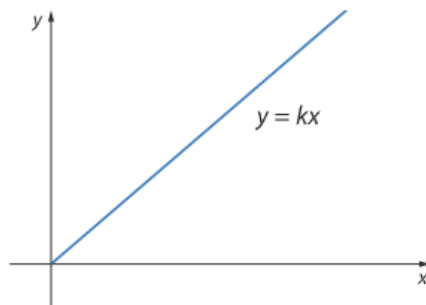
$$ad = bc$$

- Suureet ovat **suoraan verrannolliset**, jos toisen suureen kasvaessa toinen suure kasvaa samassa suhteessa. Suoraan verrannollisille suureille muodostetaan verranto merkitsemällä suhteet yhtä suuriksi.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

- Suoraan verrannollisten suureiden x ja y välistä riippuvuutta kuvaa yhtälö $y = kx$, jossa k on verrannollisuuskertoin.

- Suoraan verrannollisten suureiden välisen riippuvuuden kuvaaja koordinaatistossa on origon kautta kulkeva suora.

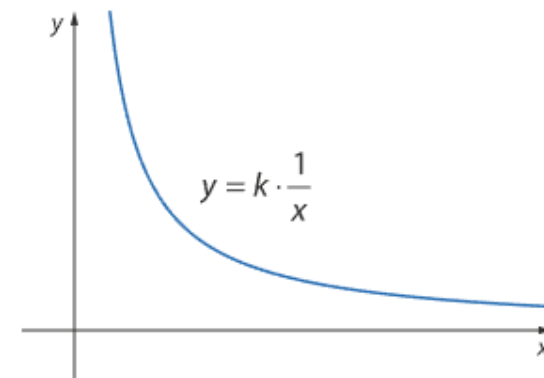


- Suureet ovat **käntäen verrannolliset**, jos toisen suureen kasvaessa toinen suure pienenee samassa suhteessa. Käntäen verrannollisilla suureilla suureiden tulo on vakio.

$$x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$$

- Käntäen verrannollisten suureiden x ja y välistä riippuvuutta kuvaa yhtälö $y = k \cdot \frac{1}{x}$, jossa k on verrannollisuuskertoin.

- Käntäen verrannollisten suureiden välisen riippuvuuden kuvaaja koordinaatistossa on hyperbeli.



Prosenttiyhtälöt

- Prosenttiyhtälöissä olennaista on osata käyttää **prosenttikerrointa** yhtälöiden muodostamisessa ja vastausten tulkitsemisessa.
- Prosenttiyhtälöt perustuvat seuraavaan **perustilanteeseen**: Tietty prosenttiosuus p % perusarvosta a saadaan kertomalla perusarvo prosenttikertoimella $\frac{p}{100}$ eli
$$\frac{p}{100} \cdot a = b.$$
- Jos tilanteeseen liittyy **useampia muuttuvia suureita**, kannattaa tilannetta tarkastella esimerkiksi taulukon avulla.

Teknisen apuvälineen käyttö kokeen B-osissa

- Varmista, että osaat ratkaista yhtälön teknisen apuvälineen avulla.
 - Yhtälön ratkaisemiseen tarvitaan usein oma toiminto.
 - Jos yhtälössä esiintyy useampia kirjaimia, katso, että ratkaiset yhtälön oikean muuttujan suhteen.
 - Muista, että peräkkäisten kirjaimien väliin tulee laskinohjelmistoissa usein kirjoittaa kertomerkki.
- Varmista, että osaat kopioida aiemmin laskemiasi arvoja myöhempiin laskuihin mahdollisimman tarkkoina arvoina.
- Varmista, että osaat piirtää ja tulkita verrannollisuuteen liittyviä kuvaajia.
 - Kuvaajalla olevan pisteen koordinaatteja voi selvittää jäljitä-toiminnon avulla tai esimerkiksi lisäämällä kuvaajalle pisteen ja muuttamalla pisteen toista koordinaattia.

ESIMERKKI 1
A

Ratkaise yhtälö.

$$\text{a)} \quad 3x - \frac{2x}{3} = 1 - \frac{2x-3}{2}$$

$$\text{b)} \quad \frac{2x-1}{5} = \frac{x}{3}$$

RATKAISU

a) Kirjoitetaan kaikki termit murtolukumuodossa ja lavennetaan termit samannimisiksi.

$$\begin{aligned} \overset{6)}{3x} - \overset{2)}{\frac{2x}{3}} &= \overset{6)}{1} - \overset{3)}{\frac{2x-3}{2}} \\ \frac{18x}{6} - \frac{4x}{6} &= \frac{6}{6} - \frac{6x-9}{6} \end{aligned}$$

Poistetaan nimittäjät kertomalla yhteisellä nimittäjällä ja ratkaistaan yhtälöstä x .

$$\begin{aligned} \frac{18x}{6} - \frac{4x}{6} &= \frac{6}{6} - \frac{6x-9}{6} & | \cdot 6 \\ 18x - 4x &= 6 - (6x - 9) \\ 14x &= 6 - 6x + 9 \\ 20x &= 15 & | : 20 \\ x &= \frac{15}{20}^{(5)} \\ x &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Merkkivirheiden välttämiseksi lausekkeissa kannattaa käyttää nimittäjien poistamisen yhteydessä sulkuja.

- b)** Yhtälön molemmilla puolilla on osamäärä, joten se on verranto.
Yhtälö ratkaistaan kertomalla ristiin.

$$\frac{2x-1}{5} = \frac{x}{3}$$

$$3(2x-1) = 5x$$

$$6x - 3 = 5x$$

$$6x - 5x = 3$$

$$x = 3$$

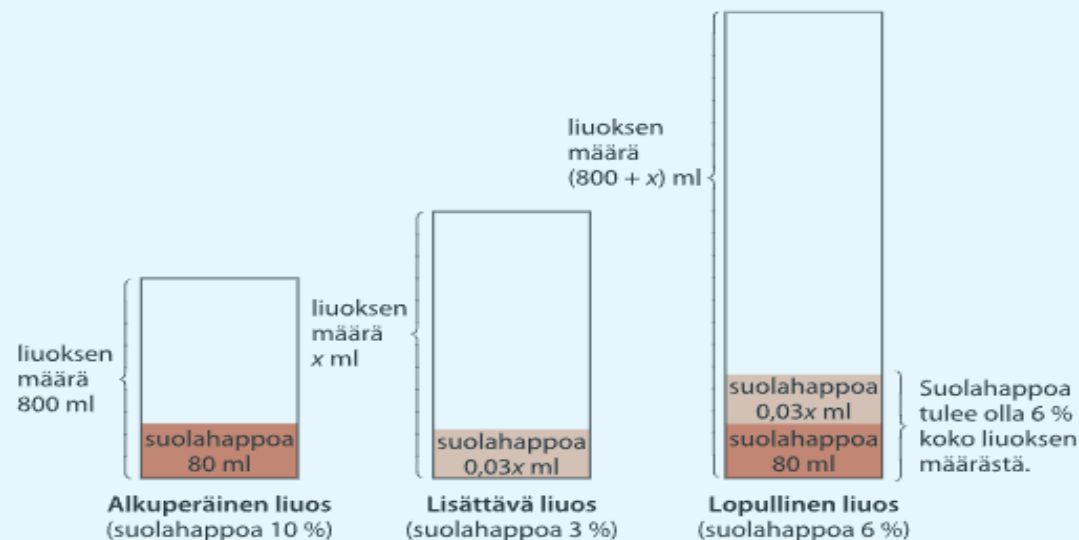
Kemistillä on 10-prosenttista suolahappoliuosta 800 ml. Kuinka monta millilitraa suolahappoliuokseen on lisättävä 3-prosenttista suolahappoliuosta, jotta saadaan 6-prosenttista suolahappoliuosta? Anna vastaus millilitran tarkkuudella.

RATKAISU

Alkuperäisessä liuoksessa on suolahappoa 10 % eli $0,1 \cdot 800 \text{ ml} = 80 \text{ ml}$.

Alkuperäiseen liuokseen lisätään 3-prosenttista suolahappoliuosta $x \text{ ml}$.

- Liuokseen lisätyssä määrässä on suolahappoa $0,03x \text{ ml}$.
- Liuoksessa on suolahappoa yhteensä $(80 + 0,03x) \text{ ml}$



Lisäyksen jälkeen koko liuoksen tilavuus on $(800 + x) \text{ ml}$.

Uudessa liuoksessa tulee olla suolahappoa 6 %. Suolahapon määrää (ml) uudessa liuoksessa kuvaa siis lauseke $0,06(800 + x)$.

Muodostetaan yhtälö suolahapon määrän avulla ja ratkaistaan siitä x .

$$0,06 \cdot (800 + x) = 80 + 0,03x$$

$$x = 1066,666\dots$$

$$x \approx 1067 \text{ (ml)}$$

VASTAUS

3-prosenttista suolahappoliuosta on lisättävä 1067 ml.

3

Lineaarinen malli

Suoran yhtälö

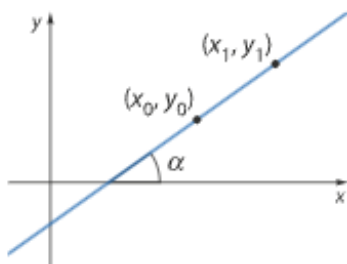
- Suoran yhtälö esitetään joko ratkaistussa tai yleisessä muodossa.
 - ratkaistu muoto $y = kx + b$
 - yleinen muoto $Ax + By + C = 0$
- Suoran yhtälön ratkaistusta muodosta nähdään **kulmakerroin** k sekä suoran ja y -akselin **leikkauspiste** $(0, b)$.
- Kun suora kulkee pisteiden (x_0, y_0) ja (x_1, y_1) kautta, suoran
 - kulmakerroin** on $k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$
 - yhtälö** on $y - y_0 = k(x - x_0)$.
- Kulmakerroin kertoo suoran **kulkusuunnan** ja **jyrkkyyden**.
 - $k > 0$ Suora on nouseva.
 - $k < 0$ Suora on laskeva.
 - $k = 0$ Suora on x -akselin suuntainen.
 - k ei määriteltä Suora on y -akselin suuntainen.

- Suoran ja x -akselin välistä kulmaa kutsutaan **suuntakulmaksi**. Suuntakulma saadaan kulmakertoimesta tangentin avulla.

$$\tan \alpha = k$$

- Suorat s ja t ovat **yhdensuuntaiset**, jos suorien kulmakertoimet k_s ja k_t ovat yhtä suuret.

$$k_s = k_t$$

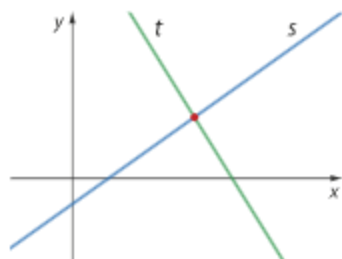


- Suorat s ja t ovat **kohtisuorassa toisiaan vastaan**, jos suorien kulmakertoimien k_s ja k_t tulo on -1 .

$$k_s \cdot k_t = -1$$
- Suora n on suoran s **normaali**, jos n ja s ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
- Suora leikkaa
 - x -akselin, kun $y = 0$

Yhtälöpari

- Ensimmäisen asteen **yhtälöpari** muodostuu kahdesta kahden muuttujan yhtälöstä eli kahdesta suoran yhtälöstä.
- Yhtälöparin ratkaisun on toteuttava molemmat yhtälöparin yhtälöt.
- Kahden suoran leikkauspiste** ratkaistaan yhtälöparin avulla.



- Yhtälöpari voidaan ratkaista
 - sijoitusmenetelmällä**
 - yhteenlaskumenetelmällä**.

- Yhtälöpari kannattaa ratkaista sijoitusmenetelmän avulla, kun vähintään toinen yhtälöistä on ratkaistussa muodossa.

- 1 Sijoitetaan ratkaistun muuttujan lauseke toiseen yhtälöön.
- 2 Ratkaistaan näin saatu yhden muuttujan yhtälö.
- 3 Sijoitetaan ratkaisu alkuperäiseen yhtälöön (ratkaistu muoto) ja lasketaan toiselle muuttujalle arvo.

- Yhtälöpari kannattaa ratkaista yhteenlaskumenetelmän avulla, kun yhtälöt eivät ole ratkaistussa muodossa.

- 1 Kerrotaan yhtälöt sellaisilla luvuilla, että toinen muuttuja saadaan eliminoidua.
 - Esimerkiksi muuttujan x kertoimet eri yhtälöissä ovat toistensa vastalukuja.
- 2 Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen.
- 3 Ratkaistaan näin saatu yhden muuttujan yhtälö.
- 4 Sijoitetaan ratkaisu jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön ja ratkaistaan toinen muuttuja.

Lineaarinen malli

- Lineaarista riippuvuutta mallinnetaan joko suoran yhtälön tai ensimmäisen asteen polynomifunktion avulla.
- Lineaarista riippuvuutta kuvaava yhtälö tai funktion lauseke voidaan muodostaa
 - suoran yhtälön avulla
 - sijoittamalla koordinaatistoon piirrettyyn pistejoukkoon suora
 - tutkimalla arvojen muutoksia taulukoimalla
 - suoraan verrannollisuuden avulla.

Teknisen apuvälineen käyttö kokeen B-osissa

- Varmista, että osaat piirtää koordinaatistoon suoria.
- Kuvasta on osattava sopivan toiminnon avulla etsiä
 - suoralla olevia pisteitä
 - suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet
 - kahden suoran leikkauspiste.
- Varmista, että osaat piirtää suoralle normaalin.
- Varmista, että osaat muodostaa pistejoukon kuvaajan avulla suoran yhtälön.
 - Eri akseleilla kuvattavien muuttujien arvot voi syöttää ensin esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmistoon.
 - Pistejoukkoon saa sijoitettua suoran esimerkiksi regressio-toiminnolla.
- Yhtälöparit ratkaistaan laskimella oman toiminnon avulla.
 - Jos tehtävässä pyydetään graafista ratkaisua, piirretään suorat ja etsitään niiden leikkauspiste kuvaajien avulla.

Suora kulkee pisteiden (1, 4) ja (2, -2) kautta.

- Määritä suoran yhtälö.
- Laske suoran ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.
- Onko piste (10, -12) suoralla?

RATKAISU

- a) Lasketaan ensin pisteiden avulla suoran kulmakerroin.

$$k = \frac{4 - (-2)}{1 - 2} = \frac{6}{-1} = -6 \quad \leftarrow \quad k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Määritetään kulmakertoimen $k = -6$ ja pisteen (1, 4) avulla suoran yhtälö.

$$\begin{aligned} y - 4 &= -6(x - 1) & \leftarrow \quad y - y_0 &= k(x - x_0) \\ y - 4 &= -6x + 6 \\ y &= -6x + 10 \end{aligned}$$

- b) Suoran ja y -akselin leikkauspiste nähdään suoran yhtälön vakio-termistä. Suora leikkaa y -akselin pisteessä (0, 10).

Suoran ja x -akselin leikkauspiste saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$\begin{aligned} -6x + 10 &= 0 \\ -6x &= -10 & | :(-6) \\ x &= \frac{-10}{-6} \\ x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Suora leikkaa x -akselin pisteessä $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.

- c) Piste on suoralla, jos pisteen koordinaatit toteuttavat suoran yhtälön. Sijoitetaan suoran $y = -6x + 10$ yhtälöön $x = 10$ ja $y = -12$.

$$\begin{aligned} -12 &= -6 \cdot 10 + 10 \\ -12 &= -50 \\ \text{epätosi} \end{aligned}$$

Koska yhtälö ei toteudu, piste ei ole suoralla.

VASTAUS

- a) $y = -6x + 10$ b) (0, 10) ja $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ c) Piste ei ole suoralla.

Pekka vietti kesälomansa lomailleen mökillään tai kaupunkiasunnolleen. Ruokakustannukset tänä aikana olivat yhteensä 260 €. Muut kulut olivat yhteensä 174 €. Mökillä ruokaan kului päivittäin keskimäärin 8 € ja kaupungissa 12 €. Muut kulut mökillä olivat keskimäärin 4 € päivässä ja kaupungissa 10 €. Kuinka monta lomapäivää Pekka vietti mökillään ja kuinka monta kaupunkiasunnollaan?

RATKAISU

Merkitään mökillä vietettyjä lomapäiviä kirjaimella x ja kaupunkiasunnolla vietettyjä lomapäiviä kirjaimella y .

	Kustannukset mökillä	Kustannukset kaupungissa	Yhteensä (€)
Ruokamenot (€)	$8x$	$12y$	260
Muut kulut (€)	$4x$	$10y$	174

Muodostetaan taulukon tiedoista yhtälöpari ja ratkaistaan se.

$$\begin{cases} 8x + 12y = 260 \\ 4x + 10y = 174 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 16 \\ y = 11 \end{cases}$$

VASTAUS

Pekka oli mökillä 16 päivää ja kaupunkiasunnollaan 11 päivää.

Suoran s yhtälö on $3x - 4y + 1 = 0$.

- a) Kuinka suuren kulman suora muodostaa positiivisen x -akselin kanssa? Anna vastaus asteen tarkkuudella.
 b) Laske suoran s ja suoran $2x - 2y - 2 = 0$ leikkauspisteen etäisyys origosta. Anna vastaus tarkkana arvona sekä likiarvona yhden desimaalin tarkkuudella.

RATKAISU

- a) Kirjoitetaan suoran yhtälö ensin ratkaistussa muodossa.

$$3x - 4y + 1 = 0$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

Ratkaise yhtälöstä y .

Suoran ja x -akselin välisen kulman suuruus saadaan kulmakertoimen

$$k = \frac{3}{4} \text{ avulla.}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\alpha = 36,869\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 37^\circ$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 36,869\dots^\circ$$

- b) Lasketaan ensin suorien leikkauspisteen koordinaatit yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ 2x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

Suorien leikkauspisteessä $x = 5$ ja $y = 4$ eli leikkauspiste on $(5, 4)$.

Lasketaan leikkauspisteen etäisyys origosta.

Pisteiden (x_1, y_1) ja (x_2, y_2)
välinen etäisyys

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

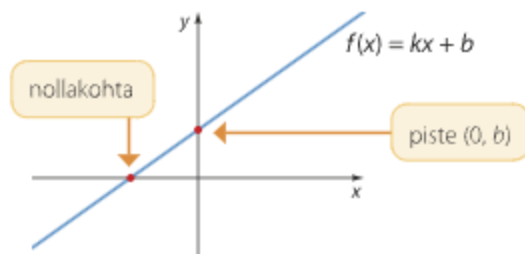
$$d = \sqrt{(5-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{41} \approx 6,4$$

4

Polynomifunktiot

Ensimmäisen asteen polynomifunktio

- Funktiota, jonka lauseke voidaan sieventää muotoon $f(x) = kx + b$, kutsutaan **ensimmäisen asteen polynomifunktioksi**.
- Ensimmäisen asteen polynomifunktion kuvaaja on suora $y = kx + b$.



- Funktion kuvaaja leikkaa y -akselin pisteessä $(0, b)$.
- Funktion kuvaaja leikkaa x -akselin **nollakohdassa**.
 - Nollakohdassa funktio saa arvon nolla.
 - Nollakohdat saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$.

Toisen asteen yhtälöt

- Toisen asteen yhtälö** voidaan sieventää muotoon $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).
- Jos kertoimet a , b ja c ovat nollasta eroavia reaalilukuja, yhtälöä sanotaan täydelliseksi.
- Täydellinen toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$ voidaan ratkaista ratkaisukaavaa käyttäen.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

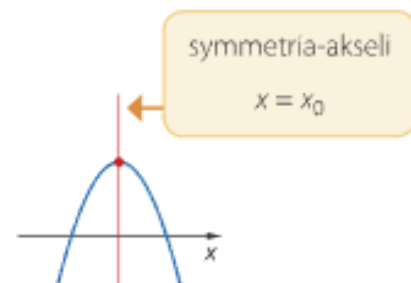
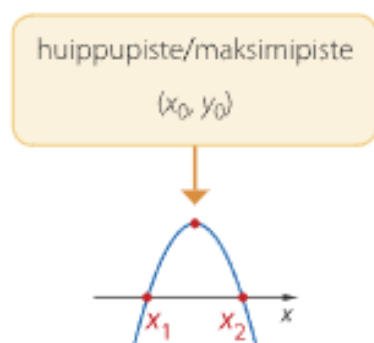
- Yhtälöt $ax^2 + bx = 0$ ja $ax^2 + c = 0$ ovat vaillinaisia. Ne voidaan ratkaista myös ilman ratkaisukaavaa.
 - Yhtälö $ax^2 + bx = 0$ voidaan ratkaista **tulon nollasäännön** avulla.
 - Yhtälö $ax^2 + c = 0$ voidaan ratkaista neliöjuuren avulla.

Toisen asteen polynomifunktio

- Funktiota, joka voidaan sieventää muotoon $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), sanotaan **toisen asteen polynomifunktioksi**.
- Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja on **paraabeli** $y = ax^2 + bx + c$.
- Paraabelin aukeamissuunta riippuu kertoimesta a .
 - Paraabeli aukeaa ylöspäin, jos $a > 0$.
 - Paraabeli aukeaa alaspäin, jos $a < 0$.
- Toisen asteen polynomifunktiolla on 0, 1 tai 2 nollakohtaa.



- Pistettä, jossa paraabeli vaihtaa kulkusuuntaa, sanotaan **paraabelin huipuksi** (x_0, y_0) .
 - Jos paraabeli aukeaa ylöspäin, huippu sijaitsee paraabelin alimmassa kohdassa. Tällöin huippupiste on paraabelin **minimipiste**.
 - Jos paraabeli aukeaa alaspäin, huippu sijaitsee paraabelin korkeimmassa kohdassa. Tällöin huippupiste on paraabelin **maksimipiste**.
- Jos funktiolla on nollakohtia, paraabelin huippupisteen x -koordinaatti voidaan laskea nollakohtien x_1 ja x_2 avulla.
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
- Symmetria-akseli** on huipun kautta kulkeva pystysuora suora.
- Paraabelin ja suoran leikkauspisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöistä muodostettu yhtälöpari.



Teknisen apuvälineen käyttö kokeen B-osissa

- Varmista, että osaat sieventää laskinohjelmiston avulla funktion lausekkeen. Jotkut laskinohjelmistot vaativat oman toiminnon esimerkiksi kertolaskujen sieventämiseen.
- Varmista, että osaat tallentaa funktion lausekkeen laskinohjelmiston muistiin ja käyttää tallennettua lauseketta
 - funktion arvojen laskemiseen
 - funktion avulla muodostettujen yhtälöiden ratkaisemiseen
 - funktion kuvaajan piirtämiseen.
- Varmista, että osaat ratkaista toisen asteen yhtälöitä laskinohjelmiston avulla.
- Varmista, että osaat piirtää ja tulkita funktion kuvaajia.
 - Kuvaajanäkymän asetuksia pitää välillä pystyä muuttamaan niin, että kuvaajan saa näkyviin. Etsi sopivat akselien skaalaustoiminnot omasta ohjelmistostasi.
 - Useimmissa ohjelmistoissa funktion kuvaajan voi piirtää näkyviin myös vain tietyillä muuttujan arvoilla. Selvitä ohjelmistostasi, miten tämä tehdään.
 - Funktion kuvaajan ja koordinaattiakselien leikkauspisteet voidaan selvittää funktion kuvaajasta. Nollakohtien selvittämiseen löytyy ohjelmistosta usein oma toiminto.
 - Toisen asteen polynomifunktion kuvaajan huipun koordinaattien selvittämiseen löytyy yleensä ohjelmistoista oma toiminto (esimerkiksi maksimipiste/minimipiste). Tämän avulla voi selvittää myös sellaisen paraabelin huipun koordinaatit, jolla ei ole nollakohtia.
 - Useista ohjelmistoista löytyy oma toiminto toisen asteen polynomifunktion kuvaajan symmetria-akselin määrittämiseksi. Etsi tämä toiminto omasta ohjelmistostasi.

Ratkaise yhtälö.

a) $5x - 2x^2 = 0$ b) $3x^2 - 12 = 0$ c) $-3x^2 + 14x - 8 = 0$

RATKAISU

- a) Yhtälö on vaillinainen yhtälö, josta puuttuu vakiotermi. Tällainen toisen asteen yhtälö voidaan ratkaista käyttämällä tulon nollasääntöä.

$$5x - 2x^2 = 0$$

$$x(5 - 2x) = 0$$

← Erotetaan x yhteiseksi tekijäksi.

Tulon nollasäännön mukaan:

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 5 - 2x = 0$$

$$-2x = -5 \quad | :(-2)$$

$$x = \frac{5}{2}$$

- b) Muokataan vaillinainen yhtälö muotoon, jossa muuttujatermi on vasemmalla ja vakiotermi oikealla puolella.

$$3x^2 - 12 = 0$$

$$3x^2 = 12 \quad | :3$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

← Ratkaistaan x neliöjuuren avulla.

- c) Yhtälössä on kaikki kolme eri asteluvun termiä. Ratkaistaan yhtälö ratkaisukaavalla.

$$-3x^2 + 14x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-3)}$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{100}}{-6}$$

$$x = \frac{-14 \pm 10}{-6}$$

$$x = \frac{-14 + 10}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{-14 - 10}{-6} = \frac{-24}{-6} = 4$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

VASTAUS

a) $x = 0$ tai $x = \frac{5}{2}$

b) $x = \pm 2$

c) $x = \frac{2}{3}$ tai $x = 4$

Urheilutapahtuman järjestäjät arvioivat aikaisempien vuosien kokemusten perusteella, että tapahtumaan saadaan 3500 kävijää, jos tapahtuman lipun hinta on 20 €. Jokaista yhden euron hinnankorotusta kohti tapahtuman kävijämäärä vähenee 80 henkilöllä. Vastaavasti jokainen euron hinnanalennus nostaa kävijämäärää 80 henkilöllä.

- a) Muodosta ja sievennä funktio f , joka kuvaa järjestäjän saamia lipunmyyntituloja, kun x on euron hinnanmuutosten lukumäärä.
b) Kuinka suuret olisivat lipunmyyntitulot, jos lipun hinta on 25 €?
c) Voiko urheilutapahtuman järjestäjä saada 100 000 euron lipunmyyntitulot?

RATKAISU

- a) Tutkitaan tilannetta taulukon avulla ja muodostetaan funktion lauseke.

Hinnan korotusten määrä	Hinta (€)	Määrä (kpl)	Lipunmyyntitulot (€)
0	20	3500	$20 \cdot 3500$
1	$20 + 1$	$3500 - 80$	$(20 + 1)(3500 - 80)$
2	$20 + 2$	$3500 - 2 \cdot 80$	$(20 + 2)(3500 - 2 \cdot 80)$
x	$20 + x$	$3500 - x \cdot 80$	$(20 + x)(3500 - x \cdot 80)$

Lipunmyyntituloja kuvaa siis funktio

$$f(x) = (20 + x)(3500 - 80x) = -80x^2 + 1900x + 70\,000.$$

Sievennä lauseke laskinohjelmiston avulla.

- b) Jos lipun hinta on 25 €, niin alkuperäiseen hintaan on tehty 5 kappaletta euron hinnankorotuksia.

$$f(5) = -80 \cdot 5^2 + 1900 \cdot 5 + 70\,000 = 77\,500 \text{ (€)}$$

Tallenna funktion lauseke ohjelmiston muistiin, niin voit laskea funktion arvon suoraan merkinnällä $f(5)$.

- c) Ratkaistaan yhtälö $f(x) = 100\,000$.

$$-80x^2 + 1900x + 70\,000 = 100\,000$$

epätosi

Tallenna funktion lauseke ohjelmiston muistiin, niin voit ratkaista yhtälön muodossa $f(x) = 100\,000$.

Koska yhtälöllä ei ole ratkaisua, lipunmyyntitulot eivät voi olla 100 000 euroa.

5

Eksponentiaalinen malli

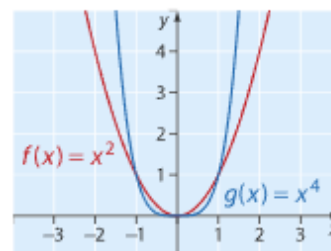
Teknisen apuvälineen käyttö kokeen B-osissa

- Teknisellä apuvälineellä on osattava sieventää ja laskea
 - juurilausekkeita
 - logaritmilausekkeita
 - potensseja.
- Varmista, että osaat syöttää eksponentti- ja potenssifunktion laskimeen ja laskea funktion arvoja.
- Varmista että osaat piirtää eksponentti- ja potenssifunktioita laskimellasi.
 - Koska erityisesti eksponenttifunktioiden arvot kasvavat nopeasti hyvinkin suuriksi, akseleita on yleensä skaalattava, jotta halutut tiedot saadaan kuvaajasta näkyviin.
- Eksponentti- ja potenssiyhtälöt on osattava ratkaista teknisen apuvälineen avulla.
 - Monet laskinohjelmistot ilmoittavat yhtälön ratkaisun tarkkana arvona juurten ja logaritmien avulla. Sovellustehtävissä tarkka vastaus on muunnettava desimaaliluvuksi.
- Monissa tehtävissä käytetään aikaisemmin laskettuja lukuarvoja eksponentiaalisien muutoksen tutkimisessa. Varmista, että osaat kopioida aikaisemmin laskemiasi tietoja uusiin lausekkeisiin.

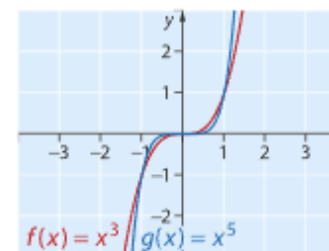
Potenssifunktio ja -yhtälö

- Potenssifunktio** on muotoa $f(x) = x^n$, jossa n on positiivinen kokonaisluku.
- Potenssifunktiot jaetaan eksponentin mukaan parillisiin ja parittomiin potenssifunktioihin.

Parillinen potenssifunktio:



Pariton potenssifunktio:



- Potenssiyhtälö** on yhtälö, joka voidaan sieventää muotoon $x^n = a$, jossa n on positiivinen kokonaisluku.
- Potenssiyhtälö ratkaistaan **juuren avulla**:

Muokkaa yhtälö ensin muotoon

$$x^n = a$$

Jos n on parillinen ja $a > 0$,
niin

$$x = \sqrt[n]{a} \text{ tai } x = -\sqrt[n]{a}$$

Jos n on pariton,
niin

$$x = \sqrt[n]{a}$$

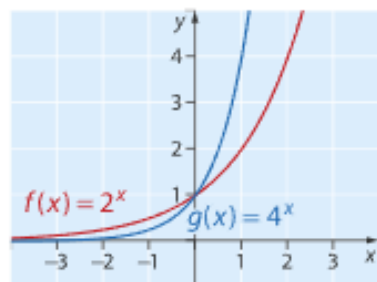
- Juuri voidaan kirjoittaa **murtopotenssin** avulla:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

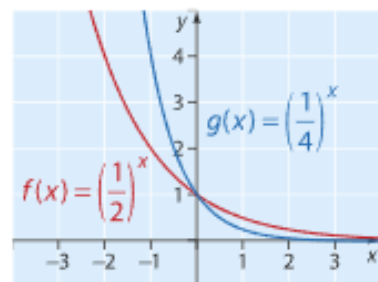
Eksponenttifunktio ja -yhtälö

- **Eksponenttifunktio** on muotoa $f(x) = a^x$, jossa kantaluku $a > 0$, $a \neq 1$.
- Eksponenttifunktio kuvaa potenssin kantaluvusta a riippuen joko eksponentiaalista kasvua tai eksponentiaalista vähenemistä.

Eksponentiaallinen kasvu
 $a > 1$



Eksponentiaallinen väheneminen
 $0 < a < 1$



- **Eksponenttiyhtälö** on yhtälö, joka voidaan sieventää muotoon $a^x = b$, jossa $a > 0$, $a \neq 1$.
- Jos eksponenttiyhtälön molemmille puolille on mahdollista saada sama kantaluku, yhtälö ratkaistaan seuraavasti.
 - 1 Kirjoitetaan yhtälön molemmat puolet saman kantaluvun potensseina.
 - 2 Merkitään eksponentit yhtä suuriksi.
 - 3 Ratkaistaan x .

- Kaikki eksponenttiyhtälöt voidaan ratkaista **logaritmin avulla**. Yhtälön $a^x = b$ ratkaisu on **a -kantainen logaritmi luvusta b** .

$$a^x = b$$

$$x = \log_a b$$

- Kun logaritmin kantalukuna on 10, logaritmi voidaan merkitä lyhyemmin merkinnällä **lg**.

$$\log_{10} a = \lg a$$

- Kun logaritmin kantalukuna on e (Neperin, luku), on kyseessä **luonnollinen logaritmi**. Luonnollinen logaritmi voidaan merkitä lyhyemmin merkinnällä **ln**.

$$\log_e a = \ln a$$

ESIMERKKI 1 A

Ratkaise yhtälö.

- a) $4x^2 = 36$ b) $2x^3 + 16 = 0$
 c) $3^{x+1} = \frac{1}{27}$ d) $2^{6x} = 8^{x-1}$

RATKAISU

a) $4x^2 = 36 \quad | :4$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

b) $2x^3 + 16 = 0$

$$2x^3 = -16 \quad | :2$$

$$x^3 = -8$$

$$x = \sqrt[3]{-8}$$

$$x = -2$$

c) $3^{x+1} = \frac{1}{27}$

$$3^{x+1} = \frac{1}{3^3} \quad \leftarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$3^{x+1} = 3^{-3}$$

$$x+1 = -3$$

$$x = -4$$

d) $2^{6x} = 8^{x-1} \quad \leftarrow 8 = 2^3$

$$2^{6x} = (2^3)^{x-1} \quad \leftarrow (a^m)^n = a^{mn}$$

$$2^{6x} = 2^{3(x-1)}$$

$$6x = 3x - 3$$

$$6x - 3x = -3$$

$$3x = -3 \quad | :3$$

$$x = -1$$

VASTAUS

- a) $x = \pm 3$ b) $x = -2$ c) $x = -4$ d) $x = -1$

ESIMERKKI 2 B

RATKAISU


Hiilidioksidin (CO_2) määrä ilmakehässä on lisääntynyt selvästi esimerkiksi fossiilisten polttoaineiden käytön seurauksena. Vuoden 1750 hiilidioksidin määräksi on laskettu 280 ppmv (tilavuuden miljoonasosaa) ja vastaava luku vuonna 2000 oli 370 ppmv.

- a) Kuinka monta prosenttia on ollut vuotuinen CO_2 -lisäys, jos kasvun ajatellaan olevan yhtä monta prosenttia joka vuosi?
 b) Mikä on ilmakehän hiilidioksidipitoisuus tämän mallin mukaan vuonna 2100?

- a) Tarkasteltava aikaväli on $2000 - 1750 = 250$ vuotta. Hiilidioksidin määrä siis kasvaa 250 kertaa.

- CO_2 :n määrä alussa: 280 ppmv
- CO_2 :n määrä lopussa: 370 ppmv



Merkitään, että hiilidioksidin CO_2 :n määrä k -kertaistuu vuodessa.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan k .

$$k^{250} \cdot 280 = 370$$

$$k = \pm 1,0011154...$$

Laskinohjelmisto saattaa ilmoittaa vastauksen ensin murtopotenssien avulla.

Koska määrän kasvua kuvaava kerroin on aina positiivinen, $k = 1,0011154...$

Vuotuinen CO_2 -lisäys on siis $1,001115... - 1 = 0,001115... \approx 0,11 \%$.

- b) Hiilidioksidin määrä tulee vuosittain 1,0011...-kertaiseksi.

- CO_2 :n määrä alussa: 280 ppmv
- Määrän kasvu tapahtuu $2100 - 1750 = 350$ kertaa.

Vuonna 2100 CO_2 :n määrä on

$$1,0011154...^{350} \cdot 280 = 413,63... \approx 410 \text{ (ppmv)}.$$

Muista käyttää laskussa aikaisemmin laskettua arvoa pyöristämättömänä.


VASTAUS

- a) 0,11 % b) 410 ppmv

Lukujono

- Lukujono $a_1, a_2, a_3, \dots$ muodostuu joukosta lukuja, jotka on järjestetty peräkkäin määrätyn säännön mukaisesti. Lukujonon lukuja sanotaan **termeiksi** tai **jäseniksi**.
- Yleinen jäsen** a_n kertoo säännön, jonka avulla jonon mielivaltainen jäsen voidaan laskea, kun jäsenen paikka jonossa tunnetaan.
- Lukujonon jäsenen paikkaa jonossa kuvataan **järjestysnumeron** n avulla.
- Lukujono on **rekursiivinen**, jos jono on määritetty rekursiokaavan avulla. Rekursiokaavassa kerrotaan
 - yksi tai useampi jäsen jonon alusta
 - lauseke, jonka avulla seuraavat jäsenet saadaan laskettua edellisten avulla.
- Lukujonon jäseniä voidaan laskea yhteen summamerkinnän avulla, kun tunnetaan
 - yhteenlaskettavien määrä k
 - jonon yleinen jäsen a_n .
$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = \sum_{n=1}^k a_n$$
- Rekursiivisen jonon jäsenten arvot ja summat voidaan laskea taulukkolaskentaohjelmiston avulla.

Aritmeettinen jono

- Jono on **aritmeettinen**, jos kahden peräkkäisen jäsenen erotus eli **differenssi** (d) on vakio.

$$d = a_{n+1} - a_n$$

- Jonon yleinen jäsen voidaan määritellä ensimmäisen jäsenen ja differenssin avulla.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

- Kun lasketaan yhteen n kappaletta aritmeettisen jonon jäseniä, syntyy **aritmeettinen summa**.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

- a_1 on summan ensimmäinen yhteenlaskettava.
- a_n on summan viimeinen yhteenlaskettava.
- n on yhteenlaskettavien lukumäärä.

Geometrinen jono

- Jono on **geometrinen**, jos peräkkäisten jäsenten **suhde** q on vakio.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- Jonon yleinen jäsen voidaan määritellä ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

- Kun lasketaan yhteen n kappaletta geometrisen jonon jäseniä, syntyy **geometrinen summa**.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

- a_1 on summan ensimmäinen yhteenlaskettava.
- q on jonon suhdeluku.
- n on yhteenlaskettavien lukumäärä.

Aritmeettisen jonon kaksi ensimmäistä jäsentä ovat $a_1 = 2$ ja $a_2 = -1$.

- Määritä jonon yleinen jäsen a_n .
- Onko luku -22 tämän jonon jäsen?
- Laske jonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

RATKAISU

- a) Yleinen jäsen määritellään ensimmäisen jäsenen a_1 ja peräkkäisten jäsenten erotuksen eli differenssin d avulla.

Koska $a_1 = 2$ ja $d = a_2 - a_1 = -1 - 2 = -3$, niin

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= 2 + (n-1) \cdot (-3) \\ &= 2 - 3n + 3 \\ &= 5 - 3n \end{aligned}$$

- b) Jos luku -22 on jonon jäsen, on olemassa positiivinen kokonaisluku n siten, että $a_n = -22$.

$$\begin{aligned} a_n &= -22 \\ 5 - 3n &= -22 \\ -3n &= -27 \quad | :(-3) \\ n &= 9 \end{aligned}$$

Luku -22 on siis jonon 9. jäsen a_9 .

- c) Aritmeettinen summa lasketaan kaavalla $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, jossa

- a_1 on summan ensimmäinen yhteenlaskettava, $a_1 = 2$
- a_n on summan viimeinen yhteenlaskettava, $a_{10} = 5 - 3 \cdot 10 = -25$
- n on yhteenlaskettavien määrä, $n = 10$.

Lasketaan jonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa.

$$S_{10} = \frac{2 + (-25)}{2} \cdot 10 = \frac{-23}{2} \cdot 10 = -11,5 \cdot 10 = -115.$$

VASTAUS

- a) $a_n = 5 - 3n$ b) $a_9 = -22$ c) $S_{10} = -115$

Tulitikuista muodostetaan kuvioita, jotka muodostuvat peräkkäisistä neliöistä. Alla on kolme ensimmäistä kuviota.



Tulitikkujen määrät kuvioissa muodostavat aritmeettisen jonon.

- Tulitikkupuntissa on yhteensä 800 tikkua. Kuinka monta peräkkäistä kuviota niistä voidaan muodostaa?
- Kuinka monta tikkua jää käyttämättä?

RATKAISU

- a) Tulitikkujen määrä kuviossa kasvaa aina kolmella edelliseen kuvioon verrattuna. Jonon 4, 7, 10, ... differenssi on $d = 3$.

Jonon yleinen jäsen:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 4 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 1$$

Rakennetaan tulitikuista yhteensä n kuviota. Viimeisessä kuviossa on siis $3n + 1$ tikkua.

Muodostetaan summakaavan avulla yhtälö, josta voidaan ratkaista n , kun tikkuja on yhteensä 800.

$$\begin{aligned} \frac{4 + (3n+1)}{2} \cdot n &= 800 \\ n &= -23,94... \quad \text{tai} \quad n = 22,27... \end{aligned}$$

Koska järjestysnumero n on positiivinen kokonaisluku, kuvioita voidaan muodostaa enintään 22 kappaletta.

- b) Lasketaan montako tulitikkua kuluu 22 kuvion muodostamiseen.

- Viimeisessä kuviossa on tulitikkua $a_{22} = 3 \cdot 22 + 1 = 67$.
- Kaikissa kuvioissa on tulitikkua yhteensä

$$S_{22} = \frac{a_1 + a_{22}}{2} \cdot 22 = \frac{4 + 67}{2} \cdot 22 = 781$$

Tulitikkua jää siis käyttämättä $800 - 781 = 19$ kappaletta.

VASTAUS

- Voidaan muodostaa 22 peräkkäistä kuviota.
- Tikkuja jää käyttämättä 19 kappaletta.

Voidaan myös muodostaa ja ratkaista epäyhtälö.

$$\begin{aligned} \frac{4 + (3n+1)}{2} \cdot n &\leq 800 \\ -23,94... &\leq n \leq 22,27... \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{22} (3n+1) = 781$$

Klassinen todennäköisyys

- Tapahtuman A **klassinen todennäköisyys** $P(A)$ lasketaan jakamalla suotuisien tapausten lukumäärä kaikkien alkeistapausten lukumäärällä.

$$P(A) = \frac{\text{suotuisien tapausten lukumäärä}}{\text{alkeistapausten lukumäärä}}$$

- Mahdottoman tapahtuman todennäköisyys on 0 ja varman tapahtuman todennäköisyys on 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Useissa todennäköisyyslaskuissa voi käyttää apuna erilaisia malleja:
 - lista
 - taulukko
 - Venn-diagrammi
 - koordinaatisto
 - geometrinen kuvio.

Todennäköisyyden laskusääntöjä

- Tapahtuman A vastatapahtuma eli **komplementti** on $\bar{A}$. Tapahtuman ja sen komplementin todennäköisyyksien summa on 1.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- Jos tapahtuma muodostuu kahdesta tai useammasta peräkkäisestä, **riippumattomasta**, tapahtumasta, kokonaistodennäköisyys on peräkkäisten tapahtumien todennäköisyyksien tulo (kertolaskusääntö).

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Tuloperiaate ja kombinaatiot

- Jos tapahtuma koostuu k :sta kappaleesta vaiheita siten, että ensimmäisellä vaiheella on n_1 eri tulosvaihtoehtoa, toisella vaiheella n_2 tulosvaihtoehtoa, ja niin edelleen niin että viimeisellä vaiheella on n_k tulosvaihtoehtoa, niin koko tapahtumalla on **tuloperiaatteen** mukaan $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$ tulosvaihtoehtoa.

- n kappaletta alkioita voidaan tuloperiaatteen mukaan järjestää jonoon $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ erilaisella tavalla. Tätä tuloa kutsutaan **kertomaksi**.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

- Jos perusjoukossa on n alkioita, siitä voidaan muodostaa osajoukkoja, joissa kussakin on k alkioita. Osajoukkojen eli **kombinaatioiden** lukumäärä on

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

- Jos tapahtumat A ja B eivät ole toisistaan riippumattomia, edellinen tapahtuma vaikuttaa seuraavan tapahtuman todennäköisyyteen.

$$P(A \text{ ja } B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

- Jos tapahtuma muodostuu kahdesta tai useammasta, toisensa poissulkevasta eli **erillisestä** tapahtumasta, kokonaistodennäköisyys on näiden vaihtoehtoisten tapahtumien todennäköisyyksien summa (yhteenlaskusääntö).

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B)$$

- Jos tapahtumat eivät ole erillisiä eli $P(A) \cdot P(B) \neq 0$,

$$P(A \text{ tai } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ ja } B)$$

Sääennusteen mukaan lumisateen todennäköisyys päivän aikana on 0,40. Lumisateen todennäköisyys on sama seuraavina kuutena päivänä. Millä todennäköisyydellä seuraavan kuuden päivän jaksolla

- sataa lunta jokaisena päivänä
- sataa lunta kahtena ensimmäisenä päivänä, mutta ei viimeisen neljän päivän aikana
- sataa lunta ainakin yhtenä päivänä?

RATKAISU

- a) Peräkkäisten tapahtumien todennäköisyydet kerrotaan aina keskenään eli käytetään kertolaskusääntöä.

$$P(\text{"sataa joka päivä"}) = 0,4^6 = 0,004096 \approx 0,0041$$

- b) Koska lumisateen todennäköisyys on 0,4, poutasään todennäköisyys on sen komplementti eli $1 - 0,4 = 0,6$.

Myös tässä sovelletaan kertolaskusääntöä, koska todennäköisyys muodostuu kuudesta peräkkäisestä tapahtumasta.

$$\underbrace{0,4 \cdot 0,4}_{\text{sataa}} \cdot \underbrace{0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,6}_{\text{ei sataa}}$$

$$P(\text{"sataa vain kahtena ensimmäisenä päivänä"}) = 0,4^2 \cdot 0,6^4 = 0,0207... \approx 0,021.$$

- c) Tehtävä on helpompi ratkaista komplementin avulla. Tapahtuman "sataa ainakin yhtenä päivänä" vastatapahtuma on "ei sataa yhtenä päivänä".

Kaikki kuusi päivää ovat poutapäiviä todennäköisyydellä $0,6^6$.

$$P(\text{"sataa ainakin yhtenä päivänä"}) = 1 - 0,6^6 \approx 0,95.$$

VASTAUS

a) 0,0041

b) 0,021

c) 0,95

Ranskan kansallisessa lotossa arvotaan kuusi numeroa 49 numeron joukosta. Henkilö täyttää yhden ruudukon. Millä todennäköisyydellä

- ruudukossa ei ole yhtään oikeaa numeroa
- ruudukossa on 4 oikeaa numeroa
- hän voittaa päävoiton eli saa 6 oikein?

RATKAISU

- a) Lotossa erilaisia mahdollisia rivejä on $\binom{49}{6}$ kappaletta.

Jos henkilöllä ei ole yhtään oikeaa numeroa, kaikki numerot on valittu väärin numeroiden joukosta.

Erilaisia väärin numeroiden yhdistelmiä on $\binom{43}{6}$ kappaletta.

$$P(\text{"ei yhtään oikeaa numeroa"}) = \frac{\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} = 0,4359... \approx 0,44$$

- b) Jos henkilöllä on neljä oikeaa numeroa, ne on valittu kuuden oikean numeron joukosta. Loput kaksi on valittu 43 väärän numeron joukosta.

$$P(\text{"4 oikein, 2 väärin"}) = \frac{\binom{6}{4} \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = 0,000968... \approx 0,00097$$

- c) Päävoittorivejä eli kaikki numerot oikein on vain yksi.

$$P(\text{"6 oikein"}) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = 7,1511... \cdot 10^{-8} \approx 7,2 \cdot 10^{-8}$$

VASTAUS

a) 0,44

b) 0,00097

c) $7,2 \cdot 10^{-8}$

Useissa laskin-ohjelmistoissa kombinaatio lasketaan nCr-toiminnolla. Etsi vastaava toiminto omasta laskin-ohjelmistostasi.

- Tilastotieteessä tarkasteltavat **muuttujat** ovat tutkimuksen kohteen ominaisuuksia.
- Muuttujat ovat joko jatkuvia tai diskreettejä.
 - **Diskreetti muuttuja** voi saada vain tiettyjä arvoja, esimerkiksi kokonaislukuja.
 - **Jatkuva muuttuja** voi saada (määrittelyjoukossaan) mitä tahansa arvoja.
- **Jakaumilla** tarkoitetaan taulukkoa, johon on koottu tarkasteltavan muuttujan arvot sekä muuttujan arvoihin liittyvät lukumäärät tai prosenttiosuudet.
 - (Absoluuttinen) **frekvenssi** f kertoo muuttujan arvojen lukumäärän.
 - **Suhteellinen frekvenssi** $f\%$ kertoo absoluuttisen frekvenssin prosentteina.
 - **Summafrekvenssi** sf kuvaa muuttujan arvojen kertymää lukumäärien avulla.
 - **Suhteellinen summafrekvenssi** $sf\%$ kertoo kertymän prosentteina.

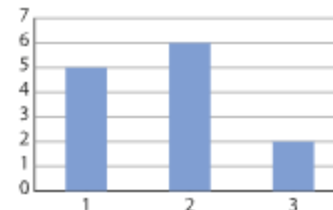
Muuttuja x	f	$f\%$	sf	$sf\%$
1	5	29 %	5	29 %
2	6	35 %	11	64 %
3	2	12 %	13	76 %
4	4	24 %	17	100 %

- **Tunnusluvut** tiivistävät tilastollisen aineiston ominaisuuksia yhdeksi luvuksi.
- **Moodi Mo** eli tyyppiarvo on aineiston yleisin arvo. Frekvenssijakaumassa moodin frekvenssi on suurin.
- **Mediaani Md** on suuruusjärjestykseen laitetun aineiston keskimäinen arvo. Se jakaa aineiston kahteen yhtä suureen osaan. Suhteellisessa summafrekvenssijakaumassa mediaani on se muuttujan arvo, jonka kohdalla suhteellinen summafrekvenssi ensimmäisen kerran ylittää 50 %.
- **Aritmeettinen keskiarvo $\bar{x}$** on muuttujan keskimääräinen arvo. Keskiarvo lasketaan jakamalla muuttujan arvojen summa muuttujan arvojen lukumäärällä.

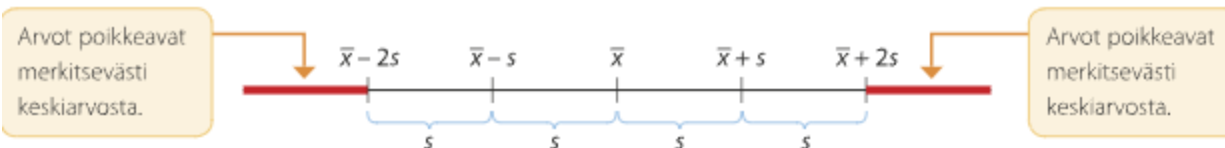
- Jakaumien tarkastelua sekä tilastollisia laskuja varten jatkuvat muuttujat yleensä **luokitellaan**.
- Luokan **luokkakeskus** on luokan keskimäinen arvo. Luokkakeskus lasketaan luokkarajojen keskiarvona.

$$\text{luokkakeskus} = \frac{\text{alaraja} + \text{yläraja}}{2}$$

- Jakaumia voidaan havainnollistaa erilaisilla **kuvaajilla**, kuten esimerkiksi pylväsdiagrammilla. Pylväsdiagrammissa pylvään korkeus määräytyy muuttujan arvon frekvenssin mukaan.



- **Painotetussa keskiarvossa** jokaisella luvulla on oma painokertoimensa. Mitä suurempi painokerroin luvulla on, sitä merkityksellisempi luku on kyseessä. Painotettua keskiarvoa laskettaessa:
 - ➊ Kerrotaan jokainen muuttujan arvo x_i omalla painokertoimellaan.
 - ➋ Saadut tulot lasketaan yhteen.
 - ➌ Summa jaetaan painokertoimien summalla.
- **Keskihajonta s** kertoo, miten kaukana havainnot keskimäärin ovat keskiarvosta.
 - Mitä pienempi keskihajonta on, sitä vähemmän muuttujan arvot poikkeavat keskiarvosta.
- Jos muuttujan arvo on enemmän kuin kahden keskihajonnan päässä keskiarvosta arvon voidaan sanoa poikkeavan merkitsevästi keskiarvosta.

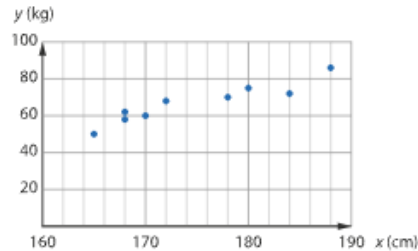


Kahden muuttujan yhteisjakauma

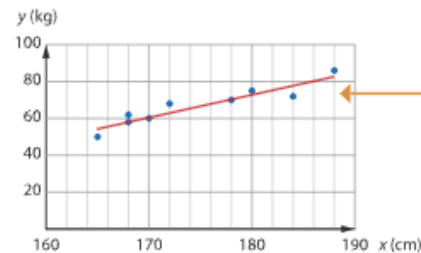
- Kahden muuttujan yhteisjakauman kuvaajaa kutsutaan **sirontakuvaajaksi**.
 - Selittävän muuttujan arvoja kuvataan x -akselilla.
 - Selitettävän muuttujan arvoja kuvataan y -akselilla.

Aineisto syötetään tilastosovellukseen ja piirretään pistejoukon kuvaaja.

Pituus x (cm)	Paino y (kg)
165	50
168	62
168	58
170	60
172	68
178	70
180	75
184	72
188	86



- Sirontakuvaajan pistejoukkoon voidaan sovittaa graafisesti käyrä, jonka yhtälön avulla muuttujien riippuvuutta voidaan kuvata matemaattisesti. Tätä yhtälöä kutsutaan **regressiokäyrän** yhtälöksi.
 - Yhtälön avulla voidaan laskea erilaisia ennusteita muuttujien arvoille.



Painon (y) ja pituuden (x) välistä riippuvuutta kuvaavan regressiokäyrän yhtälö on $y = 1,2x - 150$.

- Jos suureiden välinen riippuvuus on lineaarista, voidaan riippuvuuden voimakkuutta arvioida **korrelaatiokertoimen** r avulla.

$ r $	merkityksetön	kohtalainen	huomattava	voimakas
0	0,3	0,6	0,8	1

- Muiden kuin lineaarisen riippuvuuden kohdalla, riippuvuuden voimakkuutta voidaan arvioida **selityssasteen** r^2 avulla.

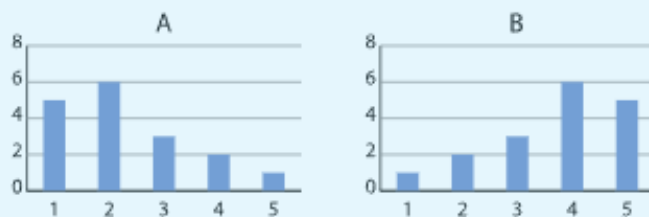
Teknisen apuvälineen käyttö kokeen B-osissa

- Varmista että osaat muodostaa taulukkolaskentaohjelmiston avulla kaikki frekvenssijakaumat.
 - absoluuttinen frekvenssi f
 - suhteellinen frekvenssi $f\%$
 - summafrequenssi sf
 - suhteellinen summafrequenssi $sf\%$
- Varmista, että osaat määrittää tilastolliset tunnusluvut taulukkolaskentaohjelmiston avulla sekä frekvenssijakaumasta että ilman frekvenssijakaumaa.
 - moodi Mo
 - mediaani Md
 - keskiarvo $\bar{x}$
 - keskihajonta s_n
- Varmista, että osaat tarkastella kahden muuttujan yhteisjakaumaa.
 - sirontakuvaajan piirtäminen
 - regressiosuoran/käyrän yhtälön määrittäminen
 - korrelaatiokertoimen määrittäminen
- Varmista, että osaat kopioida taulukkolaskentaohjelmistosta tunnuslukujen tarkat pyöristämättömät arvot laskinohjelmistoon.
- Varmista, että osaat ladata ja tarkastella valmiita aineistoja.

Päättele muuttujien A ja B frekvenssijakaumien kuvaajien perusteella, kummalla muuttujalla on suurempi

- a) moodi b) keskiarvo.

Perustele vastauksesi.



RATKAISU

- a) Moodi on yleisin arvo eli se muuttujan arvo, jonka frekvenssi on suurin. Frekvenssijakauman kuvaajassa tämä näkyy korkeimpana pylväänä.

Muuttujan A moodi $Mo_A = 2$ ja muuttujan B moodi $Mo_B = 4$, joten muuttujan B moodi on suurempi.

- b) Kuvaajien perusteella kummankin muuttujan jakaumissa on yhtä paljon havaintoyksiköitä. Tällöin keskiarvo on suurempi siinä jakaumassa, missä muuttujan arvojen summa on suurempi.

- Muuttuja A: $1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 39$
- Muuttuja B: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 5 = 63$

Koska muuttujan B jakaumassa on enemmän suuria muuttujan arvoja kuin muuttujan A jakaumassa, muuttujan B keskiarvo on suurempi.

VASTAUS

- a) Muuttujan B moodi on suurempi.
b) Muuttujan B keskiarvo on suurempi.

Anna heittää noppaa. Hänen heittotuloksensa on koottu viereiseen taulukkoon.

Nopan silmäluku	Frekvenssi
1	2
2	5
3	3
4	4
5	16
6	2

- a) Laske nopan silmälukujen keskiarvo ja keskihajonta. Pyöristä vastaukset yhden desimaalin tarkkuuteen.
- b) Poikkeako jokin Annan heittotuloksista merkitsevästi keskiarvosta?
- c) Myös Petrus heittää noppaa. Hänen heittotuloksista laskettu keskiarvo nopan silmäluvuille on 3,5 ja keskihajonta 2,0. Kumman heittosarja (Annan vai Petruksen) on tasaisempi eli kumman tulokset poikkeavat keskimäärin vähemmän keskiarvosta? Perustele vastauksesi.

RATKAISU

- a) Syötetään muuttujan arvot ja niiden frekvenssit taulukkolaskenta-ohjelmistoon ja määritetään tilastotoimintojen avulla kysytyt tunnusluvut.

- keskiarvo $\bar{x} = 4,031... \approx 4,0$
- keskihajonta $s = 1,424... \approx 1,4$

Osa tilasto-ohjelmistoista käyttää keskihajonnan symbolina kreikkalaista kirjainta σ .

- b) Arvo poikkeaa merkitsevästi keskiarvosta, jos se on yli kahden keskihajonnan päässä keskiarvosta. Määritetään keskiarvon ja keskihajonnan avulla ne muuttujan arvot, jotka eivät poikkeaa merkitsevästi.

- $\bar{x} + 2s = 4,031... + 2 \cdot 1,424... = 6,881...$
- $\bar{x} - 2s = 4,031... - 2 \cdot 1,424... = 1,181...$

Käytä laskuissa tarkkoja arvoja.

Tulokset, jotka ovat välillä $[1,181...; 6,881...]$ eivät poikkeaa merkittävästi keskiarvosta. Tällöin ne heittotulokset, joissa nopan silmäluku on 1, poikkeavat merkittävästi keskiarvosta.

- c) Heittosarja on tasaisempi henkilöllä, jonka heittotulosten keskihajonta on pienempi.

Koska Annan heittotulosten keskihajonta (1,4) on pienempi kuin Petruksen heittotulosten keskihajonta (2,0), on Annan heittosarja tasaisempi.

VASTAUS

- a) Keskiarvo on 4,0 ja keskihajonta 1,4.
b) Heittotulokset, joissa nopan silmäluku on 1, poikkeavat merkittävästi keskiarvosta.
c) Annan heittosarja on tasaisempi.

Taulukkoon on koottu vuonna 2016 Suomen kymmenen suurimman kunnan asukasluvut sekä kunnissa olevien oppilaitosten lukumäärät.

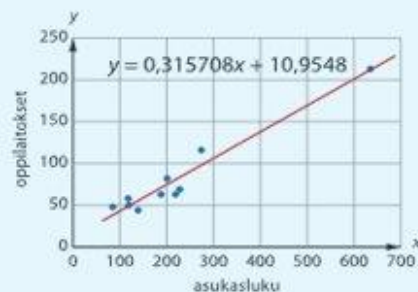
Kunta	Asukasluku/ tuhatta asukasta	Oppilaitosten määrä/ kpl
Helsinki	635	213
Espoo	274	116
Tampere	228	69
Vantaa	219	63
Oulu	201	82
Turku	188	63
Jyväskylä	139	44
Lahti	119	50
Kuopio	118	58
Kouvola	85	48

Lähde: Kuntaliitto, Tilastokeskus

- Määritä asukasluvun (x) ja oppilaitosten lukumäärän (y) välistä riippuvuutta kuvaavan regressiosuoran yhtälö. Anna regressiosuoran termien kertoimet kahden desimaalin tarkkuudella.
- Arvioi regressiosuoran avulla, kuinka monta oppilaitosta oli mallin mukaan Rovaniemellä vuonna 2016, kun Rovaniemen asukasluku oli tuolloin 62 000.
- Arvioi regressiosuoran avulla, kuinka paljon kunnassa tulisi olla asukkaita, jotta kunnassa olisi 20 oppilaitosta.
- Arvioi riippuvuuden voimakkuutta korrelaatiokertoimen avulla.

RATKAISU

- Piirretään taulukon arvojen perusteella pistejoukon kuvaaja ja sovitetaan pistejoukkoon regressiosuora.



Regressiosuoran yhtälö on $y \approx 0,32x + 10,95$.

- Rovaniemen asukasluku on 62 000, joten $x = 62$. Sijoitetaan tämä regressiosuoran yhtälöön.

$$y = 0,32 \cdot 62 + 10,95 = 30,79 \approx 31$$

Rovaniemellä olisi mallin mukaan 31 oppilaitosta.

- Oppilaitosten lukumäärä on $y = 20$.

$$0,32x + 10,95 = 20$$

$$x = 28,281\dots$$

$$x \approx 28$$

Kunnassa tulisi olla $28 \cdot 1000 = 28\,000$ asukasta.

- Määritetään tilastotoimintojen avulla korrelaatiokertoimen arvo.

$$r = 0,9726\dots \approx 0,97$$

Koska korrelaatiokertoimen itseisarvo $|r| > 0,8$, riippuvuus on voimakasta.

- $y \approx 0,32x + 10,95$
- 31 oppilaitosta
- 28 000 asukasta
- Riippuvuus on voimakasta ($r \approx 0,97$).

Taulukossa annetut ja regressiosuoran yhtälön muodostamisessa käytetyt lukumäärät ovat tuhansia asukkaita.

9

Verot, korot ja lainat

Verot

- **Verolla** tarkoitetaan verovelvollisen (yksityishenkilö, yritys) maksamaa pakollista ja lakimääräistä rahasuoritusta, johon veronsaajan, esimerkiksi valtion, puolelta ei liity välitöntä vastasuoritusta.
- Valtion keräämiä veroja luokitellaan **välillisiin** (esimerkiksi arvonlisävero) ja **välittömiin** (esimerkiksi valtion tulovero) veroihin.
- **Ansiotulosta** maksetaan valtion tuloveroa ja kunnallisveroa.
 - Tulovero on **progressiivinen**.
 - Kunnallisvero on **tasavero**, joka riippuu asuinkunnasta.
 - Evankelis-luterilaiseen tai ortodoksiseen seurakuntaan kuuluvat henkilöt maksavat **kirkollisveroa**, joka on tasavero.
 - Verojen lisäksi palkansaaja maksaa **veroluonteisia maksuja**, kuten eläkemaksu ja työttömyysvakuutusmaksu.
 - Yksityishenkilöltä ansiotuloista verot peritään yleensä ennakoverona ennakonpidätysprosentin mukaan.
- **Pääomatuloista** peritään **pääomatuloveroa**.
 - Veroa maksetaan 30 % 30 000 euroon saakka ja ylimenevältä osalta veroprosentti on 34 %.
- **Perintö- ja lahjaverot** ovat progressiivisia veroja.
 - Veron suuruuteen vaikuttaa perinnön/lahjan antajan sukulaisuussuhde perinnön/lahjan saajaan ja perinnön/lahjan suuruus.
- **Arvonlisävero (alv)** on välillinen kulutusvero, joka kohdistuu tavaroiden ja palveluiden kuluttamiseen.
 - Arvonlisäveroa kuluttaja maksaa hankkiessaan tuotteen tai palvelun.
 - Arvonlisävero lasketaan aina tuotteen tai palvelun verottomasta hinnasta.

Korkolaskenta

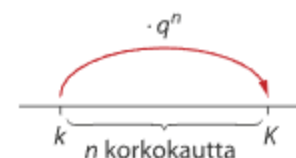
- **Korko** on rahan hinta eli lainan antajalle maksettava korvaus ajalta, jolloin lainattu raha ei ole lainan antajan käytössä.
- **Koron suuruus** riippuu
 - talletetusta tai lainatusta rahamäärästä eli **pääomasta**
 - talletusajasta eli **korkoajasta**
 - korkoprosentista eli **korkokannasta**.
- Korko lisätään pääomaan aina **korkokauden** jälkeen.
 - Korkokausi on yleensä vuoden mittainen, ellei toisin mainita.
- Kun talletusaika on korkeintaan yhden korkokauden mittainen, puhutaan **yksinkertaisesta korkolaskusta**.

$$r = kit \qquad K = k + r = k + kit$$

- r = korko (€)
- k = alkuperäinen pääoma (€)
- i = korkotekijä
- t = aika vuosina
- K = kasvanut pääoma (€)
- Jos pääomalle maksetaan korkoa yli yhden korkokauden, on kyseessä **koronkorkolasku**.
- Koronkorkolaskussa **kasvanut pääoma** K saadaan korkotekijän q ja alkuperäisen pääoman k avulla.

$$K = k \cdot q^n$$

- K = kasvanut pääoma (arvo tulevaisuudessa)
- k = alkuperäinen pääoma (nykyarvo)
- q = korkotekijä
- n = korkokausien määrä



Erilaisia lainoja

- Lainan **takaisinmaksuerä** koostuu kahdesta osasta: lainan **lyhennyksestä** ja lainan **korosta**.
- Lainan korko sidotaan **viitekorkoon**. Viitekorkoon lisätään vielä asiakaskohtainen **korkomarginaali**.
- **Tasalyhennyslaina** on laina, jossa kaikki lyhennykset ovat samansuuruisia.
 - Takaisinmaksuerässä oleva koron osuus riippuu jäljellä olevasta lainasummasta.
 - Maksuerä pienenee jokaisen lyhennyksen jälkeen.
 - Maksuerät ovat alussa suuria.
- **Tasaerä- ja annuiteettilaina** ovat lainoja, joissa takaisinmaksuerä pysyy samansuuruisena niin kauan kuin korkokanta ei muutu.
 - Lyhennyksen ja koron osuudet takaisinmaksuerästä vaihtelevat.
 - Korko lasketaan aina kullekin takaisinmaksuerälle jäljellä olevan lainan määrän mukaan.
- Yhden maksuerän eli **annuiteetin** suuruus saadaan laskettua annuiteetin kaavalla.

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$$

- A = annuiteetti eli tasaerä
- K = lainapääoma
- n = maksukertojen lukumäärä
- q = korkotekijä

- **Jäljellä oleva lainan määrä** annuiteettilainassa lasketaan seuraavalla kaavalla:

$$V_k = Kq^k - A \frac{1-q^k}{1-q}$$

- V_k = jäljellä oleva lainan määrä k :nnen lyhennyksen jälkeen
- K = lainapääoma
- q = korkotekijä
- k = lyhennysten määrä
- A = annuiteetti

Sijoittaminen

- **Pankkitalletus** on yleensä turvallinen sijoitus.
 - Tuotto määräytyy korkoprosentin mukaan.
 - Korkotuotoista maksetaan lähdeveroa.
- **Joukkovelkakirjalaina** eli **obligatio** on esimerkiksi valtion liikkeelle laskema laina.
 - Joukkovelkakirjalainan voi lunastaa liikkeellelaskupäivänä **merkintähinnalla**.
 - Liikkeellelaskupäivän jälkeen joukkovelkakirjalainan voi ostaa **emissiokurssin** mukaan määräytyvällä hinnalla.
 - Joukkovelkakirjalainan voi myydä ennen laina-ajan loppumista.
 - Lainanottaja (esimerkiksi valtio) maksaa lainanantajalle vuosittain korkoa.
 - Tuotosta maksetaan lähdevero.
- **Erilaiset vakuutukset** (säästö-, sijoitus- ja eläkevakuutus) ovat vakuutusyhtiön tai pankin kanssa tehtäviä vakuutus sopimuksia, joilla kerätään säästöjä tulevaisuutta varten.
 - Vakuutukseen sijoitettu rahasumma voidaan yleensä nostaa vasta vakuutusajan päätyttyä.
 - Tuotosta maksetaan lähdevero.
- **Osakkeet** ovat osakeyhtiömuotoisen yrityksen tapa hankkia varoja esimerkiksi investointeihin.
 - Osakkeita ostetaan ja myydään osakevälittäjän kautta.
 - Myynti- ja ostohinnan lisäksi osakesijoittamisesta aiheutuu yleensä myös muita kuluja, jotka riippuvat osakevälittäjästä.
 - Osinko on osakeyhtiön osakkailleen jakama voitto-osuus. Osinkotuloista 15 % on verovapaata tuloa.
 - Tuotosta maksetaan lähdevero.

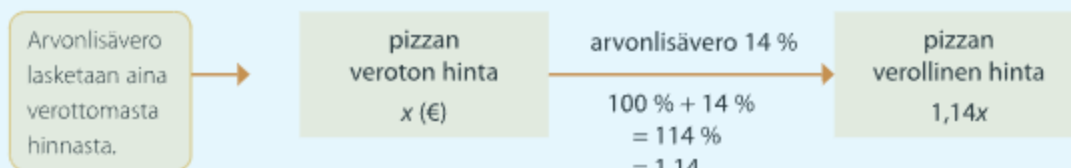
Niklas asuu Helsingissä.

- a) Niklas käy usein syömässä asuinpaikkansa lähellä olevassa pizzariassa. Niklaksen lempipizza maksaa pizzeriassa 12,50 €. Kuinka paljon pizzan hinnassa on arvonlisäveroa, kun ravintolapalveluiden arvonlisäveroprosentti on 14 %?
- b) Niklaksen ansiotulot vuonna 2017 olivat 45 300 €. Kuinka paljon Niklas maksoi veroja vuonna 2017, kun Helsingin kunnallisveroprosentti oli 18,50 %?

Valtion tuloveroasteikko 2017		
Verotettava ansiotulo (€)	Vero alarajan kohdalla (€)	Vero alarajan ylittävistä tulon osasta (%)
16 900 – 25 300	8,00	6,25
25 300 – 41 200	533,00	17,5
41 200 – 73 100	3315,50	21,5
73 100 –	10 174,00	31,5

RATKAISU

- a) Merkitään pizzan verotonta hintaa kirjaimella x .



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä x .

$$\begin{aligned}
 1,14x &= 12,50 & | : 1,14 \\
 x &= 10,964... \\
 x &\approx 10,96 \text{ (€)}
 \end{aligned}$$

Arvonlisäveron määrä on $12,50 \text{ €} - 10,96 \text{ €} = 1,54 \text{ €}$.

- b) Niklaksen verotettava tulo on välillä $41\,200 \text{ €} - 73\,100 \text{ €}$.

Valtion tuloveroasteikko 2017		
Verotettava ansiotulo (€)	Vero alarajan kohdalla (€)	Vero alarajan ylittävistä tulon osasta (%)
16 900 – 25 300	8,00	6,25
25 300 – 41 200	533,00	17,5
41 200 – 73 100	3315,50	21,5
73 100 –	10 174,00	31,5

- Vero alarajan kohdalla on **3315,50 €**.
- Vero alarajan ylittävältä osalta on $0,215 \cdot (45\,300 - 41\,200) \text{ €} = \mathbf{881,50 \text{ €}}$.

Niklas maksoi valtion tuloveroa yhteensä

$$3315,50 \text{ €} + 881,50 \text{ €} = 4197 \text{ €}.$$

Kunnallisveroprosentti Helsingissä oli 18,50 %. Niklas maksaa kunnallisveroa

$$0,185 \cdot 45\,300 \text{ €} = 8380,50 \text{ €}.$$

Verot ovat yhteensä $4197 \text{ €} + 8380,50 \text{ €} = 12\,577,50 \text{ €}$.

VASTAUS

a) 1,54 €

b) 12 577,50 €

Väinö tallettaa vuoden alussa tilille 3000,00 €. Tilin korkokanta on 1,56 % ja lähdevero 30 %.

- Jos Väinö nostaisi rahat tililtään kahdeksan kuukauden kuluttua, kuinka paljon Väinö tällöin saisi rahaa?
- Jos Väinö nostaisi rahat tililtään kymmenen vuoden kuluttua, kuinka paljon Väinö tällöin saisi rahaa?
- Väinö nostaa rahat tililtään, kun rahasumma ylittää 3500,00 €. Kuinka pitkän ajan kuluttua Väinö nostaa rahat? Anna vastaus vuoden tarkkuudella.

RATKAISU

- Korkoaika on korkeintaan yhden korkokauden (vuoden) mittainen, joten lasketaan korko yksinkertaisen korkolaskun avulla.

- talletettava pääoma $k = 3000,00$ €
- tilin nettokorkokanta $i = 0,7 \cdot 1,56 \% = 1,092 \% = 0,01092$
- korkoaika $t = \frac{8}{12}$

Tilillä on rahaa korkoineen kahdeksan kuukauden kuluttua

$$3000,00 \text{ €} + r = 3000,00 \text{ €} + 3000,00 \text{ €} \cdot 0,01092 \cdot \frac{8}{12} = 3021,84 \text{ €}.$$

$r = kit$

- Korkoaika on yli yhden korkokauden (vuosi) mittainen, joten lasketaan kasvanut pääoma koronkorkolaskun avulla.

- talletettava pääoma $k = 3000,00$ €
- korkotekijä $q = 100 \% + 1,092 \% = 101,092 \% = 1,01092$
- koroaika $n = 10$ vuotta

Lasketaan talletuksen arvo kymmenen vuoden kuluttua.

$K = kq^n$

$$K = 3000,00 \text{ €} \cdot 1,01092^{10} = 3344,176... \text{ €} \approx 3344,18 \text{ €}$$

- Merkitään korkoaikaa kirjaimella x .

$$3000,00 \cdot 1,01092^x > 3500 \\ x > 14,193...$$

Korkoajan oltava pidempi kuin 14,193... vuotta, joten Väinö nostaa rahat 15 vuoden kuluttua.

VASTAUS

- 3021,84 €
- 3344,18 €
- 15 vuoden kuluttua

Unna ottaa 234 000 euron lainan. Lainan korkokanta on 2,28 % ja laina-aika 15 vuotta. Unna lyhentää lainaa kuukausittain. Pankki tarjoaa joko annuiteettilainaa tai tasalyhennyslainaa. Kuinka paljon enemmän korkoja Unna joutuu lainastaan maksamaan, jos hän valitsee annuiteettilainan?

RATKAISU

Annuiteettilaina

- Lainan suuruus $K = 234\,000$ €.
- Takaisinmaksuerien lukumäärä $n = 15 \cdot 12 = 180$ kappaletta.
- Kuukausikorko on $\frac{2,28 \%}{12} = 0,19 \%$, joten korkotekijä $q = 1,0019$.

Lasketaan yhden takaisinmaksuerän suuruus annuiteetin kaavalla.

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$$

$$A = 234\,000 \cdot 1,0019^{180} \cdot \frac{1-1,0019}{1-1,0019^{180}} = 1536,169... \approx 1536,17 \text{ (€)}$$

Unna maksaa

- pankille 15 vuoden aikana $180 \cdot 1536,17 \text{ €} = 276\,510,60 \text{ €}$
- lainasta korkoja $276\,510,60 \text{ €} - 234\,000 \text{ €} = \mathbf{42\,510,60 \text{ €}}$.

Tasalyhennyslaina

Yhden lainanlyhennyksen suuruus on $\frac{234\,000 \text{ €}}{180} = 1300 \text{ €}$.

Lainasumma pienenee jokaisella maksukerralla aina lyhennyksen, 1300 €, verran. Tällöin lainasta maksettava korko pienenee jokaisella maksukerralla $0,0019 \cdot 1300 \text{ €} = 2,47 \text{ €}$.

- Ensimmäisen maksuerän korko on $180 \cdot 2,47 \text{ €} = 444,60 \text{ €}$.
- Viimeisen maksuerän korko on 2,47 €.

Korkojen yhteismäärä saadaan, kun lasketaan kaikkien maksukertojen korot yhteen.

$$\sum_{n=1}^{180} n \cdot 2,47 = \mathbf{40\,236,30 \text{ (€)}}$$

Lasketaan maksettavien korkojen erotus.

$$\mathbf{42\,510,60 \text{ €} - 40\,236,30 \text{ €} = 2274,30 \text{ €}}$$

VASTAUS

Annuiteettilainassa maksetaan 2274,30 € enemmän korkoja.

Korot muodostavat aritmeettisen jonon.

- $a_1 = 2,47 \text{ €}$
- $a_{180} = 444,60 \text{ €}$
- $n = 180$

Summa voidaan laskea aritmeettisen summan kaavalla.

$$S_{180} = 180 \cdot \frac{2,47 \text{ €} + 444,60 \text{ €}}{2} \\ = 40\,236,30 \text{ €}$$

Ensimmäisen maksuerän korko maksetaan koko lainasummasta: $0,0019 \cdot 234\,000 \text{ €} = 444,60 \text{ €}$.

Valuutat ja rahan arvo

- Eri valuuttojen väliset suhteet ilmoitetaan **valuuttakursseina**.
 - Epäsuora **noteeraus** kertoo yhden euron arvon ulkomaan valuuttana.
 - Suorassa **noteerauksessa** kerrotaan, kuinka paljon yksi ulkomaanvaluutta on euroina.
- Valuutanvaihtopiste** myy tai ostaa ulkomaan valuuttaa.
 - Valuutanvaihtopiste **myy** ulkomaanvaluutan **myyntikurssin** mukaan.
 - Valuutanvaihtopiste **ostaa** ulkomaanvaluutan **ostokurssin** mukaan.
- Jos euron arvo muuttuu suhteessa muihin valuuttoihin, puhutaan **valuutan ulkoisen arvon** muuttumisesta.
 - Kun euron arvo **laskee** suhteessa jonkin maan valuuttaan, euro **devalvoituu** tämän valuutan suhteen.
 - Kun euron arvo **nousee** suhteessa jonkin maan valuuttaan, euro **revalvoituu** tämän valuutan suhteen.

Euron arvo USA:n dollareina



IMERKKI
sarjan
itminen ja

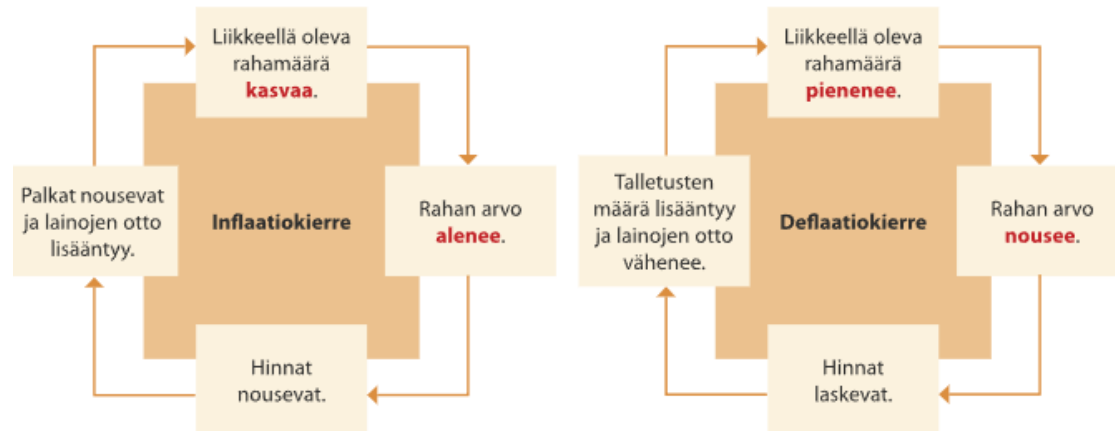
IMERKKI
ndeksin
itminen

IMERKKI
o ja
stovoima

IMERKKI
o ja
io

Indeksit

- Indeksisarja** muodostuu, kun eri ajankohtina verrataan saman suureen arvoa sovittuun perusajankohdan arvoon.
- Indeksisarjojen avulla voidaan vertailla esimerkiksi tuotteen hinnan kehitystä eri vuosina.
- Kun indeksin avulla halutaan kuvata useamman kuin yhden arvon muutosta, voidaan muodostaa **ryhmäindeksi**.
 - Tärkeimpiä ryhmäindeksejä ovat **kuluttajahintaindeksi (KHI)** ja **elinkustannusindeksi (EKI)**.
- Rahan arvon** ja **ostovoiman** muutosta voidaan tutkia **indeksien** avulla.
- Inflaatio** tarkoittaa liikkeellä olevan rahamäärän kasvua suhteessa markkinoilla oleviin hyödykkeisiin.
- Deflaatio**lla tarkoitetaan liikkeellä olevan rahamäärän pienenemistä suhteessa markkinoilla tarjolla oleviin hyödykkeisiin.



ORIA
nti ja
inti

IMERKKI
nen ja
en muutos

- Indeksisarjojen avulla voidaan muuttaa hintoja vastaamaan eri ajankohdan rahaa, jolloin hintojen reaalin vertailu on mahdollista.
 - Deflatoinnissa** muutetaan rahamäärä aikaisemman ajankohdan rahaksi.
 - Inflatoinnissa** muutetaan rahamäärä myöhemmän ajankohdan rahaksi.



Daniel matkustaa Ruotsiin. Matkaa varten hän vaihtaa Suomessa 200,00 € Ruotsin kruunuiksi.

- a) Kuinka paljon Ruotsin kruunuja Daniel saa? Valuuttanvaihtopisteen valuuttakurssit on esitetty taulukossa.

Yhden euron arvo Ruotsin kruunuina (SEK)	
Myyntikurssi	Ostokurssi
9,4035	9,7729

- b) Matkalta palattuaan Danielilla on jäljellä Ruotsin kruunuja 150 SEK. Daniel vaihtaa kruunut Suomessa takaisin euroiksi toisessa valuuttanvaihtopisteessä. Mikä on tämän valuuttanvaihtopisteen valuuttakurssi, kun Daniel saa kruunuillaan 15,20 €? Onko kyseessä myynti- vai ostokurssi?

RATKAISU

- a) Valuuttanvaihtopiste myy Danielille Ruotsin kruunuja, joten käytetään myyntikurssia.

$$1 \text{ €} = 9,4035 \text{ SEK}$$

$$\text{Tällöin } 200,00 \text{ €} = 200,00 \cdot 9,4035 \text{ SEK} = 1880,70 \text{ SEK}.$$

- b) Valuuttanvaihtopiste ostaa Danielilta Ruotsin kruunuja, joten kyseessä on ostokurssi.

Merkitään Ruotsin kruunun ostokurssia kirjaimella x eli $1 \text{ €} = x \text{ SEK}$.

Valuutan määrä muuttuu samassa suhteessa, joten muodostetaan verrantoyhtälö.

$$\begin{aligned} \frac{1}{15,20} &= \frac{x}{150} \\ 15,20x &= 150 \quad | : 15,20 \\ x &= 9,868421... \end{aligned}$$

Ruotsin kruunun ostokurssi on $1 \text{ €} = 9,8684 \text{ SEK}$.

- a) Daniel saa 1880,70 SEK.
b) Ruotsin kruunun ostokurssi on $1 \text{ €} = 9,8684 \text{ SEK}$.

Toinen tapa:

$$1 \text{ €} = x \text{ SEK, joten } 1 \text{ SEK} = \frac{1}{x} \text{ €}.$$

Tällöin 150 Ruotsin kruunua on

$$150 \cdot \frac{1}{x} = \frac{150}{x} \text{ euroa,}$$

Daniel saa 15,20 €, joten

$$\frac{150}{x} = 15,20$$

$$x = \frac{150}{15,20}$$

$$x = 9,868421...$$

VASTAUS

Ruokakauppaketju vertailee neljästä eri hedelmästä koostuvan hedelmäkoriin hintakehitystä kolmena peräkkäisenä vuotena. Tuotteiden hinnat ja hedelmäkoriin kootut hedelmien määrät on koottu taulukkoon.

Hedelmä	Hedelmäkoriin koottu määrä	2015	2016	2017
appelsiini	2,0 kg	1,67 €/k	1,61 €/kg	1,55 €/kg
banaani	1,5 kg	1,45 €/kg	1,48 €/kg	1,67 €/kg
omena	3,0 kg	2,09 €/kg	1,95 €/kg	1,87 €/kg
rypäleet	0,5 kg	5,15 €/kg	5,47 €/kg	5,38 €/kg

Lähde: Tilastokeskus

- a) Muodosta hedelmäkoriin hintakehitystä kuvaava ryhmäindeksi, kun perusajankohtana on vuosi 2015.
b) Päärynän kilohinta vuonna 2015 oli 2,28 €/kg. Oletetaan, että päärynän kilohinta noudattaa edellä muodostettua hedelmäkoriin ryhmäindeksiä. Laske päärynän kilohinta vuonna 2017.

RATKAISU

- a) Lasketaan hedelmäkoriin hinta eri vuosina.

- 2015: $2,0 \cdot 1,67 \text{ €} + 1,5 \cdot 1,45 \text{ €} + 3,0 \cdot 2,09 \text{ €} + 0,5 \cdot 5,15 \text{ €} = 14,36 \text{ €}$
- 2016: $2,0 \cdot 1,61 \text{ €} + 1,5 \cdot 1,48 \text{ €} + 3,0 \cdot 1,95 \text{ €} + 0,5 \cdot 5,47 \text{ €} = 14,025 \text{ €}$
- 2017: $2,0 \cdot 1,55 \text{ €} + 1,5 \cdot 1,67 \text{ €} + 3,0 \cdot 1,87 \text{ €} + 0,5 \cdot 5,38 \text{ €} = 13,905 \text{ €}$

Perusajankohtana on vuosi 2015, joten verrataan hedelmäkoriin hintoja vuoden 2015 hedelmäkoriin hintaan.

Vuosi	2015	2016	2017
Hedelmäkoriin hintasuhte	$\frac{14,36 \text{ €}}{14,36 \text{ €}} = 1$	$\frac{14,025 \text{ €}}{14,36 \text{ €}} = 0,9766...$	$\frac{13,905 \text{ €}}{14,36 \text{ €}} = 0,9683...$
Indeksi (2015 = 100)	100,0	97,7	96,8

Indeksin pisteluku ilmoitetaan yleensä yhden desimaalin tarkkuudella.

- b) Indeksien mukaan päärynän kilohinta on 96,8 % perusajankohdan eli vuoden 2015 kilohinnasta.

Päärynän kilohinta vuonna 2017 on

$$0,968 \cdot 2,28 \text{ €} = 2,207... \text{ €} \approx 2,21 \text{ €}.$$

Päärynän kilohinta (x) voidaan ratkaista myös yhtälön avulla.

$$\frac{100,0}{96,8} = \frac{2,28}{x} \quad x = 2,207...$$

VASTAUS

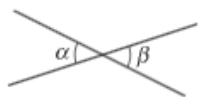
Vuosi	2015	2016	2017
Indeksi (2015 = 100)	100,0	97,7	96,8

- b) Päärynän kilohinta vuonna 2017 on 2,21 €/kg.

Kulmia

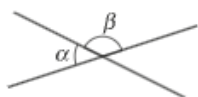
- Kulmat α ja β ovat **ristikulmia**.

$$\alpha = \beta$$



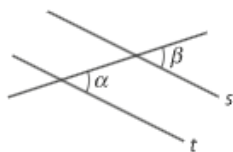
- Kulmat α ja β ovat **vieruskulmia**.

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



- Kulmat α ja β ovat **samankohtaisia kulmia**.

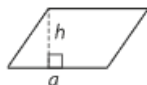
- Jos suorat s ja t ovat yhdensuuntaisia, $\alpha = \beta$.



Nelikulmiot

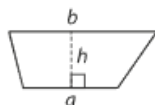
- Nelikulmion kulmien summa on 360° .
- Jos nelikulmion vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät ja yhdensuuntaiset, nelikulmio on **suunnikas**. Suunnikkaan pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo.

$$A = ah$$

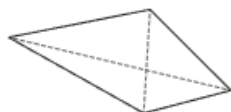


- Puolisuunnikkaan** pinta-alan laskemiseen tarvitaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet a ja b sekä näiden sivujen välinen etäisyys h .

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



- Nelikulmiolla on kaksi **lävistäjää**, jotka yleensä ovat eripituiset.



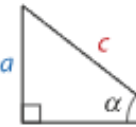
Kolmiot

- Kolmion kulmien summa on 180° .
- Kolmion pinta-ala lasketaan kannan a ja korkeuden h avulla. Korkeusjana on kohtisuorassa kantaa vastaan.

$$A = \frac{ah}{2}$$

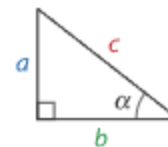


- Erityisiä kolmioita:

Tasasivuinen kolmio	Kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja jokainen kulma on 60° .	
Tasakylkinen kolmio	Kolmion kyljet ovat yhtä pitkät ja kantakulmat yhtä suuret.	
Suorakulmainen kolmio	Kolmion kateettien (kaksi lyhyintä sivua) välinen kulma on 90° . Hypotenuusa on kolmion pisin sivu.	

- Suorakulmaiselle kolmiolle on voimassa **Pythagoraan lause**. Lisäksi sivuja ja kulmia voidaan ratkaista **trigonometristen funktioiden** avulla.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

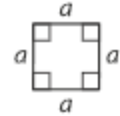
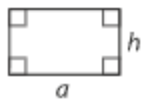
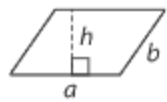
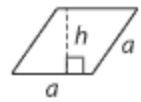
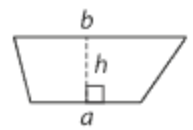


$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

- Erityisiä nelikulmioita:

Neliö	Neliön kaikki sivut ovat yhtä pitkiä ja jokainen kulma on 90° .	
Suorakulmio	Suorakulmion vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat ovat 90° .	
Suunnikas	Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät.	
Neljäkäs	Neljäkkään kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.	
Puolisuunnikas	Puolisuunnikkaalla on kaksi yhdensuuntaista sivua.	

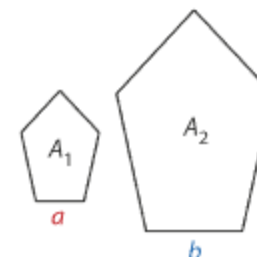
Yhdenmuotoisuus

- Yhdenmuotoisilla kuvioilla **vastinsivujen suhde** eli **mittakaava** on sama riippumatta siitä, mitkä kaksi vastinsivua valitaan tarkasteltavaksi.

mittakaava: $a:b$

- Yhdenmuotoisille kuvioille **pinta-alojen suhde** on yhtä suuri kuin mittakaavan neliö.

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$



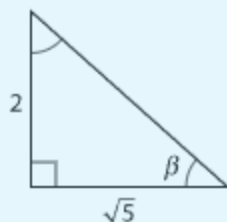
- Kolmiot ovat yhdenmuotoiset, jos niiden kaksi vastinkulmaa ovat yhtä suuret (**kk-lause**).



ESIMERKKI 1
A

Suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 2 ja $\sqrt{5}$.

- Laske hypotenuusan pituuden tarkka arvo.
- Määritä kulma β asteen tarkkuudella.


RATKAISU

- Merkitään hypotenuusan pituutta kirjaimella x . Se voidaan ratkaista Pythagoraan lauseen avulla.

$$x^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Pituus ei voi olla negatiivinen luku, joten ratkaisuksi kelpaa vain $x = 3$. Hypotenuusan pituus on siis 3.

- Kulman β vastaisen kateetin pituus on 2 ja viereisen kateetin pituus on $\sqrt{5}$. Kulma β voidaan ratkaista tangentin avulla.

$$\tan \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\beta = 41,81\dots^\circ$$

$$\beta \approx 42^\circ$$

Ratkaise kulma toiminnolla

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

VASTAUS
a) 3

b) 42°
ESIMERKKI 2
B

Kartan mittakaava on 1 : 30 000. Kartasta tehdään seinälle suurennos, jolloin kartan pinta-ala nelinkertaistuu.

- Mikä on suurennnetun kartan mittakaava?
- Maantien pituus on 18,6 km. Kuinka pitkä matka tämä on uudessa kartassa?

RATKAISU

- Merkitään alkuperäisen kartan pinta-alaa kirjaimella A , jolloin suurennoksen pinta-ala on $4A$.

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on yhtä suuri kuin mittakaavan neliö. Jos alkuperäisessä kartassa etäisyys on 1, uudessa kartassa tätä etäisyyttä voidaan merkitä kirjaimella x .

Yhdenmuotoisuussuhde on siis 1 : x .

$$\frac{A}{4A} = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$x = \pm 2$$

Uudessa kartassa pituudet ovat siis kaksinkertaistuneet. Koska pituudet luonnossa ovat säilyneet samoina, 1 cm kartalla tarkoittaa enää 15 000 cm luonnossa eli uuden kartan mittakaava on 1 : 15 000.

- Merkitään pituutta uudessa kartassa kirjaimella y . Pituus 18,6 km on muunnettava ensin senttimetreiksi:

$$18,6 \text{ km} = 18\,600 \text{ m} = 1\,860\,000 \text{ cm} = 1,86 \cdot 10^6 \text{ cm}$$

Kartta (cm)	Luonto (cm)
1	15 000
y	$1,86 \cdot 10^6$

$$\frac{1}{y} = \frac{15\,000}{1,86 \cdot 10^6}$$

$$y = 124$$

Kartalla tien pituus on siis 124 cm.

VASTAUS
a) 1 : 15 000

b) 124 cm

Kehän pituus ja ympyrän pinta-ala

- O on ympyrän **keskipiste**.
- A on ympyrän **kehäpiste**.
- Jana OA on ympyrän **säde** (r).
- Jana AB on ympyrän **halkaisija** (d).

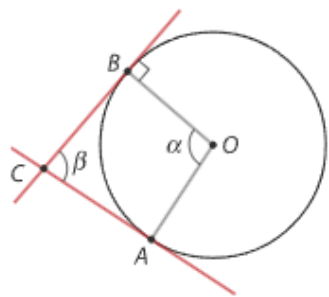
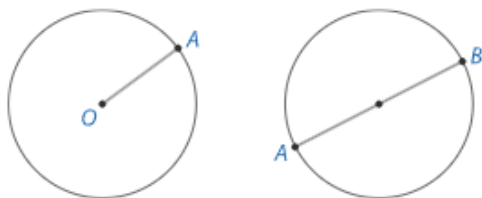
$$d = 2 \cdot r$$

- Kehäpisteiden joukko muodostaa **ympyrän kehän** (p), jonka pituus voidaan laskea säteen tai halkaisijan avulla.

$$p = d \cdot \pi = 2 \cdot \pi \cdot r$$

- **Ympyrän pinta-ala** riippuu säteestä.

$$A = \pi r^2$$



- Säde OB (ja OA) on kohtisuorassa tangenttia vastaan.
- Ympyrän ulkopuolisesta pisteestä C voidaan piirtää kaksi tangenttia ympyrälle.

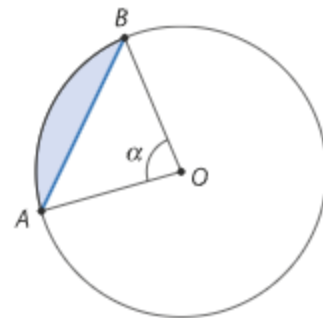
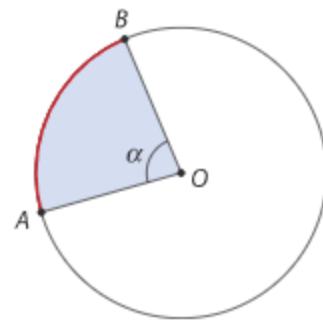
Sektorin ja segmentin

- Kaksi sädettä, OA ja OB , rajaavat ympyrästä tasoalueen, jota kutsutaan **sektoriksi**.
- α on sektorin **keskuskulma**.
- Kehäpisteiden A ja B väliin jäävä osa ympyrän kehästä on **kaar** (b).

- Sektorin kaaren pituus ja sektorin pinta-ala riippuvat ympyrän säteen pituudesta ja keskuskulmasta.

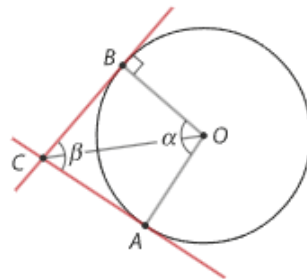
$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \quad A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

- Kehäpisteiden A ja B välinen jana AB on **jänne**.
- **Segmentti** on alue, joka jää janteen ja kaaren väliin.



- **Tangenttikulma** β muodostuu tangenttien väliin.
- Tangenttikulma β ja sitä vastaava keskuskulma α ovat yhteensä 180° .

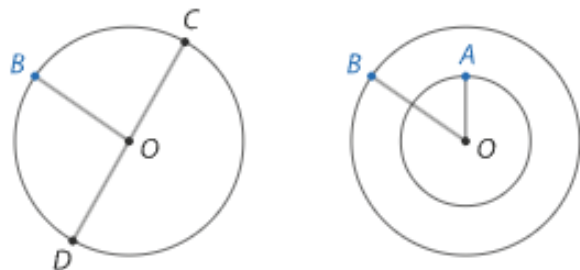
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



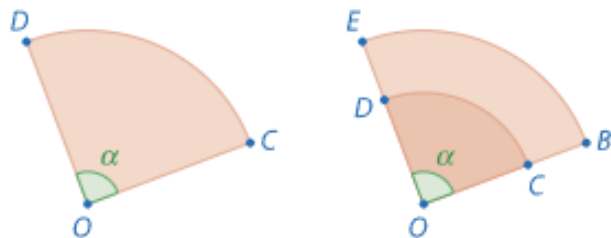
- Jana OC puolittaa sekä tangentti- että keskuskulman.

Teknisen apuvälineen käyttö kokeen B-osissa

- Varmista, että osaat piirtää ympyröitä ja sektoreita ainakin seuraavissa tilanteissa:
 - ympyrä keskipisteen ja kehäpisteen avulla
 - kaksi erikokoista ympyrää, joilla on sama keskipiste



- sektori kolmen pisteen avulla
- kaksi sisäkkäistä sektoria, joilla sama keskuskulma
- sektorin kaari kolmen pisteen avulla.



- Varmista, että osaat piirtää ympyrälle tangenttisuoran.
- Varmista, että osaat merkitä ja piirtää mallikuvaan
 - ympyrän keskipisteen ja tarvittavat kehäpisteet
 - ympyrän säteen tai halkaisijan päätepisteet
 - sektorin kaaren päätepisteet.

ESIMERKKI 1

A

Ympyrän sisään on piirretty suurin mahdollinen neliö.

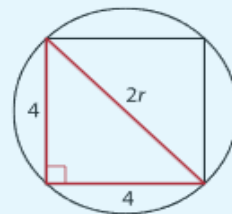
- Neliön sivun pituus on 4. Laske ympyrän pinta-ala.
- Ympyrän säteen pituus on r ($r > 0$). Määritä neliön pinta-ala ympyrän säteen r avulla lausuttuna.

RATKAISU

- Merkitään ympyrän sädettä kirjaimella r . Ympyrän halkaisija on tällöin $2r$.

Ympyrän halkaisija on sama kuin neliön lävistäjä. Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla ja ratkaistaan siitä säde r .

$$\begin{aligned}(2r)^2 &= 4^2 + 4^2 \\ 4r^2 &= 32 \quad | : 4 \\ r^2 &= 8 \\ r &= \pm\sqrt{8}\end{aligned}$$



Ympyrän säde on aina positiivinen luku, joten $r = \sqrt{8}$.

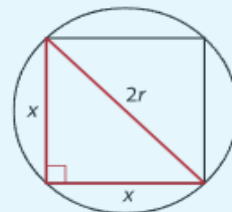
Lasketaan säteen avulla ympyrän pinta-ala.

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot (\sqrt{8})^2 = 8\pi$$

- Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella x ($x > 0$).

Ratkaistaan neliön sivun pituudelle lauseke Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}x^2 + x^2 &= (2r)^2 \\ 2x^2 &= 4r^2 \quad | : 2 \\ x^2 &= 2r^2 \\ x &= \pm\sqrt{2r^2} \\ x &= \pm r\sqrt{2}\end{aligned}$$



Neliön sivun pituudeksi kelpaa vain positiivinen luku, joten neliön sivun pituus on $r\sqrt{2}$.

Lasketaan neliön pinta-ala.

$$\text{Neliön pinta-ala: } A = x^2 = 2r^2. \quad \rightarrow \quad A = (r\sqrt{2})^2 = r^2 \cdot 2 = 2r^2$$

VASTAUS

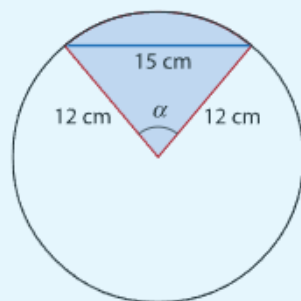
- Ympyrän pinta-ala on 8π .
- Neliön pinta-ala on $2r^2$.

Ympyrän säde on 12 cm. Ympyrän sisälle piirretään jänne, jonka pituus on 15 cm.

- a) Jänteen päätepisteisiin piirretyt säteet rajaavat ympyrästä kaksi sektoria. Laske pienemmän sektorin pinta-ala.
b) Laske jänteen rajoittaman pienemmän segmentin pinta-ala.

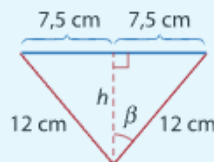
RATKAISU

- a) Piirretään mallikuva. Sektorin pinta-alan laskemiseen tarvitaan sektorin keskuskulma. Merkitään keskuskulmaa kirjaimella α .



Ympyrän sisälle muodostuu tasakylkinen kolmio. Merkitään tasakylkisen kolmion korkeusjanaa kirjaimella h .

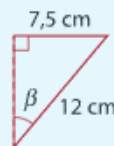
- Korkeusjana jakaa kulman α kahteen yhtä suureen osaan eli $\alpha = 2\beta$.
- Korkeusjana puolittaa kantasivun (eli jänteen).



Ratkaistaan kulma β suorakulmaisesta kolmiosta sinin avulla.

$$\sin \beta = \frac{7,5}{12}$$

$$\beta = 38,68\dots^\circ$$

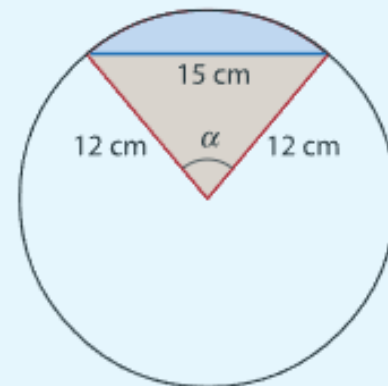


Tällöin $\alpha = 2 \cdot 38,68\dots^\circ = 77,36\dots^\circ$.

Lasketaan sektorin pinta-ala.

$$A_{\text{sektori}} = \frac{77,36\dots^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 12^2 = 97,218\dots \approx 97 \text{ (cm}^2\text{)}$$

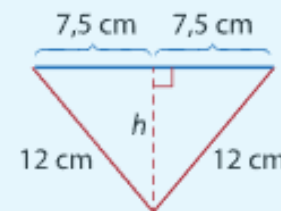
- b) Pienemmän segmentin pinta-ala saadaan vähentämällä sektorin alasta tasakylkisen kolmion pinta-ala.



Lasketaan ensin kolmion korkeus Pythagoraan lauseen avulla.

$$h^2 + 7,5^2 = 12^2$$

$$h = \pm 9,367\dots$$



Koska korkeus on aina positiivinen, $h = 9,367\dots$ cm.

Lasketaan kolmion pinta-ala.

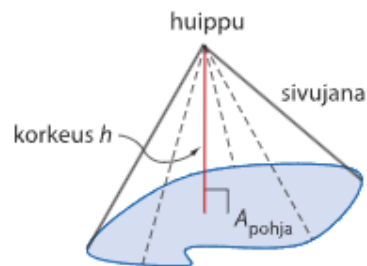
$$A_{\text{kolmio}} = \frac{15 \cdot 9,367\dots}{2} = 70,256\dots$$

Lasketaan segmentin pinta-ala.

$$A_{\text{segmentti}} = A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}} = 97,218\dots - 70,256\dots \approx 27 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Kartio

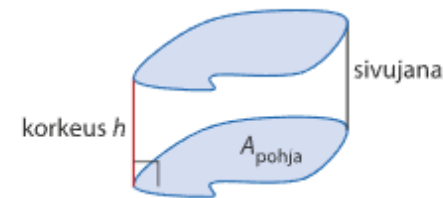
- Kartio** on avaruuskappale, joka koostuu yhdestä **pohjasta** ja vaipasta.



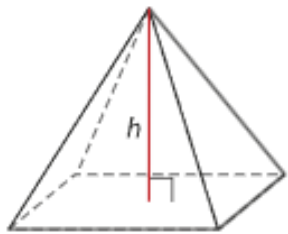
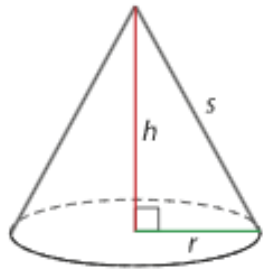
- Kartion **vaippa** syntyy, kun kartion huipusta pohjan reunaviivaan piirretty sivujana kiertää pohjan ympäri.
- Kartion **korkeus** on huipusta pohjaa vastaan piirretyn kohtisuoran janan pituus.
- Suoralla kartiolla** korkeusjanan toinen päätepiste on pohjan keskipiste.
- Kartion tilavuus: $V = \frac{A_{\text{pohja}} \cdot h}{3}$

Lieriö

- Lieriö** on avaruuskappale, jota rajoittaa
 - kaksi **pohjaa**, jotka ovat keskenään yhdensuuntaisia, samanmuotoisia ja samankokoisia tasokuviota
 - vaippa**, joka muodostuu, kun pohjia yhdistävä **sivujana** kiertää pohjan reunaviivan ympäri.
- Lieriön **korkeus** on pohjien välinen kohtisuora etäisyys.
- Suoralla lieriöllä** sivujana on kohtisuorassa pohjia vastaan. Tällöin lieriön sivujanen pituus on sama kuin lieriön korkeus.
- Lieriön vaipan ala: $A_{\text{vaippa}} = p_{\text{pohja}} \cdot h$
- Lieriön tilavuus: $V = A_{\text{pohja}} \cdot h$

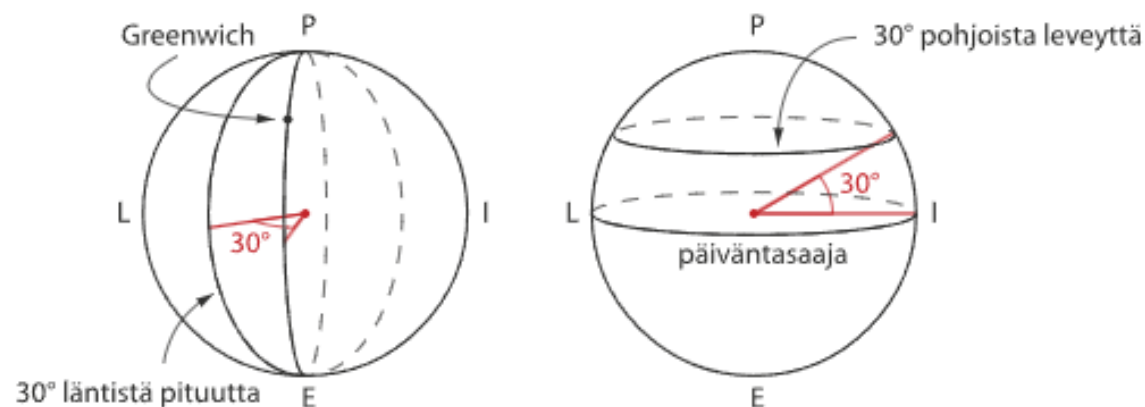


Lieriö	Ominaisuuksia	
Suorakulmainen särmiö 	- Pohja on suorakulmio. - Särmiön vaippa ja pohjat muodostuvat tahkoista. - Tahkoja erottavat särmät. - Avaruuslävistäjä kulkee särmiön vastakkaisesta kärjestä toiseen.	- Vaipan ala: $A_{\text{vaippa}} = 2ac + 2bc = (2a + 2b)c$ - Tilavuus: $V = abc$ - Avaruuslävistäjän pituus: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Kuutio 	- Kaikki särmät ovat yhtä pitkiä. - Kaikki tahkot ovat neliöitä.	- Vaipan ala: $A_{\text{vaippa}} = 4a^2$ - Tilavuus: $V = a^3$ - Avaruuslävistäjän pituus: $d = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$
Ympyrälieriö 	Pohja on ympyrä.	- Vaipan ala: $A_{\text{vaippa}} = 2\pi rh$ - Tilavuus: $V = \pi r^2 h$

Lieriö	Ominaisuuksia	
Pyramidi 	- Pohja on monikulmio. - Kartion vaippa muodostuu kolmioista, joiden määrä ja muoto riippuvat kartion pohjan muodosta.	- Vaipan ala saadaan sivutahkoina olevien kolmioiden pinta-alojen avulla. - Pyramidin tilavuus: $V = \frac{A_{\text{pohja}} \cdot h}{3}$
Ympyräkartio 	- Pohja on ympyrä. - Kartion vaippa on ympyrän sektorin muotoinen.	- Vaipan ala: $A_{\text{vaippa}} = \pi r s$ - Tilavuus: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Pallo

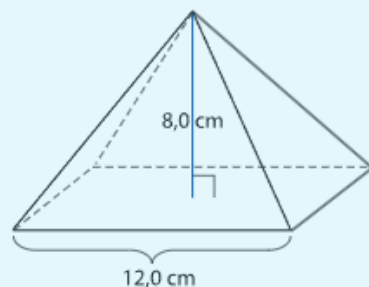
- Pallopinta** muodostuu niistä kolmiulotteisen avaruuden pisteistä, joiden etäisyys kiinteästä pisteestä on vakio.
 - Kiinteää pistettä kutsutaan pallon **keskipisteeksi**.
 - Pallopinnan pisteiden etäisyyttä keskipisteestä kutsutaan **säteeksi** r .
- Pallon pinta-ala: $A = 4\pi r^2$
- Pallon tilavuus: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- Maapallo voidaan ajatella jaettavaksi **pituuspiireihin** eli **meridiaaneihin**, jotka ovat isoympyröiden puolikkaita, joiden päätepisteinä ovat etelä- ja pohjoisnapa.



- Päiväntasaaja on pisin **leveyspiiri**. Sen pituus on maapallon kehän pituus. Muut leveyspiirit ovat saman tason suuntaisia kuin päiväntasaaja, mutta niiden kehä on lyhyempi.

ESIMERKKI 1 A

Neliöpohjaisen pyramidin pohjasivun pituus on 12,0 cm ja korkeus 8,0 cm. Laske pyramidin vaipan ala.


RATKAISU

Vaippa koostuu neljästä keskenään samanlaisesta kolmiosta.

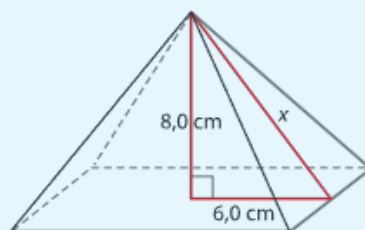
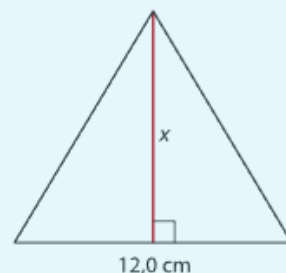
Kolmioiden kanta on 12,0 cm ja korkeus x saadaan ratkaistua Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 8^2 + 6^2$$

$$x^2 = 64 + 36$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \pm 10$$



Koska sivun pituus on aina positiivinen, niin $x = 10,0$ (cm).

Yhden sivutahkon pinta-ala on

$$A_{\text{kolmio}} = \frac{12,0 \text{ cm} \cdot 10,0 \text{ cm}}{2} = 60,0 \text{ cm}^2$$

Pyramidin vaipan ala on siis

$$A_{\text{vaippa}} = 4 \cdot A_{\text{kolmio}} = 4 \cdot 60,0 \text{ cm}^2 = 240 \text{ cm}^2.$$

VASTAUS

240 cm²

ESIMERKKI 2 B

Puusta valmistetun askartelupallon tilavuus on 14,5 cm³.

a) Laske pallon pinta-ala.

b) Laske pallon massa, kun puun tiheys on 0,50 g/cm³.

RATKAISU

a) Pallon pinta-alan laskemiseksi tarvitaan pallon säde.

Pallon tilavuus on 14,5 cm³. Muodostetaan pallon tilavuuden kaavan avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä säde.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 14,5$$

$$r = 1,5127... \text{ (cm)}$$

Ratkaise yhtälöstä laskinohjelmiston avulla r .

Lasketaan pallon pinta-ala.

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (1,5127... \text{ cm})^2 = 28,756... \text{ cm}^2 \approx 28,8 \text{ cm}^2$$

b) Lasketaan massa tilavuuden ja tiheyden avulla.

Koska $\rho = \frac{m}{V}$, niin $m = \rho V$

$$m = 0,50 \text{ g/cm}^3 \cdot 14,5 \text{ cm}^3 = 7,25 \text{ g} \approx 7,3 \text{ g}$$

VASTAUS

a) Pallon pinta-ala on 28,8 cm².

b) Pallon massa on 7,3 g.

Binomitodennäköisyys ja -jakauma

- Kun samaa satunnaisilmiötä, esimerkiksi napanheittoa, toistetaan useita kertoja peräkkäin ja "onnistumisen" todennäköisyys on joka toistossa sama, tilannetta kutsutaan **toistokokeeksi**.
- Jos samaa satunnaisilmiötä toistetaan n kertaa ja n :stä toistosta k onnistuu, suotuisien koesarjojen määrä lasketaan **binomikertoimen** avulla.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Toistokokeeseen liittyvää todennäköisyyttä sanotaan **binomitodennäköisyydeksi**.

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

- toistojen lukumäärä n
- onnistumisten lukumäärä k
- yhdessä toistossa onnistumistodennäköisyys p
- yhdessä toistossa epäonnistumistodennäköisyys $q = 1 - p$

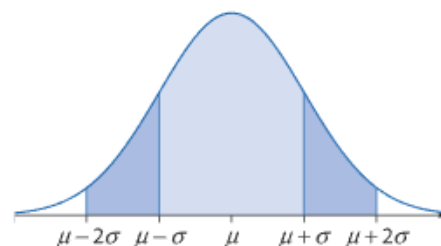
- Satunnaismuuttujan arvot ja niitä vastaavat todennäköisyydet muodostavat **todennäköisyysjakauman**.

- Jos satunnaismuuttujan X arvot ovat erillisiä lukuja, satunnaismuuttuja on **diskreetti**. Satunnaismuuttujan X binomijakauma on esimerkki diskreetistä todennäköisyysjakaumasta.

- $X \sim \text{Bin}(n, p)$
- Binomijakauman odotusarvo on $E(X) = \mu = n \cdot p$.
- Binomijakauman keskihajonta on $D(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

Normaalijakauma

- Muuttujaa, joka voi saada minkä tahansa arvon tietyllä välillä, kutsutaan **jatkuvaksi satunnaismuuttujaksi**.
- Tiheysfunktio** on satunnaismuuttujan jakaumaa kuvaava matemaattinen malli.
- Kertymäfunktion** F arvo kohdassa a ilmaisee kertymätodennäköisyyden eli $F(a) = P(X \leq a)$.
- Normaalijakauma** on yksi tärkeimmistä jatkuvista jakaumista.
- Jos satunnaismuuttuja X **noudattaa normaalijakaumaa** tai X on **normaalisti jakautunut**, niin $X \sim N(\mu, \sigma)$.
- Normaalijakauman tiheysfunktio on nimeltään **Gaussin käyrä**.



- Kuvaajan huippu on odotusarvon μ kohdalla.
- Kuvaaja on symmetrinen odotusarvon suhteen.
- Keskihajonta σ määrää kuvaajan leveyden ja vaikuttaa näin myös huipun korkeuteen.
- Normitetun normaalijakauman** odotusarvo on $\mu = 0$ ja keskihajonta $\sigma = 1$.
 - Muuttuja x normitetaan määrittämällä sen **normitettu arvo** z .

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$
 - Normitettujen arvojen avulla voidaan vertailla jakaumia, joiden keskiarvot ja keskihajonnat poikkeavat toisistaan.
- Laskimella voidaan ratkaista normaalijakaumaan liittyviä arvoja silloin, kun jakauman odotusarvo μ ja keskihajonta σ tunnetaan. Jos μ tai σ on tuntematon, on siirryttävä normitettuun jakaumaan $N(0, 1)$.

Luottamusvälit

- Tilastollisessa tutkimuksessa ei usein ole mahdollista tai kannattavaa tutkia koko perusjoukkoa. Tällöin perusjoukosta valitaan **otos**.
- Otoksen perusteella laskettu tunnusluku antaa arvion eli **estimoi** tunnusluvun arvoa koko perusjoukossa.

- Keskiarvon keskivirhe** kuvaa otoskeskiarvoissa esiintyvää hajontaa.

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- σ on perusjoukon hajonta
- n on otoskoko
- Luottamustaso** ilmaisee virhearviointiin liittyvän todennäköisyyden.
 - Mitä suurempaa luottamustasoa käytetään, sitä pienempi on virheen todennäköisyys.
- Luottamustasoon liittyvä **kriittinen arvo** z^* kasvaa, kun luottamustasoa kasvatetaan.

Riskitaso	Luottamustaso	Kriittinen arvo z^*
0,05	95 %	1,96
0,01	99 %	2,58
0,001	99,9 %	3,29

- Luottamusväli** kuvaa väliä, jolle perusjoukon tuntemattoman odotusarvon arvo sijoittuu tietyllä varmuudella.

$$\bar{x} \pm z^* \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- $\bar{x}$ on otoskeskiarvo
- z^* on kriittinen arvo
- σ on perusjoukon keskihajonta
- n on otoskoko

- Luottamusvälin leveyttä kutsutaan **virhemarginaaliksi**.

$$z^* \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Kun otoksen perusteella arvioidaan jonkin asian osuutta tai kannatusta perusjoukossa, lähtökohtana on otoksesta laskettu prosenttiosuus.

Teknisen apuvälineen käyttö kokeen B-osissa

- Varmista, että osaat määrittää binomitodennäköisyydet laskinohjelmistojen avulla.
 - Laskinohjelmistossa pistetodennäköisyydet määritetään jakaumatoiminnolla syöttämällä jakauman tunnusluvut n ja p sekä onnistumisten lukumäärä x .
 - Kertyमतodennäköisyydet (eli kertymät) määritetään jakaumatoiminnolla syöttämällä jakauman tunnusluvut n ja p sekä muuttujan arvon ala- ja yläraja.
- Varmista, että osaat piirtää jakaumien kuvaajia.
 - Laskinohjelmistolla binomijakauman kertymäkuvaaja piirretään kuvaajat-sovelluksella syöttämällä funktion lausekkeeksi $\text{binomCdf}(n, p, x)$.
 - Normaalijakauman kuvaaja piirretään laskinohjelmistossa yleensä tiheysfunktion avulla muodossa $\text{normPdf}(x, \mu, \sigma)$, jossa x on muuttujakirjain ja μ ja σ ovat jakauman tunnusluvut. Kuvaaja voidaan zoomata esimerkiksi sovita-toiminnolla.
- Varmista, että osaat laskea normaalijakaumaan liittyvät todennäköisyydet ja tunnusluvut.
 - Laskinohjelmistossa todennäköisyydet määritetään jakauma-toiminnolla kertymäfunktion avulla. Jakauma-toimintoon syötetään muuttujan arvon ala- ja yläraja sekä jakauman tunnusluvut μ ja σ .
 - Useimmat laskinohjelmistot ratkaisevat kertyमतodennäköisyyksiin liittyviä tilanteita käänteisellä normaalijakaumatoiminnolla. Käänteiseen normaalijakaumatoimintoon syötetään kertyमतodennäköisyys eli pinta-ala sekä jakauman tunnusluvut μ ja σ .

Erään tutkimuksen mukaan 60 % ihmisistä käyttää jonkinlaisia silmälaseja ja vain 40 % selviää ilman silmälaseja kaikissa tilanteissa. Toimistossa työskentelee 34 henkilöä. Millä todennäköisyydellä tässä joukossa on

- a) täsmälleen 20 silmälaseja käyttävää henkilöä
- b) ainakin 25 silmälaseja käyttävää henkilöä
- c) 20–30 silmälaseja käyttävää henkilöä?

Anna vastaukset kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

RATKAISU

- a) Todennäköisyys sille, että satunnaisesti valittu henkilö käyttää silmälaseja, on $60\% = 0,6$. Tämän komplementin (ei käytä silmälaseja) todennäköisyys on $40\% = 0,4$.

$$P(\text{"20 käyttää silmälaseja"}) = \binom{34}{20} \cdot 0,6^{20} \cdot 0,4^{14} = 0,1366... \approx 0,137$$

- b) Tapahtuman "ainakin 25 käyttää silmälaseja" todennäköisyys voidaan laskea laskinohjelmiston jakaumatoiminnon avulla.

$$\begin{aligned} P(\text{"ainakin 25 käyttää silmälaseja"}) &= \text{binomCdf}(34, 0,6, 25, 34) \\ &= 0,073163... \\ &\approx 0,0732 \end{aligned}$$

Laskinohjelmiston binomijakaumatoimintoon syötetään:
 $n = 34$, $p = 0,6$.

Alarajaksi merkitään 25 ja ylärajaksi 34.

- c) Määritetään todennäköisyys laskinohjelmiston binomijakaumatoiminnon avulla.

$$\begin{aligned} P(\text{"20–30 käyttää silmälaseja"}) &= \text{binomCdf}(34, 0,6, 20, 30) \\ &= 0,6273... \\ &\approx 0,627 \end{aligned}$$

Alarajaksi merkitään 20 ja ylärajaksi 30.

Perhoskoira on pieni belgialais-ranskalainen koirarotu. Perhoskoiran keskimääräinen säkäkorkeus on 28 cm ja korkeuden keskihajonta erään arvion mukaan on 4,0 cm. Oletetaan, että perhoskoiran säkäkorkeus noudattaa normaalijakaumaa.

- a) Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valitun perhoskoiran säkäkorkeus on alle 26 cm?
- b) Kuinka monta prosenttia perhoskoirista on säkäkorkeudeltaan 25–30 cm?
- c) Suomessa on noin 3000 perhoskoiraa. Kuinka monella suomalaisella perhoskoiralla on säkäkorkeus yli 32 cm?

RATKAISU

- a) Määritetään todennäköisyys laskinohjelmiston jakaumatoiminnolla kertymäfunktiota käyttäen.

$$\begin{aligned} P(\text{"säkäkorkeus alle 26 cm"}) &= \text{normCdf}(-\infty, 26, 28, 4) \\ &= 0,3085... \approx 0,309 \end{aligned}$$

Laskinohjelmiston normaalijakaumatoimintoon syötetään:

$$\mu = 28, \sigma = 4,0$$

Merkitään alarajaksi $-\infty$ ja ylärajaksi 26.

Merkitään alarajaksi 25 ja ylärajaksi 30.

- b) $P(\text{"säkäkorkeus 25–30 cm"}) = \text{normCdf}(25, 30, 28, 4)$
 $= 0,4648...$
 $\approx 46,5\%$

- c) Lasketaan ensin sellaisten koirien osuus, joiden säkäkorkeus on yli 32 cm.

$$P(\text{"säkäkorkeus yli 32 cm"}) = \text{normCdf}(32, \infty, 28, 4) = 0,1586...$$

Merkitään alarajaksi 32 ja ylärajaksi ∞ .

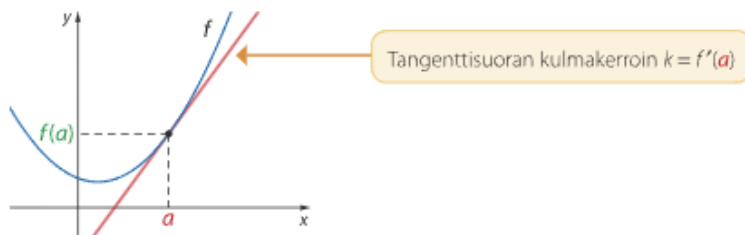
Suomessa on perhoskoiria, joiden säkäkorkeus on yli 32 cm,

$$0,1586... \cdot 3000 = 475,96... \approx 476 \text{ kappaletta.}$$



Derivaatta

- Tangenttisuoran avulla voidaan kuvata funktion hetkellistä **muutosnopeutta** kohdassa $x = a$.



- Funktion derivaatta** kohdassa $x = a$ kertoo funktion kuvaajalle kohtaan $x = a$ piirretyn **tangenttisuoran kulmakertoimen**.

- Kohtaan $x = a$ piirretyn **tangenttisuoran** yhtälö on muotoa

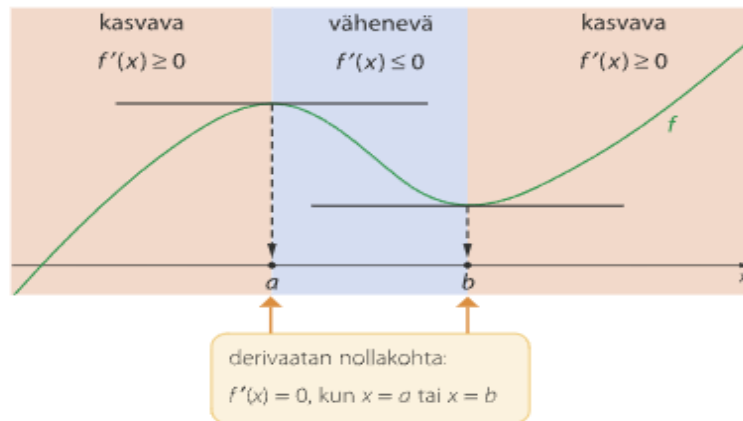
$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \text{eli} \quad y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

- Funktion derivaatta lasketaan derivointisääntöjen ja -kaavojen avulla.

Potenssin derivaatta	$Dx^n = nx^{n-1}$ Huom! $Dx = 1$
Vakion derivaatta	$Dc = 0$, c on vakio
Vakion siirtosääntö	$D(cf) = cDf$
Summan derivaatta	$D(f + g) = Df + Dg$

Funktion kulku

- Funktion kulkua tarkastellaan **derivaatan merkin** avulla.

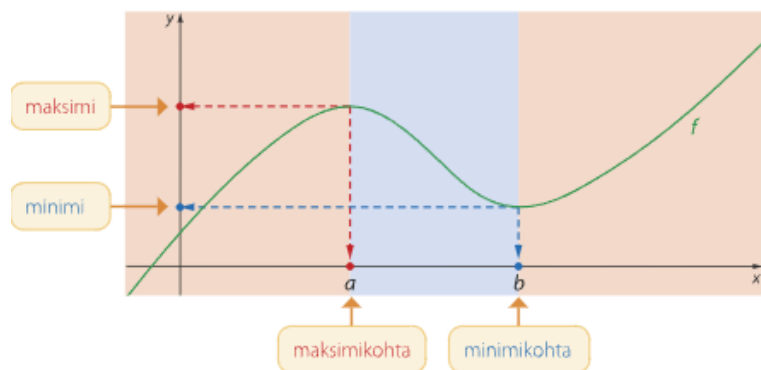


- Funktio on **kasvava**, kun
 - muuttujan arvon kasvaessa funktion arvot kasvavat tai pysyvät samana
 - funktion kuvaajalle piirretyt tangenttisuorat ovat nousevia
 - funktion derivaatta $f'(x) \geq 0$.
- Funktio on **vähenevä**, kun
 - muuttujan arvon kasvaessa funktion arvot pienenevät tai pysyvät samana
 - funktion kuvaajalle piirretyt tangenttisuorat ovat laskevia
 - funktion derivaatta $f'(x) \leq 0$.
- Derivaatan nollakohdassa**
 - $f'(x) = 0$
 - funktion kuvaajalle piirretty tangenttisuora on vaakasuora
 - jatkuva funktio voi vaihtaa kulkusuuntaansa.
- Derivaatan merkkiä ja funktion kulkua kuvataan usein **merkki-** ja **kulkukaavion** avulla.



Ääriarvot ja ääriarvokohtat

- Sitä muuttujan x arvoa, jossa funktio $f(x)$ saa paikallisesti pienimmän tai suurimman arvonsa, kutsutaan funktion **ääriarvokohdaksi**.
 - Jos funktio saa kohdassa paikallisesti pienimmän arvonsa, ääriarvokohta on **minimikohta**.
 - Jos funktio saa kohdassa paikallisesti suurimman arvonsa, ääriarvokohta on **maksimikohta**.



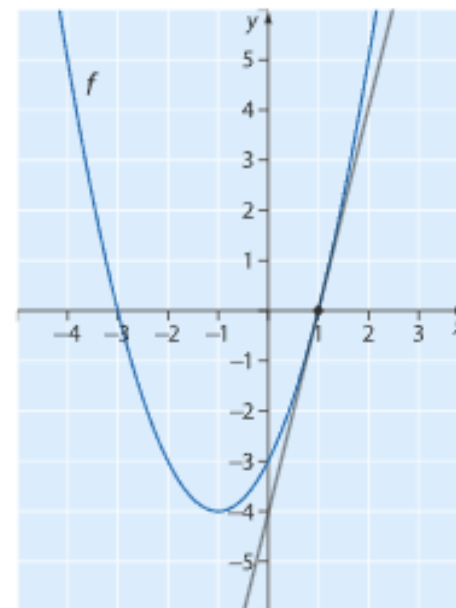
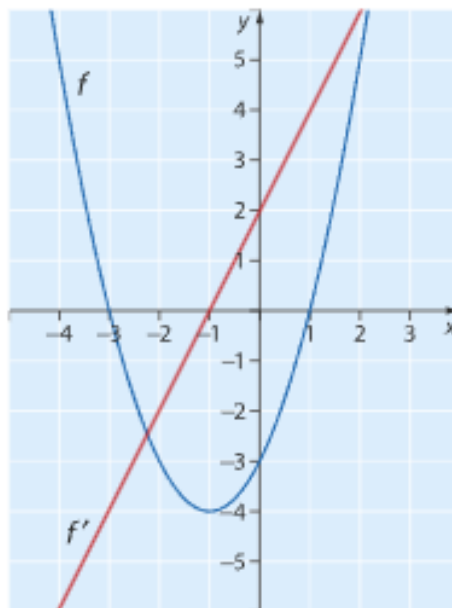
- Mahdolliset ääriarvokohtat löytyvät yleensä derivaatan nollakohdista.
- Funktion arvoja ääriarvokohdissa kutsutaan **ääriarvoiksi**.
 - Minimikohdassa ääriarvo on **minimi**.
 - Maksimikohdassa ääriarvo on **maksimi**.
- Ääriarvokohtat sekä ääriarvojen luonne (maksimi, minimi) perustellaan merkki- ja kulkukaavion avulla.

	a		b	
f'	+		-	+
f	↗		↘	↗
	max		min	

- Suljetulla välillä jatkuvalle funktiolle on olemassa **suurin** ja **pienin arvo**. Suurin ja pienin arvo löytyy
 - derivaatan nollakohdasta tai
 - välin päätepisteistä.

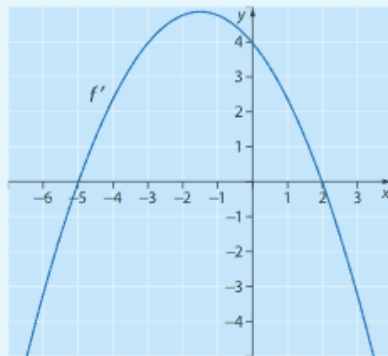
Teknisen apuvälineen käyttö kokeen B-osissa

- Varmista että osaat määrittää laskinohjelmiston avulla funktion derivaatan.
- Varmista, että osaat laskea derivaatan arvoja ja muodostaa derivaattafunktion avulla yhtälöitä.
- Varmista, että osaat tehdä jonkun ohjelmiston avulla merkki- ja kulkukaavioita.
- Varmista, että osaat piirtää funktion ja sen derivaattafunktion kuvaajan samaan koordinaatistoon.
- Varmista, että osaat piirtää funktion ja funktion kuvaajalle piirretyn tangentsuoran samaan koordinaatistoon.



Koordinaatistoon on piirretty funktion f derivaatan kuvaaja f' .

- Määritä derivaatan kuvaajan avulla $f'(-6)$. Onko funktio f kasvava vai vähenevä kohdassa $x = -6$?
- Määritä derivaatan kuvaajan avulla funktion f ääriarvokohdat.
- Määritä derivaatan kuvaajan avulla, millä muuttujan x arvoilla funktio f on vähenevä.

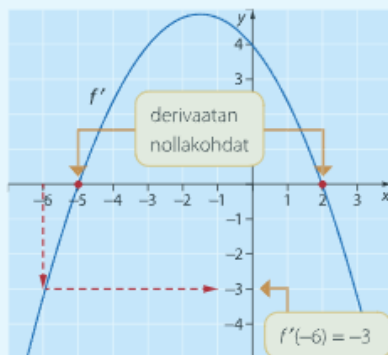


RATKAISU

- Kun $x = -6$, derivaatan kuvaajan perusteella $f'(-6) = -3$.

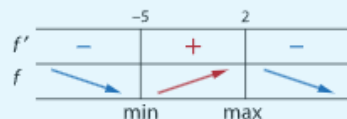
Koska derivaatan arvo on negatiivinen kohdassa $x = -6$, funktio f on tällöin vähenevä.

- Funktion mahdolliset ääriarvokohdat löytyvät derivaatan nollakohdista.



Derivaatan nollakohdissa derivaatan kuvaaja leikkaa x -akselin, joten $f'(x) = 0$, kun $x = -5$ tai $x = 2$.

Piirretään derivaatan kuvaajan avulla derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio ääriarvojen luonteen selvittämiseksi.



Funktion minimikohta on $x = -5$ ja maksimikohta $x = 2$.

- Funktio on vähenevä, kun $f'(x) \leq 0$ eli kun $x \leq -5$ tai $x \geq 2$.

VASTAUS

- $f'(-6) = -3$, funktio on vähenevä.
- Minimikohta on $x = -5$ ja maksimikohta $x = 2$.
- Funktio f on vähenevä, kun $x \leq -5$ tai $x \geq 2$.

Suorakulmion muotoisen järvenrantatontin rantaviivan ja sitä vastaan kohtisuorassa olevan sivun pituus on yhteensä 100 metriä.

- Laske tontin mitat, kun sen pinta-ala on mahdollisimman suuri?
- Kuinka paljon tontti maksaa, kun sen neliöhinta on 45 €/m²?

RATKAISU

Merkitään rantaviivan pituutta kirjaimella x ja rantaviivaa vastaan kohtisuorassa olevan sivun pituutta kirjaimella y .

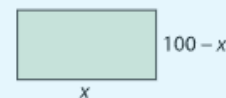


Sivujen yhteispituus on 100 m, joten

$$\begin{aligned}x + y &= 100 \\y &= 100 - x\end{aligned}$$

Alueen pinta-alaa kuvaa funktio

$$\begin{aligned}A(x) &= xy \\&= x(100 - x) \\&= 100x - x^2\end{aligned}$$



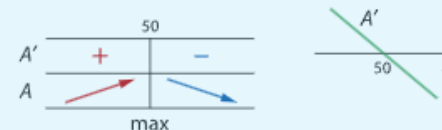
Pinta-alafunktion derivaatta:

$$A'(x) = 100 - 2x$$

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$\begin{aligned}A'(x) &= 0 \\100 - 2x &= 0 \\x &= 50\end{aligned}$$

Muodostetaan merkki ja kulkukaavio.



Pinta-ala on suurin, kun $x = 50$ (m).

Tontin toisen sivun pituus on tällöin $y = 100 - 50 = 50$ (m).

- Tontin pinta-ala, kun $x = 50$ (m) on $A(50) = 100 \cdot 50 - 50^2 = 2500$ m².

Tontin hinta on tällöin 45 €/m² · 2500 m² = 112 500 €.

VASTAUS

- Tontin mitat ovat 50 m × 50 m.
- Tontin hinta on 112 500 €.

Tarkastellaan funktiota $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$.

- Määritä funktion ääriarvokohta sekä ääriarvo.
- Määritä funktion suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 4]$.
- Määritä kohtaan $x = 1$ piirretyn tangenttisuoran yhtälö. Piirrä funktion kuvaaja ja tangenttisuora samaan koordinaatistoon.

RATKAISU

- Määritetään funktion $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$ derivaattafunktio.

$$f'(x) = 4x - 5$$

Laskinohjelmistoista löytyy valmis toiminto funktion derivoimiseksi.

Lasketaan derivaatan nollakohta.

$$f'(x) = 0$$

$$4x - 5 = 0$$

$$x = \frac{5}{4}$$

- Funktio on kasvava, kun $f'(x) \geq 0$.
- Funktio on vähenevä, kun $f'(x) \leq 0$.

Ääriarvokohtia varten tarvitaan derivaatan merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.

Derivaatan merkki voidaan selvittää kahdella eri tavalla.

Tapa 1
Testipisteiden avulla

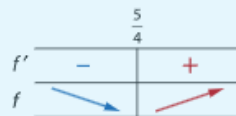
Testipiste $x = 0$

$f'(0) = 4 \cdot 0 - 5 = -5 < 0$
eli derivaatan merkki $-$

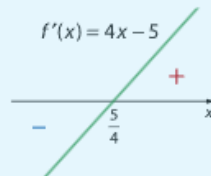
Testipiste $x = 2$

$f'(2) = 4 \cdot 2 - 5 = 3 > 0$
eli derivaatan merkki $+$

Näiden perusteella voidaan laatia derivaatalle merkkikaavio ja funktion kulkukaavio.



Tapa 2
Derivaatan kuvaajan avulla



Funktion $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$ ainoa ääriarvokohta on $x = \frac{5}{4}$.

Kulkukaavion perusteella se on minimikohta.

Vastaava ääriarvo eli minimi: $f\left(\frac{5}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{4} - 3 = -\frac{49}{8}$.

Tallenna funktion $f(x)$ lauseke laskinohjelmiston muistiin. Tällöin funktion arvon voi laskea merkinällä $f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{49}{8}$.

- Derivaatan nollakohta sijaitsee tarkasteltavalla välillä $[-1, 4]$.

Lasketaan funktion arvot välin päätepisteissä sekä derivaatan nollakohdassa.

- $f\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{49}{8}$
- $f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 3 = 4$
- $f(4) = 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 - 3 = 9$

Jatkuva funktio saa suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa joko välin päätepisteissä tai derivaatan nollakohdissa.

Suurin arvo välillä $[-1, 4]$ on 9 ja pienin $-\frac{49}{8}$.

- Tangenttisuoran yhtälön määrittämiseksi tarvitaan:

- kohta, johon tangenttisuora piirretään: $x = 1$
- tangenttisuoran ja funktion kuvaajan sivuamispisteen y -koordinaatti: $f(1) = -6$.
- tangenttisuoran kulmakerroin: $k = f'(1) = -1$.

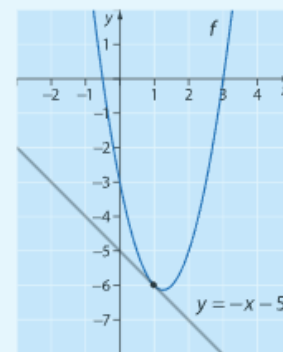
Määritetään tangenttisuoran yhtälö.

Tangenttisuoran yhtälö:
 $y - y_0 = k(x - x_0)$
eli
 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$y - (-6) = -1(x - 1)$$

$$y = -x - 5$$

Piirretään funktion $f(x)$ kuvaaja ja tangenttisuora samaan koordinaatistoon.



VASTAUS

- Funktion minimikohta on $x = \frac{5}{4}$ ja minimiarvo $-\frac{49}{8}$.
- Suurin arvo on 9 ja pienin arvo $-\frac{49}{8}$.
- Tangenttisuoran yhtälö on $y = -x - 5$.